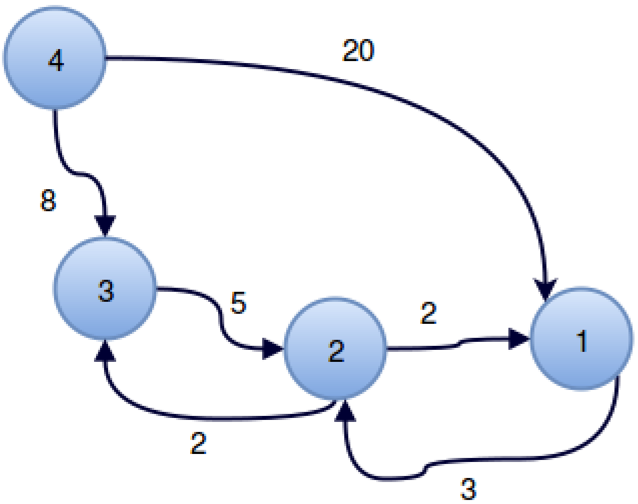
গ্রাফ থিওরিতে হাতেখড়ি ১০: ফ্লয়েড ওয়ার্শল

জুলাই ২২, ২০১৪ by শাফায়েত

ফ্লয়েড ওয়ার্শল সম্ভবত সব থেকে ছোট আকারের গ্রাফ অ্যালগোরিদম, মাত্র ৩লাইনে এটা লেখা যায়! তবে ৩ লাইনের এই অ্যালগোরিদমেই বোঝার অনেক কিছু আছে। ফ্লয়েড ওয়ার্শলের কাজ হলো গ্রাফের প্রতিটা নোড থেকে অন্য সবগুলো নোডের সংক্ষিপ্ততম দুরত্ব বের করা। এ ধরণের অ্যালগোরিদমকে বলা হয় "অল-পেয়ার শর্টেস্ট পাথ" অ্যালগোরিদম। এই লেখাটা পড়ার আগে অ্যাডজেসেন্সি ম্যাট্রিক্স সম্পর্কে জানতে হবে।

আমরা একটা গ্রাফের উপর কিছু সিমুলেশন করে সহজেই অ্যালগোরিদমটা বুঝতে পারি। নিচের ছবিটা দেখ:

top

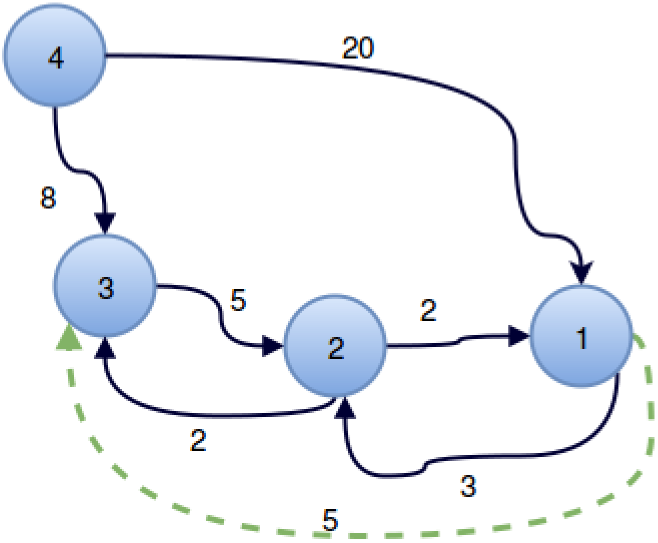


Node	1	2	3	4
1	0	3	inf	inf
2	2	0	2	inf
3	inf	5	0	inf
4	20	inf	8	0

ছবিতে চার নোডের একটা ওয়েটেড ডিরেক্টেড গ্রাফ দেখা যাচ্ছে। আর উপরে ডান কোনায় একটা ম্যাট্রিক্স। ম্যাট্রিক্সের u,v তম ঘরে বসানো হয়েছে u-v এজ এর ওয়েট বা কস্ট। যাদের মধ্যে সরাসরি এজ নেই সেসব ঘরে অসীম বা ইনফিনিটি বসিয়ে দেয়া হয়েছে। আর কোনাকুনি ঘরগুলোতে মান ০ কারণ নিজের বাসা থেকে নিজের বাসাতেই যেতে কোন দূরত্ব অতিক্রম করতে হয় না!

