Projet 3EE103 :

SIMULATION DU SYSTEME SOLAIRE

Réalisé par : Zahra BENSLIMANE, Lina BELHAMRI,

Yasmine DAHMANI, Siwar BEN GUIRAT.

Zahrahafida.benslimane@gmail.com
lina.belhamri@gmail.com
yasmine.dahmani135@gmail.com
siwarbenguirat99@gmail.com

Groupe : A2

Chargé du TP : Antoine COUDERT

2020/2021

Table des matières

INTRODUCTION :

Parmi les 3 lois de Newton, il existe une loi qui permet de résoudre les systèmes à deux corps dite « force gravitationnelle universelle ».

Pour pouvoir étudier notre système à N-Corps il est primordiale d'abord d'étudier la précision sur les quatre méthodes numériques : Euler, différences finies, Runge Kutta2, Runge Kutta4 sur un système de 2-Corps pour enfin pourvoir considérer toutes les interactions présentes dans un système solaire constitué de 8 planètes, la lune et le soleil en utilisant la méthode la plus précise.

Il est également nécessaire d'avoir les positions et les vitesses initiales des différents astres pour pouvoir calculer leurs trajectoires, pour cela nous avons supposé que les trajectoires étaient circulaires.

$$V_{initiale} = \frac{2\pi \ \times Période\ orbitale\ d'un\ astre}{Distance\ entre\ deux\ astres}$$

I. Etape 1 : Système Terre-Lune simplifié

Dans cette partie nous nous sommes intéressés au système terre-lune simplifié dans un plan 2D. En premier lieu, nous allons supposer que le terre est fixe et nous étudierons la rotation de la lune au tour de la terre. Pour cela nous allons utiliser la loi universelle de la gravitation qui est exprimée par [1] :

$$M_L \frac{d^2}{dt^2} r_L(t) = F_g = \frac{GM_L M_T}{r^2(t)}\left(-\frac{r_L(t)}{r(t)}\right) \quad (1)$$

Avec $p_L(t) = \begin{pmatrix} x_L(t) \\ y_L(t) \end{pmatrix}$ est le vecteur position de la lune, $r(t) = \|p_L(t)\|$, M_T est la masse de la Terre, M_L la masse de la lune et G est la constante gravitationnelle. On commence par résoudre l'équation de la loi universelle de la gravitation :Nous savons que $\overrightarrow{F_g} = M_L \times \overrightarrow{a_L}$ avec $\overrightarrow{a_L} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x_L(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 y_L(t)}{dt^2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{F_g} = \begin{pmatrix} \frac{GM_L M_T}{r^3(t)} \times (x_L(t) - x_T(t)) \\ \frac{GM_L M_T}{r^3(t)} \times (y_L(t) - y_T(t)) \end{pmatrix}$ et d'après les conditions initiales nous avons pris la terre comme étant fixe donc $\begin{cases} x_T(t) = 0 \\ y_T(t) = 0 \end{cases}$ donc nous concluons que :

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_L(t)}{dt^2} = \frac{-GM_T}{r^3(t)} x_L(t) \\ \frac{d^2 y_L(t)}{dt^2} = \frac{-GM_T}{r^3(t)} y_L(t) \end{cases} \quad (2)$$

On utilise les 4 méthodes numériques vue en cours qui sont Euler, différences finies et Runge Kutta 2 et 4 on va résolue ces équations différentielles.

1. La méthode d'Euler [2] :

$$\begin{cases} x_L(t+1) = x_L(t) + v_{x_L}(t)\Delta t \\ y_L(t+1) = y_L(t) + v_{y_L}(t)\Delta t \end{cases} \quad \text{Et} \quad \begin{cases} v_{x_L}(t+1) = v_{x_L}(t) - \frac{\Delta t G M_T}{r^3(t)} x_L(t) \\ v_{y_L}(t+1) = v_{y_L}(t) - \frac{\Delta t G M_T}{r^3(t)} y_L(t) \end{cases} \quad (3)$$

2. La méthode des différences finies [3] :

D'après le cours 4 de méthode numérique la méthode des différences finies s'exprime sous la forme suivante :

