



پردیس علوم

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

## بررسی تعاریف مختلف ریسک در انتخاب سبد سهام

نگارنده

زهرا خطیبی - مهیار محمدی متین

استاد درس: دکتر سلیمانی

پروژه درس برنامه‌ریزی غیرخطی

رشته علوم کامپیوتر

بهار ۱۴۰۲

## چکیده

انتخاب سبد سهام<sup>۱</sup> یک مفهوم مهم در امور مالی و سرمایه گذاری است. فرآیند انتخاب ترکیبی از دارایی ها مانند سهام، اوراق قرضه و سایر اوراق بهادار، با هدف دستیابی به یک هدف سرمایه گذاری خاص، مانند حداکثر کردن بازده، به حداقل رساندن خطرات، یا دستیابی به تعادل بین این دو است. در انتخاب سبد سهام مهم ترین چالش نحوه تعریف ما از ریسک است. در این پژوهش ما به بررسی چهار روش مختلف برای انتخاب سبد سهام بر اساس ریسک های مختلف پرداخته ایم. هر کدام از این روش ها روی سبد سهام متنوعی شامل ۲۰ دارایی از صنایع مختلف بورس آزمایش شده اند. همچنین برای دقت بیشتر و لحاظ کردن کلاس های دارایی بیشتر، اوراق خزانه (سرمایه گذاری بدون ریسک) و طلا (به عنوان دارایی خارج از بازار بورس) نیز در سبد انتخابی اضافه شده اند تا اکثر کلاس های دارایی مورد بررسی قرار گرفته باشد.

اولین روش سنجش ریسک بر اساس مدل میانگین-واریانس مارکوویتز<sup>۲</sup> است که پایه گذار بهینه سازی سبد سهام بوده است [۱]. روش دوم ریسک احتمالی است که در مقاله نوشته دکتر سلیمانی و همکاران مطرح شده است [۲]. سومین روش که در مقاله آقای کرخمال<sup>۳</sup> مطرح شده است روش دارایی در معرض خطر شرطی<sup>۴</sup> است [۳]. در آخر نیز به بررسی روش حداکثر کاهش قیمت<sup>۵</sup> میپردازیم [۴].

نتایج نشان می دهد که هر کدام از این روش ها، قابلیت های خاص خود را دارند و بهترین روش بسته به وضعیت بازار و موقعیت سرمایه گذاری متفاوت است. برای مثال، روش میانگین-واریانس برای سرمایه گذاری در بازار های پایدار مناسب است، در حالی که روش حداکثر کاهش قیمت، برای سرمایه گذاری در بازار های نوسانات بیشتر و مخصوصا نزولی، بهترین عملکرد را دارد. از طرفی روش دارایی در معرض خطر شرطی برای سرمایه گذاران به شدت ریسک گریز مناسب خواهد بود.

---

۱. *portfolio selection*

۲. *Markowitz's Mean-variance approach*

۳. *Krokhmal*

۴. *conditional value at risk*

۵. *Maximum Drawdown (MDD)*

## پیشگفتار

اهمیت انتخاب پرتفوی در این واقعیت نهفته است که به سرمایه گذاران اجازه می دهد سرمایه گذاری های خود را متنوع کرده و ریسک های خود را مدیریت کنند. با انتخاب ترکیبی از دارایی هایی که همبستگی بالایی ندارند، سرمایه گذاران می توانند ریسک کلی پرتفوی خود را کاهش دهند و به طور بالقوه بازده خود را افزایش دهند. انتخاب پرتفوی علاوه بر مدیریت ریسک ها می تواند به سرمایه گذاران در دستیابی به اهداف سرمایه گذاری خود نیز کمک کند. به عنوان مثال، اگر سرمایه گذار به دنبال به حداکثر رساندن بازده باشد، ممکن است سبد دارایی های پرخطر و با بازده بالا را انتخاب کند، در حالی که سرمایه گذاری که به دنبال به حداقل رساندن ریسک است، ممکن است سبد دارایی های کم ریسک و کم بازده را انتخاب کند. علاوه بر این، اهمیت انتخاب پرتفوی فراتر از سرمایه گذاری فردی به سرمایه گذاری نهادی مانند صندوق های بازنشستگی، شرکت های بیمه و موقوفات گسترش می یابد. این سازمان ها افق های سرمایه گذاری بلندمدت و سرمایه های بزرگی برای مدیریت دارند که انتخاب پورتفولیو را به عنصری حیاتی از استراتژی های سرمایه گذاری خود تبدیل می کند.

به طور کلی در مسئله انتخاب سبد سهام، با یک مسئله بهینه سازی غیرخطی با دو متغیر سر و کار داریم. هدف ما ماکسیم کردن بازده انتظاری سهام در عین مینیم کردن ریسک است. تعاریف ریسک متنوع است و جلوتر به آن پرداخته خواهد شد. بر این اساس<sup>۴</sup> روش را برای پیاده سازی بر روی داده های بورس تهران در نظر گرفتیم:

**میانگین واریانس:** این رویکرد به طور گسترده در امور مالی مورد استفاده قرار می گیرد و بر این ایده استوار است که سرمایه گذار باید با هدف به حداکثر رساندن بازده مورد انتظار خود در حالی که واریانس (یا انحراف استاندارد) پرتفوی خود را به حداقل برساند. رویکرد میانگین واریانس فرض می کند که بازده پرتفوی از توزیع نرمال پیروی می کند و سرمایه گذاران ریسک گریز هستند، به این معنی که ریسک کمتری را برای همان بازده ترجیح می دهند.

**ریسک احتمالی:** این رویکرد احتمال نتایج مختلف را در نظر می گیرد و توزیع احتمال را به بازده بالقوه پرتفوی اختصاص می دهد. این به سرمایه گذاران اجازه می دهد تا احتمال سناریوهای مختلف مانند سقوط بازار یا رکود اقتصادی را ارزیابی کرده و پرتفوی خود را بر این اساس تنظیم کنند.

**ارزش شرطی در معرض خطر (CVAR):** یک رویکرد اندازه گیری ریسک است که بر اساس VaR است. در حالی که VaR حداکثر ضرر بالقوه را در یک بازه زمانی مشخص و سطح اطمینان تخمین می زند، CVaR به زیان مورد انتظار فراتر از آستانه VaR نگاه می کند. به عبارت دیگر، CVaR زیان مورد انتظار را در صورتی که پرتفوی یک رویداد منفی قابل توجه فراتر از یک آستانه مشخص را تجربه کند، اندازه گیری می کند.

**حداکثر کاهش ارزش (MDD):** حداکثر کاهش بزرگترین کاهش رو به پایین در ارزش پرتفوی را در یک دوره زمانی خاص اندازه گیری می کند. این معیاری از بدترین سناریو برای یک سبد است، زیرا نشان می دهد که اگر سرمایه گذار در اوج سرمایه گذاری می کرد و در پایین می فروخت چقدر ضرر می کرد. MDD می تواند برای ارزیابی ریسک نزولی یک پرتفوی مورد استفاده قرار گیرد.

در این پژوهش سعی شده است که بزرگترین و قدیمی‌ترین نماد های هر صنعت بورسی مورد بررسی قرار گیرد. در ادامه لیست نماد های بورسی بررسی شده در بازه ۲ سال و نیم گذشته را مشاهده می‌کنید.

صنعت دارو: برکت

صنعت فلزات اساسی: فولاد

صنعت بانک: وبملت

صنعت قطعات خودرو: خزامیا

صنعت ساختمان: کرمان

صنعت زراعت: زملازرد

صنعت مخابرات: اخابر

صنعت هتل و گردشگری: گدنا

صنعت ارتباطات: اوان

صنعت پلاستیک: پلاسک

صنعت استخراج کانه فلزی: کگل

صنعت سرمایه‌گذاری: ورنّا

صنعت حمل و نقل: حکشتی

صنعت سیمان: سبزوا

صنعت نفتی: شپنا

صنعت بیمه: دانا

صنعت غذایی: غگلستا

صنعت کاشی سرامیک: کحافظ

صنعت خودرو: خودرو

صندوق ETF (سرمایه‌گذاری بر شاخص بورس): اطلس

صندوق طلا: طلا

صندوق درآمد ثابت و اوراق خزانه (سرمایه‌گذاری بدون ریسک): افران

انتخاب سهام از صنایع مختلف از جهت کاهش بیشتر ریسک و همبستگی کمتر بازده سهام به یکدیگر است.

## فهرست مطالب

۱. مفاهیم مقدماتی	۷
۱.۱. تعاریف حوزه مدیریت مال	۷
۱.۱.۱. تعریف انواع ریسک	۷
۱.۱.۲. تعریف فروش استقراضی (short sale)	۸
۱.۱.۳. تعریف ارزش در معرض خطر (VaR) و انواع آن	۸
۱.۲. تعاریف حوزه ریاضیات و آمار	۹
۱.۲.۱. تعریف همبستگی دو متغیر تصادفی	۹
۱.۲.۲. بهینه سازی محدب و اهمیت آن	۱۰
۱.۲.۳. نحوه اندازه گیری بازده و ریسک سبد سهام	۱۱
۱.۲.۴. تعریف مرز کارا	۱۱
۱.۳. توضیحات کتابخانه های استفاده شده	۱۲
۱.۳.۱. کتابخانه های Numpy و Pandas	۱۲
۱.۳.۲. کتابخانه cvxpy برای بهینه سازی محدب	۱۲
۱.۳.۳. کتابخانه scipy	۱۳
۱.۴. نحوه جمع آوری دیتای معاملات نمادها	۱۴
۱.۴.۱. سایت شرکت مدیریت فناوری بورس تهران (TSETMC)	۱۴
۱.۴.۲. معرفی کتابخانه (pytse_client)	۱۴
۱.۴.۳. مفهوم قیمت تعدیل شده	۱۴
۲. بهینه سازی های پیاده شده	۱۵
۲.۰. خواندن سابقه نمادها و تمیزسازی	۱۵

۲.۱	روش میانگین-واریانس مارکوویتز	۱۷
۲.۱.۱	بررسی نموداری ریسک و بازده	۱۷
۲.۱.۲	بررسی همبستگی بین سهام انتخابی	۱۸
۲.۱.۳	حل مسئله بهینه‌سازی مارکوویتز	۱۹
۲.۱.۴	بررسی نتایج مختلف	۲۰
۲.۱.۵	رسم مرز کارا	۲۲
۲.۱.۶	اضافه کردن طلا، اوراق و ETF به پرتفو	۲۳
۲.۲	روش ریسک احتمالی	۲۶
۲.۲.۱	نحوه محاسبه	۲۶
۲.۲.۲	نتایج برای پارامترهای $\gamma$ مختلف	۲۶
۲.۳	روش ارزش در معرض خطر شرطی	۲۸
۲.۳.۱	پیاده‌سازی سه روش محاسبه $Var$	۲۸
۲.۳.۲	نحوه بهینه‌سازی $Var$	۳۰
۲.۴	روش کمینه‌سازی حداکثر ریزش قیمت	۳۱
۲.۴.۱	توضیح عملکرد این روش	۳۱
۲.۴.۲	شروع بهینه‌سازی	۳۲
۲.۴.۳	مقایسه نتیجه با پرتفو مارکوویتز	۳۳
۳	نتیجه‌گیری	۳۴
۴	کتاب‌نامه	۳۵

## مفاهیم مقدماتی

### ۱.۱. تعاریف حوزه مدیریت مالی

#### ۱.۱.۱. تعریف انواع ریسک

ریسک به احتمال از دست دادن پول یا عدم دستیابی به بازده مورد انتظار در اثر عوامل مختلف اشاره دارد. برخی از ریسک ها ذاتا مشتق شده از خود بازار هستند، در حالی که برخی دیگر مختص اوراق بهادار یا استراتژی های سرمایه گذاری هستند.

انواع مختلفی از ریسک در بازارهای مالی وجود دارد که عبارتند از:

ریسک بازار<sup>۶</sup>: به احتمال زیان ناشی از تغییرات در کل بازار مانند نوسانات نرخ بهره، تورم یا رویدادهای ژئوپلیتیکی اشاره دارد.

ریسک اعتباری<sup>۷</sup>: این ریسک به احتمال زیان ناشی از نکول توسط وام گیرنده یا طرف مقابل، مانند ناشر اوراق قرضه یا طرف مقابل مشتقات اشاره دارد.

ریسک نقدینگی<sup>۸</sup>: به احتمال زیان زمانی اشاره دارد که سرمایه گذار به دلیل کمبود خریدار یا فروشنده در بازار نتواند دارایی را با سرعت کافی یا با قیمت منصفانه بفروشد.

ریسک عملیاتی<sup>۹</sup>: به احتمال زیان ناشی از خطا یا خرابی در فرآیندهای داخلی، سیستم ها یا پرسنل اشاره دارد.

ریسک شهرت<sup>۱۰</sup>: به احتمال زیان ناشی از آسیب به اعتبار یک شرکت اشاره دارد که می تواند بر توانایی آن در جذب مشتری یا سرمایه گذار تأثیر بگذارد.

