



**SORBONNE
UNIVERSITÉ**

CRÉATEURS DE FUTURS
DEPUIS 1257



MU4RBI08
Traitement du signal audio

Henri Boutin
boutin@ircam.fr

2021/2022

Plan

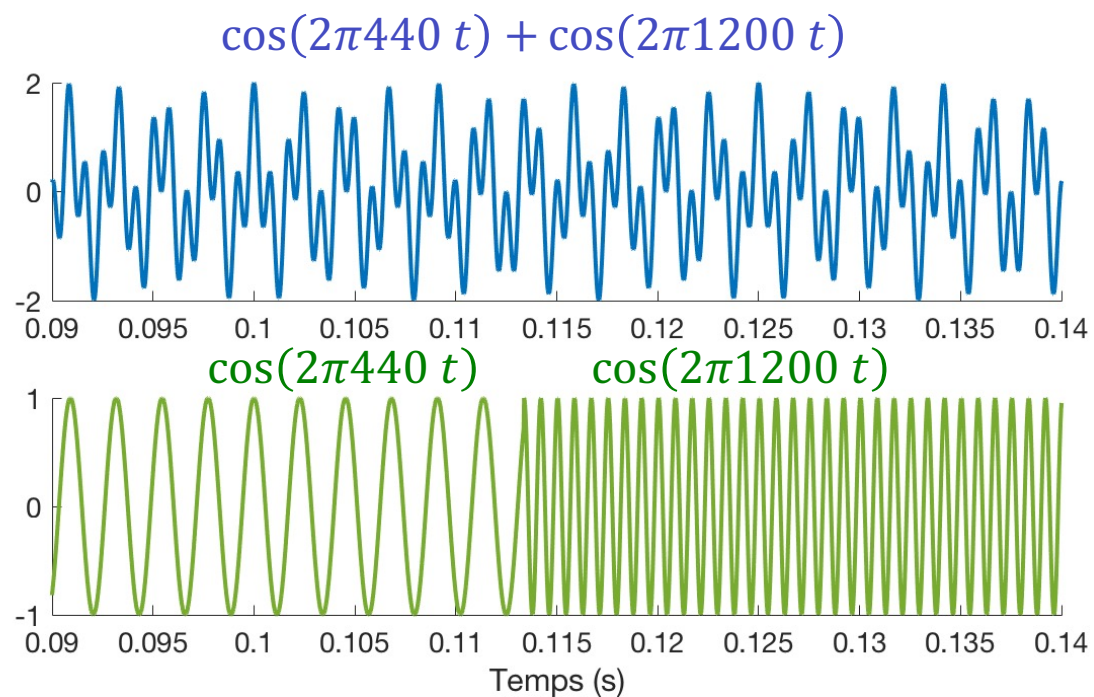
- ❑ 1- Introduction : contexte et objectifs
- ❑ 2- Chaîne de traitement d'un signal sonore
 - Acquisition : le CAN
 - Restitution/reconstruction : le CNA
 - Quantification
- ❑ 3- Analyse en fréquence des signaux discrets
 - Rappels : définitions et propriétés
 - Analyse temps-fréquence
 - Transformée de Fourier à Court Terme
 - Principe d'incertitude
 - Conclusions
 - **OVERLAP ADD !!!**

Plan

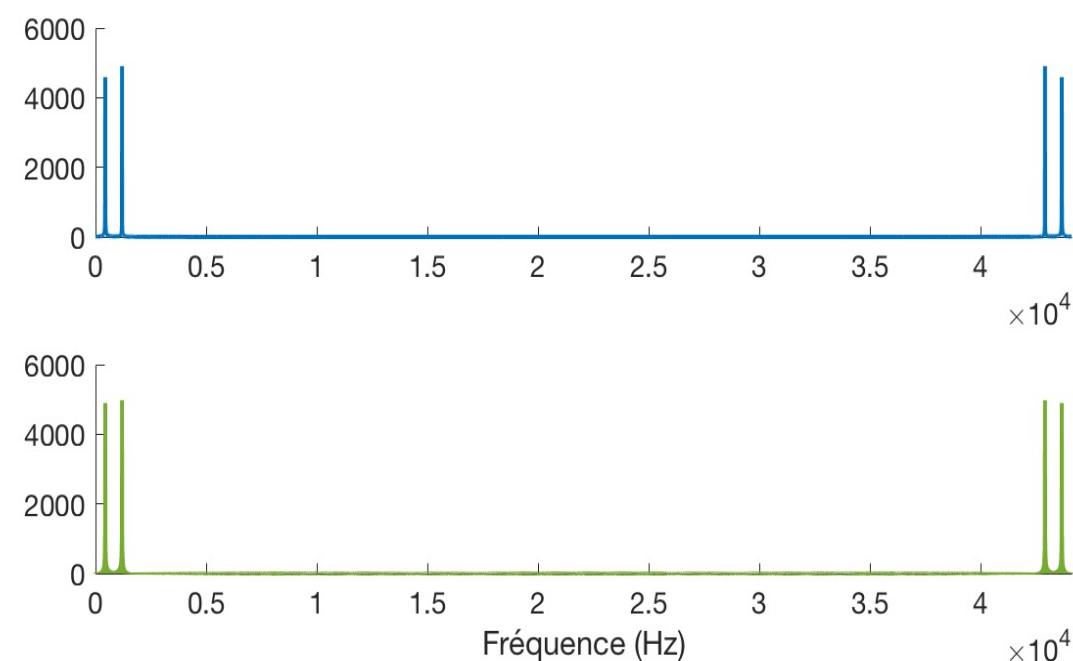
- ❑ 1- Introduction : contexte et objectifs
- ❑ 2- Chaîne de traitement d'un signal sonore
 - Acquisition : le CAN
 - Restitution/reconstruction : le CNA
 - Quantification
- ❑ 3- Analyse en fréquence des signaux discrets
 - Rappels : définitions et propriétés
 - Analyse temps-fréquence
 - Transformée de Fourier à Court Terme
 - Principe d'incertitude
 - Conclusions
 - OVERLAP ADD !!!