$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \frac{x(t+1) - 2x(t) + x(t-1)}{\Delta t^2}$ donc à partir de l'équation (2) on peut conclure que

$$\begin{cases} x_L(t+1) = 2x_L(t) - x_L(t-1) - \frac{\Delta t^2 G M_T}{r^3(t)} x_L(t) \\ y_L(t+1) = 2y_L(t) - y_L(t-1) - \frac{\Delta t^2 G M_T}{r^3(t)} y_L(t) \end{cases} \quad \text{D'où} \quad \begin{cases} x_L(t+1) = \left(2 - \frac{\Delta t^2 G M_T}{r^3(t)}\right) x_L(t) - x_L(t-1) \\ y_L(t+1) = (2 - \frac{\Delta t^2 G M_T}{r^3(t)}) y_L(t) - y_L(t-1) \end{cases}$$

3. La méthode du Runge Kutta 2[4] :

L'équation (2) est une équation différentielle d'ordre 2, or pour appliquer la méthode de Runge Kutta 2 il faut que l'équation différentielle soit d'ordre 1 pour cella on propose que :

$$\begin{cases} \frac{dp_L(t)}{dt} = v_L(t) = f_1(t, p_L, v_L) \\ \frac{dv_L(t)}{dt} = \frac{-GM_T}{r^3(t)} p_L(t) = f_2(t, p_L, v_L) \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} p_L(t+\Delta t) = p_L(t) + \frac{\Delta t}{2}[K_1 + K_2] \\ p_L(t+\Delta t) = p_L(t) + \frac{\Delta t}{2}[L_1 + L_2] \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Avec} \begin{cases} K_1 = f_1(t_i, p_i, v_i) \\ K_2 = f_1(t_i + \Delta t, p_i + K_1 \Delta t, v_i + L_1 \Delta t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} L_1 = f_2(t_i, p_i, v_i) \\ L_2 = f_2(t_i + \Delta t, p_i + K_1 \Delta t, v_i + L_1 \Delta t) \end{cases}$$

4. La méthode de Runge-Kutta 4 [5] :

On utilise le groupe des deux EDO du premier ordre (3) développé pour RK2 pour calculer les différents coefficients de RK4.

$$\begin{cases} p_L(t + \Delta t) = r_L(t) + \dfrac{[K1 + 2K2 + 2K3 + K4]}{6} \\ v_L(t + \Delta t) = v_L(t) + \dfrac{[L1 + 2L2 + 2L3 + L4]}{6} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \begin{cases} K1 = \Delta t \,.\, f_1\left(t, p_L, v_L\right) \\ L1 = \Delta t \,.\, f_2\left(t, p_L, v_L\right) \end{cases} \\ \begin{cases} K2 = \Delta t \,.\, f_1\left(t + \dfrac{\Delta t}{2}, p_L + \dfrac{K1}{2}, v_L + \dfrac{L1}{2}\right) \\ L2 = \Delta t \,.\, f_2\left(t + \dfrac{\Delta t}{2}, p + \dfrac{K1}{2}, v_L + \dfrac{L1}{2}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} K3 = \Delta t \,.\, f_1\left(t + \dfrac{\Delta t}{2}, p_L + \dfrac{K2}{2}, v_L + \dfrac{L2}{2}\right) \\ L3 = \Delta t \,.\, f_2\left(t + \dfrac{\Delta t}{2}, p_L + \dfrac{K2}{2}, v_L + \dfrac{L2}{2}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} K3 = \Delta t \,.\, f_1\left(t + \Delta t, p_L + K3, v_L + L3\right) \\ L3 = \Delta t \,.\, f_2\left(t + \Delta t, p_L + K3, v_L + L3\right) \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