ریسک سیستمی<sup>۱۱</sup>: به احتمال زیان ناشی از فروپاشی گسترده سیستم مالی، مانند زمان بحران مالی اشاره دارد.

از سوی دیگر، ریسک پورتفولیو به ریسک کلی یک سبد سرمایه گذاری با در نظر گرفتن انواع مختلف ریسک مرتبط با هر سرمایه گذاری فردی اشاره دارد. با تنوع بخشیدن به پرتفوی در بین طبقات مختلف دارایی و استراتژی

---

۶. Market risk

۷. Credit risk

۸. liquidity risk

۹. Operational risk

۱۰. Reputational risk

۱۱. Systemic risk

های سرمایه گذاری، سرمایه گذاران می توانند ریسک پرتفوی را کاهش دهند و به طور بالقوه به بازده تعدیل شده با ریسک بهتری دست یابند.

### ۱.۱.۲. تعریف فروش استقراضی (short sale)

فروش استقراضی یکی از سازوکارهای رایج در بازارهای مالی دنیا است که با استفاده از آن سرمایه گذار اقدام به قرض گرفتن سهام و فروش آن در بازار می کند به این امید که در آینده آن سهم را با قیمت پایین تری خریداری نماید و بازگرداند. در واقع فروش استقراضی به فروش اوراق بهاداری اطلاق می شود که فروشنده، مالک آن نیست بلکه با توجه به پیش بینی خود درباره افزایش قیمت، آن را به منظور فروش قرض می گیرد و تعهد می کند پس از فروش، اوراق را خریداری کرده و آن را به مالک بازگرداند. این عملیات با سه هدف عمده کسب سود در صورت کاهش قیمت، پوشش ریسک کاهش قیمت سهام و افزایش نقدشوندگی بازار از طریق بازارگردانی انجام می شود. یکی از موارد مهم خرید و فروش تعهدی این است که شرایط این معاملات باید بین طرفین کاملاً مشخص شود و هر دو طرف به تعهدات خود پایبند باشند.

### ۱.۱.۳. تعریف ارزش در معرض خطر (VaR) و انواع آن

VaR<sup>۱۲</sup> معیاری است که سطح دقیق ریسک مالی را در یک معامله یا سرمایه گذاری مشخص می کند. این معیار معمولاً در یک دوره زمانی خاص اندازه گیری می شود و بیشترین استفاده کنندگان آن، بانک های سرمایه گذاری و تجاری هستند. آنها معمولاً از ارزش در معرض ریسک برای تعیین نسبت وقوع خسارات احتمالی که ممکن است در اوراق بهادار سازمانی آنها رخ دهد استفاده می کنند.

مدیران ریسک معمولاً از VaR به عنوان راهی برای سنجش و کنترل میزان قرار گرفتن سرمایه در معرض خطر استفاده می کنند. می توان محاسبات VaR را در موقعیت های خاص اعمال کرد. هدف اصلی از مدل سازی VaR، کشف ظرفیت بالقوه ضرر است. به طور کلی، رایج ترین و سستی ترین معیار ریسک، نوسان است. با این حال، مسئله اصلی در مورد نوسانات این است که علاقه بسیار کمی به حرکت در جهت حرکت دارایی مورد سرمایه گذاری دارد. برای برخی سرمایه گذاران، ریسک بیشتر مربوط به احتمال از دست دادن پول است. با فرض اینکه سرمایه گذاران به احتمال ضرر و زیان اهمیت می دهند، VaR به طور موثر به دو سوال پاسخ می دهد:

سوال اول. بدترین سناریو چیست؟

سوال دوم. چقدر می توانم در یک بازه زمانی مشخص ضرر کنم؟

بیشترین مقداری که ممکن است در کل ماه آینده ضرر کنم با سطح اطمینان ۹۵٪ یا ۹۹٪ چقدر است؟

---

۱۲. Value at Risk



حداکثر درصدی که می توانم در طی سال بعد سرمایه از دست بدهم با سطح اطمینان ۹۵٪ یا ۹۹٪ چقدر است؟ همانطور که مشاهده می کنید ، سوال VaR شامل سه عنصر است. یکی از آنها سطح اطمینان<sup>۱۳</sup> بالایی است که به طور معمول ۹۵٪ یا ۹۹٪ است. دیگری یک بازه زمانی است ، که مثلاً تحت عنوان یک روز ، یک ماه یا یک سال تعیین می شود. سومین تخمین تقریبی از ضرر سرمایه گذاری است که ارزش یا درصد آن را نشان می دهد. به طور کلی ، سه نوع روش برای محاسبه VaR وجود دارد. روش تاریخی<sup>۱۴</sup>، روش پارامتری<sup>۱۵</sup> و روش شبیه سازی مونت کارلو<sup>۱۶</sup>.

روش تاریخی: آنچه این روش انجام می دهد در نظر گرفتن بازده واقعی در داده های تاریخی است. در این روش داده ها از بدترین به بهترین رتبه بندی می شود. پس از آن ، به طور پیش فرض ، فرض می شود که تاریخ تکرار خواهد شد و این حقیقت از منظر ریسک نیز صادق است.

روش پارامتری: در این روش فرض می شود که بازده ها از توزیع نرمال آمده اند. این توزیع بازده های سهام در یک بازه زمانی تخمین زده می شود و بررسی می شود که در این توزیع با احتمال ۹۵ درصد بازده از چه عددی کمتر نخواهد بود.

شبیه سازی مونت کارلو : این روش شامل توسعه مدلی برای بازده قیمت دارایی در آینده است. علاوه بر این ، شامل اجرای آرایه ای از آزمایشات فرضی از طریق مدل سازی است. با اجرای چندباره تابع رندوم می توانیم شبیه سازی ای برای آینده در نظر بگیریم و نتیجه شبیه سازی را به عنوان ارزش در معرض خطر گزارش کنیم.

## ۱.۲. تعاریف حوزه ریاضیات و آمار

### ۱.۲.۱. تعریف همبستگی<sup>۱۷</sup> دو متغیر تصادفی

همبستگی پرکاربردترین معیار آماری برای ارزیابی روابط بین متغیرها است. این معیار، میزان ارتباط خطی دو متغیر را بیان می کند ( به این معنی که آنها با یک نرخ ثابت تغییر می کنند).

ضریب همبستگی، که با  $r$  نشان داده می شود، از  $-1$  تا  $1$  متغیر است. ضریب همبستگی  $1$  نشان دهنده همبستگی مثبت کامل است، به این معنی که دو متغیر با هم در یک جهت حرکت می کنند. ضریب همبستگی  $-1$  نشان دهنده

<sup>۱۳</sup>. Confidence Interval

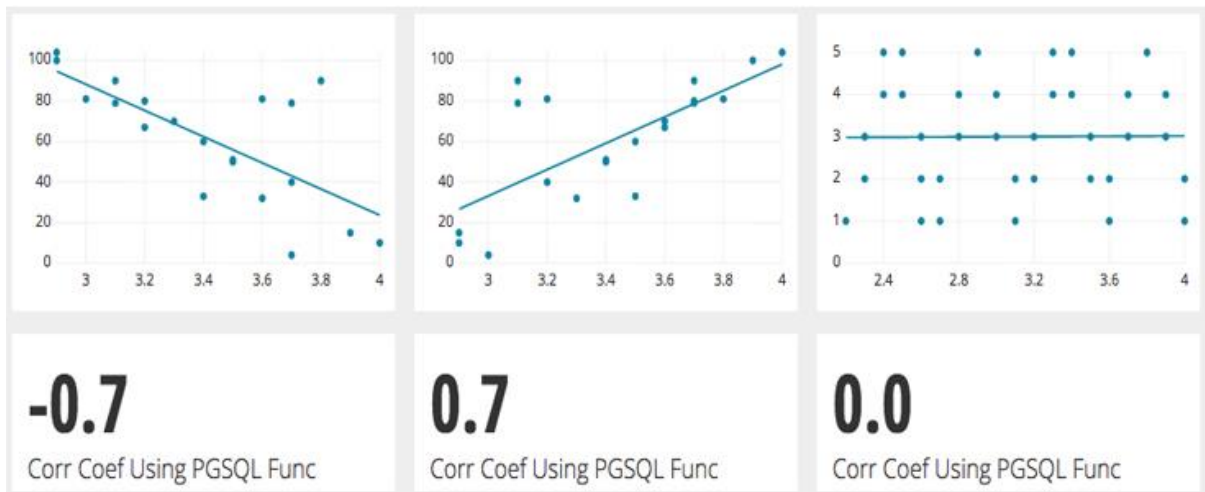
<sup>۱۴</sup>. Historical

<sup>۱۵</sup>. Parametric

<sup>۱۶</sup>. Monte Carlo

<sup>۱۷</sup>. Correlation

همبستگی منفی کامل است، به این معنی که دو متغیر با هم در جهت مخالف حرکت می کنند. ضریب همبستگی صفر نشان دهنده عدم همبستگی است، به این معنی که متغیرها به هم مرتبط نیستند.



همبستگی پیرسون ( $r$ ) برای اندازه گیری قدرت و جهت یک رابطه خطی بین دو متغیر استفاده می شود:

$$r_{xy} = \frac{cov(x, y)}{S_x * S_y}$$

## ۱.۲.۲. بهینه سازی محدب<sup>۱۸</sup> و اهمیت آن

بهینه سازی محدب زیرشاخه ای از بهینه سازی ریاضی است که به یافتن راه حل بهینه برای یک مسئله می پردازد که شامل یک تابع هدف محدب و شرایط محدب است. تحدب به ویژگی یک تابع اشاره دارد که در آن هر پاره خطی که دو نقطه روی تابع را به هم متصل می کند، کاملاً بالای تابع قرار می گیرد.

در بهینه سازی محدب، هدف به حداقل رساندن (یا حداکثر کردن) یک تابع هدف محدب تحت مجموعه ای از شرایط محدب است. تابع هدف معمولاً یک عبارت ریاضی است که نشان دهنده مقداری است که باید حداقل یا حداکثر شود، مانند هزینه یک فرآیند تولید یا سود یک سبد سرمایه گذاری. محدودیت ها شرایط اضافی هستند که باید رعایت شوند، مانند محدود کردن مقدار منابع استفاده شده یا اطمینان از اینکه متغیرهای خاصی در محدوده مشخصی قرار دارند.

مسائل بهینه سازی محدب به ویژه جذاب هستند، زیرا دارای ویژگی های مطلوبی هستند که آنها را از نظر ریاضی قابل حمل و کارآمد می کند. به عنوان مثال، مسائل بهینه سازی محدب دارای یک مینیم یا ماکسیم سراسری منحصر به فرد هستند که می توان آن را با استفاده از الگوریتم های مختلف، مانند گرادیان، روش های نقطه داخلی، یا برنامه ریزی درجه دوم محدب، به طور موثر پیدا کرد.

بهینه سازی محدب کاربردهای متعددی در زمینه های مختلف از جمله مهندسی، مالی، آمار، یادگیری ماشین و تحقیق در عملیات دارد. برخی از نمونه ها عبارتند از بهینه سازی سبد سهام، پردازش تصویر، پردازش سیگنال، الگوریتم های یادگیری ماشین و سیستم های کنترل.

### ۱.۲.۳. نحوه اندازه گیری بازده و ریسک سبد سهام

روش بازده مورد انتظار<sup>۱۹</sup> و انحراف استاندارد یک روش رایج برای محاسبه بازده و ریسک یک سبد است. این روش شامل محاسبه میانگین موزون بازده مورد انتظار و انحراف استاندارد تک تک اوراق بهادار در پرتفوی است. بازده مورد انتظار پرتفو حاصل میانگین وزن دار بازده مورد انتظار هر سهم داخل آن است ( $w_i$  وزن سهم  $i$ ام است).

$$Er_p = \sum_{i=1}^n w_i * Er_i$$

انحراف معیار پرتفو نیز حاصل ریشه مجموع زیر است ( $\sigma_{ij}$  کوواریانس دو سهم  $i$  و  $j$  است):

$$Var_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

با استفاده از روش بازده مورد انتظار و انحراف استاندارد، سرمایه گذاران می توانند ریسک و بازده یک سبد را ارزیابی کرده و آن را با سایر گزینه های سرمایه گذاری مقایسه کنند. توجه به این نکته ضروری است که این روش فرض می کند که بازده تک تک اوراق بهادار در پرتفوی به طور معمول توزیع شده است و همبستگی بین اوراق بهادار در طول زمان پایدار است. علاوه بر این، این روش تنها ریسک و بازده پرتفوی را در نظر می گیرد و عوامل دیگری مانند نقدینگی، شرایط بازار یا رویدادهای خارجی را در نظر نمی گیرد.

