

INTRODUCTION AUX ONDELETTES

C. CHARLES *

RÉSUMÉ

Cette note technique à caractère mathématique est une introduction aux ondelettes, un des outils d'analyse du signal. Son objectif est d'initier le lecteur à la théorie des ondelettes. Elle se découpe en deux parties. La première pose les bases théoriques des ondelettes. La deuxième partie traite des logiciels implémentés pour travailler avec les ondelettes.

SUMMARY

This note aims to introduce wavelets, a signal processing tool. Its objective is to make known the wavelet theory. This note is divided in two parts. The first one briefly presents the wavelet theory. The second part concerns the wavelet softwares.

1. INTRODUCTION

L'analyse par ondelettes est apparue au début des années 80. En réalité, celle-ci ne repose pas sur une nouvelle idée originale. Cette théorie est un travail pluridisciplinaire qui a réuni des ingénieurs, des mathématiciens et des physiciens ayant développé des idées semblables dans leur domaine respectif. La synthèse mathématique a débouché sur des résultats nouveaux, qui ont apporté des perspectives plus larges dans chaque discipline originelle. A l'époque actuelle, la plupart des chercheurs scientifiques ont déjà entendu parler des ondelettes. Dans la majorité des congrès traitant de l'analyse du signal et de l'image, de la statistique, de la mathématique, etc., des conférences au sujet des ondelettes sont données. Pourquoi ? Dans cette note, nous étudions la raison de la popularité de cet outil, mais aussi ses limites.

*Chargée de cours à l'Université de Liège, Gembloux Agro-Bio Tech (Unité de Statistique, Informatique et Mathématique appliquées à la bioingénierie)

Après cette introduction, le paragraphe 2 concerne la théorie de base des ondelettes. Ensuite, avant de conclure, le paragraphe 3 commente différents logiciels permettant d'utiliser les ondelettes.

2. QU'EST-CE QU'UNE ONDELETTE ?

Ce paragraphe donne les fondements de la théorie des ondelettes. Nous commençons par justifier la popularité de la transformée en ondelettes en la comparant à la célèbre transformée de Fourier. En effet, la transformée de Fourier est bien connue dans le monde scientifique : de nombreux mathématiciens, physiciens ou ingénieurs l'utilisent ou l'ont utilisée à un moment ou un autre et son efficacité ne fait plus aucun doute. Dans un second temps, nous donnons la définition mathématique de la transformée (continue) en ondelettes et dans un troisième temps, nous étendons la transformée (continue) en ondelettes aux signaux discrets et finis. En réalité, c'est souvent cette dernière qui est utilisée grâce à ses puissants algorithmes. Finalement, nous parlerons de la transformée en ondelettes dans le cas de données multidimensionnelles comme les images, ainsi que de la transformée en ondelettes invariante par translation.

2.1. Avantages de la transformée en ondelettes par rapport à la transformée de Fourier

La théorie de Fourier repose sur le fait que les fonctions montrant un certain degré de régularité peuvent être représentées par une combinaison linéaire de sinus et cosinus. Les coefficients de cette combinaison linéaire donnent une information au niveau des fréquences présentes dans le signal.

Considérons deux exemples.

Premièrement, les séries de Fourier sont habituellement utilisées pour estimer le spectre des fréquences d'un signal donné en fonction du temps. En médecine, l'électrocardiogramme d'un patient malade diffère de celui d'un patient sain. Cette différence, parfois très difficile à repérer lorsque l'électrocardiogramme est donné en fonction du temps, devient évidente lorsque celui-ci est donné en fonction des fréquences, c'est-à-dire lorsqu'on regarde ses coefficients de Fourier. Mais les séries de Fourier donnent la quantité de chaque fréquence présente dans le signal pour *l'ensemble* de la période d'observation. La théorie de Fourier devient donc inefficace pour un signal dont le spectre des fréquences varie considérablement dans le temps.

Deuxièmement, les séries de Fourier sont aussi utilisées pour approximer des fonctions. Certaines fonctions régulières ont une série de Fourier économe, autrement dit elles sont bien approximées avec peu de coefficients de Fourier. Mais comme les fonctions sinus et cosinus ont un support infini, la série de Fourier ne fonctionne pas bien quand elle doit décrire localement une fonction qui

montre des discontinuités. Nous verrons plus tard que, contrairement à la transformée de Fourier, l'analyse par ondelettes offre une large gamme de fonctions de base parmi lesquelles on peut choisir la plus appropriée pour une application donnée.

Avant de donner une définition d'une ondelette et de sa transformée, nous présentons un exemple qui illustre certains de ses avantages sur la transformée de Fourier. La colonne de gauche de la figure 1 (d'après CHARLES, 2003) montre le graphe de trois fonctions dans l'espace direct (représentation temporelle) : une fonction sinus, une fonction "blok" et une fonction plus complexe connue sous le nom de "chirp". La colonne du milieu montre les transformées de Fourier discrètes de ces fonctions dans l'espace de Fourier (représentation fréquentielle). Finalement, la colonne de droite montre les transformées en ondelettes. La même ondelette a été utilisée pour les trois fonctions.

La représentation graphique de la transformée en ondelettes requiert certaines explications. Les coefficients d'ondelettes sont dessinés dans un graphe X-Y, leur valeur est codée comme suit : noir, gris et blanc pour les coefficients positifs, nuls et négatifs respectivement. L'axe horizontal représente l'échelle de temps, qui est équivalente à l'échelle de temps de la colonne de gauche. L'axe vertical montre une quantité appelée la résolution (ou échelle) ; il correspond à la largeur du support temporel sélectionné par l'ondelette. Ceci veut dire que cela fonctionne comme pour une carte. Une grande échelle correspond à un grand support et donc à une vue globale non détaillée du signal et une petite échelle correspond à un petit support et donc à une vue détaillée d'une partie du signal. La résolution est souvent mieux comprise comme la réciproque de la fréquence. Ainsi une résolution fine (petite résolution, petite échelle) correspond à une haute fréquence et une résolution grossière (grande échelle) correspond à une basse fréquence. Souvent, dans un signal, ce qui est à petite échelle (et donc grande fréquence) apparaît de temps en temps comme des pics et ce qui est à grande échelle (et donc basse fréquence) est présent tout au long du signal. Dès lors, cette représentation délai-résolution donne de l'information temps-fréquence. Par exemple, un point noir au délai 600 et à la résolution 100 spécifie que la fonction varie autour de la fréquence $1/100$ dans un voisinage du temps 600, voisinage dont la taille vaut à peu près 100.

Regardant la transformée en ondelettes de la fonction *blok*, on voit immédiatement qu'il y a des hautes fréquences dans les régions contenant des discontinuités, et seulement des zéros ailleurs. La transformée de Fourier montre certaines hautes fréquences mais ne donne aucune indication sur le moment où cela se passe. On peut aussi observer que les coefficients en ondelettes de la fonction *sin*, $W(\sin)$, et de la fonction *blok*, $W(\text{blok})$, se ressemblent à basse fréquence et deviennent très différentes quand la résolution devient petite. Notons aussi comment les transformées de Fourier des fonctions *blok* et *chirp* se ressemblent quelque peu, tandis que leur transformée en ondelettes donne une image différente avec plus d'informations. Toutes ces observations montrent la supériorité

potentielle de la représentation en ondelettes par rapport à la transformée de Fourier.

La fonction sinus peut être représentée par un seul coefficient de Fourier, ce qui n'est pas pris en compte par la transformée en ondelettes. Si un signal peut être exprimé comme une combinaison linéaire d'un petit nombre d'harmoniques, l'analyse de Fourier restera plus efficace que les ondelettes pour des tâches telles que compression de données ou filtrage du bruit. D'un autre côté, la transformée en ondelettes des fonctions *blok* et *chirp* montre de nombreux coefficients nuls (en gris) indiquant une représentation économique de ces signaux. Ceci montre que les ondelettes sont une alternative à l'analyse de Fourier et non un remplacement.

Même le calcul de la transformée en ondelettes est efficace. Alors que la Fast Fourier Transform (FFT) requiert $O(n \log n)$ opérations avec n la longueur du spectre, la Fast Wavelet Transform (FWT) calcule les coefficients en ondelettes en $O(n)$ opérations quand $n = 2^J$, $J \in \mathbb{N}$. Dans son article, Strang (STRANG, 1993) réalise une comparaison plus approfondie entre la transformée de Fourier et la transformée en ondelettes.

