Cours 03 : H. Boutin.

signal échan temps Continu : $x_e(t) = x(t) \cdot Ш_{T_e}(t) = \sum_n x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)$

$$X_e(f) = F_e \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(f - nF_e)$$

le but

signal Reconstitué : $Y(f) = \Pi_{F_e}(f) \cdot X_e(f) = X(f)$ = sans perte

$$TF^{-1}[Y(f)] = y(t) = \text{sinc}(\pi F_e t) * x_e(t) \quad \text{——— (A)}$$

$$= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} x_e(t) \cdot \text{sinc}(\pi F_e (t - \tau))\, d\tau}$$ ... par définition.

on a besoin de la valeur de τ : qui peut allez jusqu'à l'infini.

→ necessite $x_e(t)$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$.

→ les valeurs de $x_e(\tau)$ futures !!!

→ Temps différés. Restitution ne se fait pas en temps réel.

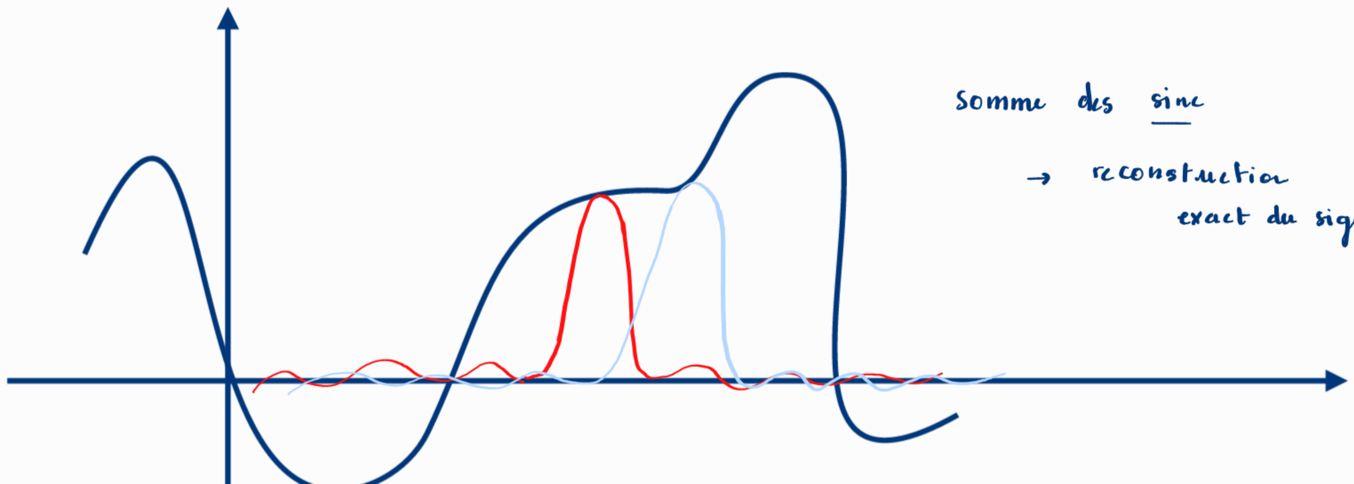
- <u>On peut l'écrire autrement</u>

$$TF^{-1}[Y(f)] = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)}_{x_e(t)} * \text{sinc}(\pi F_e t) \quad \text{——— (B)}$$

$$= \boxed{\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \cdot \text{sinc}(\pi F_e (t - nT_e))}$$

→ Filtre cardinal car y a un sinc

→ rep imp du filtre cardinal.



somme des sinc

→ reconstruction exact du signal.