### ۱.۲.۴. تعریف مرز کارا<sup>۲۰</sup>

مرز کارا به مجموعه پرتفوی هایی اشاره دارد که بالاترین بازده مورد انتظار را برای سطح معینی از ریسک یا کمترین ریسک را برای سطح معینی از بازده مورد انتظار ارائه می دهند. مرز کارا با ترسیم بازده مورد انتظار و انحراف استاندارد (یا معیار دیگری از ریسک) مجموعه ای از پرتفوی با تخصیص دارایی های مختلف به دست می آید. مرز کارا معمولاً به صورت منحنی روی یک نمودار نشان داده می شود که بازده مورد انتظار در محور  $y$  و ریسک (اندازه گیری شده با انحراف استاندارد یا معیار ریسک دیگری) در محور  $x$  وجود دارد. منحنی از پرتفوی حداقل

<sup>۱۹</sup>. Expected Return

<sup>۲۰</sup>. Efficient Frontier

ریسک (پرتفوی با کمترین انحراف استاندارد) شروع می شود و به سمت راست شیب بالایی دارد. شکل منحنی به همبستگی بین دارایی های موجود در پرتفوی بستگی دارد.

سرمایه گذاران می توانند از مرز کارا برای تعیین تخصیص بهینه دارایی برای پرتفوی خود بر اساس میزان تحمل ریسک و اهداف بازده مورد انتظار خود استفاده کنند. با انتخاب پرتفوی در مرز کارا، سرمایه گذاران می توانند بهترین معاوضه ریسک و بازده ممکن را برای سرمایه گذاری خود به دست آورند. شایان ذکر است که مرز کارا فرض می کند که سرمایه گذاران منطقی و ریسک گریز هستند، به این معنی که آنها به دنبال حداکثر کردن بازده مورد انتظار خود برای سطح معینی از ریسک یا به حداقل رساندن ریسک خود برای سطح معینی از بازده مورد انتظار هستند. همچنین مرز کارا مبتنی بر داده ها و فرضیات تاریخی است که ممکن است در آینده درست نباشد.

### ۱.۳. توضیحات کتابخانه های استفاده شده

#### ۱.۳.۱. کتابخانه های Numpy و Pandas

NumPy و Pandas دو کتابخانه محبوب پایتون هستند که برای تجزیه و تحلیل داده ها استفاده می شوند. NumPy کتابخانه ای است که از آرایه ها و ماتریس های بزرگ و چند بعدی به همراه مجموعه بزرگی از توابع ریاضی برای کار بر روی این آرایه ها پشتیبانی می کند. اغلب برای محاسبات علمی و وظایف تجزیه و تحلیل داده ها که به عملیات عددی با کارایی بالا نیاز دارند استفاده می شود.

از سوی دیگر، Pandas کتابخانه ای است که بر روی NumPy ساخته شده است که ساختارها و عملکردهای داده سطح بالایی را برای دستکاری و تجزیه و تحلیل داده ها فراهم می کند. اغلب برای تمیز کردن داده ها، آماده سازی و تجزیه و تحلیل وظایف و همچنین برای تصویرسازی داده ها استفاده می شود.

NumPy و Pandas با هم مجموعه ای قدرتمند از ابزارها را برای تجزیه و تحلیل و دستکاری داده ها در پایتون ارائه می دهند. آنها به طور گسترده در زمینه های مختلف از جمله مالی، اقتصاد، علوم، مهندسی و علوم اجتماعی استفاده می شوند.

#### ۱.۳.۲. کتابخانه cvxpy برای بهینه سازی محدب

CVXPY یک کتابخانه پایتون برای بهینه سازی محدب است که روشی ساده و شهودی برای فرمول بندی و حل مسائل بهینه سازی محدب ارائه می دهد. این کتابخانه به کاربران اجازه می دهد تا مسائل بهینه سازی را با استفاده از یک زبان مدل سازی سطح بالا مشخص کنند و سپس به طور خودکار مشکل را به یک فرم استاندارد تبدیل می کند.

برخی از ویژگی های کلیدی CVXPY عبارتند از:

- یک زبان مدل سازی ساده و شهودی برای مسائل بهینه سازی محدب.
  - پشتیبانی از طیف گسترده ای از مسائل بهینه سازی محدب، از جمله برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی درجه دوم و برنامه ریزی نیمه معین.
  - پشتیبانی یکپارچه برای محدودیت ها و توابع هدف، از جمله محدودیت های خطی و غیر خطی، و توابع هدف محدب و غیر محدب.
  - سازگاری با NumPy و SciPy که امکان ادغام آسان با سایر کتابخانه های پایتون را فراهم می کند.
- CVXPY به طور گسترده در زمینه های مختلف از جمله مالی، اقتصاد، مهندسی و یادگیری ماشین استفاده می شود. این یک رابط قدرتمند و آسان برای حل مسائل بهینه سازی محدب ارائه می دهد و آن را به ابزاری ارزشمند برای هر کسی که با مسائل بهینه سازی در پایتون کار می کند تبدیل می کند.

### ۱.۳.۳. کتابخانه scipy

Scipy یک کتابخانه منبع باز محبوب برای محاسبات علمی در پایتون است. طیف گسترده ای از توابع و ابزارها را برای بهینه سازی عددی، ادغام، جبر خطی، پردازش سیگنال و سایر کاربردهای محاسباتی علمی فراهم می کند. ماژول `scipy.optimize` یک بسته فرعی از SciPy است که توابعی را برای بهینه سازی توابع اسکالر یک یا چند متغیر ارائه می دهد که شامل انواع الگوریتم های بهینه سازی برای بهینه سازی بدون محدودیت و محدود، و همچنین برای بهینه سازی سراسری و برازش حداقل مربعات است.

برخی از ویژگی های کلیدی ماژول `scipy.optimize` عبارتند از:

- پشتیبانی از طیف گسترده ای از الگوریتم های بهینه سازی، از جمله روش های مبتنی بر گرادیان.
  - یک رابط انعطاف پذیر که به کاربران اجازه می دهد تا تابع هدف و محدودیت ها را با استفاده از یک تابع پایتون یا یک عبارت نمادین مشخص کنند.
  - پشتیبانی از بهینه سازی سراسری با استفاده از الگوریتم های جستجوی تصادفی مانند تکامل تفاضلی و بهینه سازی ازدحام ذرات.
- ماژول `scipy.optimize` به طور گسترده در زمینه های مختلف از جمله مهندسی، مالی، اقتصاد و یادگیری ماشین استفاده می شود.

## ۱.۴. نحوه جمع آوری دیتای معاملات نمادها

### ۱.۴.۱. سایت شرکت مدیریت فناوری بورس تهران (TSETMC)

سایت شرکت مدیریت فناوری بورس تهران<sup>۲۱</sup> مرجع اصلی و رسمی آمار معاملات در بورس است که به طور لحظه‌ای وضعیت معاملات و دیگر ابعاد مربوط به بازار سهام را در اختیار عموم قرار می‌دهد. شرکت مدیریت فناوری بورس تهران با راه‌اندازی این وبسایت تلاش دارد تا سرمایه‌گذاران را به بهترین شکل ممکن از آخرین وضعیت معاملات بازار بورس مطلع کند.

### ۱.۴.۲. معرفی کتابخانه `pytse_client`

این کتابخانه<sup>۲۲</sup> پایتون که توسط یکی از دانشجویان دانشکده ریاضی دانشگاه تهران<sup>۲۳</sup> توسعه داده شده است، کمک می‌کند تا بدون درگیر شدن با `url`ها و `request`های پیچیده بتوانیم صفحات سایت TSETMC را اسکرپ<sup>۲۴</sup> کنیم و دیتاهای مورد نیازمان در مورد سابقه نمادها از ابتدای عرضه شان در بورس و حتی اطلاعات بنیادی آن‌ها را استخراج کنیم. همچنین امکان دریافت قیمت‌ها به صورت تعدیل شده وجود دارد.

### ۱.۴.۳. مفهوم قیمت تعدیل شده

ابزاری است که با استفاده از آن فاصله‌های قیمتی<sup>۲۵</sup> پوشش داده می‌شود. این فاصله قیمتی در بورس، ناشی از افزایش سرمایه و توزیع سود نقدی است. علت اصلی تغییرات قیمت سهم در زمان بازگشایی، ثابت ماندن ثروت سهامداران پس از افزایش سرمایه و سود نقدی می‌باشد. موضوع افزایش سرمایه در مجمع عمومی فوق‌العاده و موضوع سود نقدی در مجمع عمومی عادی سالیانه بررسی می‌شود. مجمع عمومی عادی سالیانه با هدف رسیدگی به صورت‌های مالی، رسیدگی به گزارش مدیران و بازرسان شرکت و همچنین تصویب میزان سود نقدی تقسیمی بین سهام‌داران تشکیل می‌شود. مجمع عمومی فوق‌العاده، با موضوعاتی مانند تغییرات سرمایه، تغییر اساسنامه و انحلال شرکت برگزار می‌شود. در نهایت می‌توان بیان کرد که قیمت هر سهم پس از افزایش سرمایه و یا توزیع سود نقدی در زمان برگزاری هر یک از مجامع کاهش می‌یابد که با استفاده از این ابزار، قیمت پیش از مجمع تعدیل خواهد شد. استفاده از قیمت‌های تعدیل شده به جای قیمت‌های خام سهام از آن جهت حائز اهمیت است، که گپ قیمتی ایجاد شده به علت تقسیم سود یا مجمع می‌تواند باعث افزایش واریانس و ریسک بازدهی سهام شود و سهام‌کم ریسک را پر ریسک‌تر جلوه بدهد.

---

۲۰. [tsetmc.com](http://tsetmc.com)

۲۱. [pypi.org/project/pytse-client/](http://pypi.org/project/pytse-client/)

۲۲. Shaygan Hooshyari ([github.com/Glyphack](https://github.com/Glyphack))

۲۳. Scrab

۲۴. Price Gap

## بهینه‌سازی های پیاده شده

۲.۰. خواندن سابقه نمادها و تمیزسازی

### Import libraries

```
1 import pytse_client as tse
2 import pandas as pd
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 from datetime import datetime as dt
6 from seaborn import heatmap
7 import cvxpy as cp
8 from scipy.optimize import minimize
```

### Fetching data from TSETMC

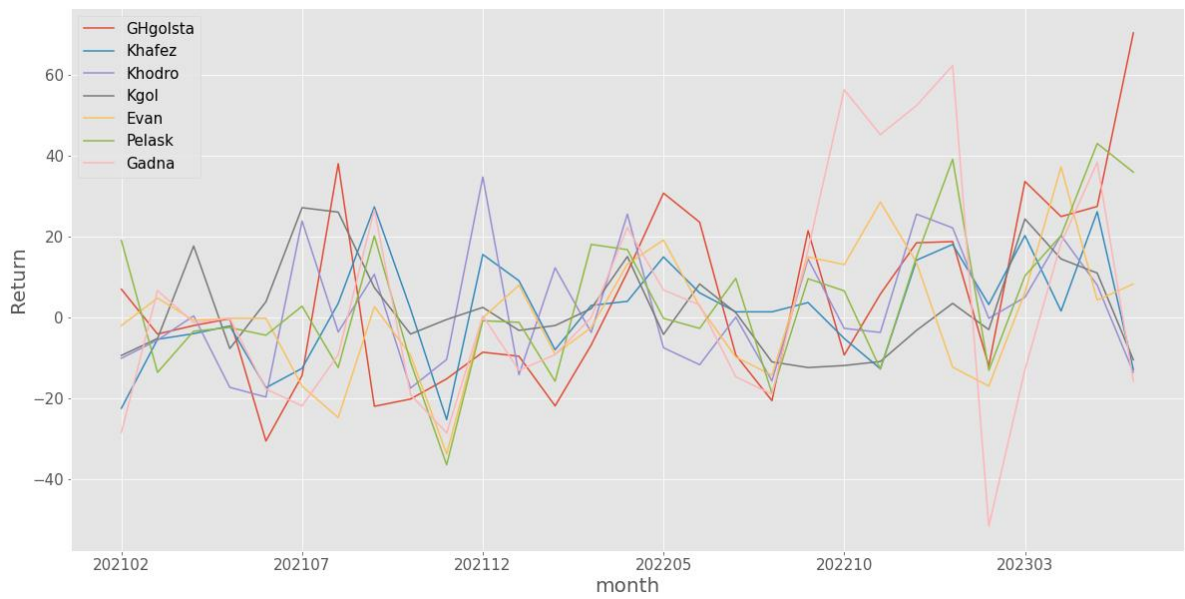
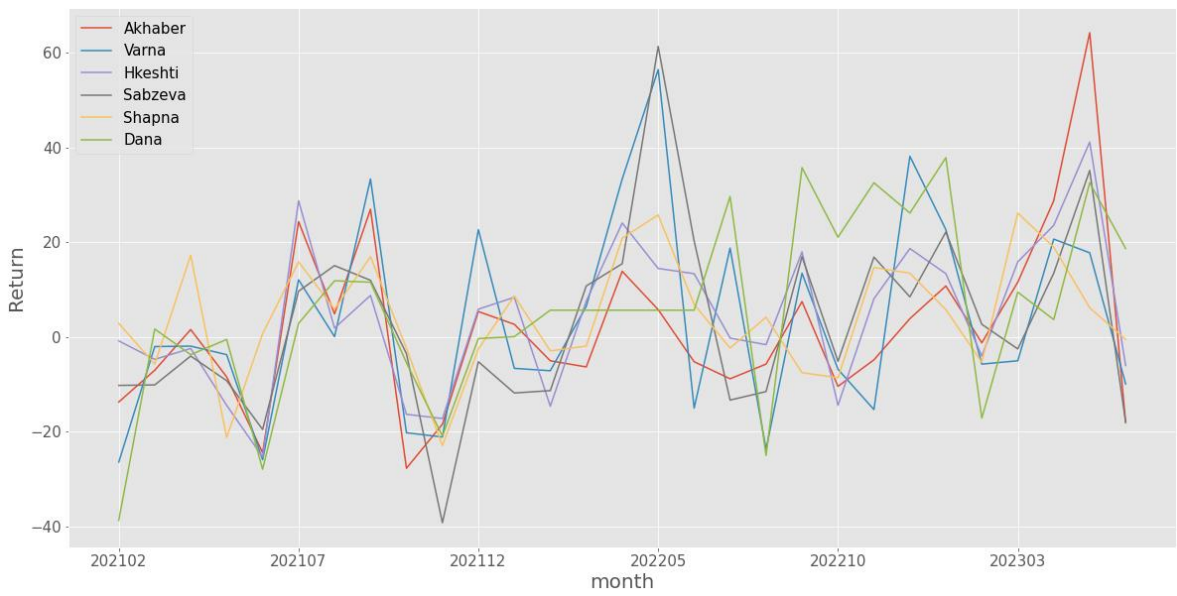
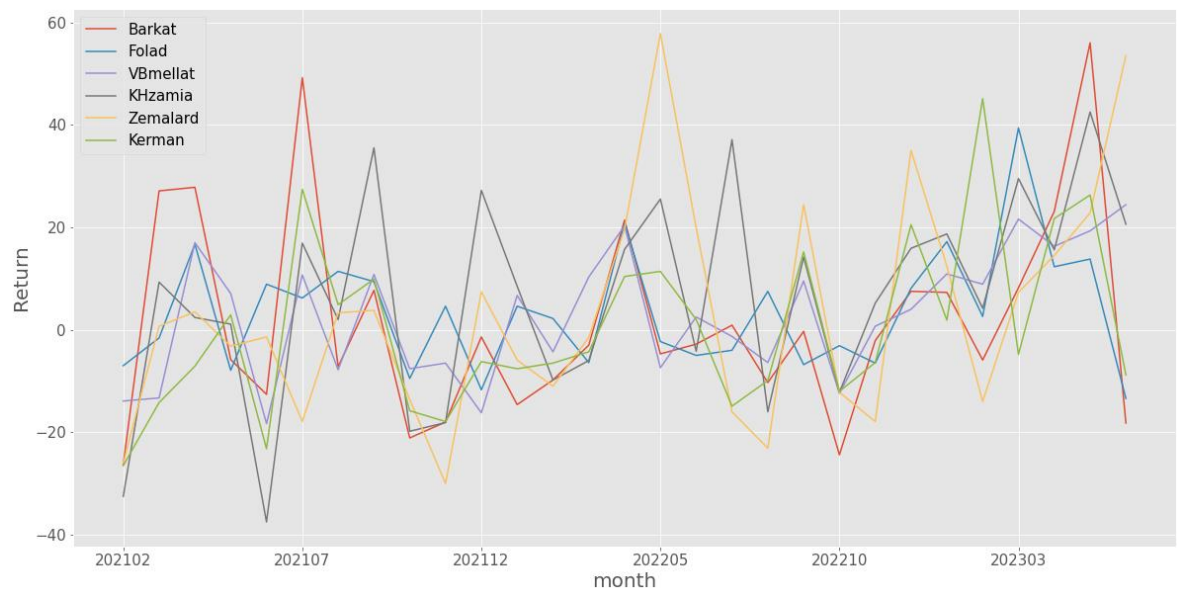
```
1 def get_symbol(symbols,symbol_en,cut_off_date=dt(2021,1,1)):
2     symbols_data = tse.download(symbols=symbols, write_to_csv=False, adjust=True, include_jdate=True)
3     for symbol in symbols:
4         df = symbols_data[symbol].copy()
5         df = df[(df.date>cut_off_date) & (df.date<dt.now().replace(day=1))].iloc[:-1]
6         df['return'] = round((df.adjClose-df.yesterday)*100/df.yesterday,1)
7         df = df.iloc[1:]
8         symbols_data[symbol] = df
9     symbols_daily = symbols_data
10    symbols_monthly = pd.DataFrame()
11    for symbol in symbols:
12        df = symbols_data[symbol].copy()
13        month = df.date.apply(lambda x: int(str(x).split()[0].replace('-', ''))//100)
14        df['month'] = month
15        df = df.drop_duplicates('month',keep='first').reset_index(drop=True)
16        curr_month = df.adjClose[1:].reset_index(drop=True)
17        prev_month = df.adjClose[:-1].reset_index(drop=True)
18        monthly_return = np.round((100*(curr_month-prev_month)/prev_month),1)
19        df = df.iloc[1:].reset_index(drop=True)
20        df[symbol] = monthly_return
21        df = df.loc[:,['month',symbol]].set_index('month')
22        symbols_monthly = pd.concat([symbols_monthly,df],axis=1)
23    symbols_monthly = symbols_monthly.reset_index()
24    symbols_monthly['month'] = symbols_monthly.month.astype(str)
25    symbols_monthly = symbols_monthly.set_index('month')
26    symbols_monthly.columns = symbol_en
27    symbols_monthly = symbols_monthly.fillna(symbols_monthly.mean())
28    return symbols_daily,symbols_monthly
```

ابتدا با استفاده از تابع `get_symbol` و براساس یک کات آف زمانی دلخواه دیتاها را از سایت TSETMC دریافت می‌کنیم و به صورت ماهانه بازده های آن را حساب می‌کنیم.

```
1 symbols = [ 'بهرکت', 'فولاد', 'ویمکت', 'خزاسیا', 'زملارد', 'کرمان', 'اکابر', 'ورنا', 'حکشتی', 'سبزوا', 'شپنا',
2             'دانا', 'غگلستا', 'کحافظ', 'خودرو', 'کگل', 'اوان', 'پلاستک', 'گدنا' ]
3 symbol_en = [ 'Barkat', 'Folad', 'VBmellat', 'KHzamia', 'Zemalard', 'Kerman', 'Akhaber', 'Varna',
4              'Hkeshti', 'Sabzeva', 'Shapna', 'Dana', 'GHgolsta', 'Khafez', 'Khodro', 'Kgol',
5              'Evan', 'Pelask', 'Gadna' ]
6 symbols_daily,symbols_monthly = get_symbol(symbols,symbol_en)
```

فعلا نمادهای طلا و اطلس(ETF) و افران(بدون ریسک) را نخواندیم تا بدون آنها تحلیلی بر سهام عادی صنعت های مختلف داشته باشیم.

نگاهی به نمودار بازده های ماهانه سهام باعث می‌شود تا دید کلی از وضعیت هر سهم داشته باشیم:





	Barkat	Folad	VBmellat	KH zamia	Zemalard	Kerman	Akhaber	Varna	Hkeshti	Sabzeva
count	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000
mean	1.644828	3.465517	2.951724	6.603448	3.182759	0.465517	1.641379	3.451724	4.496552	2.979310
std	20.125598	11.605026	12.377965	20.172214	21.753687	16.683509	18.409480	21.209981	15.579920	19.375157
min	-26.300000	-13.400000	-18.300000	-37.500000	-30.000000	-26.500000	-27.700000	-26.400000	-25.300000	-39.200000
25%	-10.300000	-6.400000	-7.400000	-6.000000	-13.600000	-9.900000	-8.400000	-9.900000	-4.700000	-10.200000
50%	-2.800000	2.600000	4.000000	8.500000	0.700000	-4.800000	-1.200000	-2.000000	5.900000	-2.500000
75%	7.700000	9.400000	10.800000	18.700000	14.500000	10.400000	7.500000	18.800000	14.500000	15.100000
max	56.000000	39.400000	24.400000	42.500000	57.800000	45.100000	64.300000	56.500000	41.200000	61.400000

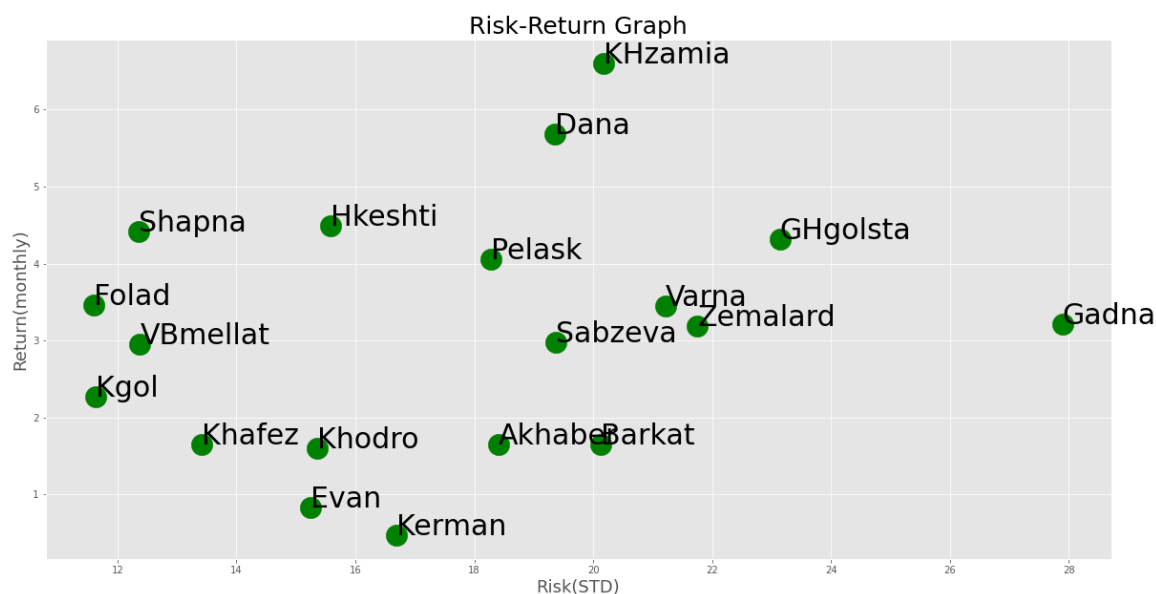
	Shapna	Dana	GHgolsta	Khafez	Khodro	Kgol	Evan	Pelask	Gadna
count	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000	29.000000
mean	4.410345	5.687500	4.313793	1.648276	1.593103	2.268966	0.824138	4.055172	3.217241
std	12.358032	19.360846	23.139155	13.411579	15.351313	11.636768	15.246631	18.277593	27.893869
min	-22.900000	-38.700000	-30.600000	-25.300000	-19.700000	-12.400000	-33.800000	-36.500000	-51.700000
25%	-2.500000	-0.500000	-12.000000	-5.400000	-10.400000	-5.200000	-9.300000	-11.000000	-15.800000
50%	4.200000	5.687500	-2.000000	2.100000	-2.700000	-0.500000	-0.100000	-0.200000	-0.200000
75%	14.700000	18.700000	21.500000	9.100000	12.300000	8.300000	8.300000	16.800000	18.400000
max	26.200000	37.900000	70.500000	27.400000	34.800000	27.200000	37.300000	43.100000	62.400000

در ۲۹ ماه بررسی شده (ماه فعلی لحاظ نشده است) همانطور که مشخص است بیشترین میانگین بازده را سهم خزامیا داشته است. همچنین بیشترین ریسک مربوط به سهم گدنا بوده است. کمترین بازده را کرمان و کمترین ریسک را فولاد و کگل داشته اند.

