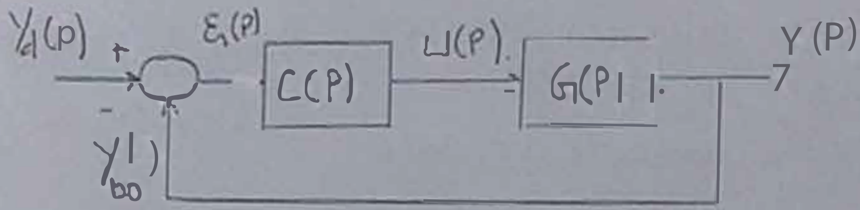
Problème



$$G(P) = \frac{100}{(1+10^{-3}P)(1+10^{-4}P)}$$

$G_{bo}(P) = C(P) \cdot G(P)$: fonction de transfert de la boucle ouverte $G_{bo}(P) = \dfrac{Y_{bo}(P)}{\varepsilon_1(P)}$

→ Dans l'exercice $Y_{bo}(P) = Y(P)$.

$G_{BF}(P) = \dfrac{G_{bo}(P)}{1+G_{bo}(P)}$: fonction de transfert de la boucle fermée $G_{BF}(P) = \dfrac{Y(P)}{Y_d(P)}$

Remarque :

Le calcul des marges de stabilité (marge de gain et marge de phase) se fait toujours à partir de $G_{bo}(P)$

Rappel de cours

Cahier des charges pour la commande

→ Rapidité

→ Stabilité

→ Précision

Rapidité

- Réglage de ω_{odb} de $G_{bo}(P)$
- Plus $\omega_{odb} \nearrow$, plus $t_{r5\%} \searrow$ et plus le système en boucle fermée est rapide.

Stabilité

- Réglage des marges de stabilité
- Pour les méthodes que nous étudions dans cette UE, nous nous intéressons principalement au réglage de la marge de phase M_φ
- Plus $M_\varphi \nearrow$, plus l'amplitude des vibration de la réponse indicielle de la fonction de transfert boucle fermée $G_{Bf}(P)$ seront faibles

Précision

- Action sur l'erreur statique $\varepsilon_{stat/cons}$ par rapport à la consigne $Y_d(P)$

$$\varepsilon_{stat/cons} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon_r(t)$$

avec $\varepsilon_r(t) = y_d(t) - y(t)$

$$\varepsilon_{stat/cons} = \lim_{P \to 0} P\,\varepsilon_r(P)$$

$$= \lim_{P \to 0} P\left[Y_d(P) - Y(P)\right]$$

$$= \lim_{P \to 0} P\,\frac{Y_d(P) - Y(P)}{Y_d(P)}\,Y_d(P)$$

$$= \lim_{P \to 0} \frac{Y_d(P) - Y(P)}{Y_d(P)}\,|Y_d|$$

si $Y_d(P) = \frac{|Y_d|}{P}$ [échelon d'amplitude $|Y_d|$]

$$\boxed{\varepsilon_{stat/cons} = |Y_d| \lim_{P \to 0}\left[1 - G_{Bf}(P)\right] \quad \text{avec } G_{Bf}(P) = \frac{Y(P)}{Y_d(P)}}$$

Traduction d'un cahier des charges sous forme d'équations

Rapidité

- Fixer ω_{odb}

$$\boxed{|G_{bo}(\omega_{odb})|_{db} = 0 \quad \text{ou} \quad |G_{bo}(\omega_{odb})| = 1}$$

Stabilité

- Fixer M_φ

$$\boxed{\varphi\left[G_{bo}(\omega_{odb})\right] = M_\varphi - \pi}$$

Précision

- Assurer une erreur statique nulle

$$\boxed{\varepsilon_{stat/cons} = 0}$$

Retour au TD

Correcteur proportionnel :

$C(p) = C_1(p) = K_p$

1 - Calcul de K_p pour avoir

- $M_\varphi = \pi/4$
- $\omega_{odb} = \omega_0$

- Traduction du cahier des charges

$$\begin{cases} M_\varphi = \pi/4 \\ \omega_{odb} = \omega_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \varphi[G_{bo}(\omega_0)] = M_\varphi - \pi = \pi/4 - \pi = -3\pi/4 \quad \cdots ⓐ \\ |G_{bo}(\omega_0)| = 1 \quad \cdots ⓑ \end{cases}$$