Problème : pas possible en temps réel.

$$x(nT_e)\ \mathrm{sinc}\left(\pi F_e (t - nT_e)\right) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{pour } t = kT_e \\ \forall k \in \mathbb{Z} \\ \neq n \end{array} \right.$$

construction de $x(t)$ uniquement avec les écha $x(nT_e)$: On cherche $h_2(t)$: fct d'interpolation

tq : $\forall n \in \mathbb{Z}$: et $\forall t \in [nT_e, (n+1)T_e]$

$$y(t) \# x(t) \longrightarrow y(t) \text{ très proche de } x(t).$$

$$y(t) = x_e(t) * h_2(t)$$

$y(t)$ est Continu, proche de $x(t)$: on peut l'écrire sous forme de devloppement en série de Taylor. $\leftarrow$ (car x $C^\infty(\mathbb{R})$)

$$\boxed{y(t) \# x(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{x^{(k)}(nT_e)}{k!} (t - nT_e)^k}$$

On va devoir choisir cette approximation h : en fct d'interpolation.

CHOIX 01 : $y(t) = x(nT_e)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$
$\forall t \in [nT_e, (n+1)T_e]$

$$y(t) = x(nT_e)\ h_0(t - nT_e)$$

$\hookrightarrow$ $2 = 0$, car on garde que le 1^{er} terme de Taylor

$\rightarrow$ BLOQUEUR D'ORDRE 0.

$$y(t) = \cdots + x((n-1)T_e)\ h(t - (n-1)T_e) + \boxed{x(nT_e) \cdot h(t - nT_e)} + x((n+1)T_e) \cdot h(t + (n+1)T_e)$$

PAR identification

$$\forall t \in [nT_e, (n+1)T_e] : \quad \left| \ h_0(t - nT_e) = 1 \right.$$

$$\Big| \; h_0(t - kT_e) = 0 \quad , \forall k \neq n$$

changement de variable

$$u \leftarrow (t - nT_e) \Rightarrow h_0(u) = 1 \quad , \quad \forall u \in [0, T_e]$$

$$u \leftarrow (t - kT_e) \Rightarrow h_0(u) = 0 \quad , \quad \forall u \in [(n-k)T_e \; , (n-k+1)T_e]$$

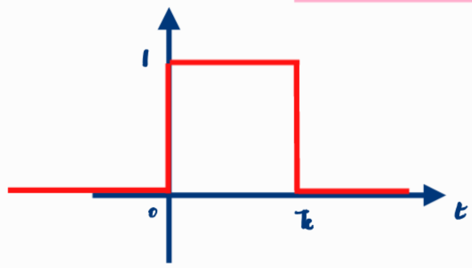
$$\forall u \in [nT_e \; ; (m+1)T_e]$$

avec $\Big| \; m = n - k \quad \in \mathbb{Z}^*$

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus [0, T_e]$$

sauf

Conclusion : $\boxed{h_0(t) = T_e \cdot \Pi_{T_e}(t - T_e/2)}$



↪ amplitude $\frac{1}{T_e} \Rightarrow \times T_e = 1$

CHOIX 02 : $y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \, h_1(t - nT_e)$ avec h_1 : bloqueur d'ordre 1.

$$y(t) = x(nT_e) + \frac{x'(nT_e)}{n!} \cdot (t - nT_e) \qquad \text{or} : \; x'(nT_e) = \frac{x((n+1)T_e) - x(}{T_e}$$

$$y(t) \# \; x(nT_e)\left(1 - \frac{t - nT_e}{T_e}\right) + x((n+1)T_e) \cdot \left(\frac{t - nT_e}{T_e}\right)$$

pour une meilleur approx il faut Te petit donc Fe → grand.

PAR IDENTIFICATION

on a une $\underset{\infty}{\Sigma}$ mais y'a que

$$h_1(t-nT_e) = 1 - \frac{t-nT_e}{T_e} \quad , \forall t \in [nT_e, (n+1)T_e] \quad \text{——} \ (1)$$

2 terme qui peuvent être non-nul.

$$h_1(t-(n+1)T_e) = \frac{t-nT_e}{T_e} = \frac{t-(n+1)T_e + T_e}{T_e} \quad \text{——} \ (2)$$