এখন মনে করো "২" নম্বর নোডটাকে আমরা "মাঝের নোড" হিসাবে ধরলাম। মাঝের নোডকে আমরা বলবো k। তারমানে এখন k=2। (আমরা একে একে সব নোডকেই মাঝের নোড হিসাবে ধরবো, **এটা যেকোন অর্ডারে করা যায়**)

এখন যেকোন এক জোড়া নোড (i,j) নাও। ধরি i=1, v=3। আমরা চাই **u থেকে v তে যেতে, k নোডটাকে মাঝে রেখে**। তাহলে আমাদের i থেকে k তে যেতে হবে, তারপর k থেকে থেকে j তে যেতে হবে। কিন্তু লাভ না হলে আমরা এভাবে যাব কেন? আমরা k কে মাঝে রেখে যাবো কেবল যদি মোট কস্ট(cost) কমে যায়। ১ থেকে ৩ এর বর্তমান দূরত্ব matrix[1][3]=ইনফিনিটি। আর যদি k=২ কে মাঝখানে রাখি তাহলে দূরত্ব দাড়াবে matrix[1][2] + matrix[2][3] = 3 +2 = 5। তারমানে কস্ট কমে যাচ্ছে! আমরা গ্রাফটা আপডেট করে দিতে পারি এভাবে:



Node	1	2	3	4
1	0	3	5	inf
2	2	0	2	inf
3	inf	5	0	inf
4	20	inf	8	0

আমরা ২ কে "মাঝের নোড" হিসাবে ব্যবহার করে ১ থেকে ৩ এ গিয়েছি মোট ৫ কস্ট এ। গ্রাফে তাহলে ১ থেকে ৩ এ সরাসরি একটা এজ দিয়ে দিতে পারি ৫ কস্ট এ।

এখন আবার ধর i=2, j=4। আর আগের মতই k=2। এবার matrix[2][4]=ইনফিনিটি। এদিকে matrix[2][2] + matrix[2][4] = ০ + ইনফিনিটি। এবার কিন্তু দূরত্ব কমলো না। তাই গ্রাফ আপডেট করার দরকার নেই। নিশ্চয়ই বুঝতে পারছো আপডেটের শর্তটা হবে এরকম:

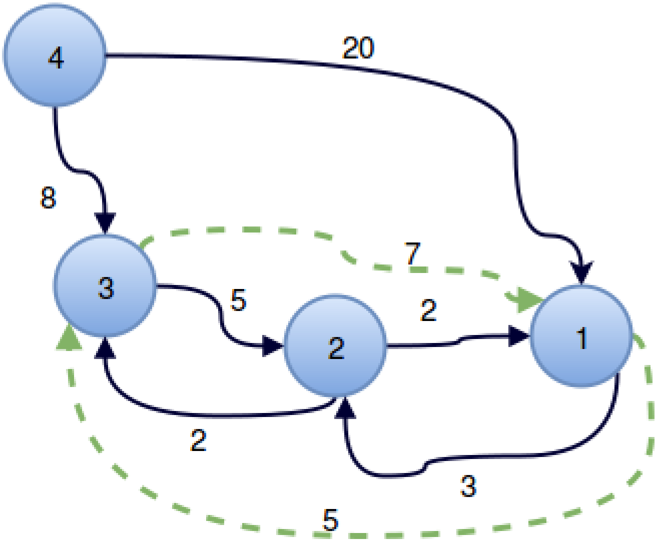
> *if(matrix[i][k] + matrix[k][j] < matrix[i][j])*
>
> *matrix[i][j] = matrix[i][k] + matrix[k][j]*

অথবা আমরা একলাইনে লিখতে পারি:

> *matrix[i][j] = min(matrix[i][j] , matrix[i][k] + matrix[k][j])*

এখন k=2 স্থির রেখে আমরা i,j এর সবরকমের কম্বিনেশন নিবো। তুমি নিজেই চিন্তা করলে দেখবে k=2 এর জন্য i=3, j=1 এই কম্বিনেশনে আমরা আরেকটা নতুন এজ পাবো, বাকি গ্রাফ আগের মতই থাকবে।

