

تابع تبدیل حلقه باز $C(s) = U(s) \cdot G_p(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{3}{s+5} = \frac{3}{s(s+5)}$

مقدار حالت ماندگار $\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3s}{s(s+5)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3}{s+5} = \frac{3}{0+5} = \frac{3}{5} = 0.6$

زمان نشست:

$$G_p(s) = \frac{\frac{3}{5}}{s+5} = \frac{3}{5(1+0.2s)} \rightarrow \tau = 2 \xrightarrow{\%98: T_s=4\tau} T_s = 4 \times 0.2 = 0.8 \text{ s}$$

خطای حالت ماندگار به ازای ورودی پله واحد:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot (1 - C(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(1 - \frac{3}{s(s+5)}\right) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(\frac{s+2}{s+5}\right) \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+2}{s+5} = \frac{0+2}{0+5} \rightarrow e_{ss} = \frac{2}{5} = 0.4$$

پهنای باند:

$$\begin{cases} BW: |G_p(j\omega)| = 0.707 \times 0.6 = 0.4242 \\ |G_p(j\omega_c)| = \left| \frac{3}{j\omega_c + 5} \right| = \frac{3}{\sqrt{\omega_c^2 + 25}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{\omega_c^2 + 25}} = 0.4242 \rightarrow \omega_c = 5 \end{cases}$$

ب) با در نظر گرفتن یک کنترل کننده تناسبی $G_c(s) = k_p$ ، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته را بدست آورید.

تابع تبدیل سیستم حلقه بسته:

$$G(s) = G_c(s) \cdot G_p(s) = k_p \cdot \frac{3}{s+5} = \frac{3k_p}{s+5}$$

$$\rightarrow T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{3k_p}{s+5}}{1+\frac{3k_p}{s+5}} = \frac{\frac{3k_p}{s+5}}{\frac{3k_p+s+5}{s+5}} = \frac{3k_p}{s+5+3k_p}$$

ج) با در نظر گرفتن یک کنترل کننده تناسبی $G_c(s) = k_p$ ، مقدار k_p و زمان نشست سیستم را به گونه ای بیابید که خطای حالت ماندگار به ازاء ورودی پله واحد $\frac{1}{4}$ شود.

$$G(s) = G_c(s) \cdot G_p(s) = k_p \cdot \frac{3}{s+5} = \frac{3k_p}{s+5}$$

مقدار k_p :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+\frac{3k_p}{s+5}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{3k_p+s+5}{s+5}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+5}{3k_p+s+5}$$

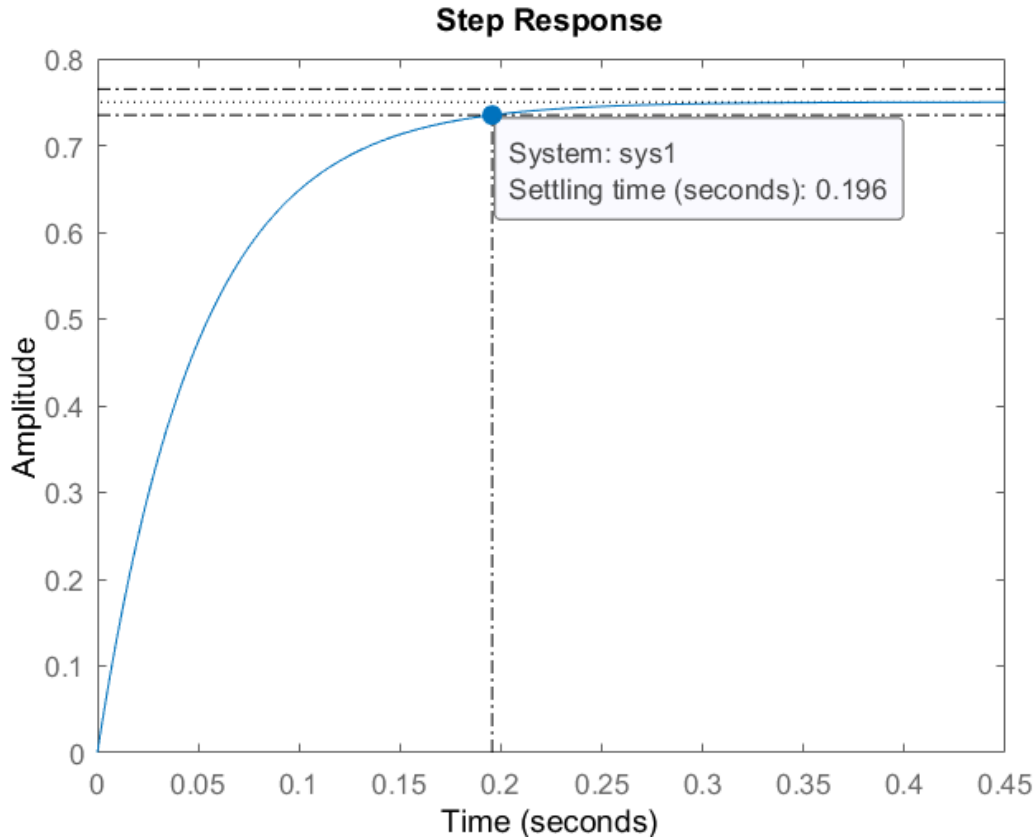
$$= \frac{0+5}{3k_p+0+5} \xrightarrow{e_{ss}|r(t)=u(t)=\frac{1}{4}} e_{ss} = \frac{5}{3k_p+5} = \frac{1}{4} \rightarrow k_p = 5$$