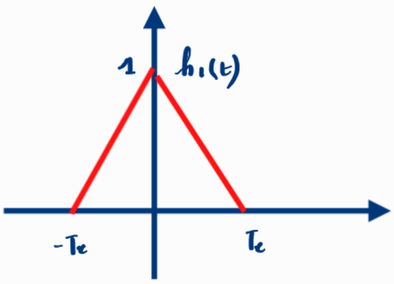
$$\forall k \neq \begin{vmatrix} n \\ n+1 \end{vmatrix} : \quad h_1(t-kT_e) = 0 \quad \text{——} \ (3)$$

$$(1) \Rightarrow h_1(t) = 1 - \frac{u}{T_e} \quad \text{sur } [0, T_e]$$

$$(2) \Rightarrow h_1(t) = 1 + \frac{u}{T_e} \quad \text{sur } [-T_e, 0]$$

$$u \leftarrow t-(n+1)T_e$$

$$(3) \Rightarrow h_1(u) = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R} \setminus [-T_e, T_e].$$



$$\Rightarrow \boxed{h_1(t) = \Lambda_{T_e}(t)}$$

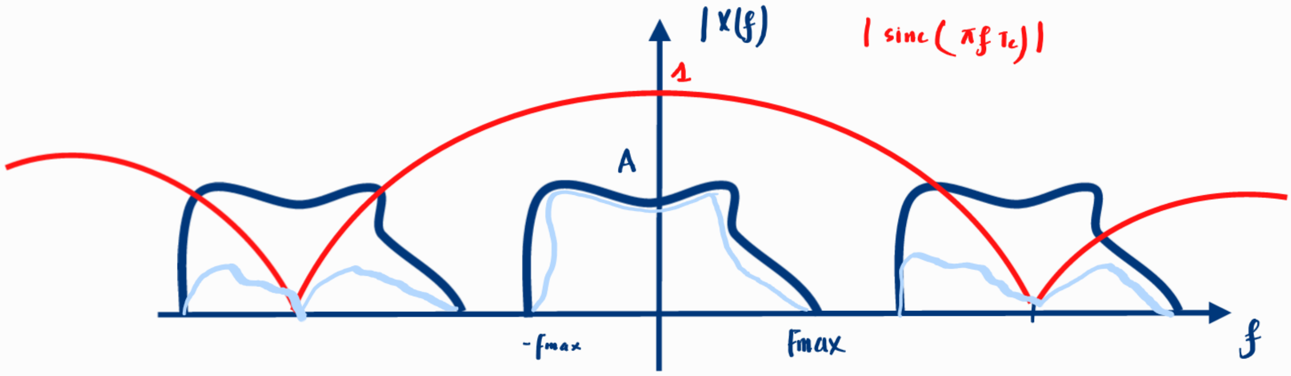
demi support dans le cas d'une porte triangulaire.

Conséquence sur le spectre :

$$\text{BOZ :} \quad Y(f) = TF(y(t)) = TF\left[x_e(t) * \underbrace{h_0(t)}_{T_e \Pi_{T_e}(t - \frac{T_e}{2})}\right]$$

$$\boxed{Y(f) = \underbrace{X_e(f)}_{F_e \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f-nF_e)} \cdot T_e \underbrace{e^{-j\pi f T_e}}_{\text{latence.}} \cdot \text{sinc}(\pi f \cdot T_e)}$$

$$|Y(f)| = \Big|\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f-nF_e)}_{\text{this is } \frac{|X_e(f)|}{F_e}}\Big| \, \big|\text{sinc}(\pi f T_e)\big| \cdot \big|e^{-j\pi f T_e}\big|$$