En conclusion, la transformée en ondelettes offre la possibilité d'analyser un signal simultanément dans le domaine du temps et celui des fréquences. Est-ce intéressant ? La réponse dépend de l'application et de la nature du signal. La transformée de Fourier d'un signal donné indique quelle quantité de chaque fréquence se trouve dans le signal mais ne nous indique pas à quel moment dans le temps ces fréquences se passent. L'information temps-fréquence n'est pas nécessaire quand le signal est stationnaire (signal dont le contenu de la fréquence ne change pas dans le temps) mais devient nécessaire pour un signal non-stationnaire.

Au restaurant, nous devenons rapidement insensibles au bruit de nos voisins ; mais un brusque silence nous rappelle leur présence. Notre attention est attirée par les événements momentanés, par opposition aux phénomènes permanents que nous ignorons vite. La priorité accordée aux événements momentanés est probablement une stratégie de notre cerveau pour sélectionner les informations importantes, parmi le grand nombre de données auxquelles nous sommes exposés. La stratégie des ondelettes se base sur cette constatation. Le traitement du signal classique quant à lui s'est surtout concentré sur l'étude d'opérateurs invariants dans le temps ou dans l'espace. Cela a conduit à la suprématie de la transformée de Fourier dans l'analyse du signal.

2.2. Définition de la transformée en ondelettes

Dans cette section, nous introduisons les concepts de base de l'analyse en ondelettes. Nous présentons d'abord les ondelettes et leurs premières propriétés. Ensuite, nous discutons de la transformée continue en ondelettes. En illustration, la transformée en ondelettes de Haar sera traitée en détails.

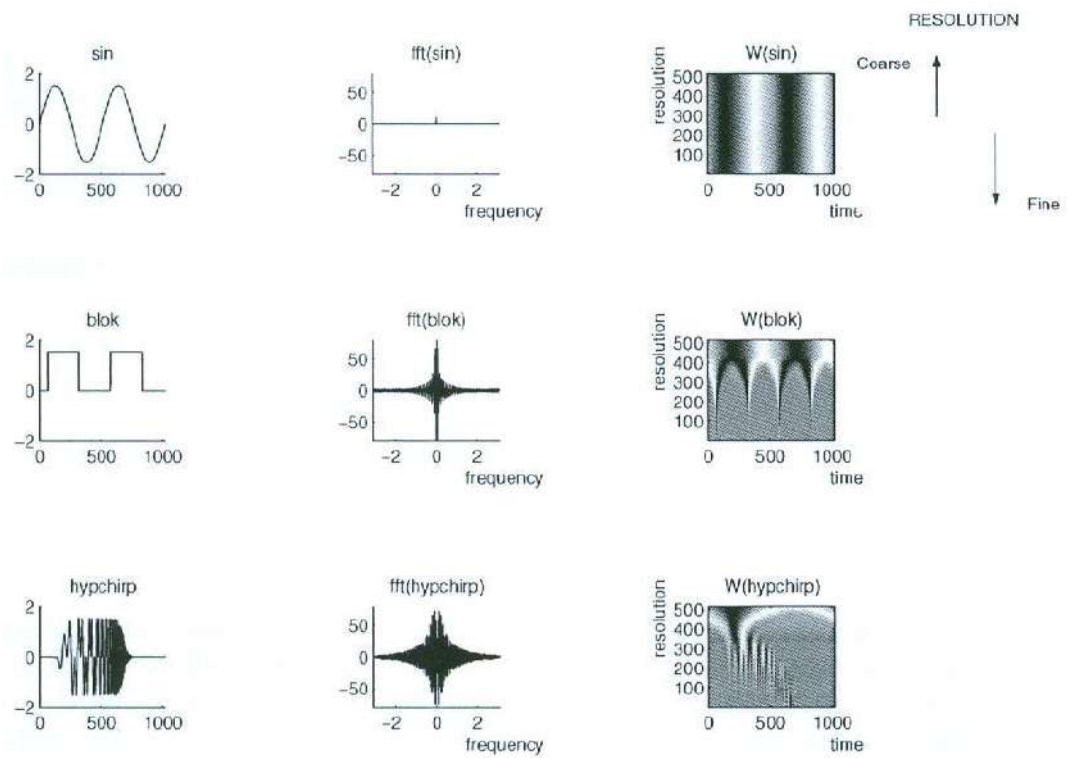


Figure 1. Comparaison entre la transformée de Fourier et la transformée en ondelettes de trois fonctions. (D'après CHARLES, 2003).

Une **ondelette** est une fonction oscillante (ce qui explique le mot "onde") de moyenne nulle, appelée ψ , possédant un certain degré de régularité et dont le support est fini (ce qui explique le mot "ondelette", qui veut dire petite onde). Plusieurs exemples sont montrés dans la figure 2. L'ondelette mère ψ génère une

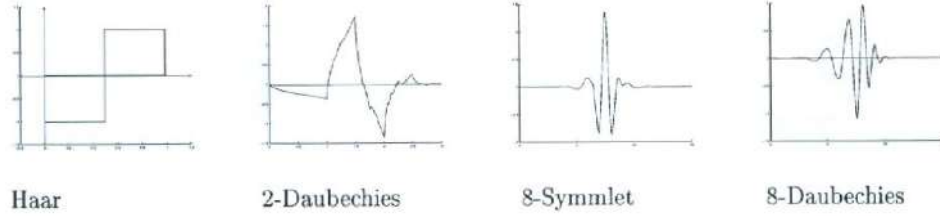


Figure 2. Exemples d'ondelette $\psi(t)$. (D'après CHARLES, 2003).

famille d'ondelettes :

$$\{\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\left(\frac{t-u}{s}\right)\}_{(u,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+} \quad (1)$$

où u est le paramètre du temps (délai) et s le paramètre d'échelle. L'ondelette $\psi_{u,s}$ est simplement l'ondelette mère ψ traduite de u et dilatée (contractée si $s < 1$) par s . Par conséquent, quand l'échelle s augmente, la résolution augmente. Ceci veut dire que le support de la partie non-nulle de l'ondelette mère augmente. Le coefficient multiplicateur $\frac{1}{\sqrt{s}}$ permet d'avoir une formule de conservation de l'énergie du signal ($\int |f(t)|^2 dt = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int |Wf(u,s)|^2 du \frac{ds}{s^2}$ avec C_ψ et $Wf(u,s)$ définis plus tard). De plus, il est habituellement supposé que la condition suivante est vérifiée :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{\|\Psi(\omega)\|^2}{\omega} d\omega < +\infty \quad (2)$$

où Ψ est la transformée de Fourier de ψ . Cette condition d'admissibilité impose pour les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ que $\psi(t)$ soit de moyenne nulle. On peut imposer en outre des conditions de régularité telles que des moments multiples nuls

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0$$

et donc des propriétés de décroissance et de convergence vers 0 à l'infini de $\psi(t)$ et de sa transformée de Fourier.

Nous introduisons le lien entre les ondelettes et les **coefficients d'ondelettes** par l'exemple suivant. Pour des raisons didactiques, nous choisissons l'ondelette de Haar et une fonction f en escalier sur les intervalles $[k, k+1)$ définis par les naturels $k \in \mathbb{N}$. L'ondelette de Haar est représentée dans la figure 2. La fonction f est représentée dans la partie supérieure de la figure 3. Sur chaque intervalle $[k, k+2)$, la fonction f prend deux valeurs. Si nous calculons

la moyenne arithmétique de ces deux valeurs sur chacun de ces intervalles (du style $[j.2^1, (j+1).2^1]$ pour $j \in \mathbb{N}$), nous obtenons une approximation grossière du signal original. Celle-ci est notée $approx1(f)$ et est représentée dans la figure 3. L'opération réalisée sur chaque intervalle est $(a+b)/2$ si a est la première valeur prise sur l'intervalle et b la seconde valeur prise sur cet intervalle. Dans le but de retrouver f à partir de cette approximation $approx1(f)$, il est nécessaire de conserver la différence entre f et $approx1(f)$. Dès lors, sur chaque intervalle, l'opération réalisée est $(-a+b)/2$. Cette valeur est affectée par un signe négatif pour obtenir a : $\frac{a+b}{2} - \frac{-a+b}{2} = a$ et par un signe positif pour obtenir b : $\frac{a+b}{2} + \frac{-a+b}{2} = b$. Ces différences sont stockées dans $details1(f)$ qui est visible dans la figure 3. La somme de $approx1(f)$ et de $details1(f)$ est égale à la fonction originale f .

