Exo : $x[n] = A \quad , \forall n \in]-M, M[$

calcul TFSD : $\left| X(\nu) \right| = A \left| \dfrac{\sin(\pi \nu (2M+1))}{\sin(\pi \nu)} \right|$

TFSD : Signal Discret mais TF continue.

TFSD Continue → No No for computers !. $\xrightarrow{\text{donc}}$ TFD : discrète

définit sur un nombre fini de points.

$k \geq 0$, jusqu'à $M-1$

TFD

N : durée du Signal Tempo

M : valeurs de f ⇒ fréquence discrétisée

Pas de freq : Fe/M : $f_k = \dfrac{k\,Fe}{M}$. $k \in [0, M-1]$

↳ $f \in [0, Fe]$

TFD ⟶ $X[k] \neq X(\nu)$

↳ TFSD

TFD de $x[n]$: $X[k] = X(f_k)$ dans domaine discret. $\forall k \in [0, M-1]$

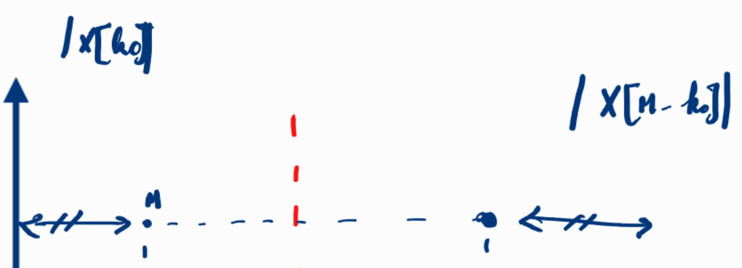
$$X[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \cdot e^{-j2\pi n f \frac{k}{Fe}} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi n \frac{Fe}{M} \cdot \frac{k}{Fe}}$$

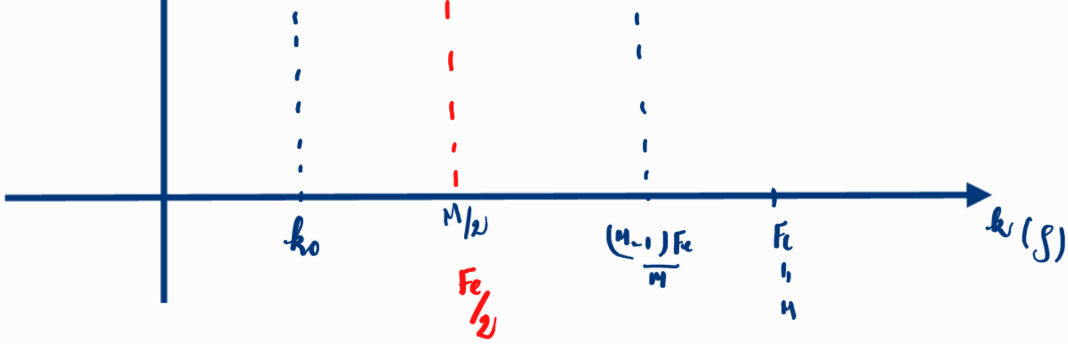
$\sum_n x[n] e^{-j2\pi f n T_e} \quad \rightarrow f = \dfrac{k\,Fe}{M} \quad \Big| \quad \rightarrow e^{-j2\pi n \frac{k}{M}}$

$$\boxed{X[-k] = X[k]^*}$$

← TRAP : non défini

Symétrie hermisienne /. à : $f = \frac{Fe}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$, $k = \frac{M}{2}$ ssi $x[n] \in \mathbb{R}$.





$\forall k \in [0, M-1]$. $X[M-k] = X[k]^*$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} |X[M-k]| = |X[k]| \\ \mathrm{Arg}(X[M-k]) = -\mathrm{Arg}(X[k]) \end{array} \right.$$

Algo FFT : TFD

· si on précise pas M.