DISTORTION

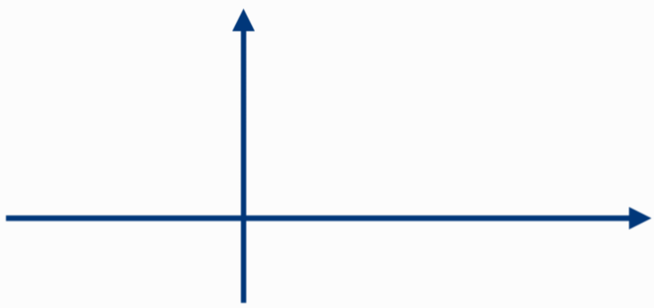
$$Y(f) = TF\,[x_e * h_1] = X_e(f) \cdot \underbrace{TF[h_1]}_{TF\,[\Lambda_{T_e}(t)]}$$

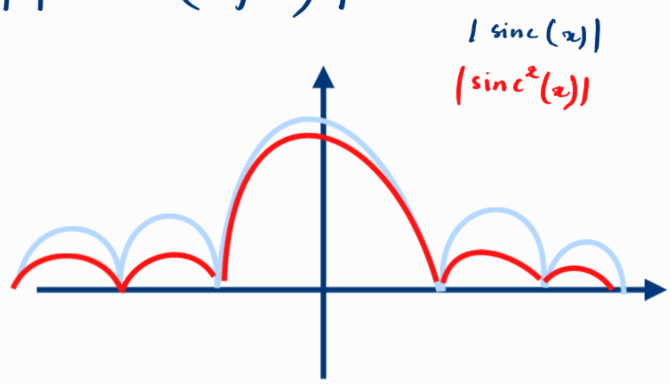
$$= \text{Surface du Triangle} \cdot \text{sinc}^2$$

$$= X_e(f) \cdot T_e \,\text{sinc}^2(\pi f T_e)$$

↳ $\frac{1}{2} \cdot 2T_e \cdot 1$

$$= |Y(f)| = F_e \cdot T_e \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f-nT_e) \right| \left| \text{sinc}^2(\pi f T_e) \right|$$





Distorsion :

BF : plus grande atténuation du motif central qu'avec un BOZ.

↳ c'est moins bien

HF : Résidus d'amplitude plus faible qu'avec le BOZ ⊕

→ Comme on peut éliminer les Résidus en HF avec un passe bas.

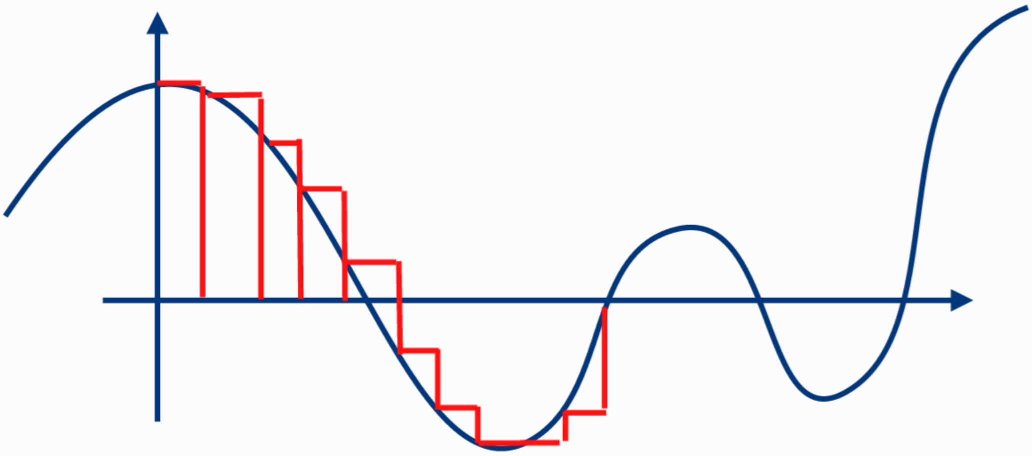
donc le BOZ est plus souhaitable psq il introduit en basse fréq. une distorsion plus faible.

⇒ Filtrage $\boxed{}$ passe bas $f_c = \frac{F_e}{2}$ pour éliminer les terme de distorsion residuel. HF.