3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ Contexte



Signaux différents



Spectres similaires

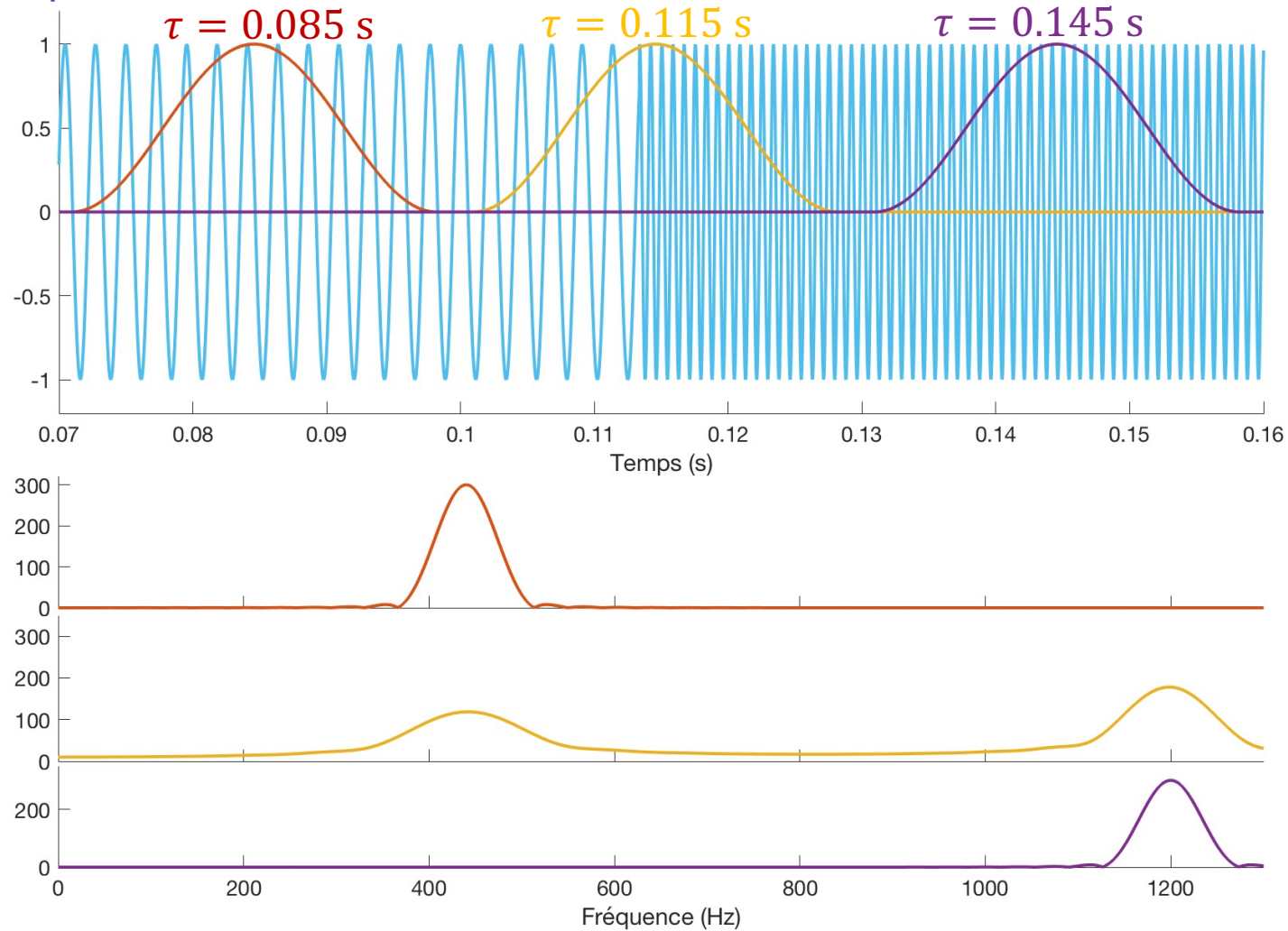
3.1 Analyse temps-fréquence: **Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT**

➤ Définition :

➤ Existence :

3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

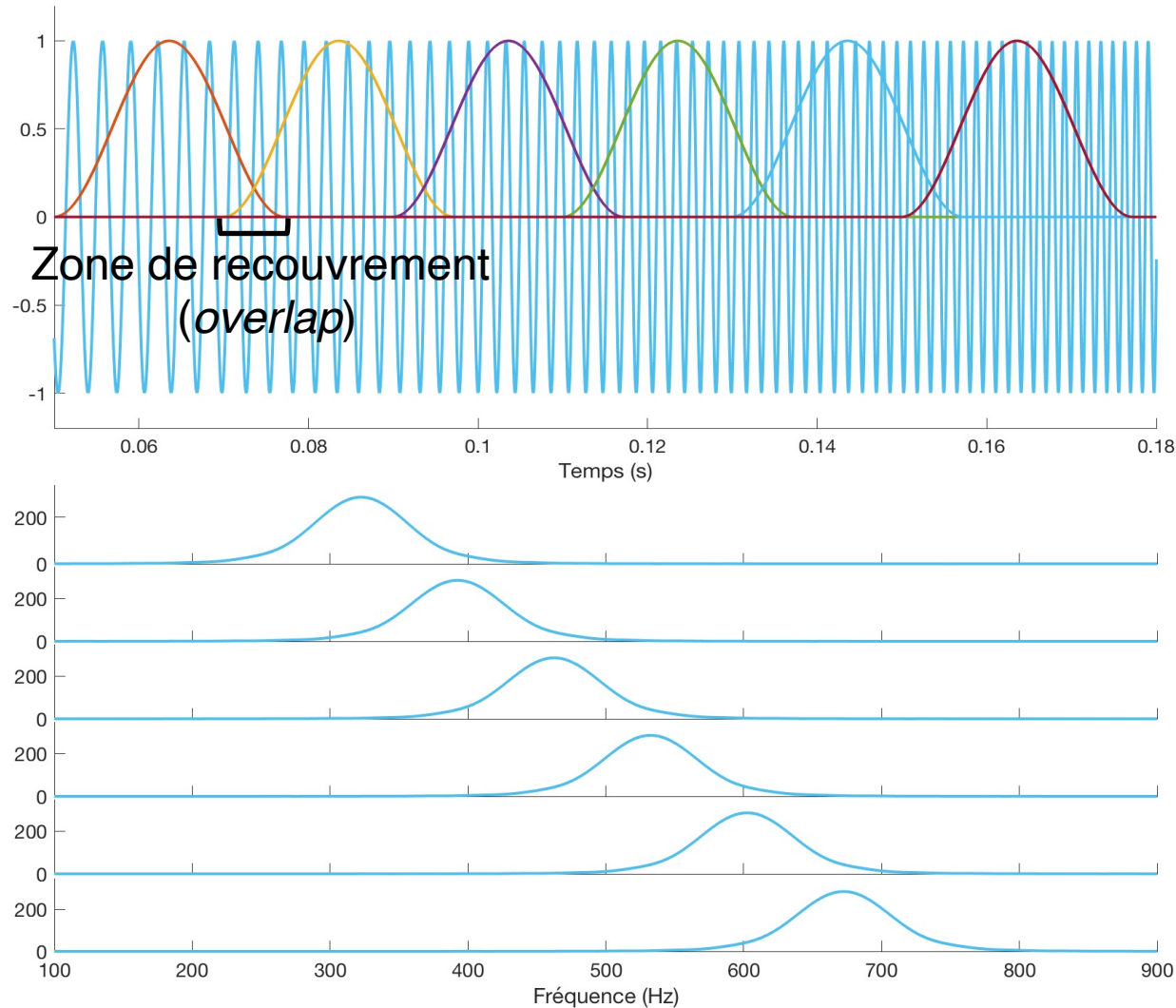
➤ Exemples:



Interprétation 1: TFCT $X(\tau, f)$ donne le spectre pour tout f à l'instant τ fixé.

3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ Exemples:



« Sinus glissant »
 (*chirp / swept sine*):
`chirp([0:Te:1],100,0.2,800)`

3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ Interprétation 2: TFCT $X(\tau, f_0)$, en fonction de τ , donne l'évolution d'une fréquence f_0 au cours du temps.

$$\begin{aligned} X(\tau, f_0) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) h^*(t - \tau) e^{-2j\pi f_0 t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(t) x_{\tau}^*(t) dt && \text{où } x_{\tau}(t) = h(t - \tau) e^{+2j\pi f_0 t} \\ &= \int_{\mathbb{R}} X(f) X_{\tau}^*(f) df && \text{Parseval} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\tau}(f) &= \text{TF}[h(t - \tau) e^{+2j\pi f_0(t - \tau)} e^{+2j\pi f_0 \tau}] \\ &= e^{+2j\pi f_0 \tau} e^{-2j\pi f \tau} \text{TF}[h(t) e^{+2j\pi f_0 t}] \\ &= e^{+2j\pi f_0 \tau} e^{-2j\pi f \tau} \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{+2j\pi f_0 t} e^{-2j\pi f t} dt \end{aligned}$$

3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ Interprétation 2: TFCT $X(\tau, f_0)$, en fonction de τ , donne l'évolution d'une fréquence f_0 au cours du temps.

$$\begin{aligned} X(\tau, f_0) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) h^*(t - \tau) e^{-2j\pi f_0 t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(t) x_{\tau}^*(t) dt && \text{où } x_{\tau}(t) = h(t - \tau) e^{+2j\pi f_0 t} \\ &= \int_{\mathbb{R}} X(f) X_{\tau}^*(f) df && \text{Parseval} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\tau}(f) &= \text{TF}[h(t - \tau) e^{+2j\pi f_0(t - \tau)} e^{+2j\pi f_0 \tau}] \\ &= e^{+2j\pi f_0 \tau} e^{-2j\pi f \tau} \text{TF}[h(t) e^{+2j\pi f_0 t}] \\ &= e^{+2j\pi f_0 \tau} e^{-2j\pi f \tau} \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{+2j\pi f_0 t} e^{-2j\pi f t} dt \\ &= e^{+2j\pi f_0 \tau} e^{-2j\pi f \tau} H(f - f_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(\tau, f_0) &= e^{-2j\pi f_0 \tau} \int_{\mathbb{R}} X(f) H^*(f - f_0) e^{+2j\pi f \tau} df \\ \Rightarrow |X(\tau, f_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} X(f) H^*(f - f_0) e^{+2j\pi f \tau} df \right| \end{aligned}$$

Conclusions: 1- pour $f = f_0$ fixé: $|X(\tau, f_0)|$ est

- un signal temporel de la variable τ ,
- le module de la TF inverse de $X(f)$ filtrée par $H^*(f - f_0)$ en τ .

3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ Interprétation 2: TFCT $X(\tau, f_0)$, en fonction de τ , donne l'évolution d'une fréquence f_0 au cours du temps.

$$\begin{aligned} X(\tau, f_0) &= \int_{\mathbb{R}} x(t) h^*(t - \tau) e^{-2j\pi f_0 t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(t) x_{\tau}^*(t) dt && \text{où } x_{\tau}(t) = h(t - \tau) e^{+2j\pi f_0 t} \\ &= \int_{\mathbb{R}} X(f) X_{\tau}^*(f) df && \text{Parseval} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{\tau}(f) &= \text{TF}[h(t - \tau) e^{+2j\pi f_0(t - \tau)} e^{+2j\pi f_0 \tau}] \\ &= e^{+2j\pi f_0 \tau} e^{-2j\pi f \tau} \text{TF}[h(t) e^{+2j\pi f_0 t}] \\ &= e^{+2j\pi f_0 \tau} e^{-2j\pi f \tau} \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{+2j\pi f_0 t} e^{-2j\pi f t} dt \\ &= e^{+2j\pi f_0 \tau} e^{-2j\pi f \tau} H(f - f_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X(\tau, f_0) &= e^{-2j\pi f_0 \tau} \int_{\mathbb{R}} X(f) H^*(f - f_0) e^{+2j\pi f \tau} df \\ \Rightarrow |X(\tau, f_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} X(f) H^*(f - f_0) e^{+2j\pi f \tau} df \right| \end{aligned}$$

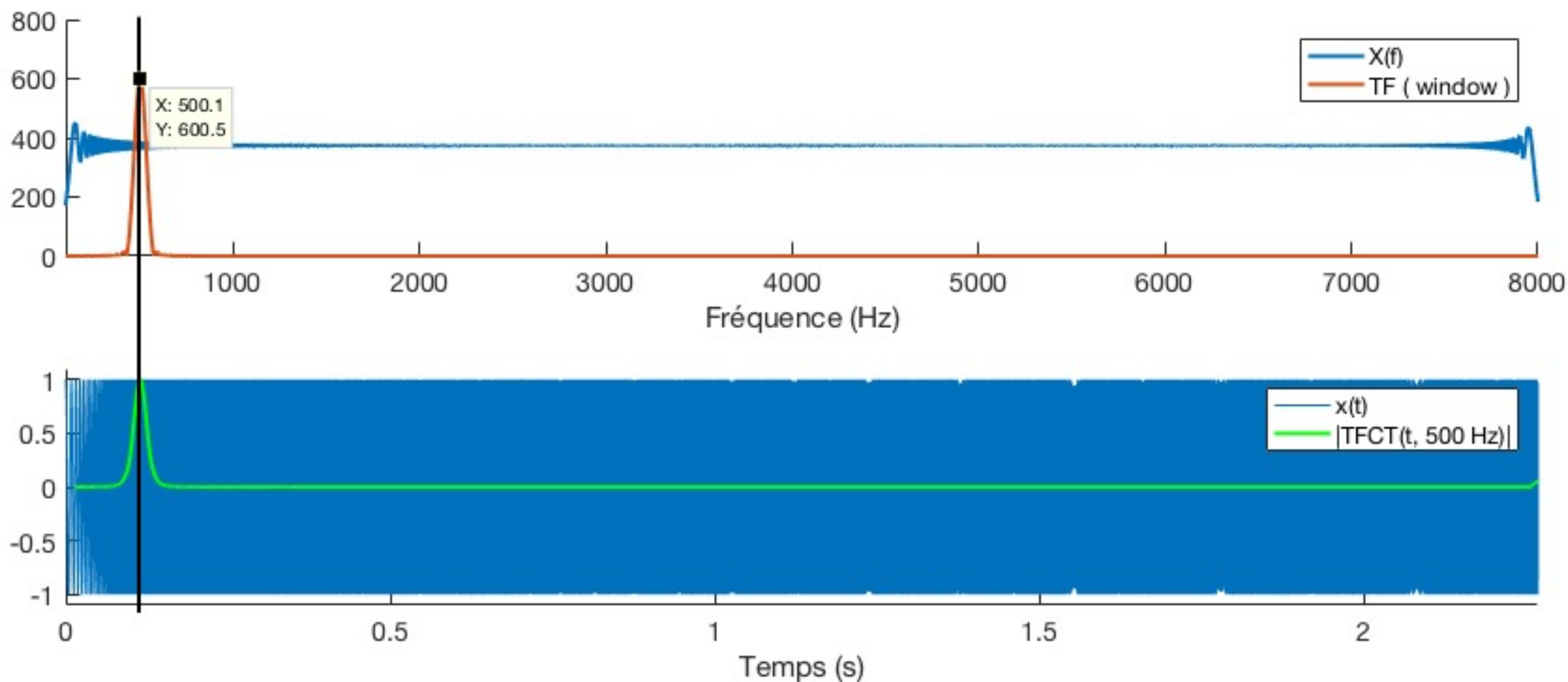
Conclusions: 1- pour $f = f_0$ fixé: $|X(\tau, f_0)|$ est

- un signal temporel de la variable τ ,
- le module de la TF inverse de $X(f)$ filtrée par $H^*(f - f_0)$ en τ .

2- la résolution fréquentielle est d'autant meilleure que le support de $H(f)$ est étroit!

3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ Exemple: $x(t) = \text{chirp}(t, 100, t(\text{end}), 8000)$, i.e. $f \in [100 \text{ Hz}, 8000 \text{ Hz}]$ et $f_0 = 500 \text{ Hz}$

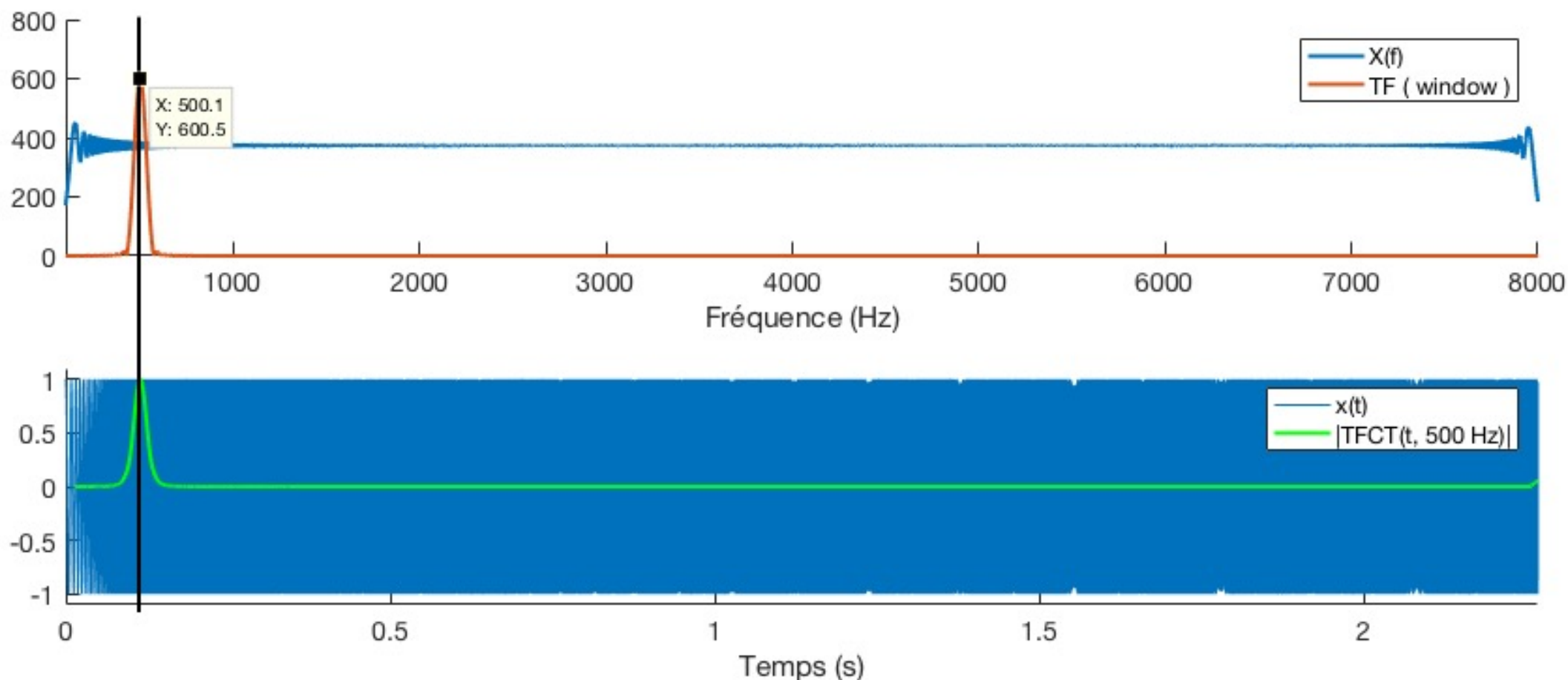


3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ Exemple: $x(t) = \text{chirp}(t, 100, t(\text{end}), 8000)$, i.e. $f \in [100 \text{ Hz}, 8000 \text{ Hz}]$ et $f_0 = 500 \text{ Hz}$

- $|\text{TFCT}(t, 500 \text{ Hz})|$: méthode 1: TF de chaque x fenêtrée puis valeur en f_0

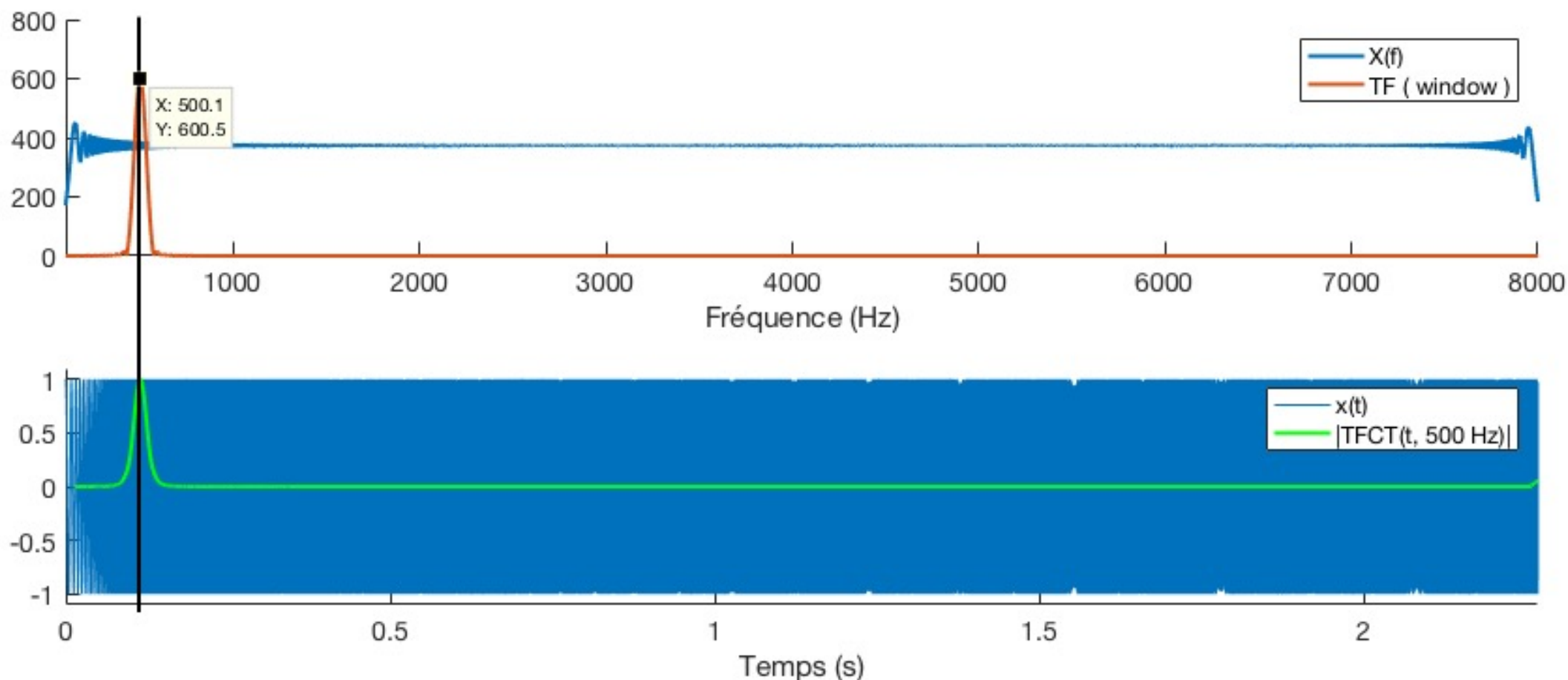
⇒ **N TF!**



3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ Exemple: $x(t) = \text{chirp}(t, 100, t(\text{end}), 8000)$, i.e. $f \in [100 \text{ Hz}, 8000 \text{ Hz}]$ et $f_0 = 500 \text{ Hz}$

- $|\text{TFCT}(t, 500 \text{ Hz})|$:
méthode 1: TF de chaque x fenêtrée puis valeur en f_0 ⇒ N TF!
méthode 2: TF(x) puis filtrage par TF(fenêtre) autour de f_0 puis TF inverse ⇒ 2 TF + 1 TF inv



3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ CONCLUSIONS

Exemple: $x(t) = \text{chirp}(t, 100, t(\text{end}), 8000)$, i.e. $f \in [100 \text{ Hz}, 8000 \text{ Hz}]$ et $f_0 = 500 \text{ Hz}$

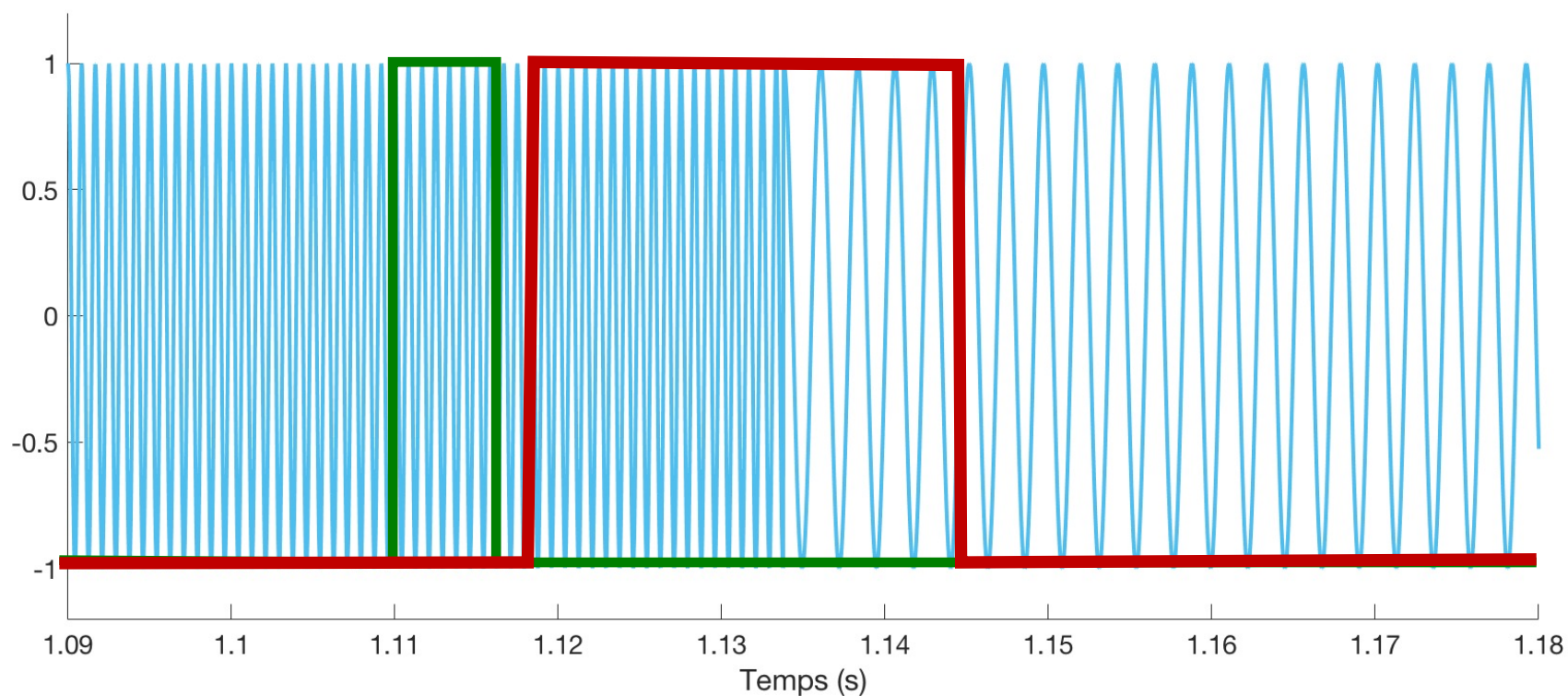
- $|\text{TFCT}(t, 500 \text{ Hz})|$:
méthode 1: TF de chaque x fenêtrée puis valeur en f_0 $\Rightarrow N \text{ TF!}$
méthode 2: TF(x) puis filtrage par TF(fenêtre) autour de f_0 puis TF inverse $\Rightarrow 2 \text{ TF} + 1 \text{ TF inv}$

\Rightarrow Méthode 2: + rapide, ... mais temps différé...
Méthode 1: + coûteuse mais temps réel!