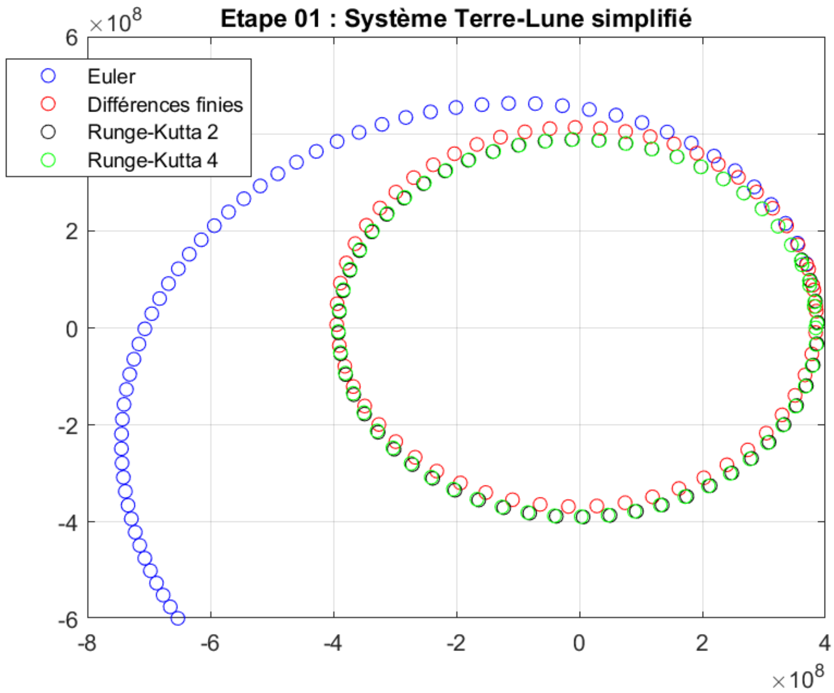

Figure 01 : Simulation de l'étape 01 avec les différentes méthodes numériques de calculs.

Observations :

On remarque que la méthode des différences finies, Runge-Kutta 2 et 4 ont quasiment le même degré de précision contrairement à Euler qui est très peu précise.

Pour la suite du projet nous avons choisi d'utiliser la méthode des différences finies et celle de Runge-Kutta 4.

Dans ce document nous détaillerons la méthode des différences finies.

II. Etape 2 : Système Terre-Lune

Dans cette étape, nous ne considérons plus que la terre est fixe (terre mobile), et par ce fait nous avons étudié la trajectoire e la terre et la lune au cours du temps.

Pour cela nous avons essayé de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} M_L \dfrac{d^2[p_L(t)-p_T(t)]}{dt^2} = \dfrac{-GM_L\,M_T}{r^2(t)} \left(\dfrac{-(\,p_L(t)-p_T(t)\,)}{r(t)}\right) \\ M_T \dfrac{d^2\,[p_T(t)-p_L(t)]}{dt^2} = \dfrac{-GM_L M_T}{r^2(t)} \left(\dfrac{-(\,p_T(t)-p_L(t)\,)}{r(t)}\right) \end{cases} \qquad (8)$$

Dans un premier temps, nous calculerons la position p(t+Δt) de la lune, en considérons la terre fixe, ce qui annulera la dérivé seconde de la position de la terre dans l'équation de la lune :

$$\frac{d^2p_L(t)}{dt^2} = \frac{-GM_T}{r^3(t)}\;[p_L(t)-\overbrace{p_T(t)}^{\text{constante}}] \qquad (9)$$

Ensuite, pour calculer les positions suivantes de la terre, nous devons considérer la lune comme étant fixe :

Pour ce fait, nous utiliseront la position de la lune à l'instant t et non pas celle de t+Δt calculer cela évitera d'avoir des calculs dépendant de de quel trajectoire calculer avant l'autre (terre ou lune) car ceci peut causer un problème surtout si une force d'un astre est beaucoup plus grande que l'autre (pour un système de 2 coups : si la masse d'un astre est considérablement plus grande que celle du deuxième).

$$\frac{d^2p_T(t)}{dt^2} = \frac{GM_T}{r^3(t)}\;[\overbrace{p_L(t)}^{\text{constante}}-p_T(t)] \;=\; \frac{-GM_T}{r^3(t)}\;[p_T(t)-\overbrace{p_L(t)}^{\text{constante}}] \qquad (10)$$

Nous calculons la nouvelle distance de $r(t)$ puis, nous refaisons le calcul :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x(t+\Delta t)-2x(t)+x(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \qquad (11)$$

$$r(t) = \sqrt{(x_L-x_T)^2+(y_L-y_T)^2} \qquad (12)$$

Donc pour la lune : $p_L(t+\Delta t) = \dfrac{-GM_T}{r^3(t)}\,[p_L(t)-p_T(t)]\quad \Delta t^2 \;+\; 2p_L - p_L(t-\Delta t)$ (13)

Pour la terre : $p_T(t+\Delta t) = \dfrac{-GM_T}{r^3(t)}\,[p_L(t)-p_T(t)]\Delta t^2 \;\; + 2p_T - p_T(t-\Delta t)$ (14)

III. Etape 3 : Système solaire simplifié

Dans cette étape nous avons étudié la rotation de 8 planètes (Mercure, Venus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune) autour de soleil en supposant que ce dernier est fixe et aucune interaction entre les planètes n'est prise en compte.