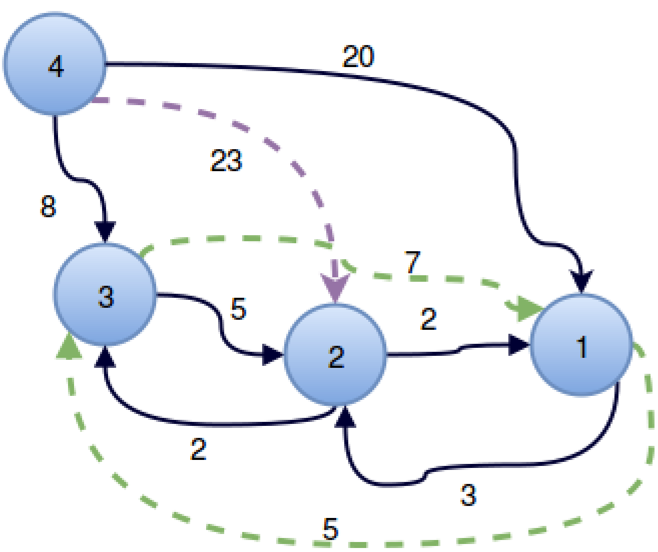
top



Node	1	2	3	4
1	0	3	5	inf
2	2	0	2	inf
3	7	5	0	inf
4	20	inf	8	0

এবার আমরা k=1 কে মাঝের নোড হিসাবে চিন্তা করি। মাথা খাটাতে চাইলে নিচে দেখার আগে নিজেই খাতায় এঁকে ফেলতে পারো নতুন এজগুলো।

এবার একটা মাত্র এজ যোগ হবে। i=4, j=2 হলে আমরা ৪ থেকে ১ হয়ে ২ নম্বর নোডে যেতে পারি ২৩ কস্ট এ। তাহলে গ্রাফটা হবে এরকম:

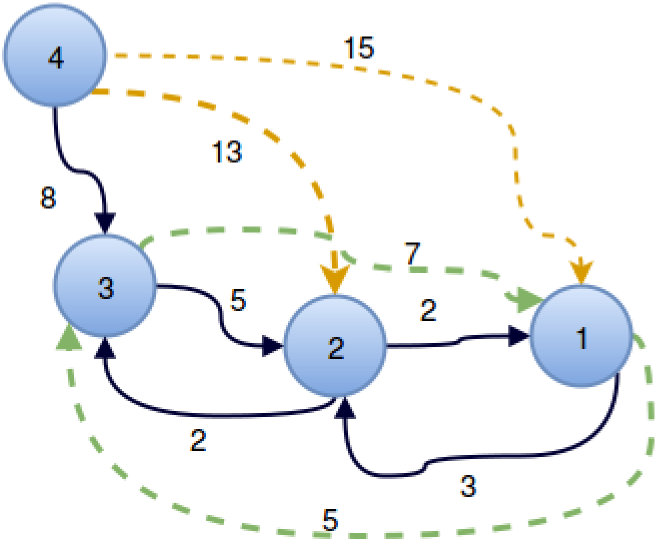


Node	1	2	3	4
1	0	3	5	inf
2	2	0	2	inf
3	7	5	0	inf
4	20	23	8	0

এবার ৩ নম্বর নোডকে মাঝের নোড হিসাবে ধরবো। আবারো নিজে চেষ্টা করে তারপর নিচের অংশ দেখ।

এবার কিছু মজার জিনিস ঘটবে। ৪ থেকে ১ এ আগে লাগছিল ২০ কস্ট। এখন ৩ কে মাঝে রেখে ৪ থেকে ১ এ গেলে লাগবে ৮+৭=১৫ কস্ট। লক্ষ্য কর একদম শুরুতে ৩ থেকে ১ এ আমাদের এজ ছিল না। কিন্তু আপডেট করার সময় আমরা এজ বসিয়ে দিয়েছি, এখন ৩ থেকে ১ এ যদিও সরাসরি চলে যাচ্ছি, মূল গ্রাফে আসলে ৩->২->১ পথে যাচ্ছি। একই ভাবে ৪ থেকে ২ এর ২৩ কস্ট এর পথটা আপডেট হয়ে ১৩ হয়ে যাবে।

top



Node	1	2	3	4
1	0	3	5	inf
2	2	0	2	inf
3	7	5	0	inf
4	15	13	8	0

k=৪ এর জন্য আর কোন আপডেট হবে না কারণ কোনো নোড থেকে ৪ এ যাওয়া যায় না।

এখন আমরা ম্যাট্রিক্স দেখেই বলে দিতে পারছি কোন নোড থেকে কোন নোডে কত কস্ট এ যাওয়া যায়। ইনফিনিটি থাকা মানে সেই নোডে যাবার পথ নেই।

ইনপুট থেকে অ্যাডজেসেন্সি ম্যাট্রিক্স বানাবার পর তাহলে কাজ খুবই সহজ:

```
for k from 1 to |V|
    for i from 1 to |V| \\ |V| = number of nodes
       for j from 1 to |V|
          if matrix[i][j] > matrix[i][k] + matrix[k][j]
             matrix[i][j] ← matrix[i][k] + matrix[k][j]
```

কোডে আমরা k এর লুপটা ১ থেকে চালাচ্ছি যদিও উদাহরণে আগে ২ নিয়েছি। **এটা আসলে যেকোন অর্ডারেই করা যায়**, তুমি আগে ১ নিলেও দেখবে অ্যালগোরিদম কাজ করবে।

এভাবেতো আমরা শুধু পাথের কস্ট পেলাম, পাথটা িকভাবে পাব?