A présent, regardons comment les ondelettes prennent place dans ces processus de moyenne et de différence. L'ondelette mère de Haar est à la base du processus de différence qui est décrit par $(-1.a + 1.b)/2$. L'ondelette de Haar, $\psi(t)$, qui est représentée dans la figure 2 stocke ces deux nombres -1 et 1. En réalité, l'ondelette de Haar est définie comme

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

Le processus de moyenne est lié au processus de différence. De la même façon, nous lions l'ondelette "père" ϕ à l'ondelette mère ψ . En ce qui concerne l'ondelette de Haar, celle-ci est définie comme

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

Cela correspond au processus de moyenne $(1.a + 1.b)/2$. Les deux nombres 1 sont stockés dans ϕ .

Nous pouvons évidemment recommencer ce processus de décomposition sur $approx1(f)$ en calculant la moyenne arithmétique sur chaque intervalle du style $[j.2^2, (j+1).2^2]$ dans le but d'obtenir $approx2(f)$ et $details2(f)$. De nouveau, en sommant $approx2(f)$, $details2(f)$ et $details1(f)$, nous retrouvons le signal original f . Les détails correspondent aux coefficients d'ondelettes $W(f)$. Dans notre exemple, nous avons décomposé f en une approximation grossière à l'échelle 2^2 et en détails à l'échelle 2^2 et 2^1 . En fait, les intervalles choisis ont une longueur de 2^1 pour le premier pas de décomposition et une longueur de 2^2 dans le second pas. Si nous stoppons le processus de décomposition à cette étape, nous disons que 2^2 est l'échelle grossière. C'est l'échelle de la dernière approximation.

De manière plus générale à présent, les coefficients d'ondelettes sont le résultat d'un produit scalaire entre le signal et les différentes ondelettes $\psi_{u,s}$ de

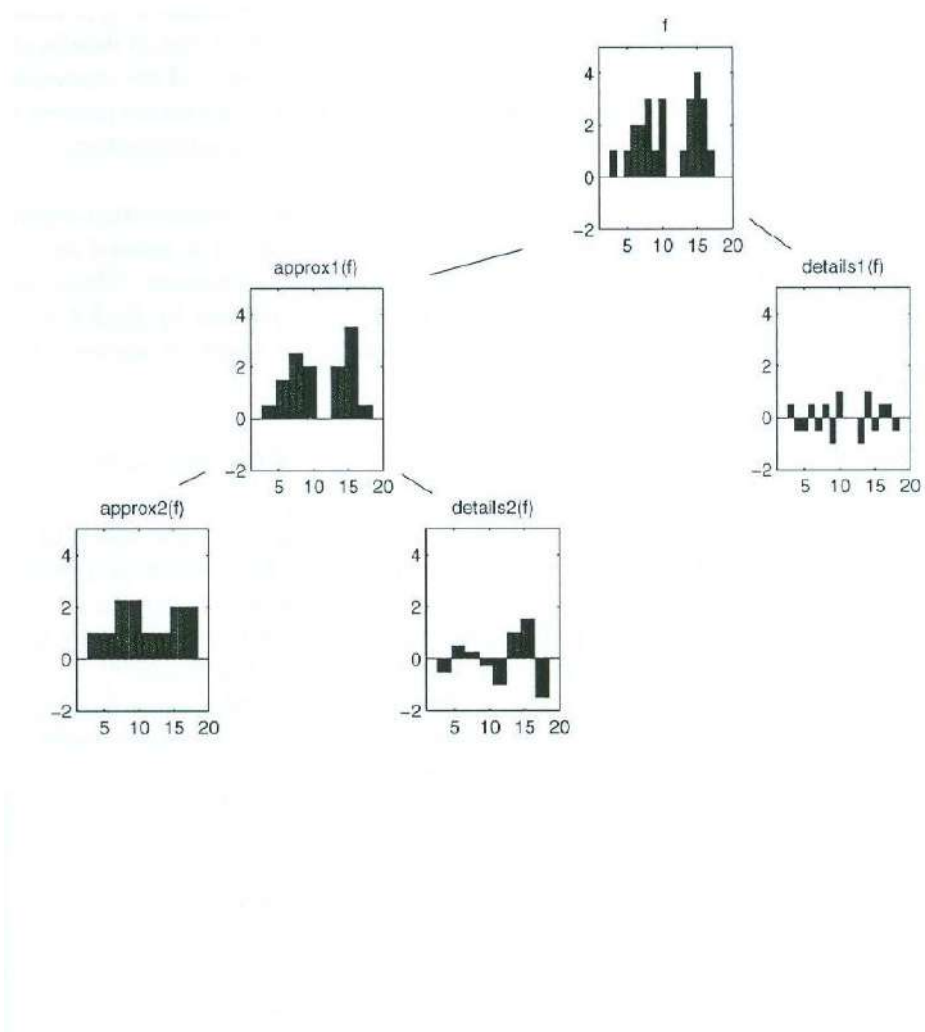


Figure 3. Décomposition en ondelettes de Haar d'un simple signal en escalier.
(D'après CHARLES, 2003).

la famille d'ondelettes :

$$approx1(i) = \int \phi_{1,i}(x)f(x)dx = \langle \phi_{1,i}, f \rangle$$

et

$$details1(i) = \int \psi_{1,i}(x)f(x)dx = \langle \psi_{1,i}, f \rangle.$$

La notation $\langle a, b \rangle$ fait référence au produit scalaire de a et b dans un espace de Hilbert. Ils mesurent donc la similarité entre le signal et les ondelettes de la famille choisie. La décomposition en ondelettes d'un signal associe au signal ses coefficients d'ondelettes. Elle a pour but de fournir une bonne information temps-fréquence de ce signal à l'utilisateur. Ceci a pu être vu dans la section précédente avec la représentation graphique de la transformée en ondelettes.

Le processus général de décomposition en ondelettes est basé sur le schéma de décomposition décrit ci-dessus. Ceci est lié à un processus de reconstruction qui recalcule le signal à partir des coefficients en ondelettes. Quand la condition exprimée dans l'équation 2 est vérifiée, il peut être montré (MALLAT, 1988) que toute fonction f appartenant à l'espace des fonctions de carré intégrables $L^2(\mathbb{R})$ satisfait :

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{s_0} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u, s) \psi_{u,s} du \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{s_0 C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} Lf(u, s_0) \phi_{u,s_0} du \quad (5)$$

- où
- $Wf(u, s)$ vaut $\langle f, \psi_{u,s} \rangle \forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ et représente une mesure de la variation de f dans un voisinage de u dont la taille est proportionnelle à s ; ceux-ci sont appelés coefficients d'ondelettes relatifs aux détails ;
 - ϕ est appelée fonction d'échelle ou fonction père de la famille d'ondelettes ;
 - elle est liée à ψ par $\|\Phi(\omega)\|^2 = \int_1^{+\infty} \|\Psi(s\omega)\|^2 \frac{ds}{s}$;
 - $Lf(u, s)$ vaut $\langle f, \phi_{u,s} \rangle \forall (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ et représente une approximation à basse fréquence de f à l'échelle s ; ceux-ci sont appelés coefficients d'ondelettes relatifs à l'approximation ;
 - s_0 $\in \mathbb{R}$ est choisi par l'utilisateur et est appelé échelle grossière ; elle détermine l'approximation basse fréquence.

Ceci implique que tout signal de carré intégrable peut être décomposé dans une famille d'ondelettes au moyen de coefficients, certains de ceux-ci sont relatifs à une approximation grossière $Lf(u, s_0)$ du signal à l'échelle s_0 tandis que d'autres sont relatifs aux détails montrés aux résolutions plus fines, $\{Wf(u, s)\}_{0 \leq s < s_0}$. Les coefficients d'ondelettes contiennent dès lors une information locale en temps et en fréquence. Cette propriété rend les ondelettes particulièrement efficaces pour la plupart des tâches de traitement du signal. La figure 4 représente un signal synthétique simulant un signal induit par un processus de réplication de l'ADN chez les mammifères. On distingue les quatre "toits d'usine". Elle représente également ses coefficients en ondelettes relatifs aux détails. Les quatre "toits d'usine" sont retrouvés principalement grâce aux coefficients d'ondelettes à fine échelle. La figure 5 reprend le signal de la figure

4 auquel un bruit gaussien a été rajouté et représente également les coefficients d'ondelettes du signal bruité.