Le temps de simulation complet est égal à nombre des points (N) fois le pas de simulation (Δt).

D'où $\Delta t = \frac{T_{sim}-T_{initiale}}{N}$ avec $T_{initiale} = 0$ donc pour un temps de simulation égal à 12h on prend $\Delta t = 3600s$ et N=1000

1. Exemple Mercure :

$F_g{}^{Me} = M_{Me}\frac{d^2}{dt^2}p_{Me}(t) = \frac{-GM_SM_{Me}}{r^3(t)}\overrightarrow{p_{Me}(t)}$, avec $\overrightarrow{p_{Me}} = \begin{pmatrix} x_{Me}(t)-x_S(t) \\ y_{Me}(t)-y_S(t)\end{pmatrix}$

$M_{Me}\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{p_{Me}(t)}+\frac{GM_SM_{Me}}{r^3(t)}\overrightarrow{p_{Me}(t)}=0$ Or nous avons supposé les conditions initiales que le Soleil est fixe d'où : $\overrightarrow{p_{Me}}=\begin{pmatrix}x_{Me}(t)\\y_{Me}(t)\end{pmatrix}.\ \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{p_{Me}(t)}+\frac{GM_S}{r^3(t)}\overrightarrow{p_{Me}(t)}=0$

A partir de l'étape 1 l'équation de méthode des différences finies s'exprime sous la forme suivante :

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{x(t+\Delta t)-2x(t)+x(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$, donc à partir de l'équation d'avant on peut déduire que

$$x_{Me}(t+\Delta t)=2x_{Me}(t)-x_{Me}(t-\Delta t)-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}x_{Me}(t)$$

D'où

$$x_{Me}(t+\Delta t)=\left(2-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}\right)x_{Me}(t)-x_{Me}(t-\Delta t) \tag{15}$$

2. Le reste des planètes

De la même manière qu'on a procédé au calcul de Mercure on obtient ce système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l}
p_{Me}(t+\Delta t)=\left(2-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}\right)p_{Me}(t)-p_{Me}(t-\Delta t)\ \ldots\ldots..Mercure\\
p_{Ve}(t+\Delta t)=\left(2-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}\right)\ p_{Ve}(t)-p_{Ve}(t-\Delta t)\ \ldots\ldots..Venus\\
p_{T}(t+\Delta t)=\left(2-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}\right)p_{T}(t)-p_{T}(t-\Delta t)\ \ldots\ldots\ldots\ldots Terre\\
p_{Ma}(t+\Delta t)=\left(2-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}\right)p_{Ma}(t)-p_{Ma}(t-\Delta t)\ \ldots\ldots..Mars\\
p_{Ju}(t+\Delta t)=\left(2-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}\right)p_{Ju}(t)-p_{Ju}(t-\Delta t)\ \ldots\ldots.Jupiter\\
p_{Sa}(t+\Delta t)=\left(2-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}\right)p_{Sa}(t)-p_{Sa}(t-\Delta t)\ \ldots\ldots..Saturne\\
p_{Ur}(t+\Delta t)=\left(2-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}\right)p_{Ur}(t)-p_{Ur}(t-\Delta t)\ \ldots\ldots..Uranus\\
p_{Ne}(t+\Delta t)=\left(2-\frac{\Delta t^2GM_S}{r^3(t)}\right)p_{Ne}(t)-p_{Ne}(t-\Delta t)\ \ldots\ldots..Neptune
\end{array}\right. \tag{16}$$

IV. Etape 4 : Système solaire complet

Dans cette étape nous avons étudié la rotation de 9 planètes (Mercure, Venus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, Lune) On considèrera les interactions entre toutes les planètes en gardant la position du soleil fixe.

Le temps de simulation complet est égal à nombre des points (N) fois le pas de simulation (Δt).

D'où $\Delta t=\frac{T_{sim}-T_{initiale}}{N}$ avec $T_{initiale}=0$ donc pour un temps de simulation égal à 12h on prend $\Delta t=3600s$ et N=1000.

Pour cela nous avons résolue le système d'équations ci-dessous :

1. Exemple Venus :

$$M_{Ve}\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{p_{Ve}}(t) = M_{Ve}\sum F_{\overrightarrow{ext}} =$$

$$M_{Ve}\left[Fg^{Soleil} + Fg^{Mercure} + Fg^{Terre} + Fg^{Jupiter} + Fg^{Mars} + Fg^{Saturne} + Fg^{Uranus} + Fg^{Neptune} + Fg^{Lune}\right]$$

avec $\overrightarrow{p_{Ve}} = \begin{pmatrix} x_{Ve}(t) \\ y_{Ve}(t) \end{pmatrix}$

$$\frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{p_{Ve}}(t) = -\frac{GM_S}{rs^3(t)}[\overrightarrow{p_{Ve}} - \overrightarrow{p_S}] - \frac{GM_L}{rL^3(t)}[\overrightarrow{p_{Ve}} - \overrightarrow{p_L}] - \frac{GM_{Me}}{rMe^3(t)}[\overrightarrow{p_{Ve}} - \overrightarrow{p_{Me}}] - \frac{GM_T}{rT^3(t)}[\overrightarrow{p_{Ve}} - \overrightarrow{p_T}] - \frac{GM_{Ma}}{rMa^3(t)}[\overrightarrow{p_{Ve}} - \overrightarrow{p_{Ma}}] - \frac{GM_{Jup}}{rJup^3(t)}[\overrightarrow{p_{Ve}} - \overrightarrow{p_{Jup}}] - \frac{GM_{sat}}{rsat^3(t)}[\overrightarrow{p_{Ve}} - \overrightarrow{p_{Sat}}] - \frac{GM_{Ura}}{rUra^3(t)}[\overrightarrow{p_{Ve}} - \overrightarrow{p_{Ura}}] - \frac{GM_{Nep}}{rNep^3(t)}[\overrightarrow{p_{Ve}} - \overrightarrow{p_{Nep}}] \quad (17)$$

A partir de l'étape 1, l'équation de méthode des différences finies s'exprime sous la forme suivante :

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{x(t+\Delta t)-2x(t)+x(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$, donc à partir de l'équation d'avant on peut déduire que :

$$x_{Ve}(t+\Delta t) = -\frac{\Delta t^2 GM_S}{rs^3(t)}[x_{Ve}(t) - x_s(t)] - \frac{\Delta t^2 GM_L}{rL^3(t)}[x_{Ve}(t) - x_L(t)] - \frac{\Delta t^2 GM_{Me}}{rMe^3(t)}[x_{Ve}(t) - x_{Me}(t)] - \frac{\Delta t^2 GM_T}{rT^3(t)}[x_{Ve}(t) - x_T(t)] - \frac{\Delta t^2 GM_{Ma}}{rMa^3(t)}[x_{Ve}(t) - x_{Ma}(t)] - \frac{\Delta t^2 GM_{Jup}}{rJup^3(t)}[x_{Ve}(t) - x_{Jup}(t)] - \frac{\Delta t^2 GM_{Sat}}{rSat^3(t)}[x_{Ve}(t) - x_{Sat}(t)] - \frac{\Delta t^2 GM_{Ura}}{rUra^3(t)}[x_{Ve}(t) - x_{Ura}(t)] - \frac{\Delta t^2 GM_{Nep}}{rNep^3(t)}[x_{Ve}(t) - x_{Nep}(t)] + 2x_{Ve}(t) - x_{Ve}(t-\Delta t) \quad (18)$$

De la même manière on procède au calcul des positions pour les 9 autres planètes.