ধরো আমাদের একটা ম্যাট্রিক্স আছে next[][]। এখন next[i][j] দিয়ে আমরা বুঝি **i থেকে j তে যেতে হলে পরবর্তি যে নোড এ যেতে হবে** সেই নোডটা। তাহলে একদম শুরুতে সব i,j এর জন্য next[i][j] = j হবে। কারণ শুরুতে কোন "মাঝের নোড" নেই এবং তখনও শর্টেস্ট পাথ বের করা শেষ হয় নি।

এখন আমরা যখন matrix[i][j] আপডেট করবো লুপের সেটার মানে হলো মাঝে একটা নোড k ব্যবহার করে আমরা যাবো। লক্ষ্য কর আমরা কিন্তু মূল গ্রাফে সরাসরি এজ দিয়ে i থেকে k তে নাও যেতে পারি, আমরা শুধু জানি i,j নোড দুটোর মাঝে একটা নোড k আছে যেখানে আমাদের যেতে হবে j তে যাবার আগে। i থেকে k তে যাবার পথে পরবর্তি যে নোডে যেতে হবে সেটা রাখা আছে next[i][k] তে! তাহলে next[i][j] = next[i][k] হয়ে যাবে।

top

```
for k from 1 to |V|
      for i from 1 to |V|
         for j from 1 to |V|
            if matrix[i][k] + matrix[k][j] < matrix[i][j] then
               matrix[i][j] ← matrix[i][k] + matrix[k][j]
               next[i][j] ← next[i][k]


findPath(i, j)
   path = [i]
   while i ≠ j
       i ← next[i][j]
       path.append(i)
   return path
```

findpath ফাংশনে আমরা j কে ফিক্সড রেখে next অ্যারে ধরে আগাচ্ছি যতক্ষণ না j তে পৌছাচ্ছি। তাহলে আমরা পেয়ে গেলাম পাথ!

ট্রান্সিটিভ ক্লোজার(Transitive Closure):

ধরো আমাদের অ্যাডজেন্সি ম্যাট্রিক্সটা এরকম:

```
matrix[i][j] = 1 যদি i থেকে j তে সরাসরি এজ থাকে
matrix[i][j] = 0 যদি এজ না থাকে
```

এখন আমরা এমন একটা ম্যাট্রিক্স তৈরি করতে চাই যেটা দেখে বলে দেয়া যাবে i থেকে j তে এক বা একাধিক এজ ব্যবহার করে যাওয়া যায় কিনা। আমরা চাইলে উপরের মত করে ০ এর জায়গায় ইনফিনিটি দিয়ে শর্টেস্ট পাথ বের করে কাজটা করতে পারতাম। কিন্তু এক্ষেত্রে “OR” আর “AND” অপারেশন ব্যবহার আরো দ্রুত কাজটা করা যায়। এখন আপডেটের শর্তটা হয়ে যাবে এরকম:

```
matrix[i][j] = matrix[i][j] || (matrix[i][k] && matrix[k][j])
```

এটার মানে matrix[i][j] তে তখনই ১ বসবে যখন হয় “matrix[i][j] তে ১ আছে” অথবা “matrix[i][k] এবং matrix[k][j]” দুটোতেই ১ আছে। তারমানে হয় সরাসরি যেতে হবে অথবা মাঝে একটা নোড k ব্যবহার করে যেতে হবে।

কমপ্লেক্সিটি:

৩টা নেস্টেড লুপ ঘুরছে নোড সংখ্যার উপর, টাইম কমপ্লেক্সিটি O(n^3)। ২ডি ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করায় স্পেস কমপ্লেক্সিটি O(n^2)।

কিছু প্রশ্ন:

১. k এর লুপটা কি i,j লুপের ভিতর দিলে অ্যালগোরিদম কাজ করত?
২. গ্রাফে নেগেটিভ কস্ট থাকলে ফ্লয়েড ওয়ার্শল কাজ করবে কি?

রিলেটেড প্রবলেম: