Recherche d'un mot

Recherche d'un mot

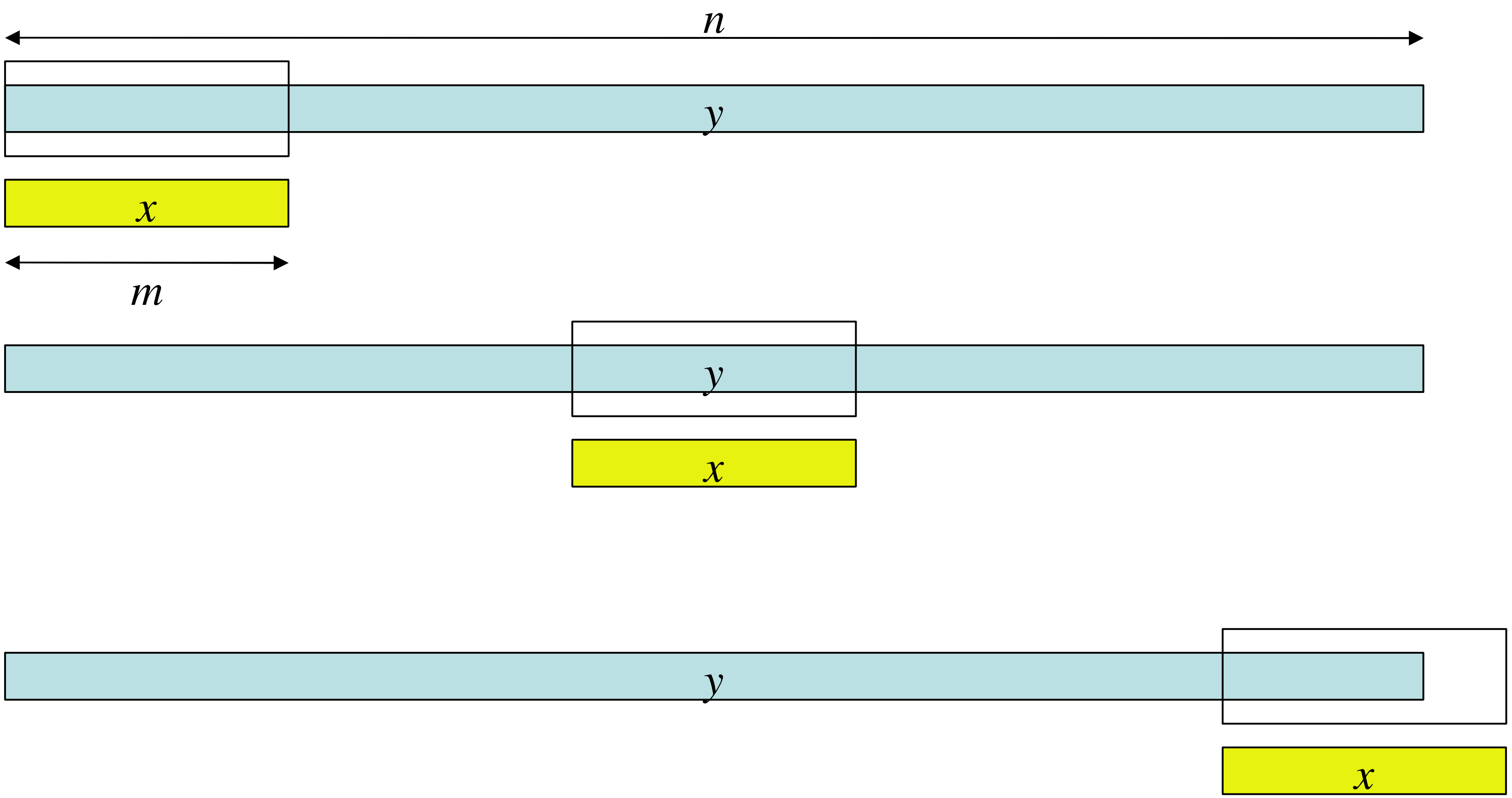
Le problème de la recherche d'un mot x de longueur m dans un texte y de longueur n consiste à signaler toutes les occurrences de x dans y.

Recherche d'un mot

Ce problème admet deux variantes :

- le mot x est connu à l'avance et peut subir un prétraitement. En général, les solutions à cette variante ont une phase de prétraitement en $O(m)$ et une phase de recherche en $O(n)$.
- le mot y est connu à l'avance et peut subir un prétraitement. En général, les solutions à cette variante ont une phase de prétraitement en $O(n)$ et une phase de recherche en $O(m)$.

