Mühazirə 1

Ədədi üsullar hesablama eksperimentinin tərkib hissəsidir

Ən qədim elm olan riyaziyyat yarandığı gündən tətbiqi riyaziyyat olmuşdur. İlk vaxtlarda sahələrin ölçülməsində, gəmiçilikdə, tikintidə, ticarət hesablamalarında istifadə olunan riyaziyyat sonradan ciddi məntiqə əsaslanan möhtəşəm binasını qurdu. Surətli elektron hesablama maşınlarının (EHM) mükəmməlləşməsi, müxtəlif elm sahələrinin riyaziləşməsi prosesi yeni vüsət aldı. Hal-hazırda çətin problemlərin EHM-in gücünə əsaslanan və hesablama eksperimenti adlanan tədqiqat texnologiyası əmələ gəlmişdir. Hər hansı proses, hadisə, fiziki obyekt tədqiq edilərək aşağıdakı sxem həyata keçirilir:

1) Tədqiqatçı tədqiq ediləcək obyektlə tanış olur. Bu obyekti idarə edən əsas qanunları müəyyənləşdirir;

2) Məsələnin riyazi modeli qurulur, yəni əsas qanunlardan istifadə edərək verilən və axtarılan kəmiyyətlər arasındakı asılılıq qurulur. Riyaziyyatın bir çox bilik sahələrinə sürətlə nüfuz etməsi riyazi modellərin universallığından irəli gəlir. Yəni, hər hansı proses üçün qurulmuş model, müxtəlif bilik sahələrində rast gələn oxşar strukturlu məsələlərdə tətbiq edilə bilir;

3) Məsələnin riyazi formasını müəyyənləşdirdikdən sonra onun həlli zərurəti ortaya çıxır. Riyazi məsələnin həlli dedikdə nə başa düşülür? Əgər həllin aşkar şəklinin tapılması nəzərdə tutulursa, buna nadir hallarda müəssər olmaq olur. Müasir elmin və texnikanın bir çox sahələrində elə riyazi məsələlərə rast gəlinir ki, onların dəqiq həllərini klassik üsullarla tapmaq mümkün olmur və ya həll elə mürəkkəb şəkildə alınır ki, praktiki cəhətdən ondan istifadə etmək mümkün olmur. Yox, əgər varlığı və yeganəliyi nəzərdə tutulursa, bu xalis riyaziyyatçı üçün kifayət olsa da, tətbiqi riyaziyyatçı üçün kifayət deyil. Məhz bu mərhələdə riyazi modelin diskret modelə interpretasiyası zərurəti meydana gəlir. Bu mərhələdə kəsilməz model, ona yaxın olan, lakin həlli verilən məsələyə nəzərən asan olan və EHM-də realizasiyası münasib olan diskret modellə approksimasiya edilir, yəni ədədi üsullar verilir. .

4) Ədədi üsulları EHM-də realizasiya edirlər. Bu mərhələdə ədədi üsulların verdiyi hesablama alqoritmlərinin proqramlarını tərtib etmək və ya mövcud olan proqramlardan istifadə etmək lazımdır;

5) Hesablamaların aparılması və alınan nəticələrin analizi mərhələsində alınan nəticələrin tədqiq edilən məsələyə uyğunluğu öyrənilir. Zərurət olarsa, məsələnin riyazi modeli və ya onun üçün təklif edilmiş ədədi üsul dəqiqləşdirilir.

Yuxarıdakı beş mərhələni əhatə edən sxemə hesablama eksperimenti deyilir. Bu sxemin üçüncü mərhələsi ədədi üsullar kursunun məzmununu təşkil edir. Tətbiqi məsələlərin ədədi həlləri həmişə riyaziyyatçıların maraq dairəsində olmuşdur. .

Mühazirə 1

Xətaların mənbələri və təsnifatı.
Ədədlərin EHM-də təsviri

1. Xətaların mənbələri və təsnifatı.

Hər hansı bir məsələni hesablama eksperimenti sxemi ilə həll etdikdə aşağıdakı səbəblərdən təqribi nəticələr almalı oluruq:

1) Tətbiq məsələlərinin tədqiqi, bir qayda olaraq, qeyri-riyazi obyektlər olan təbiət hadisələrinin, istehsal proseslərinin, idarəetmə sistemlərinin, iqtisadi planların və s.-nin riyazi modelinin qurulması ilə başlayır. Riyazi model heç də baxılan obyektin eyni ola bilməz. Sadələşdirməyə, ideallaşdırmağa əsaslanan riyazi model öyrənilən obyekti təqribi təsvir edir. Həm də modelin qurulması üçün lazım olan başlanğıc verilənlər bir qayda olaraq eksperimentdən alındığı üçün, təbii ki, onlar müəyyən dəqiqliklə bizə məlum olur;

2) Riyazi məsələni həll etmək üçün tətbiq edilən üsul dəqiq olmur, və ya dəqiq həlli almaq üçün qeyri-məhdud sayda hesab əməlləri aparmaq lazım gəlir ki, bu da praktiki cəhətdən mümkün olmadığından təqribi nəticələrlə kifayətlənməyə məcbur oluruq;

3) Verilənləri maşına daxil etdikdə, hesab əməlləri apardıqda, hazır nəticələri əldə edərkən yuvarlaqlaşdırma aparmalı oluruq.

Bu səbəblərə uyğun xətaları aşağıdakı kimi adlandırırlar:

a) Aradan qaldırıla bilməyən xətalar;

b) Üsulların xətaları;

c) Hesablama xətaları.

Aradan qaldırıla bilməyən xəta anlayışını mütləq qəbul etmək lazım deyil. Bunu belə başa düşmək lazımdır ki, əksər hallarda riyaziyyatçı riyazi modeli sifarişçidən hazır şəkildə alır, yəni modelin qurulmasında, məsələnin qoyluşunda bilavasitə iştirak etmir. Yəni artıq buraxılmış xətaların sayəsində əmələ gələn uyğunsuzluqlara görə riyaziyyatçı cavabdeh deyil. Lazım gəldikdə sifarişçi ilə təkrar kontaktlar əsnasında riyazi modeli dəqiqləşdirmək olar. . Əlbəttə, riyaziyyatçının aradan qaldırıla bilməyən xəta haqqında təsəvvürü ona ədədi üsulun seçilməsində müəyyən mənada köməklik göstərə bilər. Məsələn, baxılan model üçün elə üsul seçməyə çalışar ki, onun xətası aradan qaldırıla bilməyən xətadan çox da böyük olmasın. Dəqiq olmayan məsələni ondan dəqiq həll edilməsinə lüzum yoxdur.

İkinci növ xətalar, yəni üsulların xətaları , ədədi üsullar kursunun əsas ana xəttidir. Bu cür xətaların öyrənilməsi və qiymətləndirilməsi ilə bütün kurs boyu məşğul olacağıq.

Hesablama xətaları isə bir qayda olaraq ədəddəki mərtəbələrin sayını mövcud hesablama vasitəsinə uyğunlaşdırmaq zərurətindən irəli gəlir.

2.Verilənlərin yazılış forması. Mütləq və nisbi xətalar.

Hesablama xətalarının əsas mənbələrindən biri də, mərtəbələr şəbəkəsinin sonlu olması ilə əlaqədar olaraq, ədədlərin kompüter yaddaşında təqribi təsvir olunmasıdır. Əl ilə hesablamada olduğu kimi, EHM-də də mövqeli say sistemlərindən istifadə olunur.

Əsası r ($r>1$ və tam ədəddir) olan mövqeli say sistemində

$$a = \pm a_n a_{n-1} ... a_0 , a_{-1} a_{-2} ... \tag{1}$$

yazılışının mənası altında a ədədi üçün

$$a = \pm \left(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_0 r^0 + a_{-1} r^{-1} + a_{-2} r^{-2} + ... \right) \tag{2}$$

ayrılışı başa düşülür. Hər bir a_i $\{0,1,2,...,r-1\}$ qiymətlərindən birini ala bilər. a_i -lərə mərtəbələr və ya əsası r olan say sisteminin rəqəmləri deyilir. Həqiqi ədədin (1) şəklində yazılışına ədədin qeyd olunmuş vergüllü yazılışı deyilir. Elmi hesablamalarda ədədin sürüşkən vergüllü formasından istifadə edilir. Əgər a ədədinin

$$a = Mr^P \tag{3}$$

yazılışında p - tam ədəd (müsbət, mənfi, və ya sıfır), r - sistemin əsasıdırsa və

$$r^{-1} \le M < 1 \tag{4}$$

şərti ödənərsə, onda (3) ayrılışına a ədədinin sürüşkən vergüllü yazılışı, M ədədinə a-nın mantissası deyilir. Mantissanın özü qeyd olunmuş vergüllü formada yazılır. p ədədinə a ədədinin tərtibi deyilir. Qeyd edək ki, 0-dan fərqli istənilən həqiqi ədədi yeganə qaydada (3) şəklində göstərmək olar.

Ədədlərin EHM-də sürüşkən vergüllü təsvirinin dəqiqliyi nisbi xəta ilə xarakterizə edilir. Tutaq ki, a- müəyyən bir kəmiyyətin dəqiq qiyməti, a^* isə onun məlum təqribi qiymətidir.

Tərif 1.

$$\frac{\left| a^* - a \right|}{\left| a^* \right|} \le \delta\left(a^* \right) \tag{5}$$

şərtini ödəyən $\delta\left(a^* \right)$ kəmiyyətinə a^* təqribi qiymətinin nisbi xətası deyilir. Nisbi xətanı çox vaxt faizlə ifadə edirlər.

Tərif 2.

$$\left| a^* - a \right| \le \Delta\left(a^* \right) \tag{6}$$

şərtini ödəyən $\Delta\left(a^* \right)$kəmiyyətinə a^*təqribi qiymətinin mütləq xətası deyilir.

Qeyd 1. a - məlum ədəd olduqda (məs., $a=\pi$), (5) və (6) bərabərsizliklərinin sağ tərəflərindəki ədədlərə, uyğun olaraq, a ədədinin nisbi və mütləq xətaları deyilir.

Qeyd 2. Bəzən də $a^* - a$ fərqinə mütləq xəta, $\dfrac{a^* - a}{a^*}$ nisbətinə nisbi xəta deyilir.

Nisbi xəta yuvarlaqlaşdırmanın üsulundan asılıdır

Fərz edəik ki, vurma nəticəsində maşın sıfırı $M_o = 2^{-t}$ -dən kiçik və maşın sonsuzluğu $M_\infty = 2^t$ -dən böyük ədədlər alınmır. Müəyyən bir mərhələdə göstərilən hallara rast gəlinməsi dəqiq olmayan son nəticələrə gətirib çıxara bilər. Belə olan hallarda hesablama alqoritmini, yəni əməllərin yerinə yetirilmə ardıcıllığını dəyişmək lazımdır.

Deyilənləri bir misal ilə aydınlaşdıraq. Tutaq ki, $M_0 = 2^{-64}$ və $M_\infty = 2^{64}$-dir. Fərz edək ki, $y_1 = 2^{32}$, $y_2 = 2^{16}$, $y_3 = 2^{48}$, $y_4 = 2^{-32}$ və $y_5 = 2^{-48}$ ədədlərini bir-birinə vurmaq lazımdır. Əgər, y_1, y_2 və y_3 ədədlərini ardıcıl bir-birinə vursaq, $y_1 y_2 y_3 = 2^{96} > M_\infty$ almış olarıq. Aydındır ki, alınmış $y_1 y_2 y_3$ hasilini y_4-ə vurmaq mümkün olmaz və bu halda göstərilən alqoritm ilə $y_1 y_2 y_3 y_4 y_5$ hasilini tapmaq qeyri-mümkündür. Əgər hesablamanı $y_5 y_4 y_3 y_2 y_1$ alqoritmi ilə aparsaq, onda $y_5 y_4 = 2^{-80} < M_0$ oldüğundan bütün hasil sıfır olacaq ki, bu da düzgün olmayan nəticəyə gətirib çıxarır. Asanlıqla görmək olar ki, $y_5 y_3 y_1 y_4 y_2$ hasili düzgün nəticə verir. Gətirilən misaldan görünür ki, "vuruqların yerini dəyişdikdə hasil dəyişmir" hökmü burada doğru deyil.