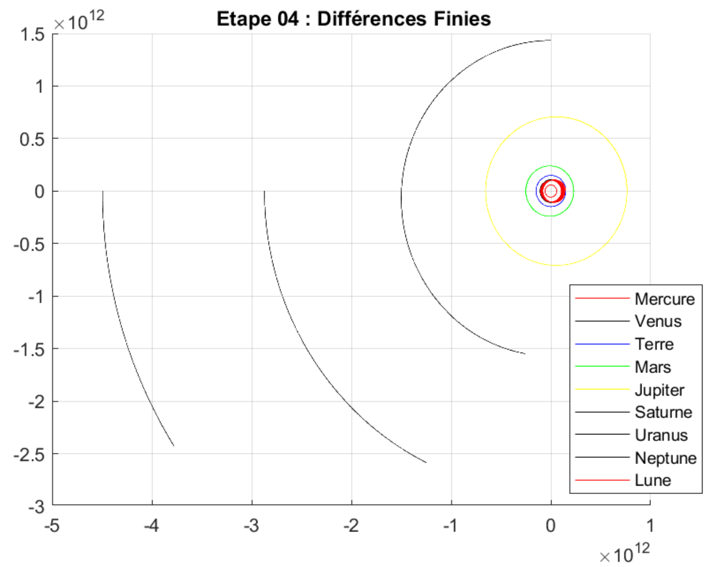

Figure 02 : Simulation DiffFinies9Force

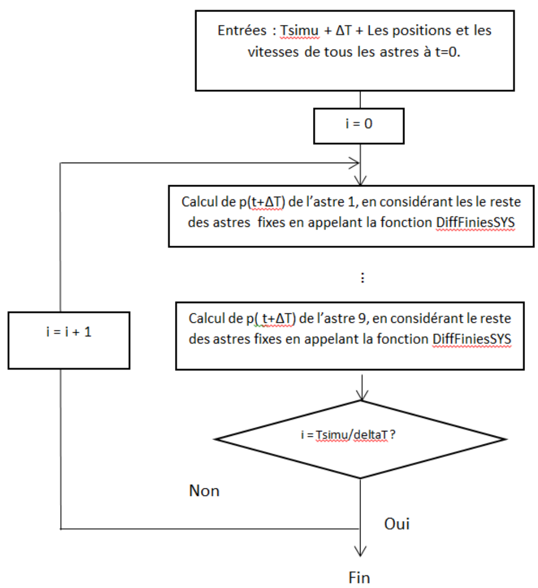

Figure 03 : Algorithme décrivant la fonction DiffFinies9Force

CONCLUSION :

La résolution du système solaire nécessite un grand nombre de calculs d’où l’utilisation des méthodes numériques ; Euler, Différences finies, Runge Kutta 2éme ordre et 4éme ordre mais également un raisonnement physique permettant d’établir les équations différentielles du mouvement des astres étudiés.

Grace aux algorithmes programmés et simulés en langage C et MATLAB (Tracés des trajectoires), On a conclu que la méthode des Différences finies et celle de Runge-Kutta 4, sont plus précises que Runge-Kutta 2 qui elle-même est plus précise que Euler.

Ce projet nous a permis de savoir manipuler les méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles ordinaire du premier et du deuxième ordre ainsi que la prise en main des structures et l’allocation dynamique mais également la manipulation des fichiers C sur MATLAB. Nous avons aussi développé le sens du travail en équipe et su l’importance de la communication entre les membres du groupe.

Cependant, nous avons fait face à plusieurs contraintes, notamment le fait que nous n’avons pas pu obtenir la bonne trajectoire décrivant le mouvement de la lune autours de la terre dans un système solaire (Etape 04) malgré maints essais.

Nous proposons comme amélioration d’étudier de plus près la trajectoire de la lune dans le cas du système solaire complet.

REMERCIMENTS :

Nous tenons à remercier Mr Antoine Coudert et Mr Thomas Dietenbeck pour leur précieuse aide à la compréhension des méthodes et pour acquérir des connaissances sur le système solaire et leur présence et soutien malgré les conditions sanitaires actuelles qui a été un obstacle ralentissant pour nous et pour les enseignants.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] : 3E103 - PROJET – DESCRIPTIFS.
[2] : Methode d’euler, Mohammed hichem هشام الأستاذ Zerrougui, 9 septembre 2020.
[3] : Topic 7a -- One-dimensional finite-difference method, 16 fevrier 2019.
[4] : Higher Order Differential Equations: Example Heun's Method: Part 1 of 3, 6 juil. 2010.
[5] : Runge kutta method second order differential equation good example(PART-2), EASY MATHS EASY TRICKS,08 Avril 2018.
[6] : Wikipédia (Recherche de la masse des astres + Période orbitale + Distances entre terre-Lune ou astres-Soleil + Constance gravitationnelle).