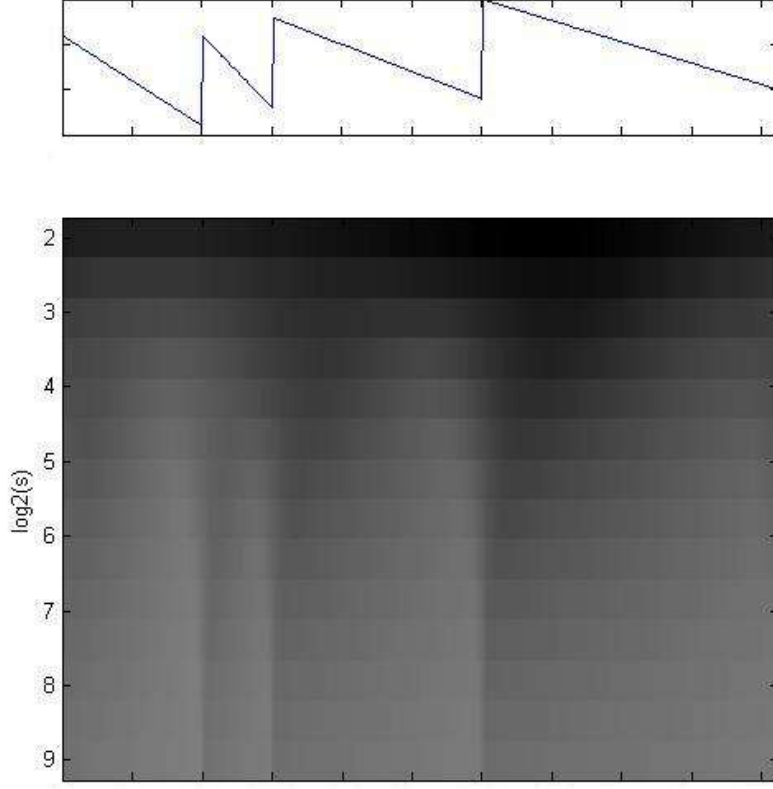


Figure 4. Décomposition en ondelettes d'un signal simulant un processus de répliation de l'ADN chez les mammifères.

Il est important de noter qu'il est possible de construire des ondelettes mère ψ telle que leur famille

$$\{\phi_{L,k}(t) \cup \psi_{j,k}(t)\}_{(k,j) \in \mathbb{Z}^2, j \leq L, L \in \mathbb{Z}} \quad (6)$$

avec

$$\psi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right), \quad \phi_{j,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \phi\left(\frac{t - 2^j k}{2^j}\right) \quad (7)$$

forme une base orthonormale dans $L^2(\mathbb{R})$. Notons que, dans ce cas orthonormal, le paramètre d'échelle s est discrétisé en 2^j et le paramètre de délai (translation) u est discrétisé en $2^j k$. Une base orthonormale assure que l'information contenue dans les coefficients d'ondelettes est non-redondante, et par là améliore l'efficacité de la représentation en ondelettes. Les ondelettes orthonormales permettent

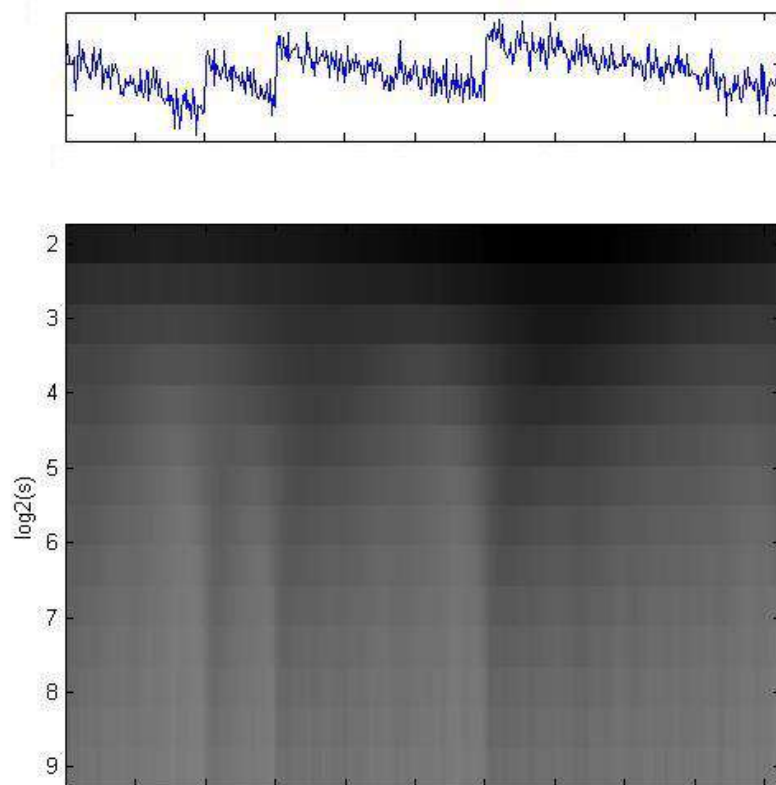


Figure 5. Décomposition en ondelettes d'un signal bruité simulant un processus de réplication de l'ADN chez les mammifères.

aussi la formulation d'algorithmes de transformées en ondelettes très rapides dont on parlera dans la section suivante concernant les signaux discrets et finis.

2.3. Transformée en ondelettes d'un signal discret fini

Dans cette section, nous discutons de la transformée en ondelettes discrète et nous parlons brièvement du calcul de cette dernière. Nous nous attardons sur la transformée de Haar.

Comme une transformée continue en ondelettes peut être calculée à partir d'un signal continu, une transformée discrète en ondelettes peut être calculée à partir d'un signal discret. Une fois encore, certains coefficients d'ondelettes, c_L , sont liés à l'approximation grossière du signal à l'échelle L , tandis que d'autres, $\{d_j\}_j$, sont liés aux détails à des résolutions plus fines. Comme résultat, la représentation en ondelettes d'un signal discret est identique à celle d'un signal continu. Le lien entre le monde continu des ondelettes et le monde discret est le suivant. Le signal discret $c_0 = x$ est considéré comme une moyenne d'une certaine fonction f pondérée par les noyaux d'échelle $\phi_{2^L}(t - n)$: $c_0(i) = \langle f(t), \phi_{2^L}(t - i) \rangle$. Par conséquent, pour tout $j \geq L$, $c_j(i) = \langle f(t), \phi_{2^j}(t - i) \rangle$ et $d_j(i) = \langle f(t), \psi_{2^j}(t - i) \rangle$.

Les bases orthonormales en ondelettes permettent une analyse multirésolution se basant sur des algorithmes de décomposition et de reconstruction très rapides pour un signal discret fini. Le pas de décomposition calcule les coefficients d'ondelettes $\{c, d\}$ d'un signal x par l'application successive de filtres passe-bas (Lo) et passe-haut (Hi) suivi par un sous-échantillonnage d'un facteur 2 ($\downarrow 2$), en partant avec l'hypothèse que $c_0 = x$. Le schéma général de l'algorithme est :

$$\begin{array}{ccccccccccc} c_0 & \xrightarrow{Lo} \downarrow 2 \rightarrow & c_1 & \xrightarrow{Lo} \downarrow 2 \rightarrow & c_2 & \xrightarrow{Lo} \downarrow 2 \rightarrow & \dots & \xrightarrow{Lo} \downarrow 2 \rightarrow & c_J \\ & \searrow^{Hi} \downarrow 2 \rightarrow & d_1 & \searrow^{Hi} \downarrow 2 \rightarrow & d_2 & \searrow^{Hi} \downarrow 2 \rightarrow & \dots & \searrow^{Hi} \downarrow 2 \rightarrow & d_J \end{array} \quad (8)$$

Le filtre passe-bas enlève du signal les hautes fréquences pour ne garder que les basses fréquences. Le filtre passe-haut a l'effet inverse. Le sous-échantillonnage ne garde qu'une valeur sur deux, celles rejetées étant identiques au signe près (voir figure 3). Les coefficients en ondelettes sont stockés dans un vecteur comme dans la figure 6 où $n = 16$ ($J = 4$) et $L = 3$ pour cet exemple-là.