ⓐ $\longrightarrow \varphi\left[G_{bo}(\omega_0)\right] = -3\pi/4$

$$G_{bo}(p) = C_1(p) \cdot G(p) = K_p\, G(p) = \frac{100\, K_p}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

avec $\tau_1 = 10^{-3}$ et $\tau_2 = 10^{-4}$

$$G_{bo}(\omega) = \frac{100\, K_p}{(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)} = \frac{100\, K_p}{(1-\tau_1\tau_2\omega^2)+j(\tau_1+\tau_2)\omega}$$

$$G_{bo}(\omega_0) = \frac{100\,K_p}{(1-\tau_1\tau_2\omega_0^2) + j(\tau_1+\tau_2)\omega_0}$$

Ainsi

(a) $\longrightarrow \underset{\overset{\|}{0}}{\mathrm{Arg}[100\,K_p]} - \mathrm{Arg}\left[(1-\tau_1\tau_2\omega_0^2) + j(\tau_1+\tau_2)\omega_0\right] = \frac{-3\pi}{4}$

$$\longrightarrow -\mathrm{Arctg}\left[\frac{(\tau_1+\tau_2)\omega_0}{1-\tau_1\tau_2\omega_0^2}\right] = -3\pi/4$$

$$\longrightarrow \mathrm{Arctg}\left[\frac{(\tau_1+\tau_2)\omega_0}{1-\tau_1\tau_2\omega_0^2}\right] = 3\pi/4$$

$$\longrightarrow \frac{(\tau_1+\tau_2)\omega_0}{1-\tau_1\tau_2\omega_0^2} = \mathrm{tg}(3\pi/4) = -\underline{1}$$

$$\longrightarrow \tau_1\tau_2\omega_0^2 - (\tau_1+\tau_2)\omega_0 - \underline{1} = 0$$

Résolution de l'équation du 2nd ordre

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega_{01} = \dfrac{(\tau_1+\tau_2) + \sqrt{(\tau_1+\tau_2)^2 + 4\tau_1\tau_2}}{2\tau_1\tau_2} \\[2ex] \omega_{02} = \dfrac{(\tau_1+\tau_2) - \sqrt{(\tau_1+\tau_2)^2 + 4\tau_1\tau_2}}{2\tau_1\tau_2} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau_1 = 10^{-3} \\ \tau_2 = 10^{-4} \end{cases}$$

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega_{01} = 1{,}1844 \cdot 10^4 \text{ rad/s} & \text{solution retenue} \\ \omega_{02} = -844{,}28 \text{ rad/s} & \text{solution non retenue} \end{cases} \rightarrow \omega_0 > 0$$

Ainsi

$\omega_0 = 1,1844 \cdot 10^4$ rad/s

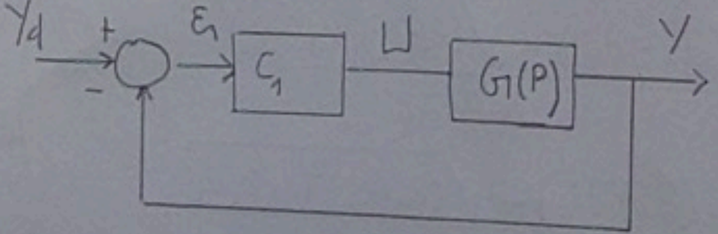
A présent ω_0 est connue, il est possible de calculer le gain du correcteur K_p à partir de l'équation (b) du cahier des charges.

$$\text{(b)} \rightarrow \frac{100\, K_p}{\sqrt{1+(\tau_1 \omega_0)^2}\sqrt{1+(\tau_2 \omega_0)^2}} = 1$$

$$\rightarrow K_p = \frac{\sqrt{[1+(\tau_1\omega_0)^2][1+(\tau_2\omega_0)^2]}}{100} \quad \text{avec} \begin{cases} \tau_1 = 10^{-3} \\ \tau_2 = 10^{-4} \\ \omega_0 = 1,1844 \cdot 10^4 \end{cases}$$