$$\tau = \frac{1}{5+3k_p} = \frac{1}{5+3 \times 5} = \frac{1}{20} \xrightarrow{\%98: T_s=4\tau} T_{(98\%)} = 4\tau = 4 \times \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \text{ s}$$

$$G_{close\ loop}: \frac{\frac{15}{5+s}}{1+\frac{15}{5+s}} = \frac{\frac{15}{5+s}}{\frac{5+s+15}{5+s}} = \frac{\frac{15}{5+s}}{\frac{20+s}{5+s}} = \frac{15}{20+s}$$

زمان نشست سیستم:

$$k_p = 5 \xrightarrow{matlab} step(G_{close\ loop}) \rightarrow t_s = 0.196$$



د) با در نظر گرفتن یک کنترل کننده تناسبی $G_c(s) = k_p$ ، مقدار k_p و خطای حالت ماندگار به ازاء ورودی پله واحد را به گونه ای بیابید که زمان نشست سیستم $\frac{4}{11}$ ثانیه شود.

$$G(s) = G_c(s) \cdot G_p(s) = k_p \cdot \frac{3}{s+5} = \frac{3k_p}{s+5}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{3k_p}{s+5}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{3k_p + s + 5}{s+5}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+5}{3k_p + s + 5}$$

$$= \frac{0+5}{3k_p + 0 + 5} = \frac{5}{3k_p + 5}$$

مقدار k_p :