## ۲.۱. روش میانگین-واریانس مارکوویتز

### ۲.۱.۱. بررسی نموداری ریسک و بازده

همه سهم هارا تحت نمودار ریسک-بازده رسم می کنیم:



همانطور که مشخص است، در نگاه اول سهام شپنا، دانا و خزامیا بهتر از تمام سهم های دیگر هستند. زیرا به ازای ریسک مشخص بیشترین بازده را ارائه می کنند. برای مثال شپنا از فولاد، وبلت و کگل بهتر است زیرا در سطح ریسک مشابه بازده بیشتری ارائه می کند. کد مربوط به ترسیم نمودارها در ادامه آمده است:

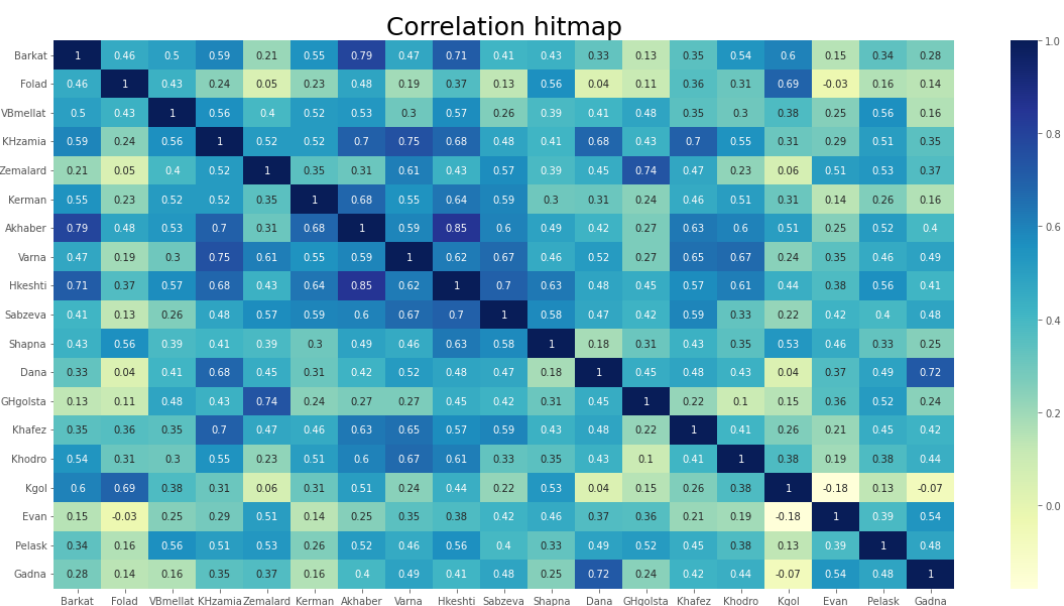
```
1 def plot_mean_var(symbols_desc,period='daily'):
2     plt.style.use('ggplot')
3     plt.figure(figsize=(20,10))
4     plt.title("Risk-Return Graph", fontsize=25)
5     plt.xlabel('Risk(STD)', fontsize=18)
6     plt.ylabel(f'Return({period})', fontsize=18)
7     for _,df in symbols_desc.iterrows():
8         plt.scatter(df.return_std,df.return_mean,s=500, c='g')
9         plt.text(df.return_std,df.return_mean,df.symbol_en,size=30)
10    plt.show()
11    display(symbols_monthly.describe())
12    symbols_monthly.plot(figsize=(20,10))
13    df = pd.concat([symbols_monthly.mean(),symbols_monthly.std()],axis=1).reset_index()
14    df.columns = ['symbol_en','return_mean','return_std']
15    plot_mean_var(df,period='monthly')
```

## ۲.۱.۲. بررسی همبستگی بین سهام انتخابی

### Correlation

```
1 corr_mat = np.round(symbols_monthly.corr(),2)
2 display(corr_mat)
3 plt.figure(figsize=(20,10))
4 hm = heatmap(corr_mat, cmap="YlGnBu", annot=True)
5 plt.title("Correlation hitmap", fontsize=25)
6 pass
```

یکی از راه های نمایش ماتریس همبستگی که دید بهتری از داده ها به ما میدهد، استفاده از نقشه حرارت<sup>۲۶</sup> است. در این نقشه هرچه خانه های جدول تیره تر باشند همبستگی بین متغیرها بیشتر است و هرچه روشن تر باشند همبستگی کمتر و منفی است. سهام انتخابی بهتر است که طوری باشند که نقشه حرارت آنها روشن تر باشد تا ریسک تنوع پذیری کاهش یابد.



همانطور که در جدول مشخص است نماد کگل استقلال نسبتاً خوبی با بقیه نمادها دارد.

### ۲.۱.۳. حل مسئله بهینه‌سازی مارکوویتز

#### Markovitz mean-variance approach

We are going to use cvxpy library for optimizing  $W'\Sigma W$ . This optimizing can make us the best portfolio with inputted conditions on  $W$  and expected return.

```
1 def optimize_portfolio(returns, target_ret=None, short_sell=False):
2     returns = returns.T.to_numpy()
3     n, m = returns.shape
4     weights = cp.Variable(n)
5     sum_weights = cp.sum(weights)
6     mu = returns.mean(axis=1)
7
8     if target_ret is not None:
9         target_return = cp.Parameter()
10        target_return.value = target_ret
11
12    cov_matrix = np.cov(returns)
13    risk = cp.quad_form(weights, cov_matrix)
14    objective = cp.Minimize(risk)
15
16    limit_return = [weights.T@mu >= target_return] if target_ret is not None else []
17    short_avail = [weights >= 0] if not short_sell else []
18
19    constraints = [sum_weights == 1]+short_avail+limit_return
20
21    prob = cp.Problem(objective, constraints)
22    prob.solve(solver=cp.ECOS)
23
24    Er = weights.value@mu
25
26    return np.round(weights.value,2), np.sqrt(risk.value), np.round(Er,2)
```

تابع `optimize_portfolio` را طوری نوشتیم که به عنوان ورودی دیتافریم بازده های سهام را ورودی بگیرد. همچنین کاربر امکان ورودی دادن بازده انتظاری خود را داشته باشد. از طرفی تعیین کند که در بازار مورد بررسی امکان فروش استقراضی وجود دارد یا خیر.

نحوه استفاده از کتابخانه CVXPY نیز بدین صورت است که یک تابع هدف (*Objective*) تعیین می‌کنیم که همان ریسک نهایی پرتفو است. حال به جای استفاده از رابطه‌ای که پیشتر به عنوان رابطه محاسبه ریسک پرتفو بیان شد از معادل آن استفاده می‌کنیم:

$$Var_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij} = w \Sigma w'$$

که در آن  $\Sigma$  ماتریس واریانس-کوواریانس است که بر روی قطر آن واریانس هر نماد، و در درایه های  $i, j$  آن نیز کوواریانس نماد  $i$  و نماد  $j$  است.

حال قیود مسئله را تحت متغیر *constraints* می‌نویسیم. قید اول که در خط ۱۶ آمده است بیان می‌دارد که جمع ریترن های پرتفو نهایی باید بیشتر از تارگت کاربر باشد. از طرف دیگر قید خط ۱۷ بیان میدارد که اگر امکان فروش استقراضی نداشتیم، حتما هر کدام از  $w$  ها باید مثبت باشند. در آخر نیز شرط آن که جمع وزن ها برابر ۱ باشد را می‌نویسیم و با *cp.problem* مسئله را حل می‌کنیم.

## ۲.۱.۴. بررسی نتایج مختلف

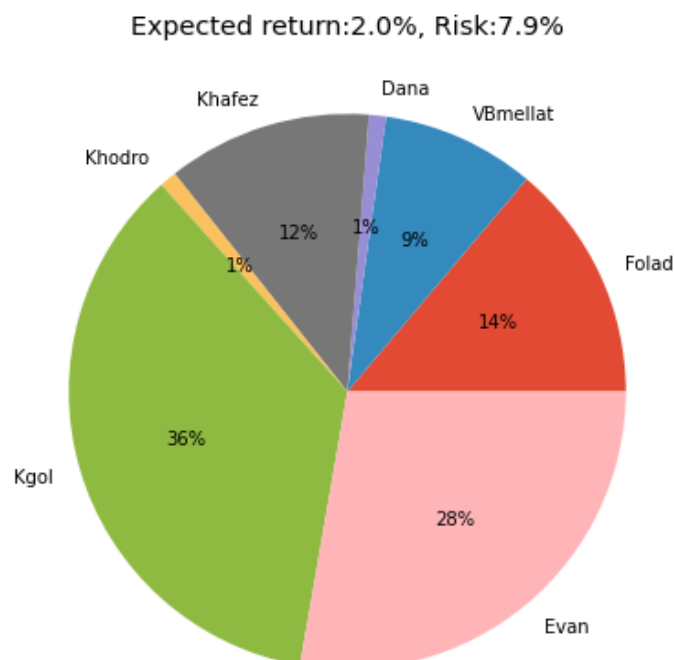
```

1 def pie_weight(weights,risk=None,Er=None,title=""):
2     weights_per = np.array(weights*100).astype(int)
3     y ,mylabels = [],[]
4     neg_flag = False
5     for i in range(len(symbol_en)):
6         if weights_per[i]:
7             if weights_per[i]<0:
8                 neg_flag=True
9                 y.append(weights_per[i])
10                mylabels.append(symbol_en[i])
11    plt.figure(figsize=(7,7))
12    if risk is not None:
13        plt.title(f'Expected return:{np.round(Er,1)}%, Risk:{np.round(risk,1)}%')
14    else:
15        plt.title(title)
16    if neg_flag:
17        plt.ylabel(f'Weight', fontsize=18)
18        pd.Series(weights,index=symbol_en).plot(kind='bar')
19    else:
20        plt.pie(y, labels = mylabels,autopct='%1.0f%%')
21    plt.show()

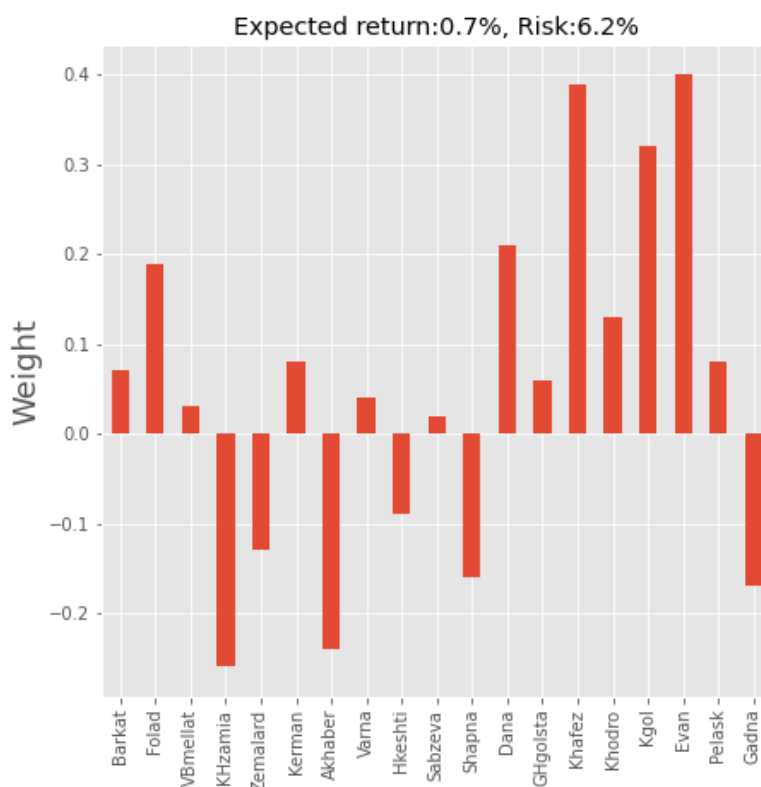
```

تابع فوق نمودار پرتفو نهایی انتخاب شده را برایمان رسم می‌کند. ابتدا بدون قید بازده خاصی سعی کنیم صرفاً ریسک را کمینه کنیم.

در شکل می‌بینیم که در این حالت با ریسک (انحراف معیار) معادل با ۷.۹٪ می‌توانیم بازده انتظاری ۲ درصد را داشته باشیم. سبد سهام انتخابی نیز طوری چیده شده است که سهام آن کمترین همبستگی را با یکدیگر داشته باشند (صرف نظر از بازده زیرا شرطی روی بازده نداشتیم) و به همین خاطر همانطور که پیشتر بررسی کردیم نماد کگل دارای بیشترین سهم از پرتفو نهایی است زیرا کمترین همبستگی را با دیگر سهام دارد.

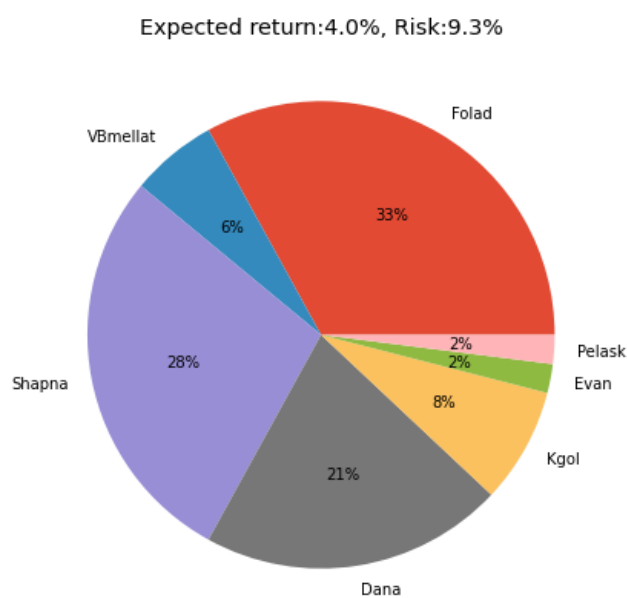


حال فرض کنیم که قابلیت فروش استقراضی را به بازار تهران اضافه کنیم! میخواهیم ببینیم چه تاثیری بر ریسک و بازده خواهد داشت. در این حالت نمودار دایره‌ای کمکی نمی‌کند زیرا اعداد منفی قابل نمایش نیستند پس از نمودار میله‌ای استفاده می‌کنیم:

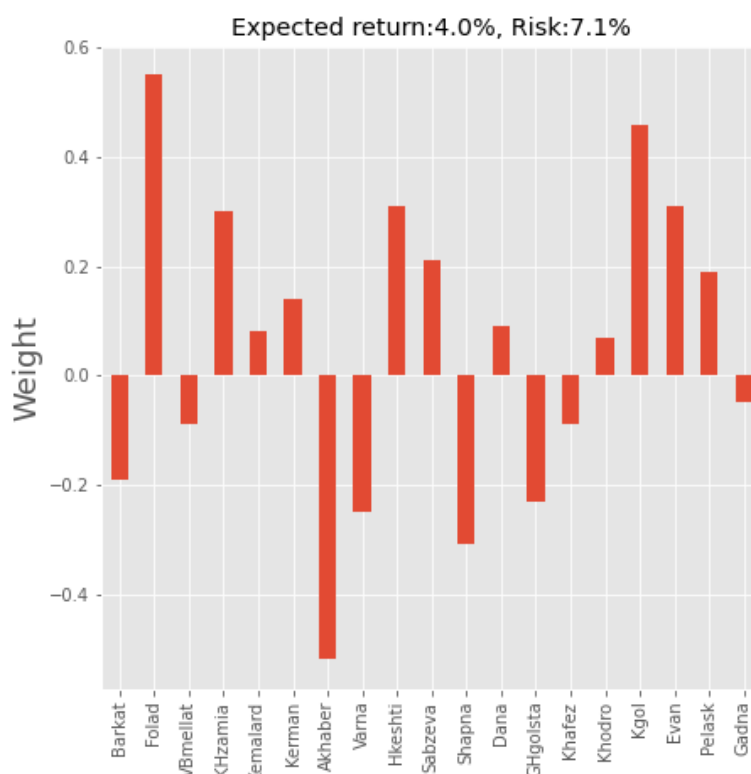


همانطور که دیدیم توانستیم به ریسک کمتری برسیم هرچند بازدهمان کاهش داشت.