A.N

$$\boxed{K_p = 0,1843}$$



$$\boxed{C_1 = K_p = 0,1843}$$

2 - Calcul de $\varepsilon_{stat/cons}$

$$\varepsilon_{stat/cons} = |Y_d| \lim_{p \to 0} \left[1 - G_{Bf}(p) \right]$$

avec $|Y_d| = 1$: échelon d'amplitude unité.

$$G_{Bf}(p) = \frac{G_{bo}(p)}{1 + G_{bo}(p)} = \frac{K_p\, G(p)}{1 + K_p\, G(p)}$$

$$G_{Bf}(p) = \frac{K_p \dfrac{100}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}}{1 + K_p \dfrac{100}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}}$$

$$\lim_{p \to 0} G_{Bf}(p) = \frac{100 K_p}{1 + 100 K_p}$$

Ainsi

$$\varepsilon_{stat/cons} = 1 - \frac{100 K_p}{1 + 100 K_p} = \frac{1}{1 + 100 K_p}$$ avec $K_p = 0{,}1843$

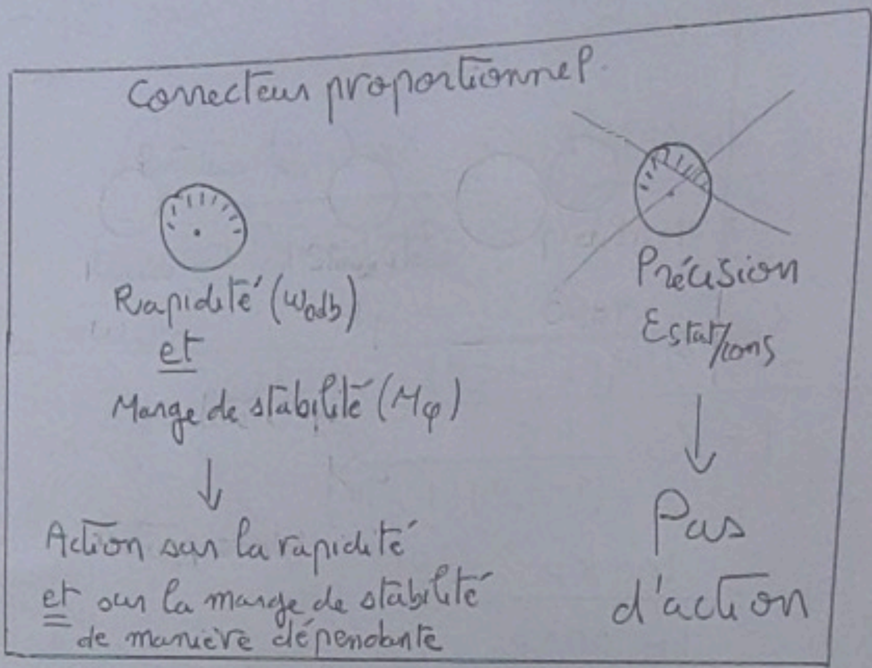
$$\boxed{\varepsilon_{stat/cons} = 0{,}0515 \neq 0}$$

Exemple

Si la consigne $y_d(t)$ est un échelon d'amplitude $|Y_d| = 15$ alors, lorsque $t \to \infty$ $\varepsilon_{stat/cons} = 15 \cdot 0{,}0515 = 0{,}7725$

En régime permanent $(t \to \infty)$, la sortie $y(t)$ tendra vers $\lim_{t \to \infty} y(t) = 15 - 0{,}7725 = 14{,}2275$

3- Non, si K_p modifie ω_{0db}, elle modifie également la M_φ



Correcteur proportionnel dérivé à avance de phase

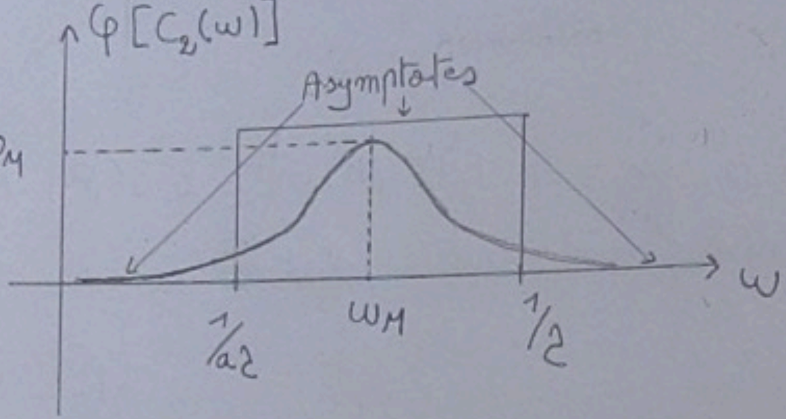
$$C(p) = C_{2}(p) = K \frac{1+a\tau p}{1+\tau p} \qquad a > 1$$