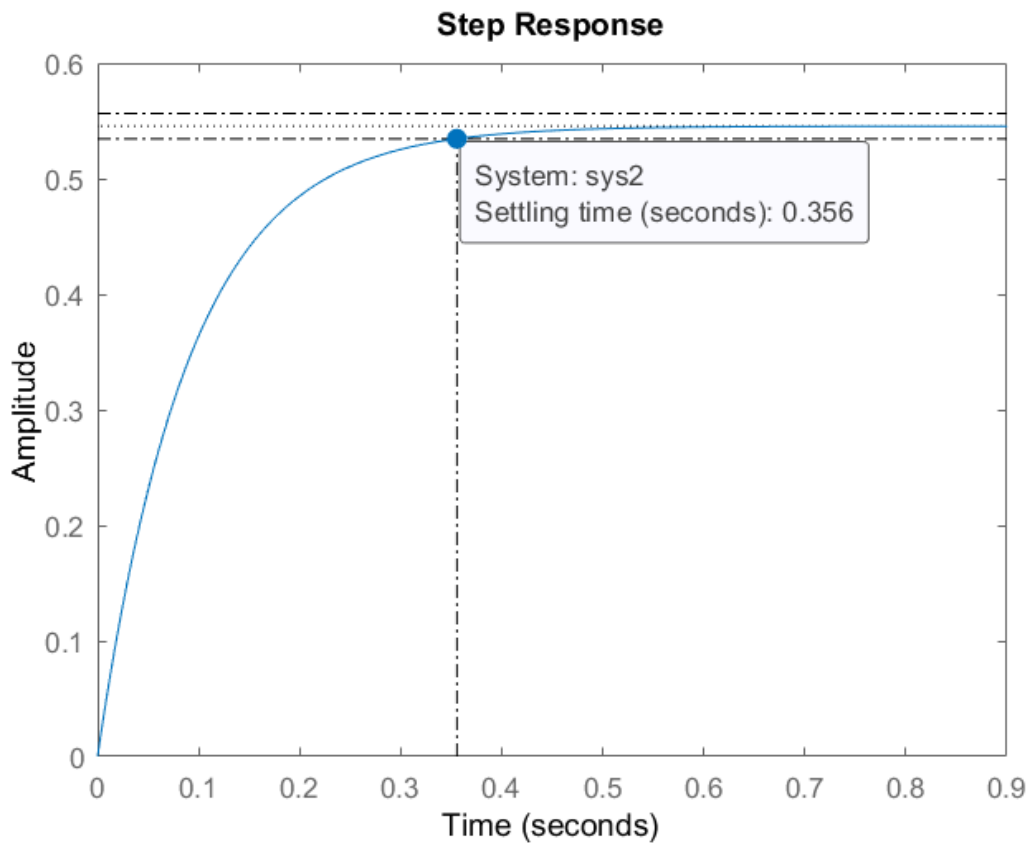
$$T_s = 4\tau = \frac{4}{11} \rightarrow \tau = \frac{1}{11} \xrightarrow{\tau = \frac{1}{5+3k_p}} \frac{1}{5+3k_p} = \frac{1}{11} \rightarrow 5+3k_p = 11 \rightarrow k_p = 2$$

خطای حالت ماندگار به ازای ورودی پله واحد:

$$e_{ss} = \frac{5}{5+3k_p} = \frac{5}{5+3 \times 2} = \frac{5}{11} = 0.4545$$

$$G_{close\ loop} = \frac{\frac{6}{s+5}}{1 + \frac{6}{s+5}} = \frac{\frac{6}{s+5}}{\frac{s+5+6}{s+5}} = \frac{\frac{6}{s+5}}{\frac{s+11}{s+5}} = \frac{6}{s+11}$$

$$k_p = 2 \xrightarrow{\text{matlab}} \text{step}(G_{close\ loop}) \rightarrow t_s = 0.356 = \frac{4}{11}$$



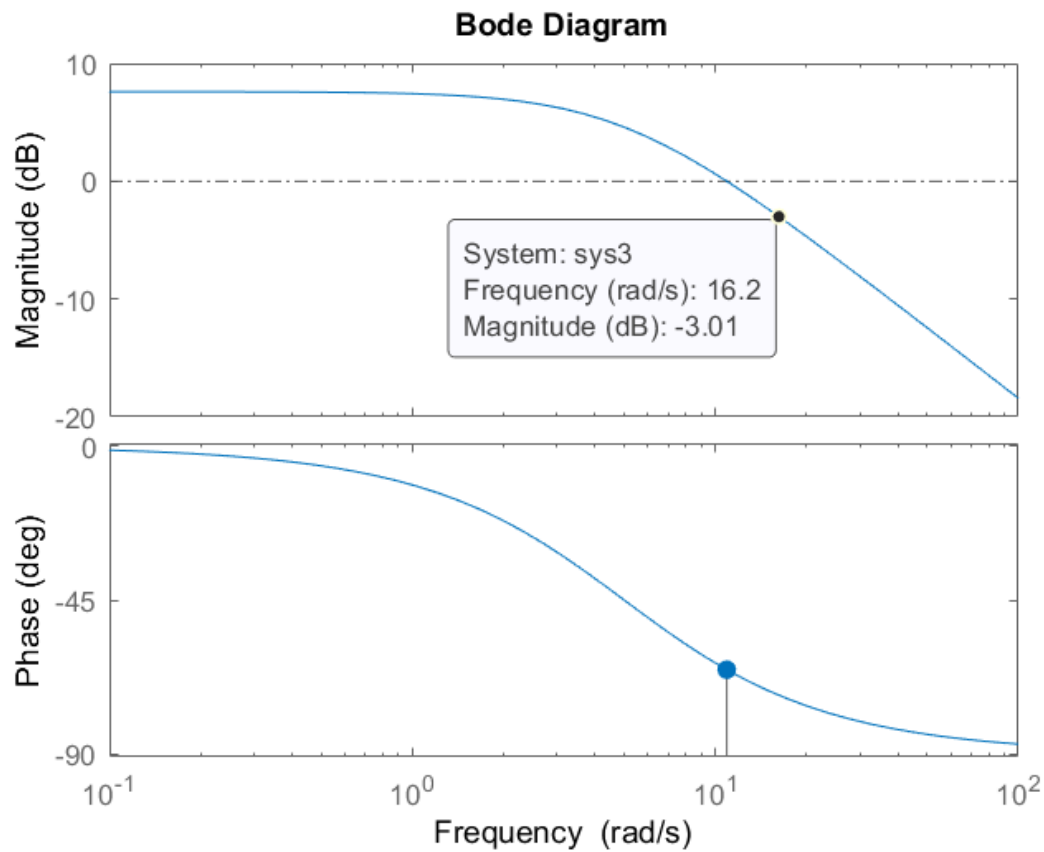
ه) با در نظر گرفتن یک کنترل کننده تناسبی $G_c(s) = k_p$ ، مقدار k_p را به گونه ای بیابید که پهنای باند 17 رادیان بر ثانیه شود.