Representation Temporelle

$$y(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e)\, h(t - nT_e) \quad ----$$

BOZ : $h_0(t) = T_e \, \Pi_{T_e}(n - T_e/2)$



→ les sommes des segments de droite vont approcher la courbe.

⚠ il y'a tjr une latence, même le 1 même si, il parait bien.

$$y_1(t) = \int_{t-T_e}^{t+T_e} x_e(\tau)\, h_1(t-\tau)\, d\tau$$

⇒ necessite la reconnaissance de $x_e(\tau)$ pour $\tau \in [t - T_e, t + T_e]$ donc futurs sur $[t, t+T_e]$

→ latence de T_e

QUANTIFICATION

: un arrondi autorisé par l'ordi, dépend du nbr de bit sur lequel on peut stocker.

Ω : ensemble fini de valeurs autorisé

card $\Omega = 2^N$

pour $N = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$

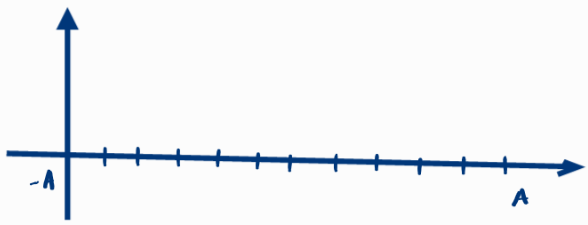
000
001
⋮
111

- **Valeur de Pleine Echelle**

si $x(nT_e) > A$, $x_q[n]$ sera le m̂ que celui correspondant à $x(nT_e) = A$

si $x(nT_e) < A$, $x_q[n]$ sera le m̂ que celui correspondant à $x(nT_e) = -A$

Quantification Uniforme



2^N interval de m̂ longueur.

$$\boxed{\text{quantum : } q = \frac{2A}{2^N}} \quad ; \quad I = \left\{ -\frac{2^N-1}{2}, \frac{2^N-1}{2} \right\}$$

$$\Omega = \{kq\}_{k \in I}$$

On peut également avoir quantification non uniforme.

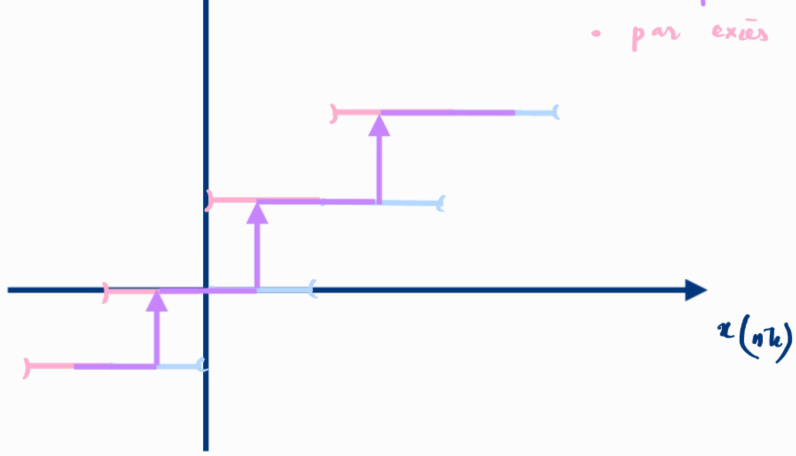
Loi de quantif : 3 types.

- arrondi par défaut : $kq \leqslant x(nT_e) < (k+1)q \Rightarrow x_q[n] = kq$ → arrondi par défaut

- arrondi par excès $kq \leqslant x(nT_e) < (k+1)q \Rightarrow x_q[n] = (k+1)q$ → par excès

- par défault
- au + proche

• par excès



$$x_q = x + \varepsilon_q$$ ← Bruit de quantif

Rapport Signal sur Bruit de Quantification

$$\boxed{RSB_q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2}}$$

?

$$RSB_q = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2}$$

on a $\sigma_q^2 = E\left[\left[\varepsilon_q - E(\varepsilon_q)\right]^2\right] = E(\varepsilon_q^2)$