3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ CONCLUSIONS

Exemple: fenêtre rectangulaire



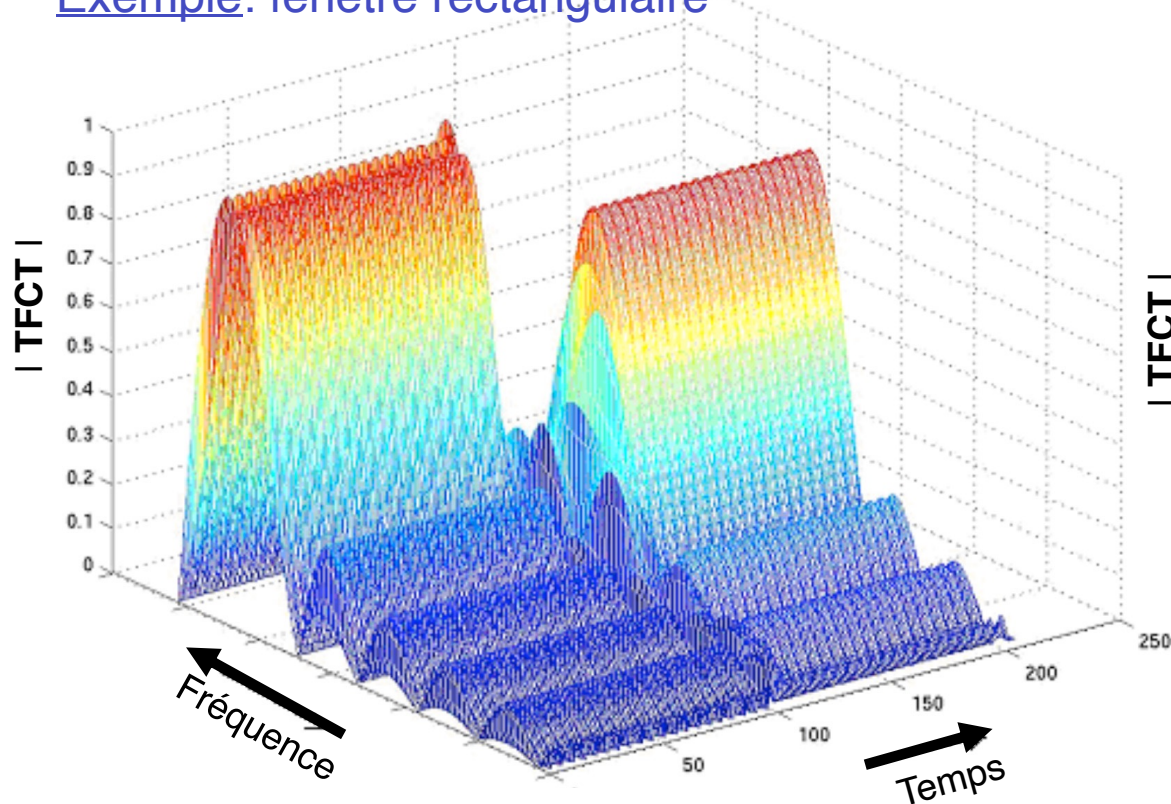
Support temporel **étroit**

Support temporel **large**

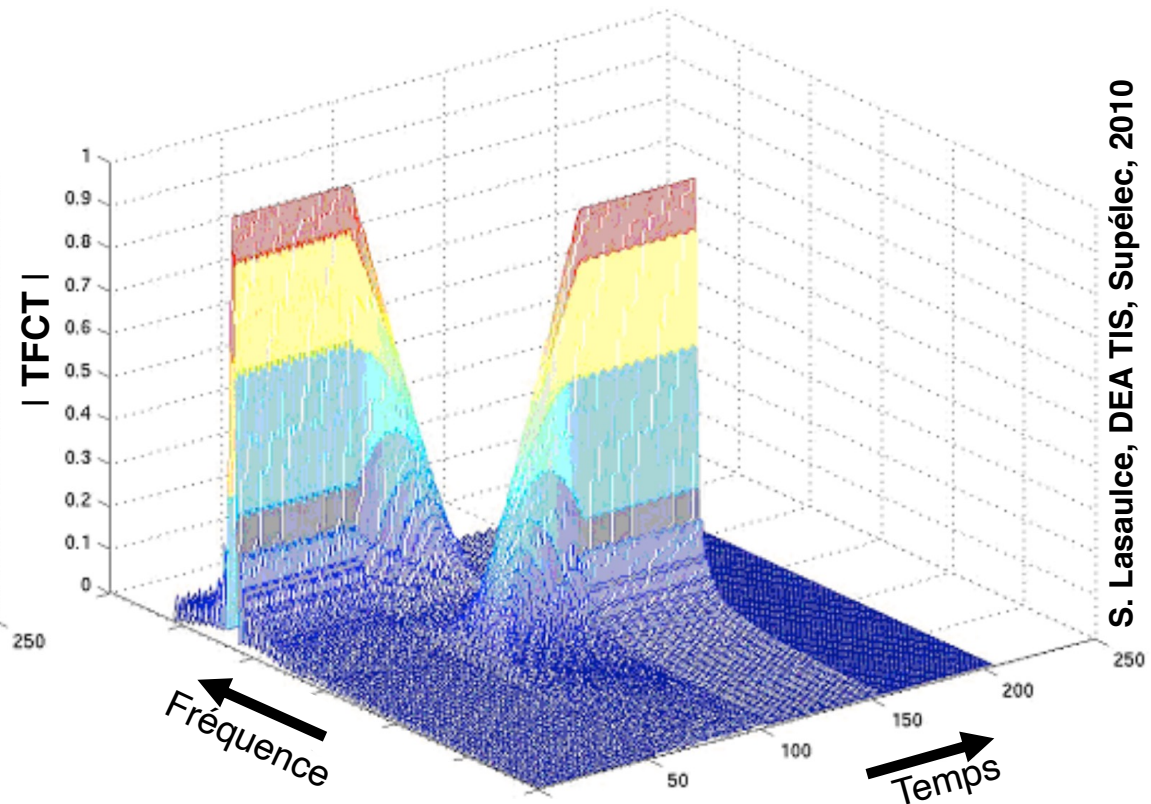
3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ CONCLUSIONS

Exemple: fenêtre rectangulaire



Support temporel étroit \Rightarrow support fréquentiel large
 \Rightarrow **bonne résolution en temps / mauvaise résolution en fréq.**



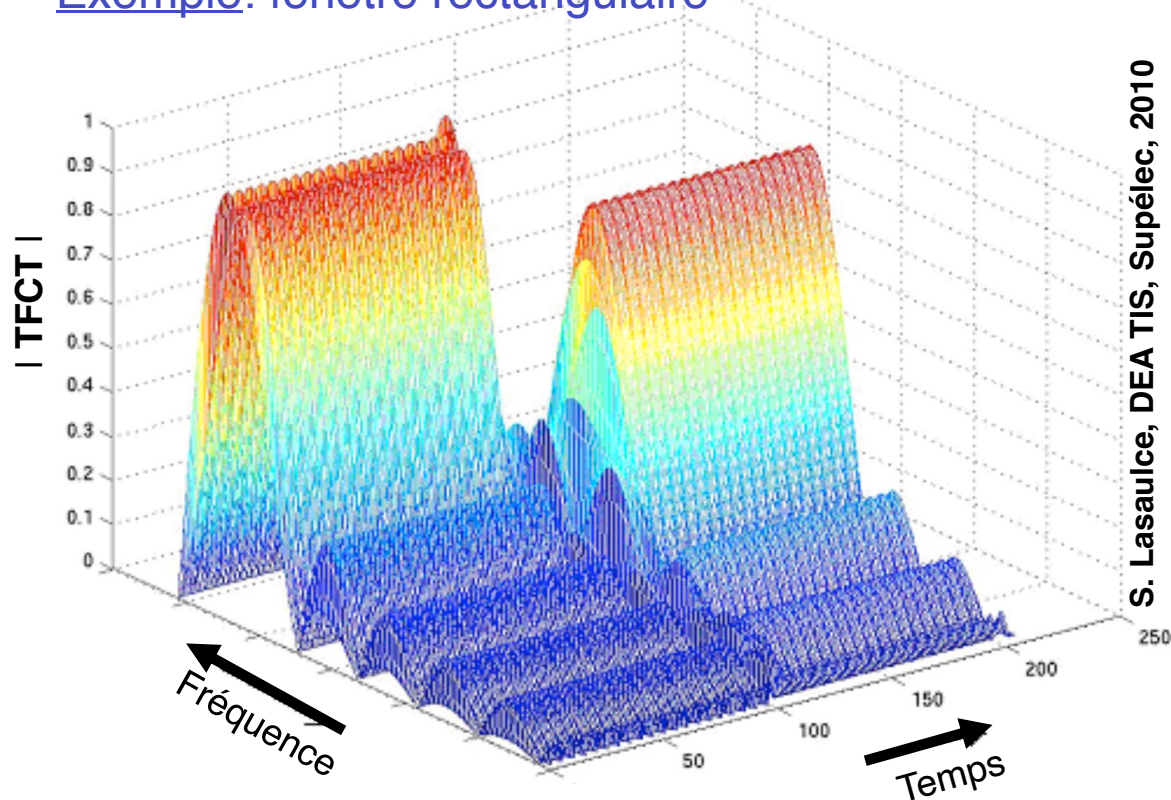
Support temporel large \Rightarrow support fréquentiel étroit
 \Rightarrow **mauvaise résolution en temps / bonne résolution en fréq.**

S. Lasaulce, DEA TIS, Supélec, 2010

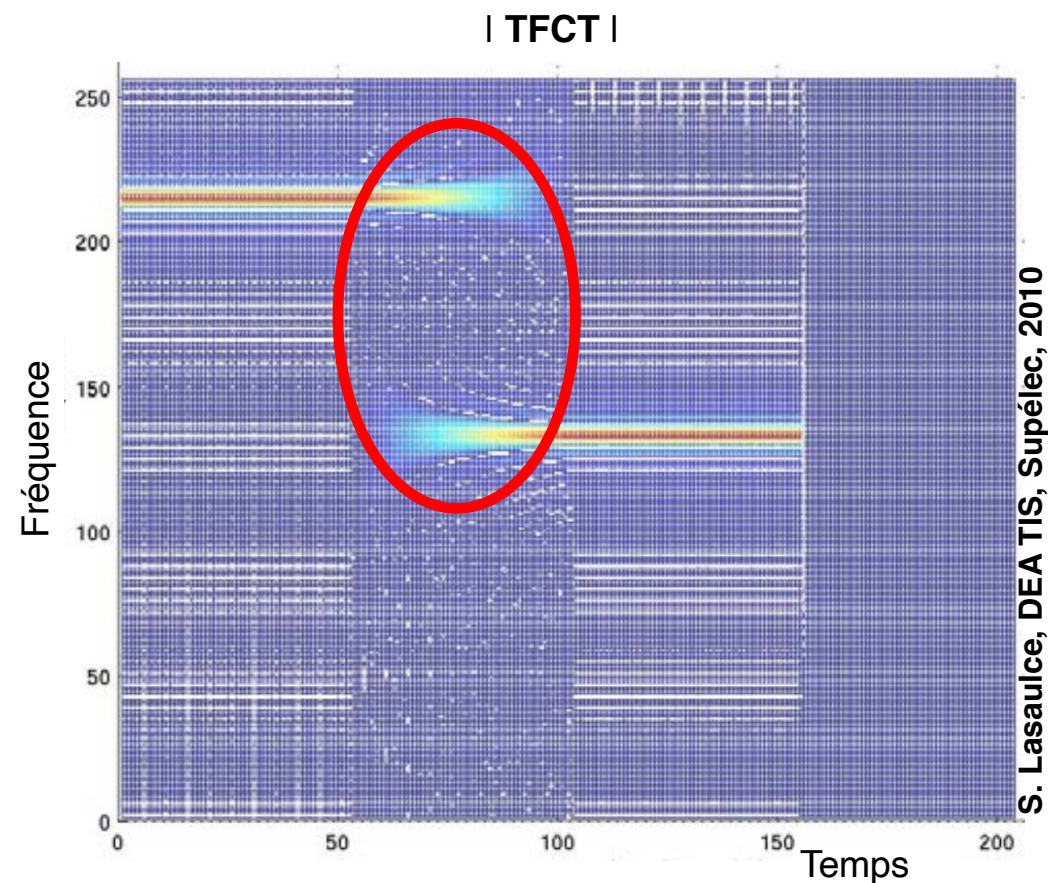
3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ CONCLUSIONS