$$\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega_c)| = 0.707 \times M_{max} = 0.707 \times \frac{3k_p}{5+3k_p} \\ G(s) = \frac{3k_p}{s+5+3k_p} \rightarrow G(j\omega_c) = \frac{3k_p}{j\omega_c+5+3k_p} \xrightarrow{\omega_c=17} |G(j\omega_c)| = \frac{3k_p}{\sqrt{17^2+(5+3k_p)^2}} \end{array} \right.$$

مقدار k_p :

$$\Rightarrow \frac{0.707 \times 3k_p}{5+3k_p} = \frac{3k_p}{\sqrt{17^2+(5+3k_p)^2}} \rightarrow k_p = 4$$

$$G(s) = \frac{4 \times 3}{s+5} = \frac{12}{s+5}$$



(و) درستی نتایج بدست آمده در موارد ج، د، و ه را با استفاده از نرم افزار متلب بررسی نمایید.

نمودار خروجی هر قسمت در بخش پاسخ همان قسمت آورده شد.

کد متلب:

```
clear all,
clc,
clf
s = tf('s');

%%jim
sys1=15/(s+20);
figure(1)
step(sys1)

%%dal
sys2=6/(s + 11);
figure(2)
step(sys2)

%%he
sys3=12/(s + 5);
figure(3)
bode(sys3)
```

۲- تابع تبدیل $G_p(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 20}$ را در نظر بگیرید.

الف) با استفاده از تولباکس sisotool نرم افزار متلب، کنترل کننده PID طراحی کنید؛ به طوریکه شروط زیر برقرار باشد:

$$T_s \leq 1 \text{ sec} \quad \& \quad P.O. \leq 10\%$$

همچنین ضرائب کنترل کننده به صورت زیر باشد:

$$k_p \leq 0.5 \quad \& \quad k_i \leq 5 \quad \& \quad k_d \leq 0.1$$

$$G_p(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 20}$$

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

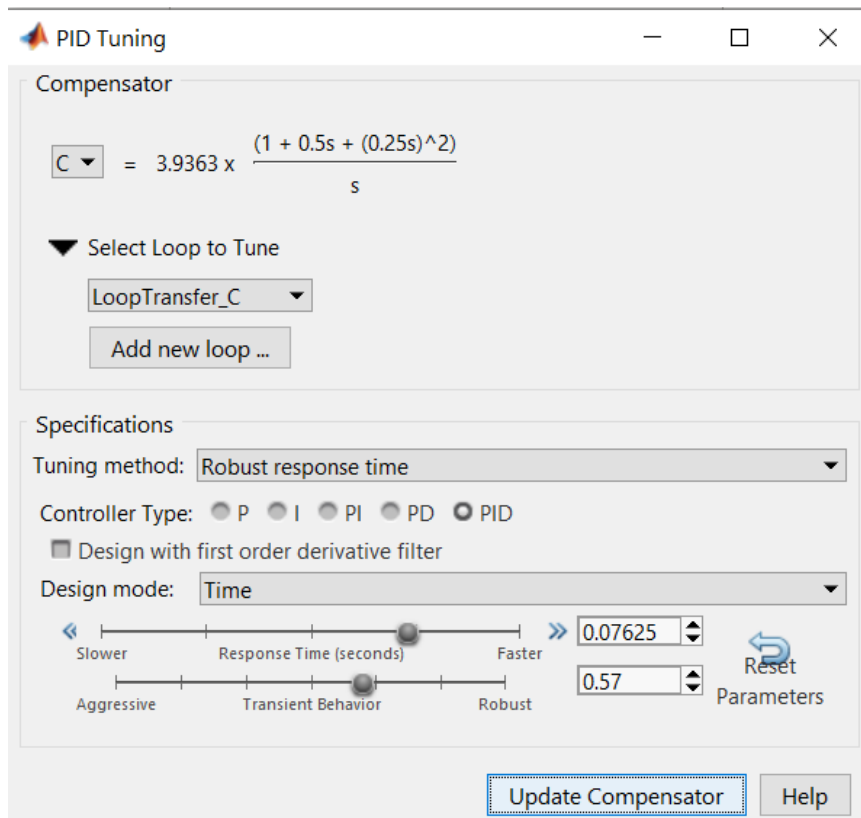
سپس با استفاده از متلب و این کد از sisotool بهره می گیریم:

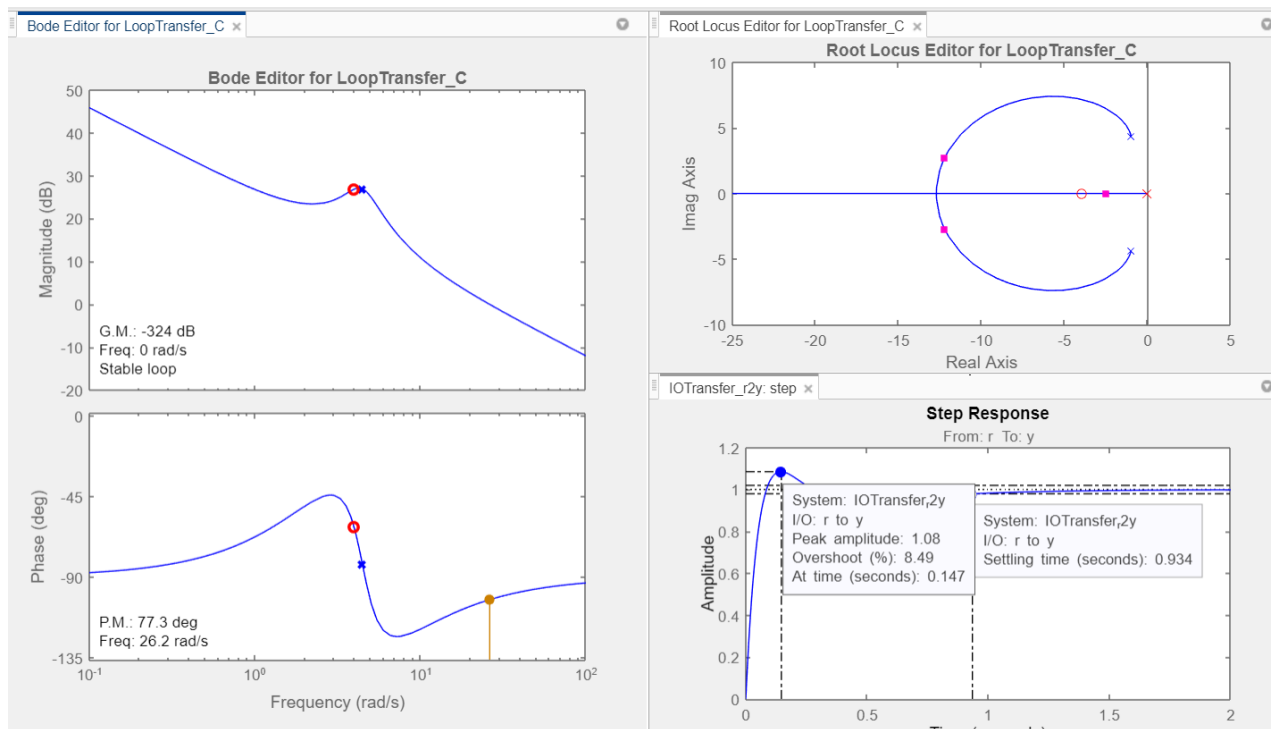
```
clear all,  
clc,  
clf  
s = tf('s');
```

```
G_p=100/(s^2+2*s+20);  
sisotool(G_p)
```

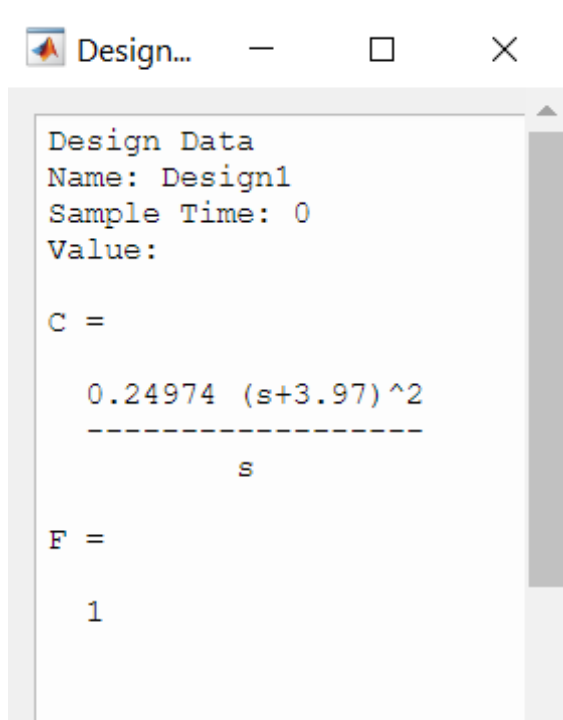
برای آنکه $T_s \leq 1 \text{ sec}$ & $P.O. \leq 10\%$ اعداد زیر را می دهیم و نتیجه در sisotool مشخص

می شود.