$$\omega_M = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$$

$$\varphi_M = \mathrm{ArcSin}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$$

Rappel de cours

- Diagramme de Bode de phase du correcteur dérivée à avance de phase [$C_2(p)$ dans l'exercice]



$C_2(\omega)$ permet d'ajouter de la phase à $G_{bo}(\omega)$. En effet

$$\varphi[G_{bo}(\omega)] = \varphi[C_2(\omega)] + \varphi[G(\omega)]$$

Pour régler la marge de phase de M_φ de $G_{bo}(\omega)$ il faut ajouter de la phase à la pulsation ω_{0db}. Nous allons faire en sorte que $\omega_M = \omega_{0db}$ de manière à ce que la phase ajoutée par $C_2(\omega)$ soit $\varphi[C_2(\omega_M = \omega_{0db})] = \varphi_M$

Ainsi

$\boxed{\omega_M = \omega_{0db}}$ et $\boxed{\varphi[C_2(\omega_M = \omega_{0db})] = \varphi_M}$

Retour au TD :

1- Calculer les paramètre K, a et τ de $C_2(P)$ pour répondre au cahier des charges suivant

$$\begin{cases} M_\varphi = \pi/4 \\ \omega_{0db} = \omega_1 = 2 \cdot \omega_0 = 2 \cdot 1{,}1844 \cdot 10^4 = 2{,}3689 \cdot 10^4 \\ \text{Réglage optimal du correcteur, c'est à dire } \begin{cases} \omega_M = \omega_{0db} \\ \varphi[C_2(\omega_M = \omega_{0db})] = \varphi_M \end{cases} \end{cases}$$

- Traduction du cahier des charges :

$$\begin{cases} M_\varphi = \pi/4 \\ \omega_{0db} = 2{,}3689 \cdot 10^4 \\ \text{Réglage optimal} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \varphi[G_{bo}(\omega_{0db})] = M_\varphi - \pi \quad \text{(c)} \\ |G_{bo}(\omega_{0db})| = \underline{1} \quad \dots \text{(d)} \\ \omega_M = \omega_{0db} \text{ et } \varphi[C_2(\omega_{0db})] = \varphi_M \quad \dots \text{(e)} \end{cases}$$

(c) $\longrightarrow \varphi[G_{bo}(\omega_{0db})] = \varphi[C_2(\omega_{0db}) \cdot G(\omega_{0db})] = \pi/4 - \pi$

$= -3\pi/4$

$$\longrightarrow \underbrace{\varphi[C_2(\omega_{0db})]}_{\varphi_M} + \varphi[G(\omega_{0db})] = -3\pi/4$$

$$\longrightarrow \varphi_M = -\varphi[G(\omega_{0db})] - 3\pi/4$$

(6)
TD4

$$G(P) = \frac{100}{(1+\tau_1 P)(1+\tau_2 P)} \quad \begin{cases} \tau_1 = 10^{-3} \\ \tau_2 = 10^{-4} \end{cases}$$

$$G(\omega) = \frac{100}{(1+j\tau_1\omega)(1+j\tau_2\omega)}$$

Ainsi

(c) $\rightarrow \varphi_M = -\underbrace{\left[\mathrm{Arg}(100) - \mathrm{Arg}(1+j\tau_1\omega_{0db}) - \mathrm{Arg}(1+j\tau_2\omega_{0db})\right]}_{\varphi[G(\omega_{0db})]}$

$- 3\pi/4$

$\rightarrow \varphi_M = -\left[0 - \mathrm{Arctg}(\tau_1\omega_{0db}) - \mathrm{Arctg}(\tau_2\omega_{0db})\right]$
$-3\pi/4$