$E(\varepsilon_q) = 0$ Loi uniforme → centré

$$\sigma_q^2 = \int_{\varepsilon_q \in \mathbb{R}} \varepsilon_q^2 \cdot p_{\varepsilon_q}(\varepsilon_q)\, d\varepsilon_q = \frac{1}{q}\int_{-q/2}^{q/2} \varepsilon_q^2 \cdot d\varepsilon_q$$

$$= \frac{1}{q}\left[\frac{\varepsilon_q^3}{3}\right]_{-q/2}^{q/2} = \frac{q^2}{3 \cdot 4} = \boxed{\frac{q^2}{12}}$$

$$\sigma_q^2 = \frac{(2A)^2}{(2^N)^2 \cdot 12} = \frac{4A^2}{2^{2N} \cdot 12} = \frac{A^2}{3 \cdot 2^{2N}}$$ ... 10 log si c'est l'engin

CD Audio $\Rightarrow$ quantif sur 16 bit

HD $\Rightarrow$ quantif sur 24 bit

} on veut facteur de charge le plus petit possible $\Rightarrow$ pour moins de bruit.

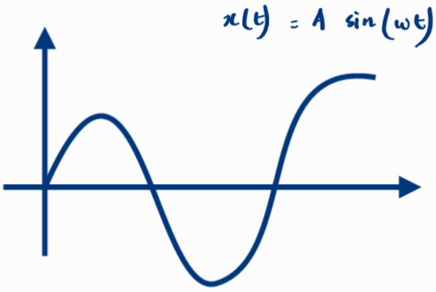
$$RSB_q = 10 \log \frac{\sigma_x^2}{\sigma_q^2} = 10 \log \left(\frac{\sigma_x^2 \cdot 3 \cdot 2^{2N}}{A^2} \right)$$

$$= 20\, N \log(2) + 10 \log \left(\frac{3\, \sigma_x^2}{A^2} \right)$$

$$= 6N - 10 \log \left(\frac{F^2}{3} \right)$$ où $\boxed{F = \frac{A}{\sigma_x} = \text{facteur de charge}}$

Indique ssi A est bien choisi.

hyp : $x(t) = A \sin(\omega t)$



$$\sigma_x^2 = E\left[\left(x - \underbrace{E[x]}_{=0} \right)^2 \right] \Leftrightarrow \underbrace{\langle x^2 \rangle}_{\text{moyenne}^2}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{A^2}{2}, \quad F^2 = \frac{A^2}{\sigma_x^2} = 2.$$

$$RSB_q = 6N - 10 \log \left(\frac{F^2}{3} \right) = 6N + \underbrace{10 \log \left(\frac{3}{2} \right)}_{1.76\ dB}$$

plus A est grand, moins on utilise de valeurs entre $(-A, A)$ $\rightarrow$ on aura bcq d'erreur !

- $$TFSD\,[x[n]] = TF(x_e(t)) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sum x(nT_e) \cdot \delta(t - nT_e)}_{x_e(t)} \cdot e^{-j 2\pi f t}\, dt$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{x(nT_e)}_{x[n]} \cdot e^{-j 2\pi f\, n / F_e}$$

$x(t)$ réel $\rightarrow$ symétrie hermitienne.

$$X(-f) = X^*(f)$$

hyp si $x[n] \in \mathbb{R}$.

démo : $X(-f) = \sum x[n]\, e^{-j2\pi(-f)\frac{n}{Fe}} = \sum_n \underset{\substack{\| \\ x[n]^*}}{x[n]} \left[e^{-j2\pi f\frac{n}{Fe}}\right]^*$

donc $\left[\sum_n x[n]\, e^{-j2\pi f\frac{n}{Fe}}\right]^* = X(f)^*$

$$\boxed{\begin{aligned} &\Rightarrow |X(-f)| = |X(f)| \\ &\mathrm{Arg}(X(-f)) = -\mathrm{Arg}(X(f)) \end{aligned}}$$