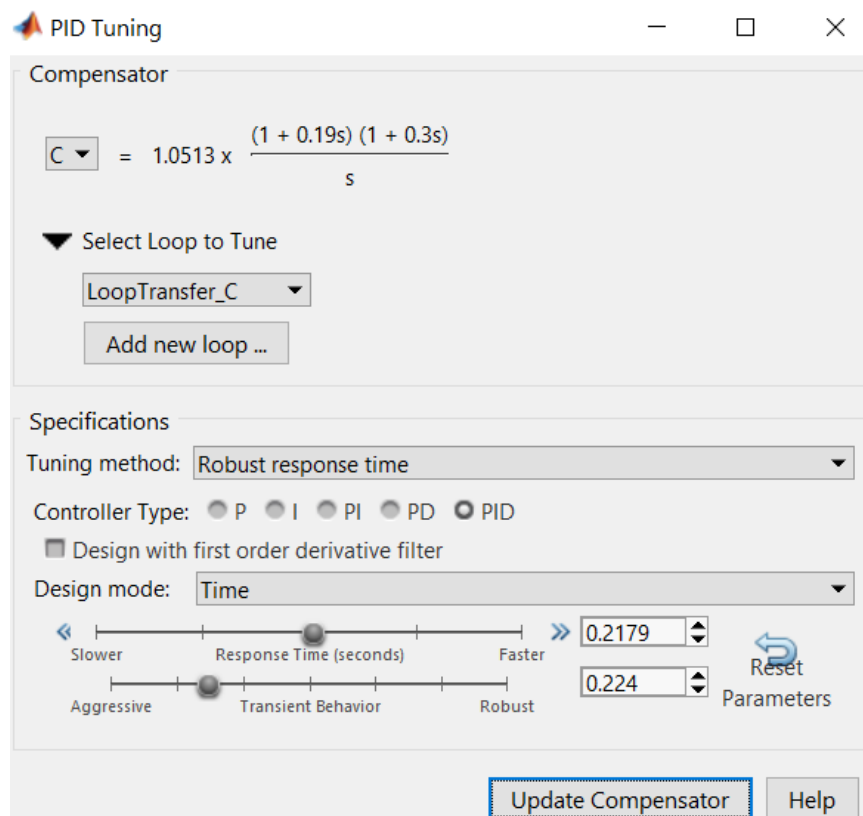




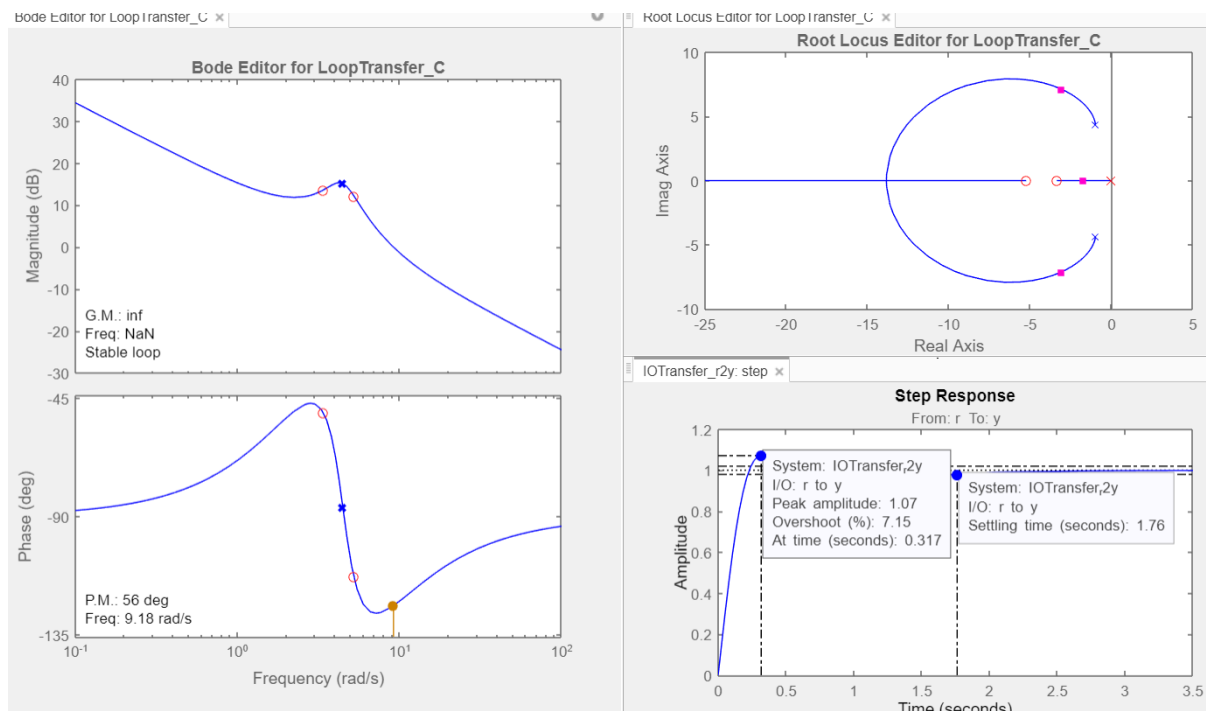
مشاهده میشود که overshoot و settling time مطابق بازه خواسته شده در مسئله است اما مابقی پارامترها آنطور که مسئله خواسته نیست.



پس بازهم اعداد را تغییر می‌دهیم



با این اعداد به تقریب خوبی خواسته‌های مسئله برآورده می‌شود.



می‌بینیم که تنها **settling time** مقداری از حد مجاز تجاوز کرده و باقی پارامترها مطابق خواسته مسئله است. با توجه به اعداد قبلی که داده بودیم، میشود **settling time** هم درست باشد اما خب باقی پارامترها به هم میریزد.

$$C = 1.0513 \times \frac{(1 + 0.19s)(1 + 0.3s)}{s}$$

ب) تابع تبدیل نهایی سیستم را بدست آورید.

$$G_c(s) = 1.0513 \frac{(1 + 0.19s)(1 + 0.3s)}{s}$$

$$G_c(s) \cdot G_p(s) = 1.0513 \frac{(1 + 0.19s)(1 + 0.3s)}{s} \cdot \left(\frac{100}{s^2 + 2s + 20} \right)$$