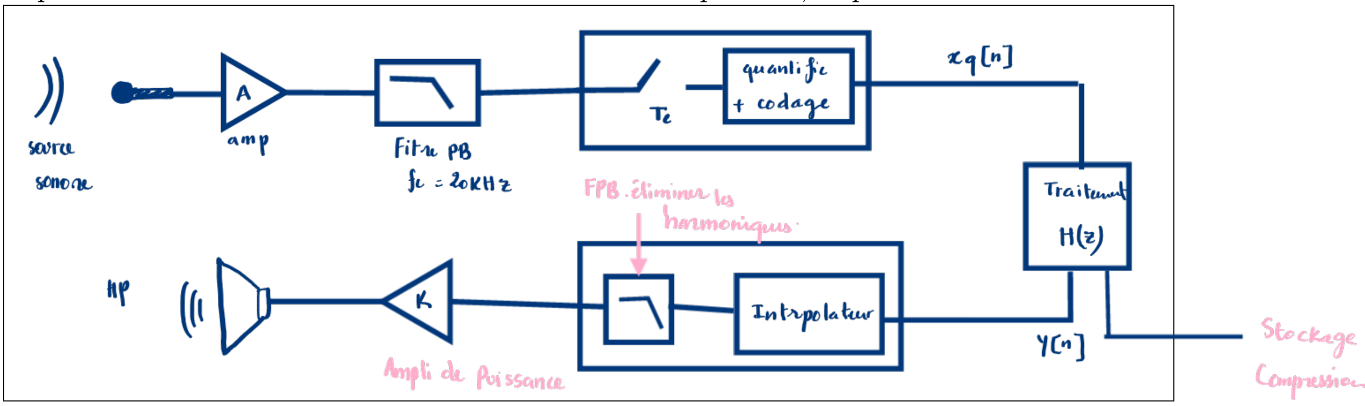
4AI08 : Traitement du signal audio

CC n°1 - Durée : 30 minutes

1. Représenter les éléments constitutifs d'une chaine d'acquisition, et préciser leur rôle :



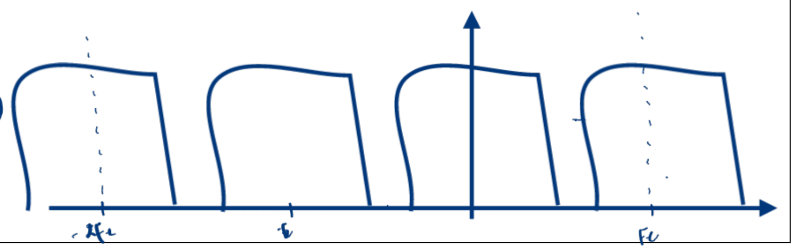
2. Soit $x(t)$ un signal à spectre borné, de fréquence maximale f_{max}. Représenter le spectre de $x_e(t)$, signal échantillonné idéal de $x(t)$, pour $-2f_e < f < f_e$ (avec f_e la fréquence d'échantillonnage) :

$x_e(t) = x(t) \cdot Ш_{Te}(t)$

$X_e(f) = Fe \cdot X(f) * Ш_{Fe}(f)$

$X_e(f) = Fe \cdot \sum_n X(f) * \delta(f - nFe)$

$\boxed{X_e(f) = Fe \sum_n X(f - nFe)}$



3. En pratique, l'échantillonnage est réalisé par un *peigne de porte* $r(t) = \sum_n \Pi_\tau(t - nT_e)$, avec $\Pi_\tau(t) = 1/\tau$ pour $-\tau/2 < t < \tau/2$, et 0 sinon. Calculer $R(f) = \mathrm{TF}[r(t)]$.

$r(t) = \sum_n \Pi_\tau(t - nTe)$ we know that $\Pi_\tau * Ш_{Te} = \sum_n \Pi_\tau(t - nTe)$

donc $TF[r(t)] = TF[\Pi_\tau] \cdot TF[Ш_{Te}] = \mathrm{sinc}(\pi f \tau) \cdot Fe \cdot Ш_{Fe}$

$= Fe \ \mathrm{sinc}(\pi f \tau) \cdot \sum_n \delta(f - nFe)$

$\boxed{= Fe \sum_n \mathrm{sinc}(\pi \tau \cdot n Fe) \cdot \delta(f - nFe)}$

4. Le signal échantillonné *naturel* $x_{e_n}(t)$ est en fait obtenu à l'aide du peigne de portes précédent, i.e. $x_{e_n}(t) = x(t)r(t)$. Montrer que $X_{e_n}(f) = \mathrm{TF}[x_{e_n}(t)] = f_e \sum_n \frac{\sin(\pi n f_e \tau)}{\pi n f_e \tau} X(f - kf_e)$:

$x_{en}(t) = x(t) \cdot r(t) \Rightarrow X_{en}(f) = X(f) * R(f) = X(f) * Fe \sum \underbrace{\mathrm{sinc}(\pi \tau n Fe)}_{\text{indép de } f} \delta(f - nFe)$