حال فرض کنیم بازده انتظاری ما حداقل ۴ درصد ماهانه است. با اضافه کردن این شرط پرتفو می‌سازیم:



شاهد افزایش ۱.۴٪ در ریسک هستیم. همچنین اینبار سهم شپنا به عنوان نماد با بازده انتظاری بالا بیشتر از کگل شده است. حال بیاید فرض فروش استقراری را اضافه کنیم:



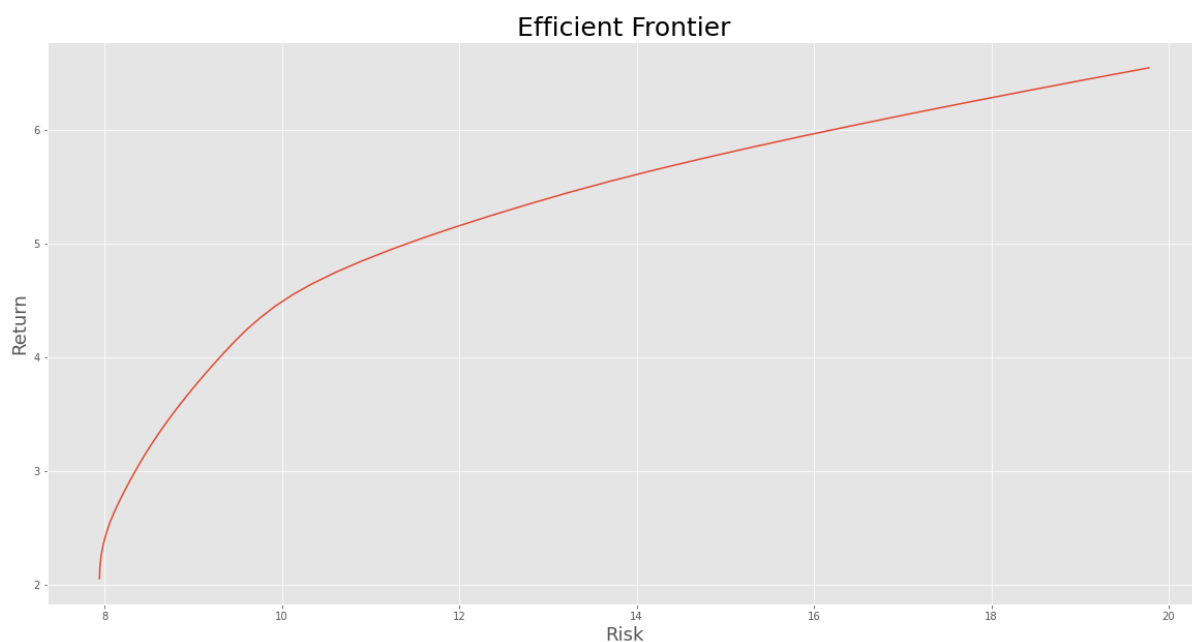
در این حالت با همان سطح بازده ۴ درصد توانستیم پرتفویی با ریسک ۷.۱ درصدی بسازیم!

## ۲.۱.۵. رسم مرز کارا

### Plot efficient frontier

```
1 eff_front = {'weight':[], 'risk':[], 'Er':[]}
2 weights, risk, Er = optimize_portfolio(symbols_monthly)
3 for ret in np.arange(Er, max(symbols_monthly.mean()), 0.1):
4     weights, risk, Er = optimize_portfolio(symbols_monthly, ret)
5     eff_front['weight'].append(weights)
6     eff_front['risk'].append(risk)
7     eff_front['Er'].append(Er)
8 eff_front = pd.DataFrame(eff_front)
9 plt.figure(figsize=(20,10))
10 plt.plot(eff_front.risk, eff_front.Er)
11 plt.title("Efficient Frontier", fontsize=25)
12 plt.xlabel('Risk', fontsize=18)
13 plt.ylabel(f'Return', fontsize=18)
14 pass
```

با استفاده از کد بالا مرز کارا را رسم می‌کنیم:



همانطور که مشخص است هر پرتفو روی این مرز قابل طراحی و بهینه ترین حالت ممکن برای هر بازده انتظاری است. وابسته به سطح ریسک‌پذیری سرمایه‌گذار یک پرتفو روی خط کارا به او پیشنهاد می‌شود.

#### ۲.۱.۶. اضافه کردن طلا، اوراق و ETF به پرتفو

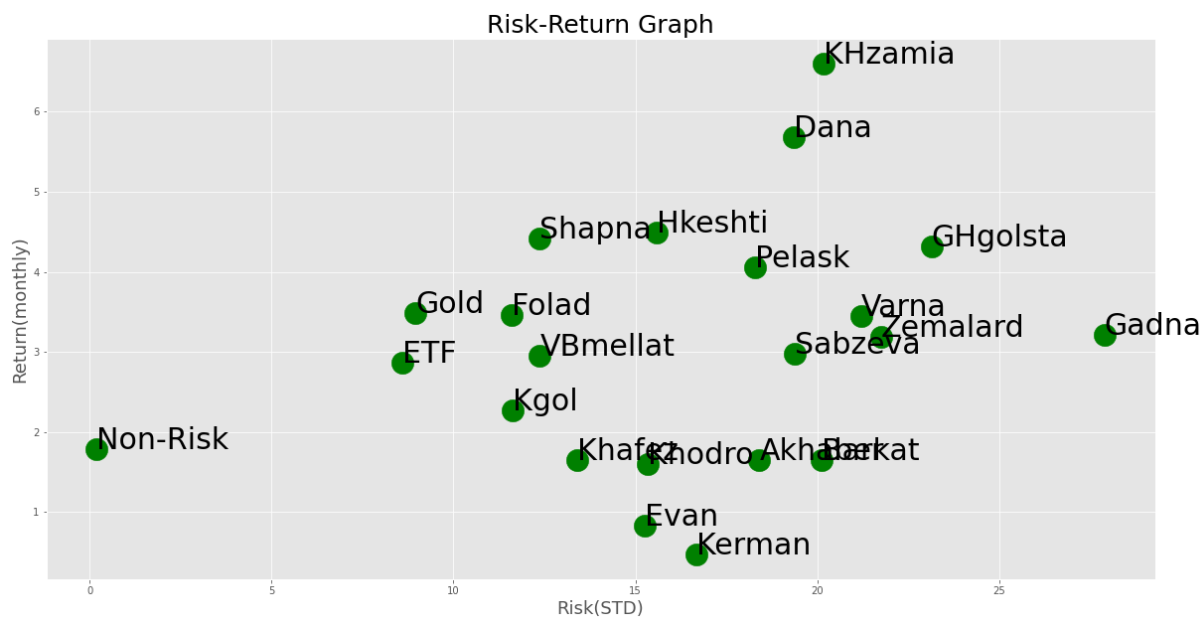
برای قابلیت انعطاف بیشتر سه نماد طلا، افران (صندوق درآمد ثابت با ریسک صفر) و اطللس (صندوق شاخصی) را اضافه می‌کنیم.

```
1 symbols += ['افران', 'طلا', 'اطلس']
2 symbol_en += ['ETF', 'Gold', 'Non-Risk']
3 symbols_daily, symbols_monthly = get_symbol(symbols, symbol_en)
```

ابتدا مروری بر اطلاعات آماری این سه سهم داشته باشیم.

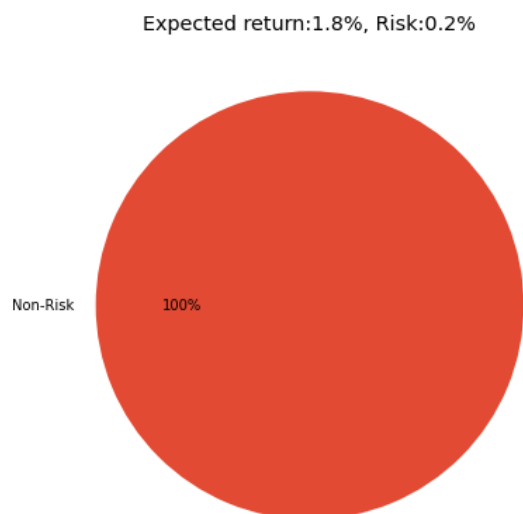
	ETF	Gold	Non-Risk
count	29.000000	29.000000	29.000000
mean	2.868966	3.489655	1.779310
std	8.609053	8.956735	0.198889
min	-11.700000	-16.700000	1.500000
25%	-3.500000	-2.600000	1.700000
50%	0.300000	3.200000	1.800000
75%	10.900000	9.500000	1.800000
max	20.600000	24.100000	2.400000

همانطور که مشخص است ریسک صندوق درآمد ثابت بسیار ناچیز (۰.۲ درصد) است. همچنین طلا و اطللس ریسک‌های نسبتاً پایینی به نسبت باقی سهم‌ها داشتند. یکبار دیگر نمودار ریسک-بازده را با حضور این سه سهم ببینیم.



همانطور که مشخص است این سه سهم جدید دارای کمترین ریسک به نسبت باقی سهام بازار هستند.

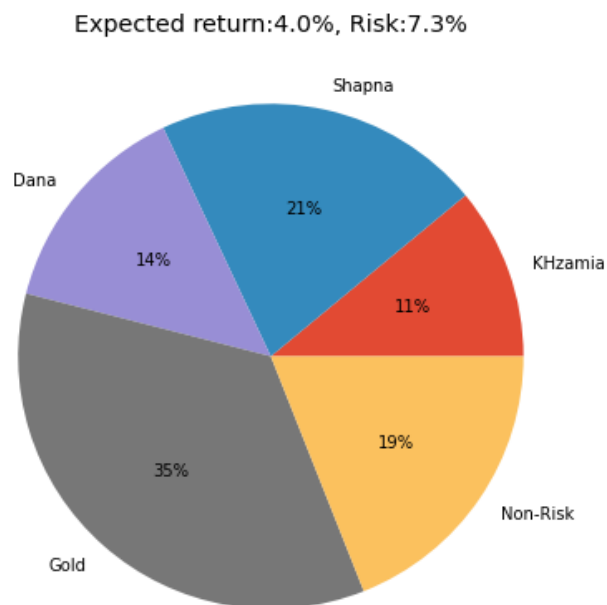
جواب این سوال بدیهی است اما اجازه دهید بررسی کنیم که اگر به تابع بهینه‌سازمان بگوییم ریسک را مینیمم کن بدون شرط بازده چه خروجی ای خواهد داد.



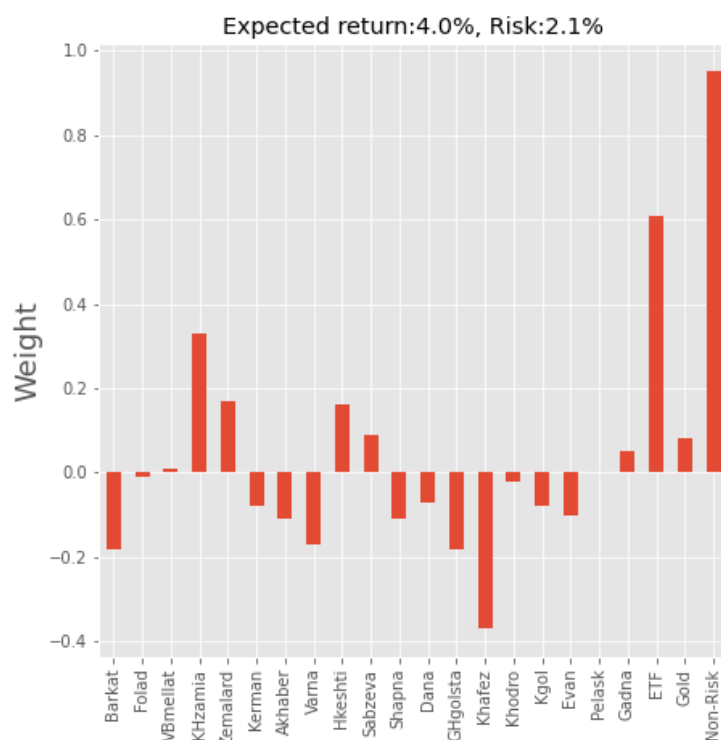
همه پرتفو را سهم بدون ریسک انتخاب کرد که همین انتظار را داشتیم. حال بازده را دوباره روی ۴ درصد قرار می‌دهیم.