Fenêtre glissante



Fenêtre glissante

Un algorithme de recherche exacte de mot est une succession de

- tentatives (traitements consistant à comparer le contenu de la fenêtre et le mot) ;
- décalages (de la fenêtre vers la droite).

Fenêtre glissante

Une tentative est identifiée par la position de la fenêtre :

- si la fenêtre est positionnée sur le facteur $y[j..j+m\text{-}1]$
  - la position gauche est j
  - la position droite est $j+m$-1

Fenêtre glissante

Un décalage de longueur $d \geq 1$ après une tentative à la position gauche j est dit valide si on est assuré qu'il n'y a pas d'occurrence du mot commençant aux positions $j+1$, $j+2$, …, $j+d-1$ sur y.

Algorithme naïf

Il est caractérisé par des décalages de longueur exactement 1.

algo LOCALISER-NAIVEMENT(x,m,y,n)
 pour $j \leftarrow 0$ **à** n-m **faire**
  si $x = y[j..j+m-1]$ **alors**
   signaler une occurrence de x

Algorithme naïf

Exemple

- $x = \texttt{ataatata}$
- $y = \texttt{ataataatataatataa}$

Algorithme naïf

Complexité

- temps : $O(mn)$;
- espace : $O(1)$ en plus de x et y.

Algorithme naïf

Proposition 1

Si card A > 1 et que la distribution des lettres de l'alphabet est uniforme et indépendante, le nombre moyen de comparaisons de lettres effectuées par l'algorithme LOCALISER-NAIVEMENT(x,m,y,n) est $\Theta(n\text{-}m)$.

Algorithme naïf

Preuve

Soit c = card A.

Le nombre de comparaisons pour déterminer si deux mots u et v de même longueur m sont identiques est

$$1+1/c+1/c^2+\cdots+1/c^{m-1}$$

indépendamment de la permutation sur les positions suivant laquelle les comparaisons entre les lettres sont effectuées.

Algorithme naïf

Si $c \geq 2$ cette quantité est inférieure à

$$1/(1-1/c) \leq 2.$$

Il s'ensuit que le nombre moyen de comparaisons effectuées par l'algorithme LOCALISER-NAIVEMENT(x,m,y,n) est $2(n-m+1)$ puisque cet algorithme effectue exactement $n-m+1$ tentatives.

$\square$

Recherche avec l'automate reconnaissant A^*x

L'automate reconnaissant A^*x est l'automate $D(\{x\}) = (A,Q,q_0,T,F)$ où :

- A est l'alphabet ;
- $Q = Pr\acute{e}f(x)$;
- $q_0 = \varepsilon$;
- $T = \{x\}$;
- $F = \{ (u,a,ua) \mid u \in Q, a \in A, ua \in Q, ua \preccurlyeq_{pr\acute{e}f} x \} \cup$
  $\{ (u,a,Bord(ua)) \mid u \in Q, a \in A, ua \preccurlyeq_{pr\acute{e}f} x \}$

algo ALU-COMPLET(x,m)

$q_0 \leftarrow$ NOUVEL-ETAT()

$Q \leftarrow \{q_0\}$

pour chaque lettre $b \in A$ **faire**

$F \leftarrow F \cup \{ (q_0,b,q_0) \}$

$t \leftarrow q_0$

pour $i \leftarrow 0$ **à** m-1 **faire**

$p \leftarrow$ NOUVEL-ETAT()

$Q \leftarrow Q \cup \{p\}$

$r \leftarrow$ CIBLE(t,$x[i]$)

$F \leftarrow F - \{ (t,x[i],r) \}$

$F \leftarrow F \cup \{ (t,x[i],p) \}$

pour chaque $(r,a,q) \in F$ **faire**

$F \leftarrow F \cup \{ (p,a,q) \}$

$t \leftarrow p$

$T \leftarrow \{p\}$

Recherche avec automate

algo CIBLE(q,a)