Exemple: fenêtre rectangulaire



Support temporel étroit \Rightarrow support fréquentiel large
 \Rightarrow **bonne résolution en temps / mauvaise résolution en fréq.**

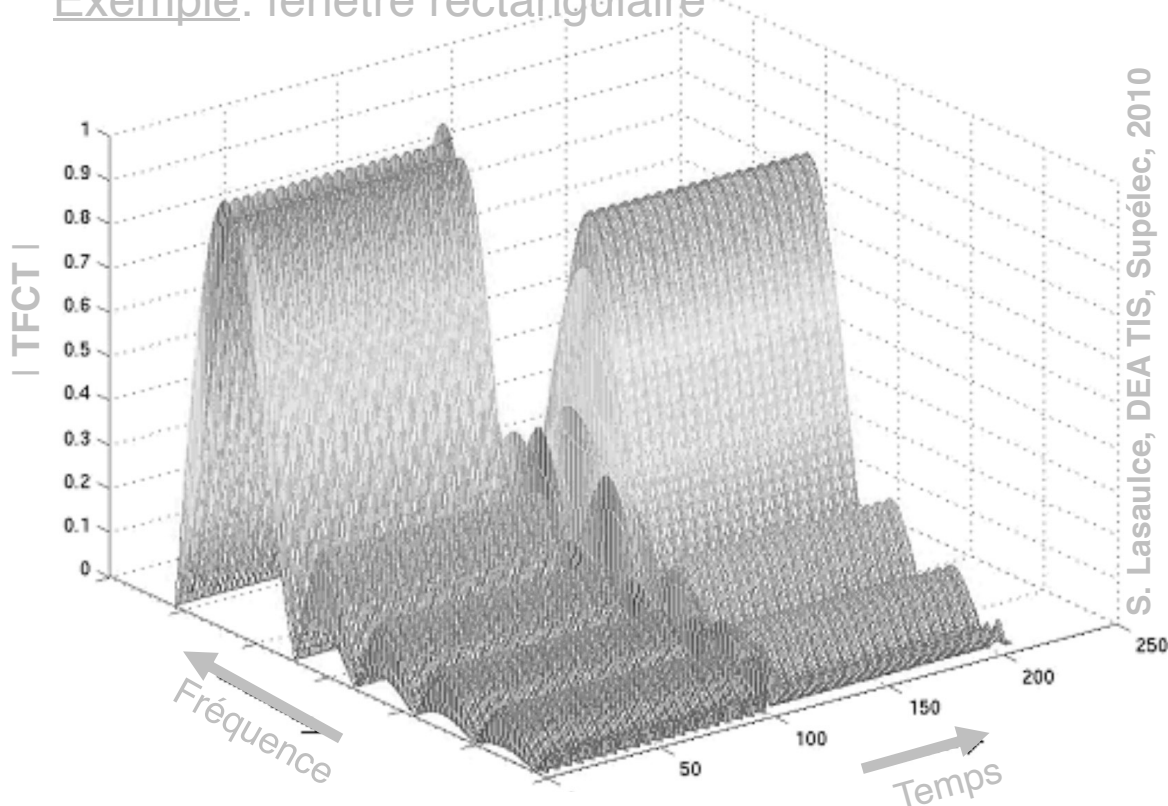


Support temporel large \Rightarrow support fréquentiel étroit
 \Rightarrow **mauvaise résolution en temps / bonne résolution en fréq.**

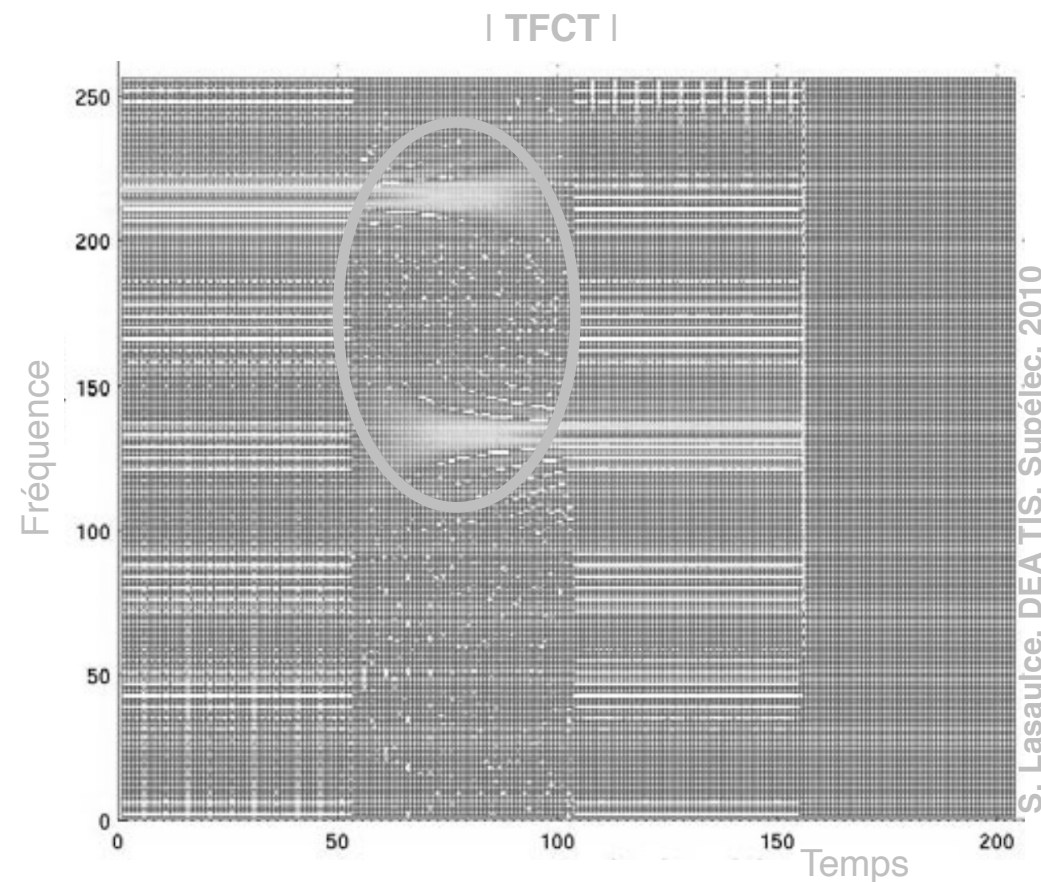
3.1 Analyse temps-fréquence: Transformée de Fourier à Court Terme TFCT / STFT

➤ QUESTION : *Est-il possible d'avoir simultanément une bonne résolution temporelle et fréquentielle ?*

Exemple: fenêtre rectangulaire



Support temporel étroit \Rightarrow support fréquentiel large
 \Rightarrow bonne résolution en temps / mauvaise résolution en fréq.