نتیجه بسیار جالب است! با حضور طلا و سهام بدون ریسک توانستیم همان بازده انتظاری ۴ درصد را این بار با ریسک ۷.۳ درصد تجربه کنیم. یعنی به نسبت پرتفو قبلی ۲ درصد ریسک کمتر.





اما شاید سوال پیش بیاید که چرا ETF انتخاب نشد؟ بیاید برای بار آخر فرض فروش استقراری را به مدل اضافه کنیم.



نتیجه بسیار قابل توجه است. بازده ۴ درصد را توانستیم با فقط و فقط ۲.۱ درصد بدست آوریم. بدین صورت که اکثر سهام داخل پرتفو را ETF و اوراق تشکیل می دهند. پس وجود امکان فروش استقراری در بازارها مزیت بسیار بالایی به معامله گران خواهد داد تا ریسک خود را به شکل قابل توجهی پوشش دهند.

## ۲.۲. روش ریسک احتمالی

### ۲.۲.۱. نحوه محاسبه

جزئیات این روش در مقاله دکتر سلیمانی ذکر شده است و ما صرفاً به پیاده‌سازی آن اشاره می‌کنیم. در این روش هدف ما پیدا کردن معکوس تابع احتمال زیر است:

$$f(x) = P(|Rx - rx| \leq \theta)$$

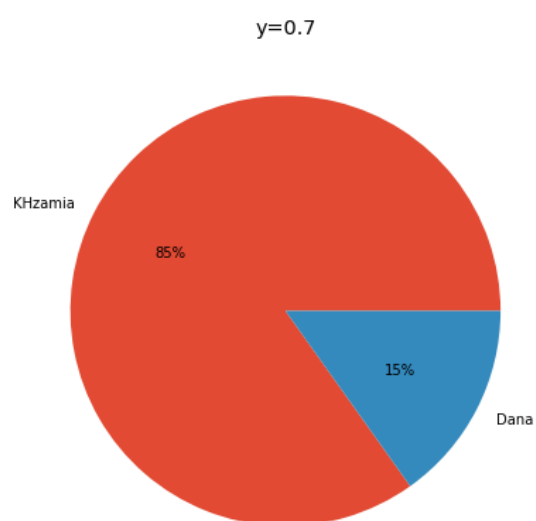
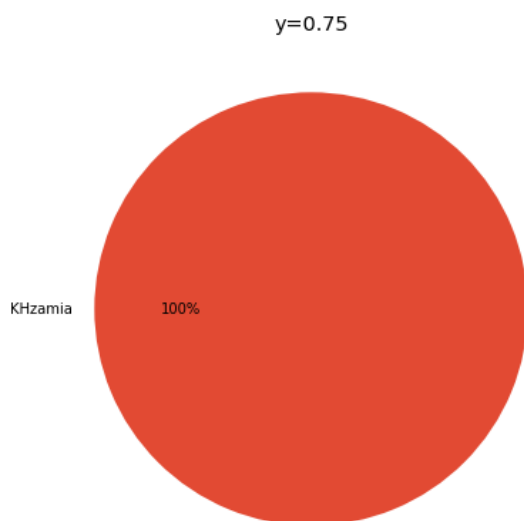
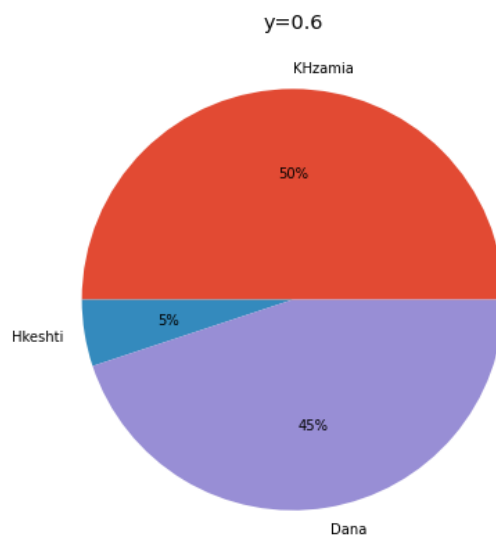
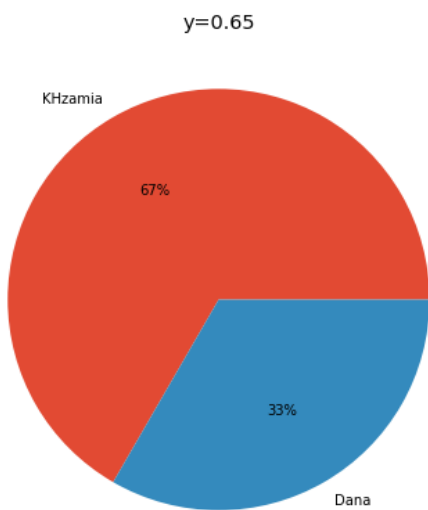
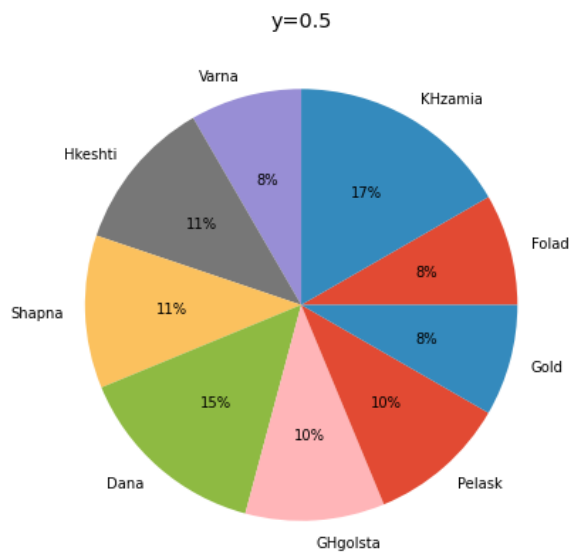
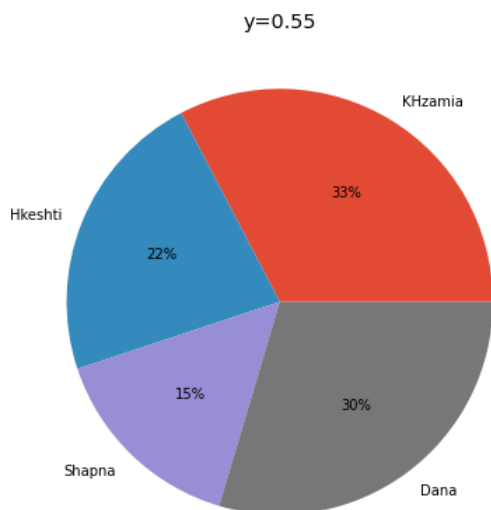
بدین منظور می‌توانیم از لابری `scipy` از تابع `norm` آن استفاده کنیم که تقریباً هر سوالی از تابع نرم داشته باشیم را پاسخ می‌دهد. حتی معکوس کردن تابع `f` برای معکوس کردن تابع احتمال فوق دستور `norm.cdf` وجود دارد. نهایتاً محاسبه با این روش ساده بوده و ما بدون نیاز به حل مسئله بهینه‌سازی جواب نهایی مسئله را داریم.

```
1 from scipy.stats import norm
2
3 def reverse_f(r, e, p, teta=0.25):
4     std_abs = e * (2 / (2 * norm.cdf(teta / e) - 1))
5     z = norm.ppf(p)
6     abs_rx_rx = z * std_abs
7     x = (abs_rx_rx + r) / norm.pdf(0)
8
9     return x
```

### ۲.۲.۲. نتایج برای پارامترهای $\gamma$ مختلف

جدول نهایی اوزان بر اساس  $\gamma$  های مختلف به صورت زیر است.

	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
KHzamia	0.165524	0.327455	0.491994	0.662059	0.841281	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
Dana	0.142564	0.294381	0.448644	0.337941	0.158719	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Hkeshti	0.112712	0.222816	0.059362	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Shapna	0.110551	0.155348	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
GHgolsta	0.108131	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Pelask	0.101648	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Gold	0.087473	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Folad	0.086868	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Varna	0.084530	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Gadna	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Zemalard	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Sabzeva	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
VBmellat	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ETF	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Kgol	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Non-Risk	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Khafez	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Barkat	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Akhaber	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Khodro	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Evan	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Kerman	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



همانطور که مشخص است با افزایش  $\gamma$  تنوع سبد ما کمتر شد و سهم خزامیا به عنوان سهمی با بیشترین بازده انتظاری بیشتر شد زیرا اولین سهم انتخاب می شده است.

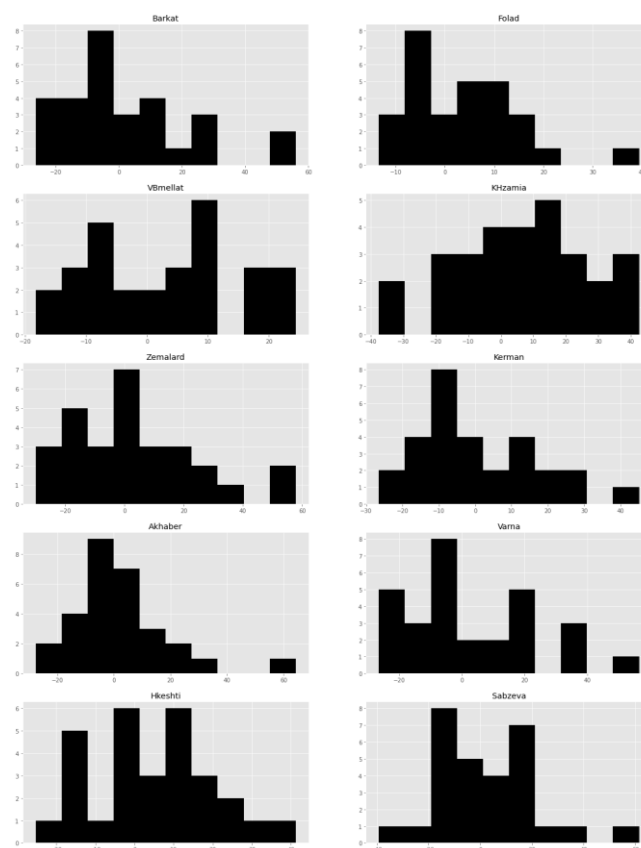
## ۲.۳. روش ارزش در معرض خطر شرطی

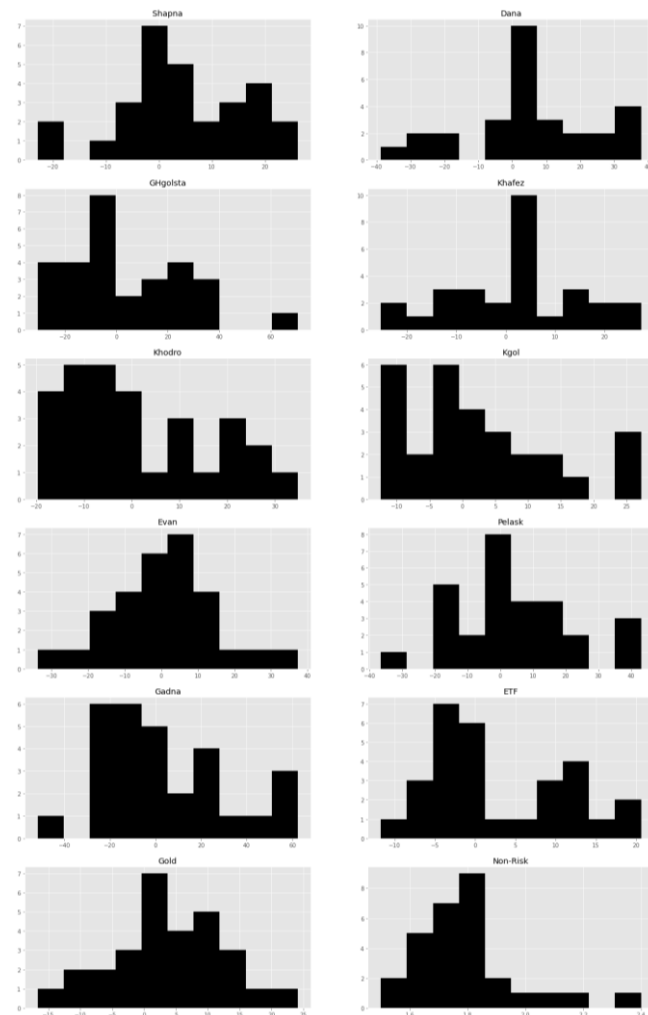
### ۲.۳.۱. پیاده سازی سه روش محاسبه $Var$

```
1 var_historical = lambda symbol,df:round(pd.Series(df[symbol]).quantile(.05),2)
2 var_parametric = lambda symbol,df:round(df.mean()[symbol] + df.std()[symbol] * (-1.64),2)
3 def var_monte_carlo(symbol,df):
4     var=0
5     for j in range(1000):
6         sample = np.random.normal(df.mean()[symbol],df.std()[symbol], len(symbols_monthly))
7         var += round(np.quantile(sample,.05),5)
8     return round(var/1000,2)
```

هر سه روش محاسبه  $Var$  ابتدا پیاده سازی شد. سپس داده های بازده آنها با فرض نرمال بودن رسم شدند.

```
1 figure, axis = plt.subplots(11,2,figsize=(20, 60))
2 k=0
3 for i in range(11):
4     for j in range(2):
5         axis[i, j].hist(symbols_monthly[symbol_en[k]],color='black')
6         axis[i,j].set_title(symbol_en[k])
7     k+=1
```





بازده های نمادها اکثرا به توزیع نرمال شبیه هستند حتی با وجود نمونه کمی که بررسی شده است.