  si il existe $(q,a,p) \in F$ **alors**

    retourner p

  sinon

    retourner NIL

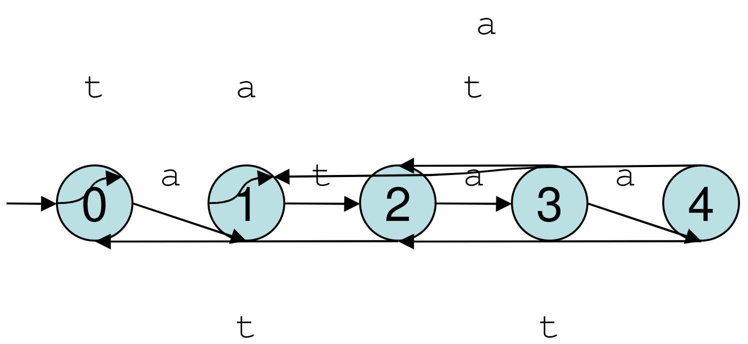
Recherche avec automate

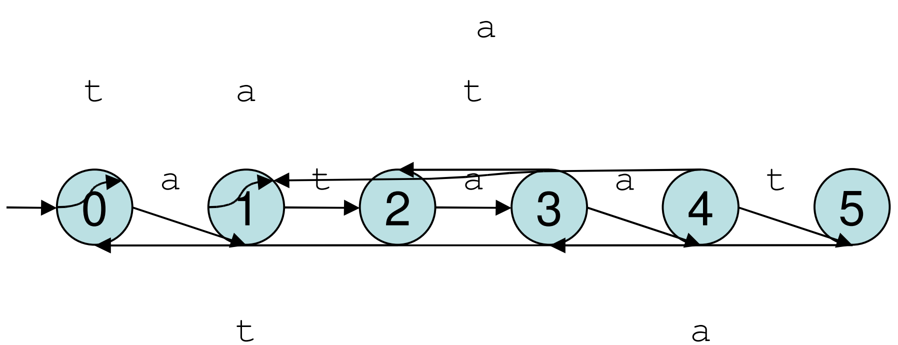
Exemple

- $x = \texttt{ataatata}$
- $y = \texttt{ataataatataatataa}$

Exemple

$D(\{\texttt{ataa}\}) \rightarrow D(\{\texttt{ataat}\})$

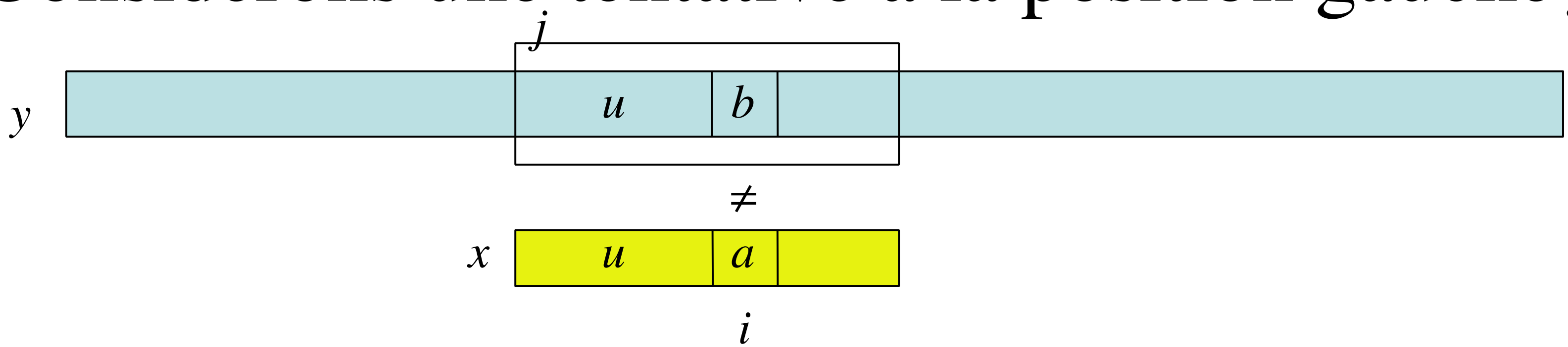




t

L'algorithme de Morris & Pratt (1970)