Support temporel large \Rightarrow support fréquentiel étroit
 \Rightarrow mauvaise résolution en temps / bonne résolution en fréq.

3.2 Analyse temps-fréquence: principe d'incertitude

➤ Application au traitement du signal:

- Indicateurs de localisation temps / fréquence:

$$\sigma_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |tx(t)|^2 dt$$
$$\sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |fX(f)|^2 df$$

- Enoncé: $\sigma_t \sigma_f \geq \frac{E_x}{4\pi}$

3.2 Analyse temps-fréquence: principe d'incertitude

➤ Démonstration

$$\sigma_t^2 \sigma_f^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |tx(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |fX(f)|^2 df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2 dt = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |fX(f)|^2 df$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \sigma_t^2 \sigma_f^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |tx(t)|^2 dt \times \int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2 dt \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} tx^*(t)x'(t) dt \right|^2 = \frac{|I|^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad I &= \int_{-\infty}^{+\infty} tx^*(t)x'(t) dt \\ &= -E_x - \int_{-\infty}^{+\infty} tx'^*(t)x(t) dt \\ &= -E_x - I^* \end{aligned}$$

IPP et x d'énergie finie donc à support compact

$$\Rightarrow \quad 2\operatorname{Re}(I) = -E_x$$

$$\Rightarrow \quad |I|^2 \geq \frac{E_x^2}{4}$$

3.2 Analyse temps-fréquence: principe d'incertitude

➤ Interprétation: $\sigma_t \sigma_f \geq \frac{E_x}{4\pi}$

⇒ on ne peut avoir σ_t et σ_f aussi petits que souhaités

⇒ on ne peut avoir $x(t)$ et $X(f)$ de supports aussi petits que souhaités

3.2 Analyse temps-fréquence: principe d'incertitude

➤ Interprétation: $\sigma_t \sigma_f \geq \frac{E_x}{4\pi}$

⇒ on ne peut avoir σ_t et σ_f aussi petits que souhaités

⇒ on ne peut avoir $x(t)$ et $X(f)$ de supports aussi petits que souhaités

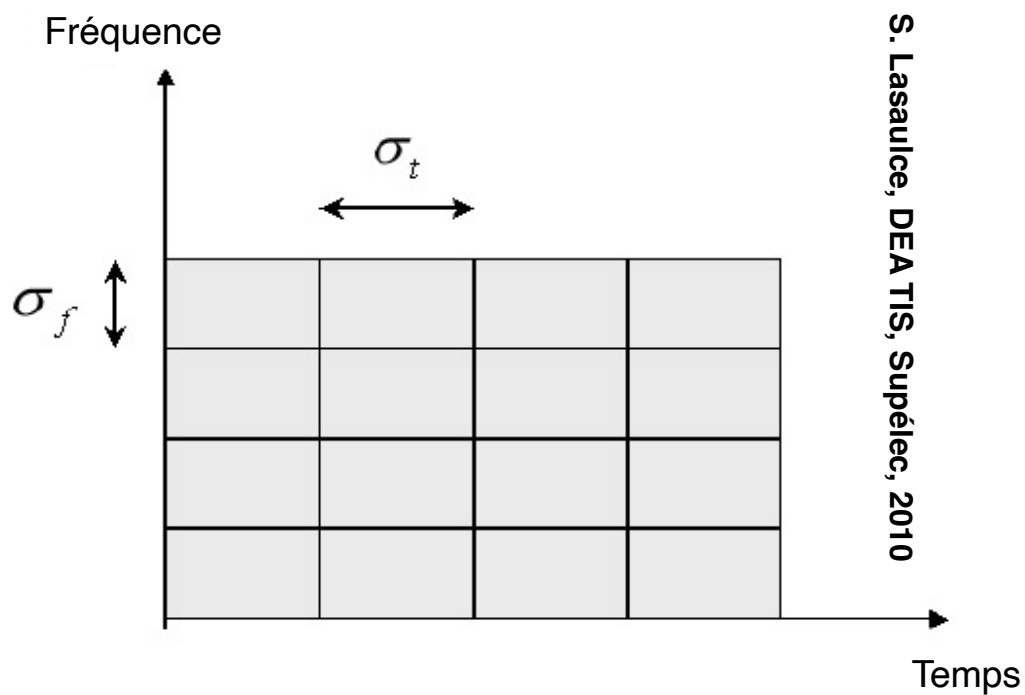
⇒ *Notamment une **fenêtre** $h(t)$ ne peut avoir **des supports en temps et en fréquence** aussi petits que souhaités*

ex.: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

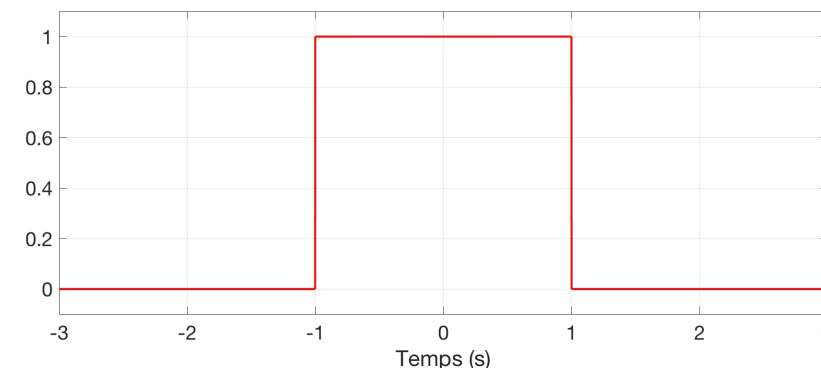
$$x(t) = \delta(t)$$

3.3 Analyse temps-fréquence: conclusions

Pour minimiser $\sigma_t \times \sigma_f$ = surface des « pavés temps-fréquence » :



a- fenêtre rectangulaire :

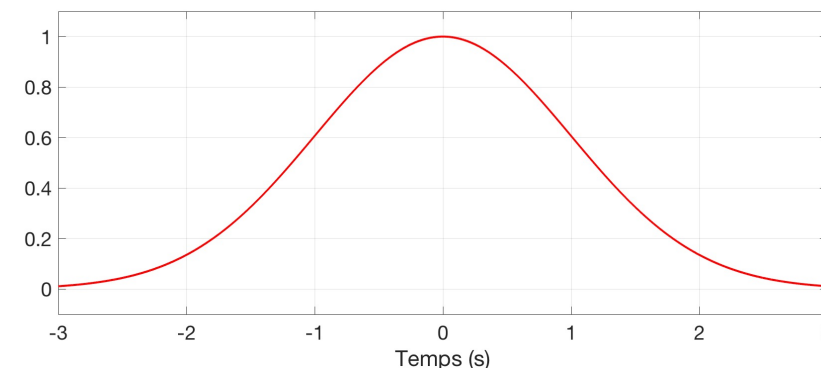


$$\sigma_t \times \sigma_f = +\infty$$

⇒ aire des pavés temps-fréquence = $+\infty$

⇒ mauvais compromis de résolution temps / fréquence

b- fenêtre gaussienne : $|h(t)| = e^{-\frac{t^2}{2}}$:



$$\Rightarrow \sigma_t \times \sigma_f = \frac{E_h}{4\pi}$$

⇒ aire des pavés temps-fréquence minimale

⇒ meilleur compromis de résolution temps / fréquence

➤ Quelques références:

S. Lasaulce 2010, Module Ondelettes du DEA TIS, Supélec.

Blanchet & Charbit 2001, «Signaux et Images sous Matlab». Hermes Sciences.

Hartmann96, «signal, sound and sensation», Springer-Verlag

Hayes 96, «Statistical Digital Signal Processing», John Wiley

Kahrs1998, «applications of digital signal processing to audio and acoustics», Kluwer Academic Publishers.