$x[n]$ $n \in [0, N-1]$

$$\underbrace{fft(x)}_{\text{même nombre de points que } x[n]} \longrightarrow X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi n k/N}$$

$fft(x, M) \Rightarrow$ taille M

$M < N$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-2\pi k n/M}$ ← considère pas tous les points

si $M > N$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-2j\pi k n/M}$

zero padding : ie : $x[n] = x[n]$, $\forall n \in [0, N-1]$

$= 0 \quad , \forall n \in [N, M-1]$

TFD INVERSE :

$$x[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X[k] \cdot e^{+j 2\pi k \frac{n}{M}} \quad — \forall n \in [0, M-1].$$

TF^{-1} ressemble à $\int X(f) \, e^{+j 2\pi f t} \, df$

- une TFD a une infinité de TFDI car il suffit d'ajouter des 0 au signal et il aura la même TFD donc quand on revient vers la TFDI, on ne connait pas sa vrai longueur (psq on sait pas combien y'a de 0 en plus)

→ TFD : à une unique TFDI de même longueur.

démo : faut la faire exam ?

$$TFD\left[X[n]\right][k_0] = x[k_0]$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} x[n] \cdot e^{-j 2\pi k_0 \frac{n}{M}}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} e^{+2j\pi k_0 \frac{n}{M}} \cdot e^{-j 2\pi k_0 \frac{n}{M}}$$

↪ on trouve que c'est nul sauf pour ($k=0$ || $n=0$) à voir ?

$$= \frac{1}{M} X[k_0] \cdot \sum_{0}^{M-1} 1 = X[k_0] \quad ?$$

Comparaison des Transformées :

$$x(t) = e^{j 2\pi f_0 t} \xrightarrow{TF} X(f) = \delta_{f_0} = \delta(f - f_0)$$

$$x(nT_e) = e^{j 2\pi f_0 n T_e} = \begin{cases} e^{j 2\pi n f_0 / F_e} & , \forall n \in [0, N-1] \\ 0 \sim \end{cases}$$

TFSD : $X_e(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) \cdot e^{-j2\pi n f/F_e}$

ssi $f \neq f_0$: $\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n/F_e\,(f-f_0)}$

si $f = f_0$: $X_e(f) = N$

si $f \neq f_0$: $X_e(f) = \dfrac{1 - e^{-j2\pi \frac{N}{F_e}(f-f_0)}}{1 - e^{-j2\pi(f-f_0)/F_e}}$

$$\frac{e^{-j\pi \frac{N}{F_e}(f-f_0)}}{e^{-j\pi(f-f_0)/F_e}} \qquad \frac{\sin\left(\pi N (f-f_0)/F_e\right)}{\sin\left(\pi(f-f_0)/F_e\right)}$$

on aimerait N très grand pour que les lobes secondaires.

s'approche le plus du dirac. → voir Dessin

$$|X_e(f)| = \left|\frac{\sin\left(\pi N (f-f_0)/F_e\right)}{\sin\left(\pi(f-f_0)/F_e\right)}\right| = 0 \quad \forall \ N(f-f_0) = kF_e$$

$$\Rightarrow \boxed{f = \frac{kF_e}{N} + f_0}$$

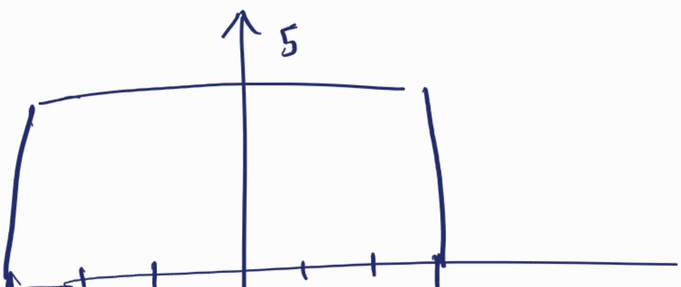
$k \in \mathbb{Z}^*$

$X[k] = X_e(f_k) = X_e\left(\frac{kF_e}{M}\right) \to$ TFD.

$$\boxed{\text{TFCT} : \quad X(\tau, f) = \int_{t \in \mathbb{R}} x(t)\, h^*(t-\tau)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}$$

$$h \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2\, dt = 1$$

OLA



6

$5 \operatorname{sinc}(\pi f$

$$\sum_{-3}^{+3} 5\, e^{-2j\pi f k T_e}$$

$\pi f k \tau$

5

$\pi k \frac{F_e}{k} \cdot \tau$