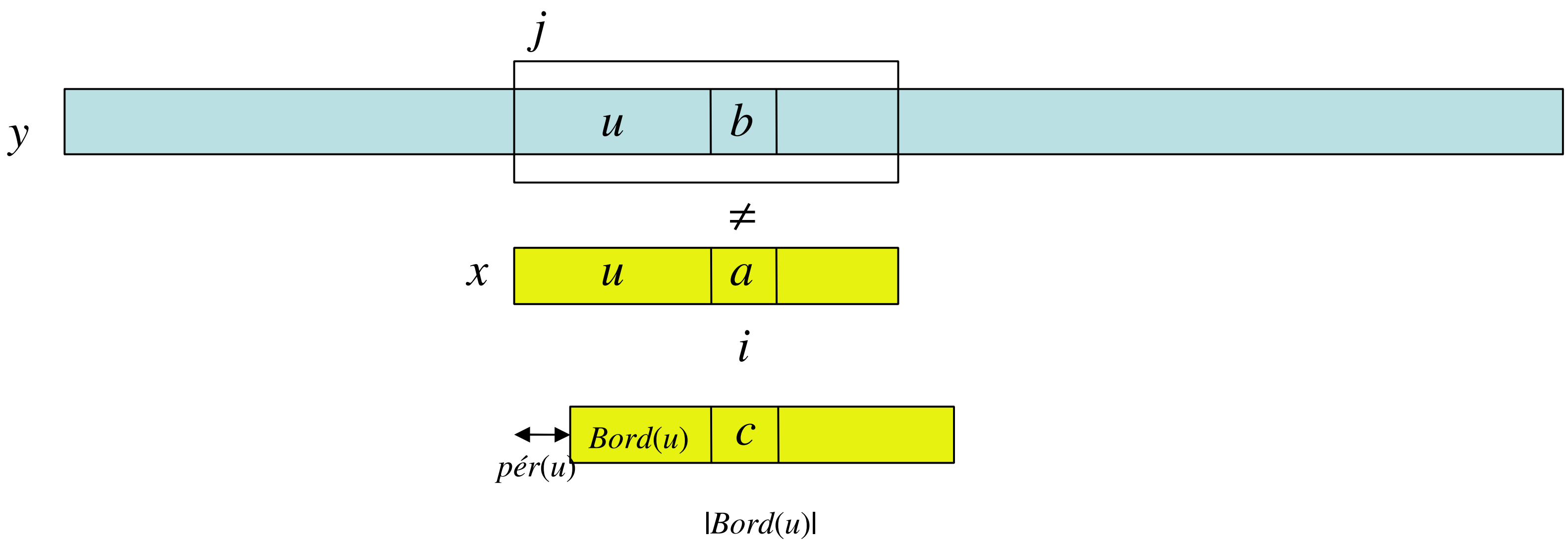
Considérons une tentative à la position gauche j :



On a reconnu un préfixe u de x dans y et on a une inégalité entre une lettre $x[i] = a$ dans le mot et une lettre $y[i+j] = b$ dans le texte.

L'algorithme de Morris & Pratt (1970)

Un décalage valide consiste à décaler la fenêtre de la période de $u = x[0..i\text{-}1]$:



et de reprendre les comparaisons entre la lettre qui suit $Bord(u)$ dans x soit $x[|Bord(u)|]$ et la lettre $y[i+j] = b$ dans y.

L'algorithme de Morris & Pratt (1970)

Soit la table *bon-préf* à m+1 éléments définie comme suit, pour $0 \leq i \leq m$

$$bon\text{-}préf[i] = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 0, \\ |Bord(x[0..i\text{-}1])| & \text{sinon.} \end{cases}$$

algo LOCALISER-SELON-PRÉFIXE1(x,m,y,n)

$i \leftarrow 0$

pour $j \leftarrow 0$ **à** n-1 **faire**

tantque $i \geq 0$ **et** $x[i] \neq y[j]$ **faire**

$i \leftarrow$ *bon-préf*$[i]$

$i \leftarrow i$+1

si $i = m$ **alors**

signaler une occurrence de x

$i \leftarrow$ *bon-préf*$[i]$

L'algorithme de Morris & Pratt (1970)

Théorème 2

L'algorithme LOCALISER-SELON-PRÉFIXE1(x,m,y,n) effectue au plus $2n$-1 comparaisons.

L'algorithme de Morris & Pratt (1970)

Preuve

Il suffit de considérer la quantité $2j$-i. Cette quantité croît d'au moins une unité après chaque comparaison :

- i et j sont incrémentés de 1 après chaque comparaison positive ;
- j reste inchangé après une comparaison négative alors que i décroît d'au moins une unité.

L'algorithme de Morris & Pratt (1970)

Valeur initiale de $2j$-i = 2 x 0 - 0 = 0.