$\tau_1 = 10^{-3}$, $\tau_2 = 10^{-4}$ et $\omega_{0db} = 2{,}3689 \cdot 10^4$

Ainsi

$\rightarrow \varphi_M = \mathrm{Arctg}(23{,}689) + \mathrm{Arctg}(2{,}3689) - 3\pi/4$

$\rightarrow \varphi_M = 0{,}3438$

$\rightarrow \mathrm{ArcSin}\left(\frac{a-1}{a+1}\right) = 0{,}3438 \Rightarrow a = \frac{1+\sin(0{,}3438)}{1-\sin(0{,}3438)}$

$\rightarrow \boxed{a = 2{,}0769}$

(c) $\rightarrow \omega_M = \omega_{0db}$

$$\rightarrow \frac{1}{\tau\sqrt{a}} = \omega_{0db} = 2{,}3689 \cdot 10^4$$

$$\rightarrow \tau = \frac{1}{2{,}3689 \cdot 10^4 \sqrt{a}}$$ avec $a = 2{,}0169$

$$\boxed{\tau = 2{,}9724 \cdot 10^{-5}}$$

(d) $\rightarrow |G_{bo}(\omega_{0db})| = 1$

$$\rightarrow |C_2(\omega_{0db})| \, |G(\omega_{0db})| = 1$$

$$C_2(\omega_{0db}) = K \frac{1 + j a \tau \omega_{0db}}{1 + j \tau \omega_{0db}}$$

$$G(\omega_{0db}) = \frac{100}{(1 + j \tau_1 \omega_{0db})(1 + j \tau_2 \omega_{0db})}$$

(d) $$\rightarrow K \frac{\sqrt{1 + (a\tau\omega_{0db})^2}}{\sqrt{1 + (\tau\omega_{0db})^2}} \, 100 \, \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau_1\omega_{0db})^2}\sqrt{1 + (\tau_2\omega_{0db})^2}}$$

$$= 1$$

$$K = \frac{\sqrt{\left[1+(\tau\omega_{odb})^2\right]\left[1+(\tau_1\omega_{odb})^2\right]\left[1+(\tau_2\omega_{odb})^2\right]}}{100\sqrt{1+(a\tau\omega_{odb})^2}}$$

$\tau_1 = 10^{-3}$; $\tau_2 = 10^{-4}$; $\tau = 2{,}9724 \cdot 10^{-5}$; $\omega_{odb} = 2{,}3689 \cdot 10^{4}$;

$a = 2{,}0169$.

A.N

$$\boxed{K = 0{,}4293}$$

Ainsi

$$\boxed{C_2(P) = K\,\frac{1+a\tau P}{1+\tau P} \quad \text{avec} \begin{cases} K = 0{,}4293 \\ a = 2{,}0169 \\ \tau = 2{,}9724 \cdot 10^{-5} \end{cases}}$$

2- Calcul de $\varepsilon_{srat/cons}$

$$\varepsilon_{srat/cons} = |Y_d| \lim_{P \to 0} \left[1 - G_{BF}(P)\right] \quad \text{avec } |Y_d| = 1$$

$$G_{BF}(P) = \frac{C_2(P)\,G(P)}{1 + C_2(P)\,G(P)}$$

$$\lim_{P \to 0} G_{BF}(P) = \frac{C_2(0)\,G(0)}{1 + C_2(0)\,G(0)} = \frac{K \cdot 100}{1 + K \cdot 100} = \frac{0{,}4293 \cdot 100}{1 + 0{,}4293 \cdot 100}$$

$$= 0{,}9772$$

Ainsi

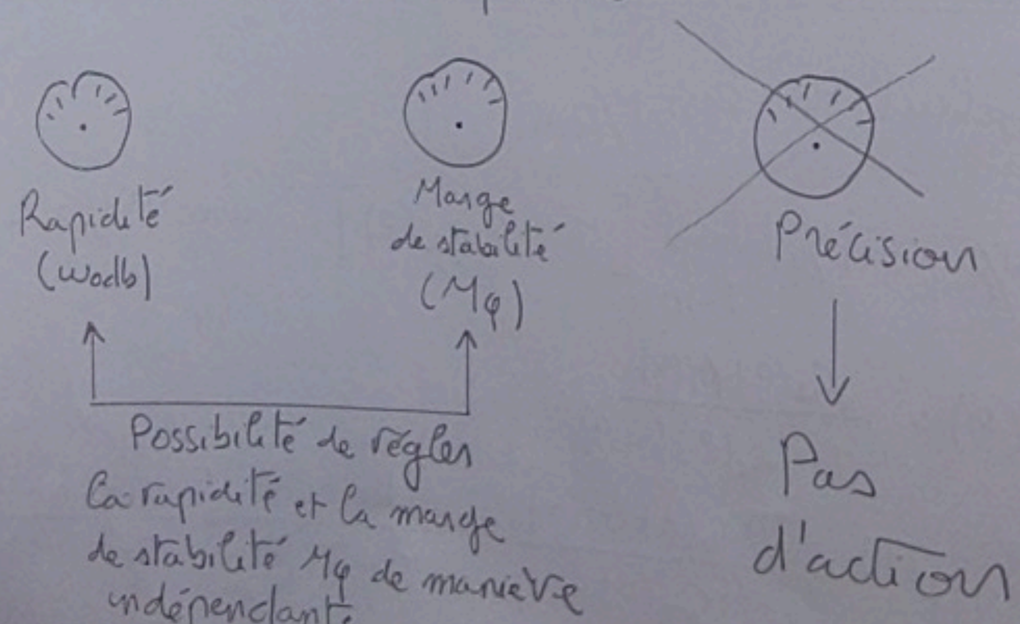
$$\varepsilon_{stat/cons} = 1 - 0,9772$$

$$\boxed{\varepsilon_{stat/cons} = 0,0228 \neq 0}$$

3. Avantage : possibilité de régler la rapidité (ω_{odb}) et la marge de stabilité (M_φ) de manière <u>indépendante</u>

Inconvenient : correcteur non précis → pas d'action sur la précision → $\varepsilon_{stat/cons} \neq 0$

Correcteur proportionnel dérivé à avance de phase



Correcteur dynamique avec une action intégrale

Action intégrale ⟶ pôle à zéros sur le correcteur.

Ici, c'est à vous de proposer une structure de $C(P)$ en se basant sur le cahier des charges.

- $\omega_{0db} = \omega_1 = 2{,}3689 \cdot 10^4$ .... (f)
- $M_\varphi = \pi/4$ (g)
- $\varepsilon_{stat/cons} = 0$ (h)
- $C(P) = G_3(P)$ doit compenser les pôles de $G_7(P)$ ... (i)

1- Traduction du cahier des charge

(f) $\longrightarrow |G_{bo}(\omega_{0db})| = 1$

(g) $\longrightarrow \varphi[G_{bo}(\omega_{0db})] = M_\varphi - \pi = \pi/4 - \pi = -3\pi/4$

(h) $\rightarrow$ plusieurs solutions sont possibles. Dans le cadre de l'exercice, nous allons étudier la solution basée sur une action intégrale pour assurer une précision en boucle fermée. Une action intégrale simplifiée consiste à imposer un pole $p=0$ au correcteur $C_3(P)$

(i) $\rightarrow$ Sachant de $G_{bo}(P) = C_3(P) \cdot G(P)$, pour compenser les pôles de $G(P)$, il faut que les zéros de $C_3(P)$ soient égaux aux pôles de $G(P)$

Une structure possible de $C_3(P)$ est:

$$C_3(P) = K_3 \frac{(1+\tau_{c_1}P)(1+\tau_{c_2}P)}{P\,(1+\tau_d P)}$$

Dans cette structure $C_3(P)$ contient

- Deux zéros $\begin{cases} P_1 = -1/\tau_{c_1} \\ P_2 = -1/\tau_{c_2} \end{cases}$ pour pouvoir compenser les pôles de $G(P)$

- Un pôle à zéro $p = 0$ pour l'action intégrale

- Un gain K_3 et un pôle non nul $p = -1/\tau_d$ pour répondre aux critères f et g du cahier des charges.

Ainsi

$$G_{bo}(P) = C_3(P) \cdot G(P)$$

$$G_{bo}(P) = K_3 \frac{(1+\tau_{c_1}P)(1+\tau_{c_2}P)}{P(1+\tau_d P)} \cdot \frac{100}{(1+\tau_1 P)(1+\tau_2 P)}$$

2- Traduction du cahier des charges

$$\begin{cases} (f) \rightarrow \left| G_{Tbo}(\omega_{0dB}) \right| = 1 \\ (g) \rightarrow \varphi\left[G_{Tbo}(\omega_{0dB}) \right] = -3\pi/4 \\ (h) \rightarrow C_3(p) \text{ contient un pôle } p = 0. \\ (i) \rightarrow \tau_{c_1} = \tau_1 \text{ et } \tau_{c_2} = \tau_2 \end{cases}$$

$$(i) \rightarrow G_{bo}(p) = K_3 \frac{100}{p(1+\tau_d p)}$$

$$G_{bo}(\omega) = \frac{100 K_3}{j\omega (1 + j\tau_d \omega)}$$

$$(g) \rightarrow \underbrace{\underset{0}{\underset{\parallel}{\mathrm{Arg}[100K_3]}} - \overset{\pi/2}{\overset{\parallel}{\mathrm{Arg}(j\omega_{0dB})}} - \mathrm{Arg}(1 + j\tau_d \omega_{0dB})}_{\varphi[G_{Tbo}(\omega_{0dB})]} = -3\pi/4$$

$$\rightarrow 0 - \pi/2 - \mathrm{Arctg}\left[\tau_d \omega_{0dB}\right] = -3\pi/4$$

$$\rightarrow \mathrm{Arctg}\left[\tau_d \omega_{0dB}\right] = \pi/4$$

$$\rightarrow \tau_d \omega_{0dB} = 1 \Rightarrow \tau_d = \frac{1}{\omega_{0dB}} = \frac{1}{2{,}3689 \cdot 10^4}$$

$$\rightarrow \boxed{\tau_d = 4{,}2214 \cdot 10^{-5}}$$

(f) $\rightarrow |G_{BO}(\omega_{0dB})| = 1$

$$\rightarrow \frac{100\, K_3}{\omega_{0dB}\sqrt{1+(\tau_d \omega_{0dB})^2}} = 1$$

$$\rightarrow K_3 = \frac{\omega_{0dB}}{100}\sqrt{1+(\tau_d\, \omega_{0dB})^2}$$

$$\begin{cases} \tau_d = 4{,}2214 \cdot 10^{-5} \\ \omega_{0dB} = 2{,}3689 \cdot 10^{4} \end{cases}$$

$$\boxed{K_3 = 335{,}0143}$$

3- Calcul de $\varepsilon_{stat/cons}$ (Question supplémentaire)

$$\varepsilon_{stat/cons} = |Y_d| \lim_{p\to 0} \left[1 - G_{BF}(p)\right] \quad \text{avec } |Y_d| = 1$$

$$G_{BF}(p) = \frac{C_3(p)\, G(p)}{1 + C_3(p)\, G(p)}$$

$$G_{BF}(0) = \frac{C_3(0) \cdot G(0)}{1 + C_3(0)\, G(0)}$$

$$\begin{cases} G(0) = 100 \\ \lim\limits_{p\to 0} C_3(p) = \lim\limits_{p\to 0} K_3 \dfrac{(1+\tau_{c_1} p)(1+\tau_{c_2} p)}{p(1+\tau_d\, p)} = \infty \end{cases}$$

Grâce à p au dénominateur de $C_3(p)$ [action intégrale]
$C_3(0) \to \infty$

Ainsi

$G_{Bf}(0) \to \underline{1}$

De ce fait

$$\varepsilon_{stat/cons} = 1 - G_{Bf}(0) = 1 - 1 = 0$$

$\longrightarrow$ Système en boucle fermée précis

$$\lim_{t \to \infty} y_d(t) - y(t) = 0$$

Correcteur dynamique avec une action intégrale

Rapidité (ω_{0db})

Marge de stabilité (M_φ)

Précision $\varepsilon_{stat/cons}$

Possibilité de régler la rapidité et la marge de stabilité M_φ de manière indépendante

$\downarrow$

Toujours précis $\varepsilon_{stat/cons} = 0$ grâce au pôle $P=0$ du correcteur (action intégrale)