Mühazirə 15.

Kəsənlər (vətərlər) üsulu

Bu üsul yuxarıda baxdığımız Nyuton üsulunda $f'(x_k)$ törəməsinin

$$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

bölünən fərqi ilə əvəz olunmasının nəticəsi kimi alınır. Kəsənlər üsuluna görə iterasiya prosesi

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}, f(x_k) \quad k=1,2,...$$

kimi qurulur. Göründüyü kimi kəsənlər ysulu Nyuton üsulundan fərqli olaraq ikiaddımlı üsuldur, yəni hər növbəti x_{k+1} yaxınlaşması bundan əvvəlki x_{k-1} və x_k yaxınlaşmalarının köməyi ilə qurulurlar. Daha dəqiq desək, bu üsula görə $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ və $(x_k, f(x_k))$ nöqtələrindən keçən kəsən çəkilir və bu kəsənin OX oxu ilə kəsişmə nöqtəsi növbəti x_{k+1} yaxınlaşması kimi qəbul olunur. Başqa sözlə, $[x_{k-1}, x_k]$ parçasında $f(x)$ funksiyası birtərtibli interpolyasiya çoxhədlisi ilə əvəz olunur və növbəti x_{k+1} yaxınlaşması kimi bu çoxhədlinin kökü götürülür.

Kəsənlər(və ya vətərlər) üsulunun variantlarından birinə görə x_0 başlanğıc nöqtəsi tərpənməz qalır və yeni yaxınlaşmalar o biri tərəfdən qurulurlar. Biz bu halı araşdıracağıq.

Fərz edək ki, $f(x)$ funksiyası x həqiqi dəyişəninin həqiqi qiymətli funksiyasıdır, $x=x^*$ isə $f(x)=0$ tənliyinin həqiqi köküdür və $x=x^*$ nöqtəsinin yaxın ətrafında $f(x)$ funksiyası və $f'(x)$, $f''(x)$, funksiyaları kəsilməzdirlər və bu ətrafda $f'(x)$, $f''(x)$, törəmələri öz işarələrini saxlayırlar. Bu isə öz növbəsində o deməkdir ki, $x=x^*$ nöqtəsindən keçdikdə $f(x)$ funksiyası öz işarəsini dəyişir və deməli, $x=x^*$ nöqtəsi sadə kökdür.

İndi isə, fərz edək ki, x_0 nöqtəsi baxılan ətrafdandır, və $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$ şərti ödənir. $\psi(x)$–funksiyası kimi

$$\psi(x)\equiv\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}$$

götürək. Onda

$$x=\varphi(x)\equiv x-\psi(x)\cdot f(x)=x-\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\cdot f(x)=$$

$$=\frac{x\cdot f(x)-x\cdot f(x_0)-x\cdot f(x)+x_0\cdot f(x)}{f(x)-f(x_0)}$$

$$x=\frac{x_0\cdot f(x)-x\cdot f(x_0)}{f(x)-f(x_0)}$$

$x = x^*$-nöqtəsi, həm də axırıncı tənliyin köküdür(Yoxlayın!)

x_1 yaxınlaşması kimi x^*-in yaxın ətrafından elə nöqtə seçək ki, $f(x_0)\cdot f(x_1)< 0$ şərti ödənsin və əgər x_0 nöqtəsi baxılan aralığın bir ucudursa, onda x_1 nöqtəsi kimi digər ucu götürmək lazımdır

Növbəti yaxınlaşmalar aşağıdakı kimi seçilirlər:

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}, \qquad (n = 1,2,...)$$

Kəsənlər (vətərlər) üsulunun həndəsi interpretasiyası

Kəsənlər üsuluna görə $\{x_n\}$ ardıcıllığı aşağıdakı kimi qurulur: $(x_0,\ f(x_0))$ və $(x_1,\ f(x_1))$ nöqtələrindən keçən kəsən çəkilir və bu kəsənin $0X$ oxu ilə kəsişmə nöqtəsi x_2-növbəti yaxınlaşma kimi qəbul olunur. Sonrakı mərhələdə $(x_0,\ f(x_0))$ və $(x_2,\ f(x_2))$ nöqtələrindən keçən yeni kəsən çəkilir və bu kəsənin $0X$ oxu ilə kəsişmə nöqtəsi x_3-növbəti yaxınlaşma kimi qəbul olunur və i.a.. Beləliklə, hər addımda $(x_0,\ f(x_0))$ və $(x_n,\ f(x_n))$ nöqtələrindən keçən kəsən çəkilir və kəsənin $0X$ oxu ilə kəsişmə nöqtəsi yeni x_{n+1} yaxınlaşması kimi qəbul olunur. İterasiya prosesi o vaxta qədər davam olunur ki, şərti $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ödənsin.

Nyuton üsulunda olduğu kimi burada da qrafiki təsvirlərlə kəsənlər üsulunun həndəsi interpretasiyasını verək.

Fərz edək ki,

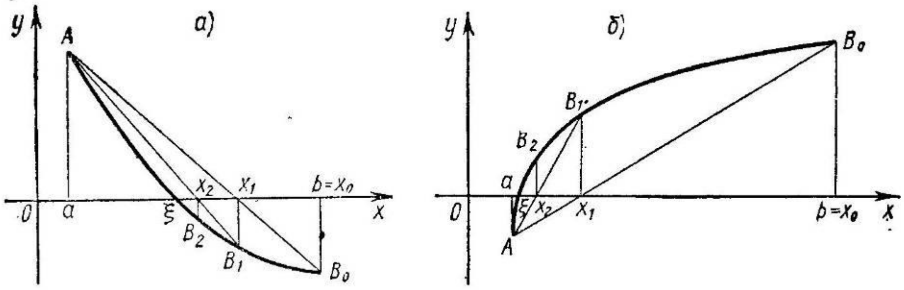
a) $f'(x)<0,\ f''(x)>0$ və $f(a)>0,\ f(b)<0,$

x_0-başlanğıc nöqtəsi elə seçilməlidir ki, $f(x_0)\cdot f''(x_0)> 0$-şərti ödənsin, deməli $x_0 = a$ və $x_1 = b$ qəbul olunmalıdır və $x_0 = a$ nöqtəsi tərpənməz olaraq qalır.

b) $f'(x)>0,\ f''(x)<0$ və $f(a)<0,\ f(b)>0,$

bu halda da $x_0 = a$ və $x_1 = b$ qəbul olunmalıdır.

Baxılan bu iki hal üçün üsulun həndəsi interpretasiyasını qrafik olaraq aşağıdakı kimi göstərmək olar:



Növbəti iki hal isə aşağıdakı kimi olacaqdır.

a) $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ və $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

b) $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$,

Buradakı, hər halda isə $x_0 = b$, $x_1 = a$ götürülməlidir.