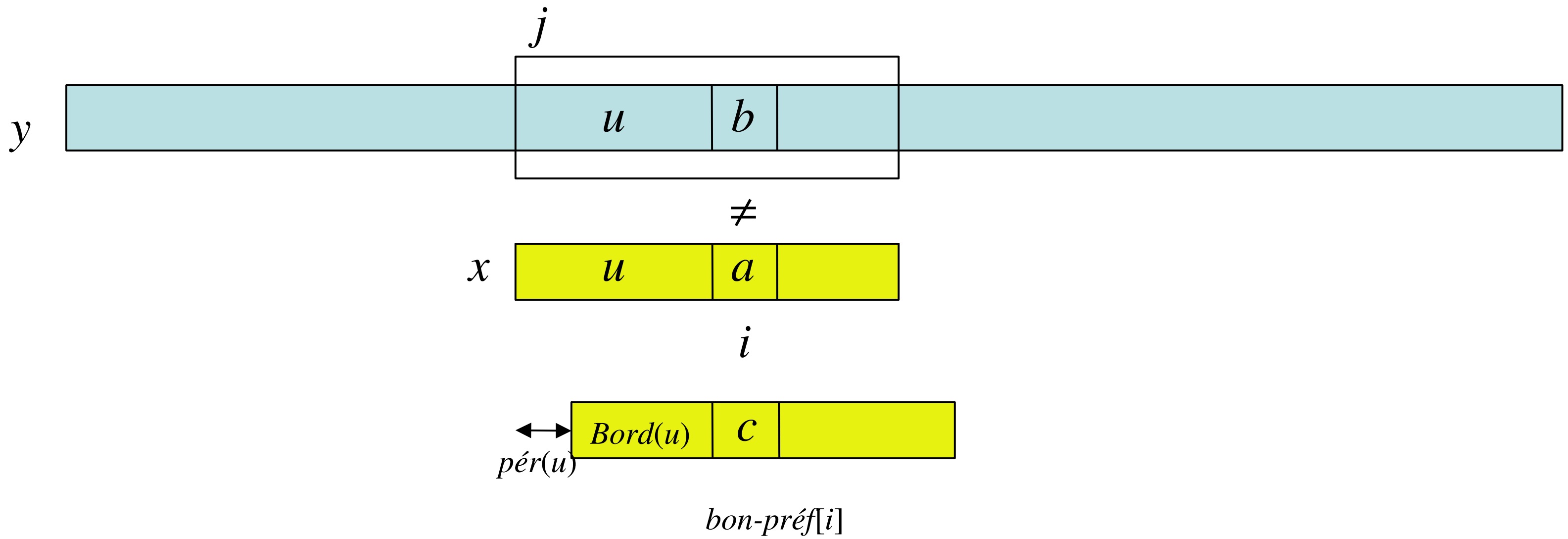
Valeur finale maximale de $2j$-i = $2(n$-1)-0 = $2n$-2.

Donc au plus $2n$-1 comparaisons sont effectuées.

□

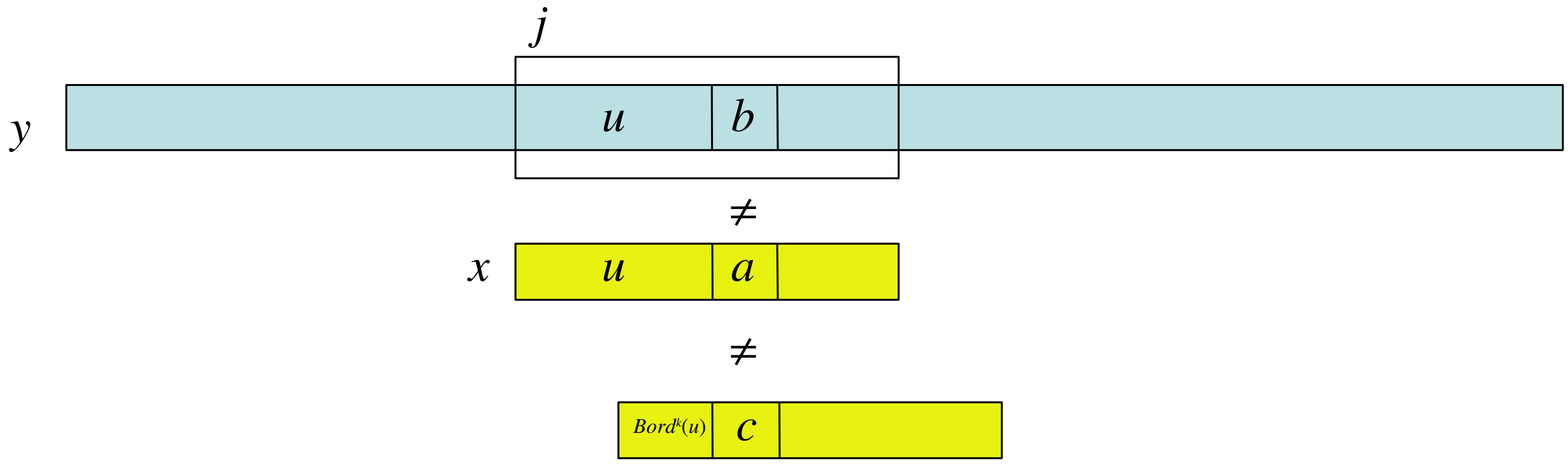
L'algorithme de Knuth, Morris & Pratt (1977)

Dans la situation générale



si $c = a$ alors le résultat de la comparaison entre $x[\mathit{bon\text{-}préf}[i]]$ et $y[i+j]$ est connu à l'avance : il est négatif et la comparaison peut être évitée.

L'algorithme de Knuth, Morris & Pratt (1977)



$$k = \min \{ \ell \mid x[|Bord^{\ell}(u)|] \neq a \}$$

L'algorithme de Knuth, Morris & Pratt (1977)

Pour cela on définit la table *meil-préf* à m éléments de la manière suivante :

$$meil\text{-}préf[i] = \begin{cases} -1 & \text{si } i = 0 \\ |Bord(x)| & \text{si } i = m \\ |Bord(x[0..i\text{-}1])| & \text{si } x[|Bord(x[0..i\text{-}1])|] \neq x[i] \\ meil\text{-}préf[|Bord(x[0..i\text{-}1])|] & \text{sinon} \end{cases}$$

algo LOCALISER-SELON-PRÉFIXE2(x,m,y,n)

$i \leftarrow 0$

pour $j \leftarrow 0$ **à** n-1 **faire**

tantque $i \geq 0$ **et** $x[i] \neq y[j]$ **faire**

$i \leftarrow$ *meil-préf*$[i]$

$i \leftarrow i+1$

si $i = m$ **alors**

signaler une occurrence de x

$i \leftarrow$ *meil-préf*$[i]$

L'algorithme de Knuth, Morris & Pratt (1977)

Théorème 3

L'algorithme LOCALISER-SELON-PRÉFIXE2(x,m,y,n) effectue au plus 2n-1 comparaisons.

Preuve

Idem théorème 2.

Calcul des tables *bon-préf* et *meil-préf*

algo BON-PRÉFIXE(x,m)
  bon-préf[0] ← -1
  $i \leftarrow 0$
  pour $j \leftarrow 1$ **à** m-1 **faire**
   bon-préf[j] ← i
   tantque $i \geq 0$ **et** $x[i] \neq x[j]$ **faire**
     $i \leftarrow$ *bon-préf*[i]
   $i \leftarrow i+1$
  bon-préf[m] ← i
  retourner *bon-préf*

Calcul des tables *bon-préf* et *meil-préf*

algo MEILLEUR-PRÉFIXE(x,m)
    meil-préf[0] ← -1
    $i \leftarrow 0$
    pour $j \leftarrow 1$ **à** m-1 **faire**
        si $x[i] = x[j]$ **alors**
            meil-préf[j] ← *meil-préf*[i]
        sinon
            meil-préf[j] ← i
            faire
                i ← *meil-préf*[i]
            tantque $i \geq 0$ **et** $x[i] \neq x[j]$
        $i \leftarrow i+1$
    meil-préf[m] ← i
    retourner *meil-préf*

Calcul des tables *bon-préf* et *meil-préf*

Théorème 4

Les algorithmes BON-PRÉFIXE(x,m) et MEILLEUR-PRÉFIXE(x,m) effectuent au plus $2m$-3 comparaisons.

Calcul des tables *bon-préf* et *meil-préf*

Preuve

Idem théorème 2.

Valeur initiale de $2j-i = 2$.

Valeur finale maximale de $2j-i = 2(m-1)-0 = 2m-2$.

Donc au plus $2m-3$ comparaisons sont effectuées.

$\square$