Le processus de reconstruction calcule alors un signal x à partir des coefficients en ondelettes $\{c, d\}$, en insérant des zéros entre les échantillons ($\uparrow 2$), en appliquant les filtres (Lo', Hi') et en additionnant les résultats (+). Le schéma général est :

1	$x(1)$	\Rightarrow	1	$c_3(1)$
2	$x(2)$		2^{4-3}	$c_3(2)$
3	$x(3)$		$2^{4-3} + 1$	$d_3(1)$
4	$x(4)$		$2^{4-3} + 2^1$	$d_3(2)$
5	$x(5)$		$2^{4-2} + 1$	$d_{3-1}(1)$
6	$x(6)$		$2^{4-2} + 2$	$d_{3-1}(2)$
7	$x(7)$		$2^{4-2} + 3$	$d_{3-1}(3)$
8	$x(8)$		$2^{4-2} + 2^2$	$d_{3-1}(2^2)$
9	$x(9)$		$2^{4-1} + 1$	$d_{3-2}(1)$
10	$x(10)$		$2^{4-1} + 2$	$d_{3-2}(2)$
11	$x(11)$		$2^{4-1} + 3$	$d_{3-2}(3)$
12	$x(12)$		$2^{4-1} + 4$	$d_{3-2}(4)$
13	$x(13)$		$2^{4-1} + 5$	$d_{3-2}(5)$
14	$x(14)$		$2^{4-1} + 6$	$d_{3-2}(6)$
15	$x(15)$		$2^{4-1} + 7$	$d_{3-2}(7)$
$16 = 2^4$	$x(16)$		$2^{4-1} + 2^3$	$d_{3-2}(2^3)$

Figure 6. Décomposition orthonormale unidimensionnelle en ondelettes ($J = 4$, $L = 3$).

$$\begin{array}{ccccccc}
c_J & \uparrow 2 \rightarrow^{Lo'} + \rightarrow & c_{J-1} & \uparrow 2 \rightarrow^{Lo'} + \rightarrow & c_{J-2} & \dots & \uparrow 2 \rightarrow^{Lo'} + \rightarrow c_0 \\
d_J & \uparrow 2 \nearrow^{Hi'} & d_{J-1} & \uparrow 2 \nearrow^{Hi'} & d_{J-2} & \dots & \uparrow 2 \nearrow^{Hi'}
\end{array} \quad (9)$$

Ces deux algorithmes sont connus comme étant les algorithmes de Mallat.

Nous illustrons l'algorithme de Mallat avec la transformée en ondelettes de Haar. Le filtre passe bas (Lo) possède deux coefficients non nuls égaux à $1/\sqrt{2}$ en $n = -1$ et $n = 0$; le filtre passe haut (Hi) possède deux coefficients non nuls dont un est égal à $-1/\sqrt{2}$ pour $n = -1$ et l'autre est égal à $1/\sqrt{2}$ pour $n = 0$. Nous remarquons que ces filtres correspondent respectivement aux fonctions ϕ et ψ (voir équations 3 et 4) mis à part le facteur multiplicatif $1/\sqrt{2}$. Ce facteur $1/\sqrt{2}$ est nécessaire pour la normalisation de la base d'ondelettes (voir équation 7). C'est pourquoi, le processus de décomposition peut être simplement défini par les deux formules (10, 11) et en supposant $c_{0,k} = x_k \forall k = 0 \dots n-1$ ($n = 2^J$) :

$$c_{j+1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{j,2k} + c_{j,2k+1}) \quad 0 \leq k \leq 2^{J-(j+1)} - 1, \quad (10)$$

$$d_{j+1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-c_{j,2k} + c_{j,2k+1}) \quad 0 \leq k \leq 2^{J-(j+1)} - 1. \quad (11)$$

Les coefficients en ondelettes c_{j+1} relatifs à l'approximation grossière à l'échelle 2^{j+1} représente une sorte de moyenne du signal et les coefficients en ondelettes d_{j+1} relatifs aux détails représentent une différence entre les composantes du signal. Notons que la longueur de c_{j+1} et d_{j+1} est la moitié de

la longueur de c_j et d_j . En fait, il n'est pas nécessaire de stocker deux fois la moyenne des deux valeurs et deux fois leur différence.

Pour le processus de reconstruction, le filtre Lo' a deux coefficients non-nuls égaux à $1/\sqrt{2}$ pour $n = 0$ et $n = 1$; le filtre Hi' a deux coefficients non-nuls dont l'un est égal à $1/\sqrt{2}$ en $n = 0$ et l'autre est égal à $-1/\sqrt{2}$ en $n = 1$. Plus simplement, nous avons ces formules :

$$c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{j+1,k/2} - d_{j+1,k/2}) \quad \text{pour } k \text{ pair et } 0 \leq k \leq 2^{J-j} - 1, \quad (12)$$

$$c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{j+1,(k-1)/2} + d_{j+1,(k-1)/2}) \quad \text{pour } k \text{ impair et } 0 \leq k \leq 2^{J-j} - 1. \quad (13)$$

Enfin, la figure 7 représente le signal digital du chant d'un oiseau (signal discret de longueur 2^{13} provenant de WaveLab). Elle représente également ses coefficients en ondelettes relatifs aux détails calculés par l'algorithme de Mallat avec l'ondelette Coiflet 4 et $L = 3$. On constate que le nombre de coefficients diminue à chaque échelle et que seules les deux premières échelles ont des coefficients significatifs.

2.4. Transformée en ondelettes de signaux multidimensionnels

2.4.1. Transformée en ondelettes de signaux bidimensionnels

A chaque base orthonormée d'ondelettes $\{\psi_{j,n}\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$ de $L^2(\mathbb{R})$, on pourrait associer une base séparable orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\{\psi_{j,n}(x)\psi_{l,m}(y)\}_{(j,l,n,m) \in \mathbb{Z}^4}.$$

Les fonctions $\psi_{j,n}(x)\psi_{l,m}(y)$ associent l'information à deux échelles différentes 2^j et 2^l le long de x et y , ce que l'on préfère souvent éviter. Les multirésolutions séparables conduisent à une autre construction de bases d'ondelettes séparables, dont les éléments sont des produits de fonctions dilatées à la même échelle. Nous définissons

$$\phi^1(x, y) = \phi(x)\phi(y) \quad (14)$$

et

$$\psi^1(x, y) = \phi(x)\psi(y), \quad \psi^2(x, y) = \psi(x)\phi(y), \quad \psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y). \quad (15)$$

Nous notons

$$\phi_{j,n,m}^1 = \frac{1}{2^j} \phi^1\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}, \frac{y - 2^j m}{2^j}\right) \quad (16)$$

et pour $1 \leq k \leq 3$

$$\psi_{j,n,m}^k = \frac{1}{2^j} \psi^k\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}, \frac{y - 2^j m}{2^j}\right). \quad (17)$$

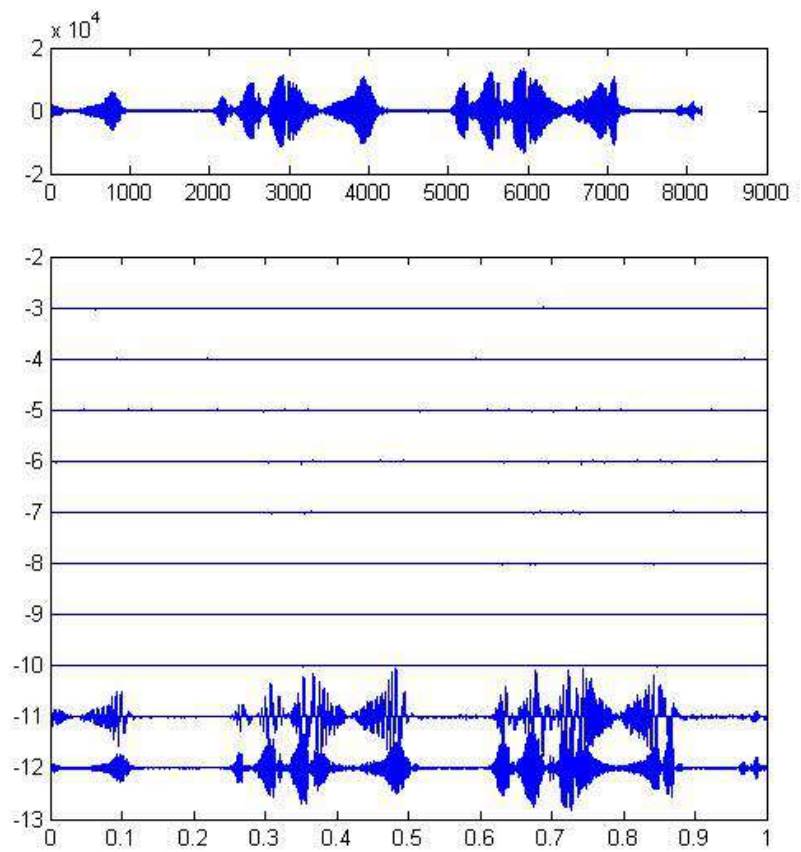


Figure 7. Décomposition en ondelettes d'un signal digital du chant d'un oiseau ("Tweet" de WaveLab avec $J = 13$) avec l'ondelette Coiflet 4 et $L = 3$.

La famille d'ondelettes

$$\{\phi_{L,n,m}^1, \psi_{j,n,m}^1, \psi_{j,n,m}^2, \psi_{j,n,m}^3\}_{n,m,j \in \mathbb{Z}^3, j \leq L, L \in \mathbb{Z}} \quad (18)$$

est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

De nouveau, toute fonction de $L^2(\mathbb{R}^2)$ peut être décomposée dans cette base au moyen de coefficients appelés coefficients d'ondelettes. Les coefficients d'ondelettes correspondant à $\phi_{L,n,m}^1$, noté c_L^1 , sont liés à l'approximation grossière du signal à l'échelle L , tandis que les autres coefficients correspondant à $\psi_{j,n,m}^k$, notés $\{d_j^k\}_j$, sont liés aux détails à des résolutions plus fines : $\{d_j^1\}_j$ correspondant aux détails horizontaux, $\{d_j^2\}_j$ correspondant aux détails verticaux, $\{d_j^3\}_j$ correspondant aux détails diagonaux.

Evidemment, l'algorithme de transformée en ondelettes rapide défini pour des signaux unidimensionnels discrets et finis dans la section précédente, appelé algorithme de Mallat, est étendu à deux dimensions ($O(n^2)$ avec $n = 2^J$ et n^2 désigne le nombre d'éléments de l'image). L'étape de décomposition calcule les coefficients d'ondelettes $c_L^1, \{d_j^1, d_j^2, d_j^3\}_{j \leq L}$ du signal x par la procédure suivante. Nous définissons $c_0^1 = x$ et posons $j = 0$. Les lignes de c_j^1 sont premièrement convoluées avec les filtres Lo et Hi et sous-échantillonnées par 2 comme dans le cas unidimensionnel (voir équation 8). Les colonnes de ces deux images de sortie sont alors convoluées respectivement avec Lo et Hi et sous-échantillonnées, ce qui donne 4 images sous-échantillonnées $c_{j+1}^1, d_{j+1}^1, d_{j+1}^2, d_{j+1}^3$. Nous itérons cette étape pour $0 \leq j < L$. La représentation en ondelettes de l'image x est alors composée de $3L + 1$ sous-images :

$$[c_L, \{d_j^1, d_j^2, d_j^3\}_{1 \leq j \leq L}]. \quad (19)$$

Le processus de reconstruction est obtenu par une procédure similaire. Les colonnes de c_j^1 et d_j^1 ($j = L$) sont sur-échantillonnées par 2 (voir équation 9), convoluées avec Hi' et Lo' et additionnées. De même, les colonnes de d_j^2 et d_j^3 ($j = L$) sont sur-échantillonnées par 2 (voir équation 9), convoluées avec Hi' et Lo' et additionnées. Les lignes de ces deux images résultat sont alors sur-échantillonnées et convoluées respectivement avec Hi' et Lo' et additionnées, ce qui donne l'image c_{j-1}^1 . L'image originale est retrouvée à partir de la représentation en ondelettes dans l'équation 19 en itérant ce processus pour $L > j \geq 0$. Les coefficients en ondelettes sont stockés dans une matrice comme dans la figure 8 où $n = 8$ ($J = 3$) et $L = 2$. Des exemples de cet algorithme rapide pour des signaux finis discrets bidimensionnels sont illustrés dans les figures 9 et 10. Dans ces figures, il est facile de voir que d^1, d^2, d^3 représentent les détails verticaux, horizontaux et diagonaux respectivement.

2.4.2. Transformée en ondelettes de signaux multidimensionnels

La transformée en ondelettes et les algorithmes de Mallat peuvent être généralisés à toutes les dimensions par une procédure similaire. Cependant,

$x(1,1)$	$x(1,2)$	$x(1,3)$	$x(1,4)$	$x(1,5)$	$x(1,6)$	$x(1,7)$	$x(1,8)$
$x(2,1)$	$x(2,2)$	$x(2,3)$	$x(2,4)$	$x(2,5)$	$x(2,6)$	$x(2,7)$	$x(2,8)$
$x(3,1)$	$x(3,2)$	$x(3,3)$	$x(3,4)$	$x(3,5)$	$x(3,6)$	$x(3,7)$	$x(3,8)$
$x(4,1)$	$x(4,2)$	$x(4,3)$	$x(4,4)$	$x(4,5)$	$x(4,6)$	$x(4,7)$	$x(4,8)$
$x(5,1)$	$x(5,2)$	$x(5,3)$	$x(5,4)$	$x(5,5)$	$x(5,6)$	$x(5,7)$	$x(5,8)$
$x(6,1)$	$x(6,2)$	$x(6,3)$	$x(6,4)$	$x(6,5)$	$x(6,6)$	$x(6,7)$	$x(6,8)$
$x(7,1)$	$x(7,2)$	$x(7,3)$	$x(7,4)$	$x(7,5)$	$x(7,6)$	$x(7,7)$	$x(7,8)$
$x(8,1)$	$x(8,2)$	$x(8,3)$	$x(8,4)$	$x(8,5)$	$x(8,6)$	$x(8,7)$	$x(8,8)$

↓

$c_2(1,1)$	$c_2(1,2)$	$d_2^2(1,1)$	$d_2^2(1,2)$	$d_1^2(1,1)$	$d_1^2(1,2)$	$d_1^2(1,3)$	$d_1^2(1,4)$
$c_2(2,1)$	$c_2(2,2)$	$d_2^2(2,1)$	$d_2^2(2,2)$	$d_1^2(2,1)$	$d_1^2(2,2)$	$d_1^2(2,3)$	$d_1^2(2,4)$
$d_2^1(1,1)$	$d_2^1(1,2)$	$d_2^3(1,1)$	$d_2^3(1,2)$	$d_1^3(1,1)$	$d_1^3(1,2)$	$d_1^3(1,3)$	$d_1^3(1,4)$
$d_2^1(2,1)$	$d_2^1(2,2)$	$d_2^3(2,1)$	$d_2^3(2,2)$	$d_1^3(2,1)$	$d_1^3(2,2)$	$d_1^3(2,3)$	$d_1^3(2,4)$
$d_1^1(1,1)$	$d_1^1(1,2)$	$d_1^1(1,3)$	$d_1^1(1,4)$	$d_1^3(1,1)$	$d_1^3(1,2)$	$d_1^3(1,3)$	$d_1^3(1,4)$
$d_1^1(2,1)$	$d_1^1(2,2)$	$d_1^1(2,3)$	$d_1^1(2,4)$	$d_1^3(2,1)$	$d_1^3(2,2)$	$d_1^3(2,3)$	$d_1^3(2,4)$
$d_1^1(3,1)$	$d_1^1(3,2)$	$d_1^1(3,3)$	$d_1^1(3,4)$	$d_1^3(3,1)$	$d_1^3(3,2)$	$d_1^3(3,3)$	$d_1^3(3,4)$
$d_1^1(4,1)$	$d_1^1(4,2)$	$d_1^1(4,3)$	$d_1^1(4,4)$	$d_1^3(4,1)$	$d_1^3(4,2)$	$d_1^3(4,3)$	$d_1^3(4,4)$

Figure 8. Décomposition bidimensionnelle en ondelettes orthonormées ($J = 3$, $L = 2$).

quand la dimension augmente, la performance de l'analyse par ondelettes peut diminuer. Prenons deux exemples. Premièrement, nous avons vu que seulement trois orientations sont privilégiées (horizontal, vertical et diagonal) en dimension 2. Deuxièmement, l'efficacité des algorithmes de Mallat qui sont rapides est due au stockage des données. Ceci peut être un problème pour de grandes données multidimensionnelles. Pour pallier ces inconvénients, de nombreux chercheurs se sont inspirés de la théorie des ondelettes et ont proposé des alternatives appelées : ridgelets, shearlets, curvelets, bandlets, etc. Celles-ci ne font pas l'objet de cette note.

2.5. Transformation en ondelettes invariantes par translation

En reconnaissance de formes, il est important de construire des représentations du signal qui sont invariantes par translation à cause de la difficulté de la recherche de la forme si sa représentation dépend de sa localisation. Quand une forme est traduite, ses descripteurs numériques devraient être traduits mais pas modifiés. Des transformées en ondelettes continues fournissent des représentations invariantes par translation, mais échantillonner de manière uniforme le paramètre de translation détruit cette invariance par translation. Il y a beaucoup de stratégies pour maintenir l'invariance par translation d'une transformée en ondelettes discrète.

Dans cette section, nous décrivons l'algorithme invariant par translation bien connu de Coifman et Donoho (DONOHO ET COIFMAN, 1995). Cet algorithme pour signal discret fini (longueur $n = 2^J$) est le suivant. A la place d'avoir n coefficients en ondelettes comme dans la figure 6, nous avons $(L + 1)n$ coefficients d'ondelettes. En fait, nous avons n coefficients relatifs à l'approxima-

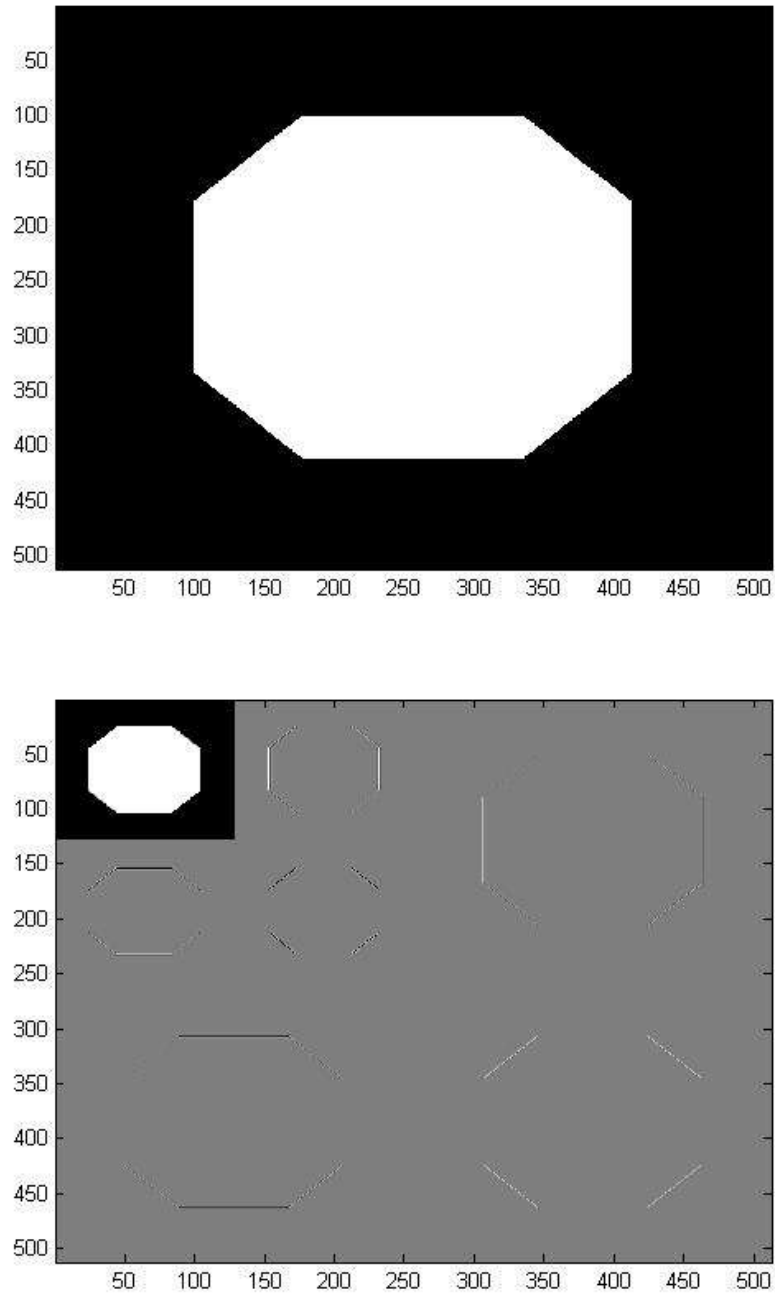


Figure 9. Décomposition en ondelettes d'un hexagone blanc sur fond noir avec $L=2$ ($J=9$). Les pixels noirs, gris et blancs correspondent respectivement à des coefficients en ondelettes positifs, nuls et négatifs.

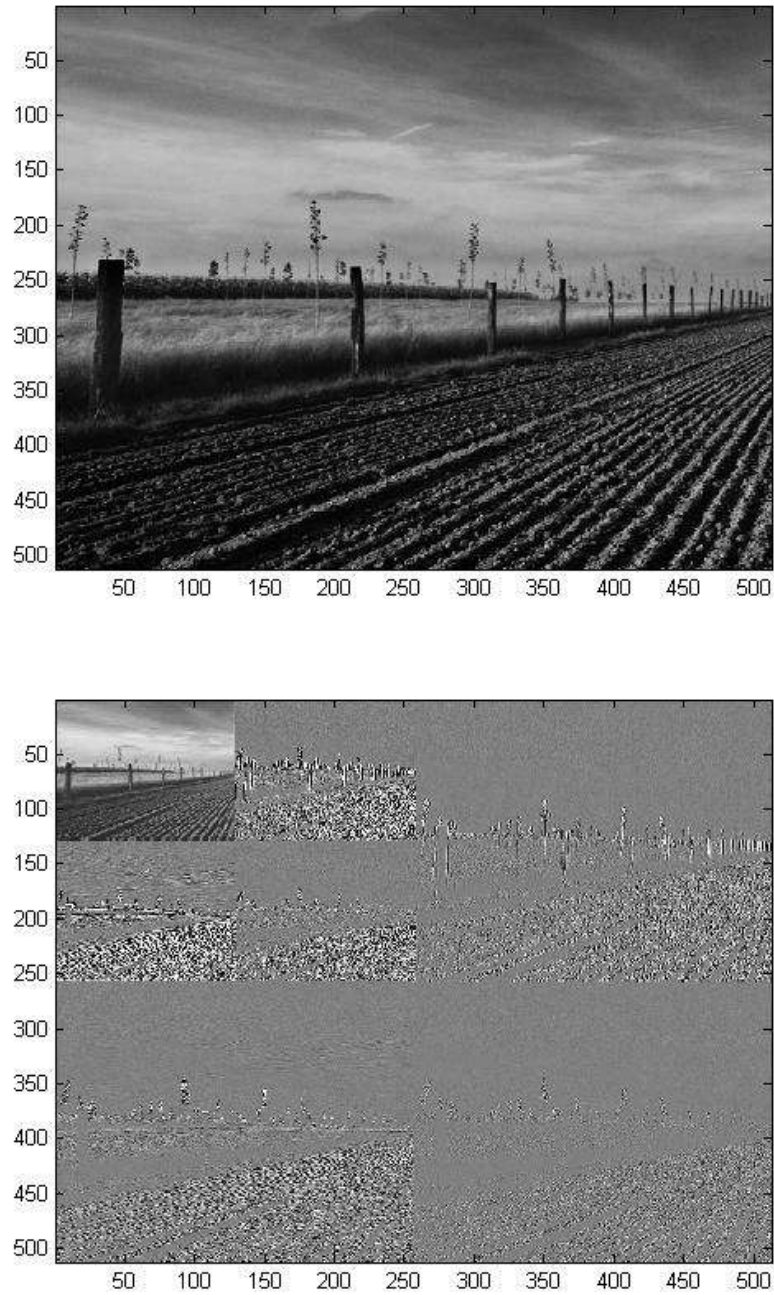


Figure 10. Décomposition en ondelettes d'une photo d'un champ avec $L=2$ ($J=9$). Les pixels noirs, gris et blancs correspondent respectivement à des coefficients en ondelettes positifs, nuls et négatifs.

1	$x(1)$		1	$c_3(1)$	<u>$d_1(1)$</u>	$d_2(1)$	$d_3(1)$
2	$x(2)$		2	$c_3(2)$	<u>$d_1(2)$</u>	$d_2(2)$	$d_3(2)$
3	$x(3)$		3	$c_3(3)$	<u>$d_1(3)$</u>	$d_2(3)$	$d_3(3)$
4	$x(4)$		4	$c_3(4)$	<u>$d_1(4)$</u>	$d_2(4)$	$d_3(4)$
5	$x(5)$		5	<u>$c_3(5)$</u>	<u>$d_1(5)$</u>	$d_2(5)$	<u>$d_3(5)$</u>
6	$x(6)$		6	<u>$c_3(6)$</u>	<u>$d_1(6)$</u>	<u>$d_2(6)$</u>	<u>$d_3(6)$</u>
7	$x(7)$		7	$c_3(7)$	<u>$d_1(7)$</u>	<u>$d_2(7)$</u>	<u>$d_3(7)$</u>
8	$x(8)$	\Rightarrow	8	$c_3(8)$	<u>$d_1(8)$</u>	<u>$d_2(8)$</u>	$d_3(8)$
9	$x(9)$		9	$c_3(9)$	<u>$d_1(9)$</u>	<u>$d_2(9)$</u>	$d_3(9)$
10	$x(10)$		10	$c_3(10)$	$d_1(10)$	$d_2(10)$	$d_3(10)$
11	$x(11)$		11	$c_3(11)$	$d_1(11)$	$d_2(11)$	$d_3(11)$
12	$x(12)$		12	$c_3(12)$	$d_1(12)$	$d_2(12)$	$d_3(12)$
13	$x(13)$		13	$c_3(13)$	$d_1(13)$	$d_2(13)$	$d_3(13)$
14	$x(14)$		14	$c_3(14)$	$d_1(14)$	$d_2(14)$	$d_3(14)$
15	$x(15)$		15	$c_3(15)$	$d_1(15)$	$d_2(15)$	$d_3(15)$
$16 = 2^4$	$x(16)$		16	$c_3(16)$	$d_1(16)$	$d_2(16)$	$d_3(16)$

Figure 11. Décomposition en ondelettes orthonormales invariante par translation et unidimensionnelle ($J = 4$, $L = 3$).

tion et n coefficients relatifs aux détails à chaque échelle. Ceux-ci sont stockés dans une matrice comme dans la figure 11 où $n = 16$ ($J = 4$) et $L = 3$.

Comment ces coefficients sont-ils calculés ? En fait, tous les coefficients en ondelettes invariants par translation relatifs à l'approximation (détails resp.) à une échelle j d'un signal sont des coefficients en ondelettes de Mallat relatifs à l'approximation (détails resp.) à une échelle j d'une version tradatée du signal original. Nous définissons $x(n - i + 1) \dots x(n)x(1)x(2) \dots x(n - i)$ le signal original ($x(1) \dots x(n)$) tradaté à droite de i unités. Par exemple dans la figure 11, les coefficients d'ondelettes invariant par translation écrit en gras sont les coefficients de Mallat du signal original. Les coefficients d'ondelettes invariant par translation écrits en italique sont des coefficients d'ondelettes de Mallat du signal original tradaté à droite de un. Les coefficients d'ondelettes invariant par translation soulignés sont les coefficients d'ondelettes de Mallat du signal original tradaté à droite de 2. Ces coefficients invariants par translation sont facilement calculables par un algorithme rapide semblable à l'algorithme de Mallat. Il s'effectue en $O(n \log(n))$. Remarquons que si nous tradatons le signal original, ses coefficients invariants par translation sont les coefficients invariants par translation du signal original permuté.

3. LOGICIELS POUR ONDELETES

L'expérimentation numérique est indispensable pour comprendre la portée des résultats et des algorithmes de traitement du signal. WaveLab est une boîte

à outils programmée dans l'environnement numérique de Matlab. Ce logiciel est disponible gratuitement sur internet. LastWave est un autre environnement de traitement du signal et de l'image en ondelettes, écrit en C, par Emmanuel Bacry et ses collaborateurs. Il est gratuit et n'utilise aucun autre logiciel commercial. Enfin d'autres logiciels gratuits existent. Des liens vers de nouveaux logiciels ainsi que des informations sur la *Wavelet Digest Newsletter* sont disponibles sur <http://www.wavelet.org>.

3.1. WaveLab

WaveLab est une bibliothèque de fonctions MatLab portant sur les ondelettes et les transformées temps-fréquence associées. Elle est maintenue et améliorée à l'Université de Stanford par David Donoho et ses collaborateurs. Elle nécessite l'achat de Matlab, qui offre un environnement interactif de calcul numérique et de visualisation. La version 0.800 de WaveLab comprend plus de 800 fichiers, dont des programmes, des données, de la documentation, qui peuvent être téléchargés à <http://www-stat.stanford.edu/~wavelab>. Des versions sont disponibles pour les stations de travail Unix, Linux, Macintosh et PC (Windows) (MALLAT, 1988).

3.2. LastWave

LastWave est un environnement de traitement du signal et de l'image, écrit en C pour les ordinateurs X11/Unix et Macintosh. Ce logiciel est gratuit et autonome et ne nécessite pas de logiciel commercial additionnel, et peut être obtenu sur Internet à <http://wave.cmap.polytechnique.fr/soft/LastWave/>. LastWave a été créé et est maintenu par Emmanuel Bacry à l'Ecole Polytechnique en France. Il comprend un langage en ligne de commande, et un langage graphique orienté objet de haut niveau pour afficher des objets simples (boutons, chaînes,...) et plus complexes (signaux, images, transformées en ondelettes, plans temps-fréquence,...). Les procédures numériques et les commandes sont regroupées dans des boîtes à outils indépendantes. Une documentation en ligne exhaustive est disponible. De nouvelles commandes peuvent être ajoutées par le langage de commande ou des procédures en C. Ce logiciel évolue rapidement avec des boîtes à outils qui proviennent d'utilisateurs sur Internet (MALLAT, 1988).

4. EN GUISE DE CONCLUSION

Dans cette note technique, nous avons mis en évidence le mécanisme des ondelettes. En réalité, nous avons défini la transformée en ondelettes, nous avons souligné ses propriétés et fourni des illustrations. Les avantages de l'analyse du signal par ondelettes et son efficacité ont été remarqués par une comparaison avec la transformée de Fourier. A ce stade, nous pouvons conclure que le succès des ondelettes provient non seulement de son analyse temps-fréquence mais aussi de ses algorithmes rapides.

BIBLIOGRAPHIE

- BONJOUR J.D. [1999]. *Introduction à Matlab et GNU Octave*. Support du cours "Informatique de l'ingénieur" pour les étudiants en Sciences et ingénierie de l'environnement de l'ENAC, EPFL à Lausanne.
(disponible sur http://enacit1.epfl.ch/cours_matlab/ consulté le 21/03/2008)
- CHARLES C. [2003]. *Some wavelet applications to signal and image processing*. PhD Thesis. FUNDP.
- DONOHO D.L., COIFMAN R.R. [1995]. *Translation-invariant denoising*. Wavelets and Statistics, A. Antoniadis and G. Oppenheim, Springer-Verlag.
- MALLAT S. [1988]. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press.
- STRANG G. [1993]. *Wavelet transforms versus Fourier transforms*. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 28 :288-305.
- WAVELAB <http://www-stat.stanford.edu/~wavelab/> (consulté le 2 avril 2010).