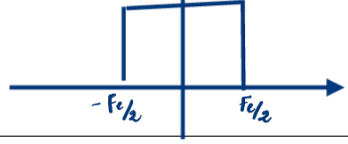
$= Fe \sum_n \mathrm{sinc}(\pi \tau n Fe) \ X(f - nFe)$

$\boxed{= Fe \sum_n \frac{\sin(\pi \tau n Fe)}{\pi \tau n Fe} X(f - nFe)}$

5. Donner la réponse en fréquence $H(f)$ et la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre idéal de recontruction, permettant de retrouver exactement $x(t)$ à partir de ses échantillons $x[n]$:

H(f) : porte sur le motif fréquenciel initial : la réponse en freq idéal : porte centré en zero de largeur Fe

$$\boxed{H(f) = \Pi_{Fe}(f)} = \begin{cases} 1/f_e & \text{sur } [-f_e/2, f_e/2] \\ 0 & \sim \end{cases}$$



$$\boxed{h(t) = \text{sinc}(\pi f_e t)}$$

signal reconstitué

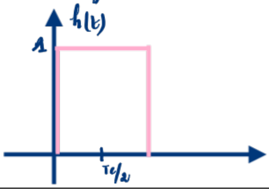
$$y(t) = TF^{-1}\left[X_e(f) \cdot \Pi_{f_e}(f)\right] = x_e(t) * \overbrace{\text{sinc}(\pi f_e t)}^{h(t)} = \int_{\mathbb{R}} x_e(\tau)\ \text{sinc}(\pi f_e (t-\tau))\, d\tau$$

avec $x_e(t) = \begin{cases} x[n] & \text{si } \tau = nT_e \\ 0 & \sim \end{cases}$

6. Qu'est ce qu'un bloqueur d'ordre 0 ? Quel est son rôle ? Donner sa réponse en fréquence :

Un bloqueur d'ordre zero est un interpolateur qui a pour role de produire un signal continu à partir d'un signal discret en maintenant la valeur du signal échantilloné pendant une période d'échantillonage de sorte à avoir un signal continu en temps en forme d'escalier.

$h(t) = T_e\ \Pi_{T_e}(t - T_e/2)$

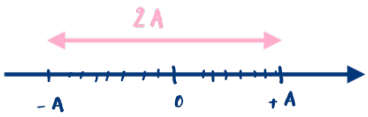


Rep en freq :

$$\boxed{H(f) = T_e\ e^{-j2\pi f \boxed{\frac{T_e}{2}}} \cdot \text{sinc}(\pi f T_e)}$$

7. Soit A la plus grand valeur quantifiable d'un CAN. Exprimer le pas de quantification q en fonction de A et du nombre N de bits utilisé pour le codage des valeurs :

$$\boxed{q = \frac{2A}{2^N}}$$



N : nbr de bit

2^N : nbr de valeurs representable sur N bit

8. On suppose que le bruit de quantification ϵ_q est uniformément réparti entre $-q/2$ et $q/2$. Montrer qu'on a alors $\sigma_q^2 = q^2/12$:

uniformément réparti.

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{\frac{q}{2} - (-\frac{q}{2})} = \frac{1}{q}$$

$$\sigma_q^2 = E\left[\left(\varepsilon_q - E[\cancel{\varepsilon_q}]\right)^2\right] = E[\varepsilon_q]^2 \Rightarrow \sigma_q^2 = \int_{\varepsilon_q \in \mathbb{R}} \varepsilon_q^2 \cdot P_{\varepsilon_q}(\varepsilon_q)\, d\varepsilon_q$$

$$= \frac{1}{q}\int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon_q^2 \cdot d\varepsilon_q = \frac{1}{q}\left[\frac{1}{3}\varepsilon_q^3\right]_{-q/2}^{q/2} \Rightarrow \sigma_q^2 = \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{q^3}{8} + \frac{q^3}{8}\right] = \frac{1}{\cancel{q}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{q^{\cancel{3}\,2}}{4}$$

$$\boxed{\sigma_q^2 = q^2/12}$$

9. Démontrer que $\text{RSB}_q = \sigma_x^2/\sigma_q^2 \approx 6N - 10\log(A^2/(3\sigma_x^2))$:

$$RSB_q = 10 \log\left[\frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2}\right] \quad \text{avec} \quad \sigma_q^2 = q^2/12 = \left(\frac{2A}{2^N}\right)^2/12 = \frac{4A^2}{12 \cdot 2^{2N}} = \boxed{\frac{A^2}{3 \cdot 2^{2N}}}$$

$$RSB_q = 10 \log\left[\frac{\sigma_x^2}{A^2} \cdot 3 \cdot 2^{2N}\right] = 10 \log(2^{2N}) + 10 \log\left[\frac{3\sigma_x^2}{A^2}\right]$$

$$RSB_q = N \cdot 20 \log(2) - 10 \log\left(\frac{A^2}{3 \cdot \sigma_x^2}\right)$$

$$\boxed{RSB_q = 6 \cdot N - 10 \log\left(\frac{A^2}{3\sigma_x^2}\right)}$$

Facteur de charge :

$F = \frac{A}{\sigma_x}$

$*\ 20 \log 2 = 6$