حال با هر سه روش مقدار VaR های هر سهم را بدست میآوریم.

```
1 symbol_var = {'symbol':[], 'historical':[], 'parametric':[], 'monte_carlo':[]}
2 for symbol in symbol_en:
3     symbol_var['symbol'].append(symbol)
4     symbol_var['historical'].append(var_historical(symbol,symbols_monthly))
5     symbol_var['parametric'].append(var_parametric(symbol,symbols_monthly))
6     symbol_var['monte_carlo'].append(var_monte_carlo(symbol,symbols_monthly))
7 symbol_var_monthly = pd.DataFrame(symbol_var)
8 symbol_var_monthly
```

در نتیجه جدول صفحه بعد همانطور که مشخص است عدهای متفاوتی از سه روش بدست می آید.

```
1 weights, risk, Er = optimize_portfolio(symbols_monthly,target_ret=4,short_sell=False)
2 VaR_portfolio = risk*(-1.64)
3 VaR_portfolio
```

```
]: -11.901088725988084
```

مقدار ارزش در معرض خطر پرتفو ساخته شده با روش مارکویتز نیز حدود -۱۲ درصد است.

	symbol	historical	parametric	monte_carlo
0	Barkat	-23.08	-31.36	-28.42
1	Folad	-10.82	-15.57	-13.86
2	VBmellat	-15.28	-17.35	-15.51
3	KHzamia	-27.42	-26.48	-23.77
4	Zemalard	-24.84	-32.49	-29.48
5	Kerman	-21.08	-26.90	-23.93
6	Akhaber	-22.00	-28.55	-25.87
7	Varna	-25.02	-31.33	-28.39
8	Hkeshti	-16.84	-21.05	-18.78
9	Sabzeva	-18.90	-28.80	-25.84
10	Shapna	-16.16	-15.86	-14.31
11	Dana	-26.74	-26.06	-23.50
12	GHgolsta	-21.96	-33.63	-30.29
13	Khafez	-20.46	-20.35	-18.68
14	Khodro	-17.42	-23.58	-21.38
15	Kgol	-11.54	-16.82	-15.23
16	Evan	-21.68	-24.18	-21.87
17	Pelask	-17.60	-25.92	-23.47
18	Gadna	-28.56	-42.53	-38.73
19	ETF	-7.08	-11.25	-10.05
20	Gold	-9.70	-11.20	-10.04
21	Non-Risk	1.54	1.45	1.48

## ۲.۳.۲. نحوه بهینه سازی VaR

```

1 def optimize_var(returns,symbol_var_monthly, target_ret=None):
2     returns = returns.T.to_numpy()
3     n, m = returns.shape
4     weights = cp.Variable(n)
5     sum_weights = cp.sum(weights)
6     mu = returns.mean(axis=1)
7
8     if target_ret is not None:
9         target_return = cp.Parameter()
10        target_return.value = target_ret
11
12        # Here cov matrix is different and is based on VaR
13        var = np.array((symbol_var_monthly.set_index('symbol').monte_carlo)/-1)
14        var = np.outer(var, var)
15        cov_matrix = (np.array(symbols_monthly.corr())*var)
16
17        risk = cp.quad_form(weights, cov_matrix)
18        objective = cp.Minimize(risk)
19
20        limit_return = [weights.T@mu == target_return] if target_ret is not None else []
21        short_avail = [weights >= 0]
22
23        constraints = [sum_weights == 1]+short_avail+limit_return
24
25        prob = cp.Problem(objective, constraints)
26        prob.solve(solver=cp.ECOS)
27
28        Er = weights.value@mu
29
30        return np.round(weights.value,2), np.sqrt(risk.value), np.round(Er,2)

```

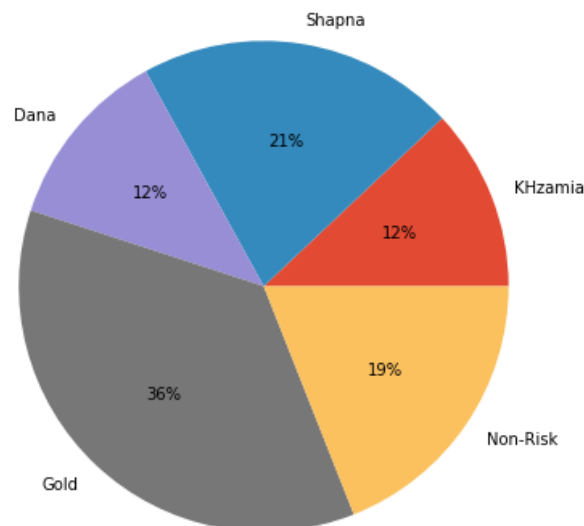
نحوه محاسبه VaR پرتفو برای دو سهم به صورت زیر است:

$$VaR_{A,B} = \sqrt{w_A^2 VaR_A^2 + w_B^2 VaR_B^2 + 2w_A w_B VaR_A VaR_B \rho_{AB}}$$

برای بیشتر از دو سهم مشابه است زیرا می‌توانیم در ماتریس واریانس-کواریانس مقدار  $Var$  را به جای انحراف معیار و کوواریانس قرار دهیم. سپس در اوزان ضرب کنیم.

در نهایت پرتفو بهینه شده از این روش خواهد بود:

Expected return: 4.0%, Value at Risk: -8.3%

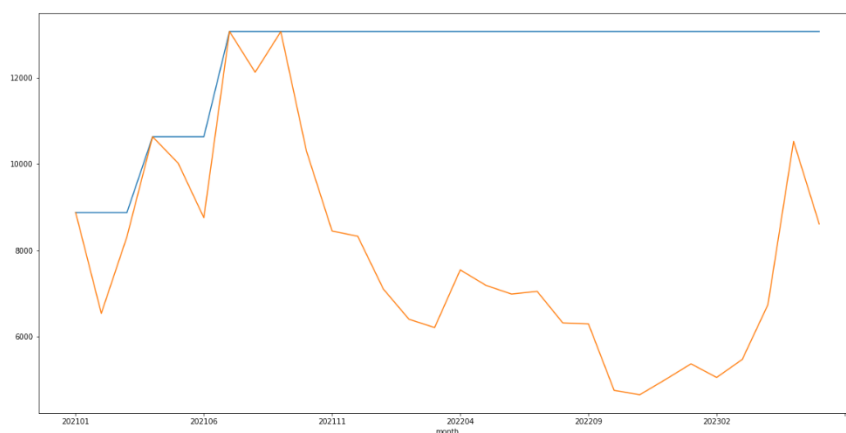


در نتیجه مقدار  $Var$  ما به ۸.۳ درصد کاهش یافت.

## ۲.۴. روش کمینه‌سازی حداکثر ریزش قیمت

### ۲.۴.۱. توضیح عملکرد این روش

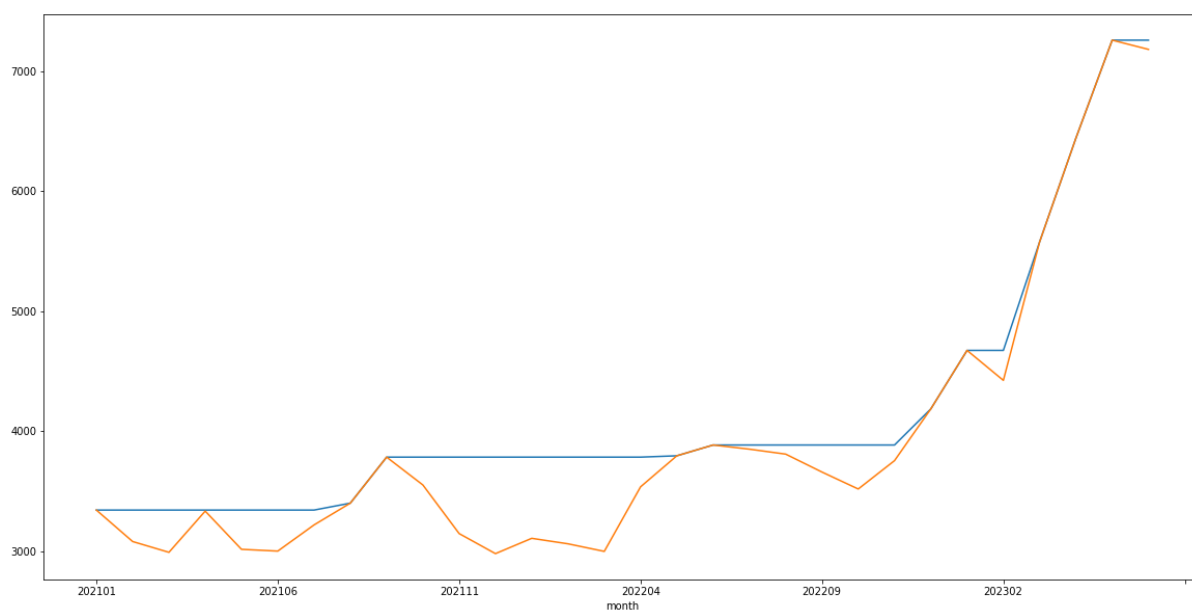
مفهوم حداکثر ریزش قیمت را با یک مثال از نماد برکت توضیح می‌دهیم.



نمودار نارنجی نمودار قیمتی سهم برکت است. نمودار آبی ماکسیمم تجمعی قیمت سهم است. یعنی در هر بازه زمانی ماکسیمم قیمت دیده شده سهم را لحاظ می‌کند. هدف ما مینیمم کردن ماکسیمم فاصله دو نمودار آبی و نارنجی است. بدین معنا که حداکثر ریزشی که سهم داشته را کمینه کنیم. این روش مخصوص سرمایه‌گذارانی است که از ریسک وحشت دارند و همیشه بدترین سناریو را لحاظ می‌کنند. در این روش فرض می‌شود که پرتفو در اوج قیمت خود خریداری شود. می‌خواهیم پرتفویی بچینیم که حتی اگر در ماکسیمم قیمتی خود خریداری شد باز هم ریزش پایینی را ثبت کند.

همین نمودار را برای پرتفو مارکوویتز رسم می‌کنیم.

```
1 def portfo_drawdown(w):
2     monthly_portfo_value = (symbols_close_monthly * w).sum(axis=1)
3     monthly_portfo_value.cummax().plot(figsize=(20,10))
4     monthly_portfo_value.plot(figsize=(20,10))
5     return np.max((monthly_portfo_value.cummax()-monthly_portfo_value)*100/monthly_portfo_value.cummax())
6 weights, risk, Er = optimize_portfolio(symbols_monthly, target_ret=4, short_sell=False)
7 dd = portfo_drawdown(weights)
8 pie_weight(weights, title=f"Expected return:{np.round(Er,2)}% , Maximum drawdown:{np.round(dd,2)}% , "+
9                  f"risk(markovitz):{np.round(risk,2)}%")
```



## ۲.۴.۲. شروع بهینه‌سازی

```
1 def mmd_optimization(symbols_close_monthly, ret_target):
2     def objective_function(w):
3         monthly_portfo_value = (symbols_close_monthly * w).sum(axis=1)
4         return np.max((monthly_portfo_value.cummax()-monthly_portfo_value)*100/monthly_portfo_value.cummax())
5
6     num_stocks = symbols_close_monthly.shape[1]
7     bounds = [(0, 1) for i in range(num_stocks)]
8     def weight_constraint(w):
9         return np.sum(w) - 1
10    def return_constraint(w):
11        portfolio_return = sum(symbols_monthly.mean()*w)
12        return portfolio_return - ret_target
13    w0 = np.ones(num_stocks) / num_stocks
14    result = minimize(objective_function, w0, method='SLSQP',
15                    bounds=bounds, constraints=[{'type': 'eq', 'fun': weight_constraint},
16                    {'type': 'ineq', 'fun': return_constraint}])
17    w, mdd = result.x, result.fun
18    Er = return_constraint(w) + ret_target
19    return w, Er, mdd
```

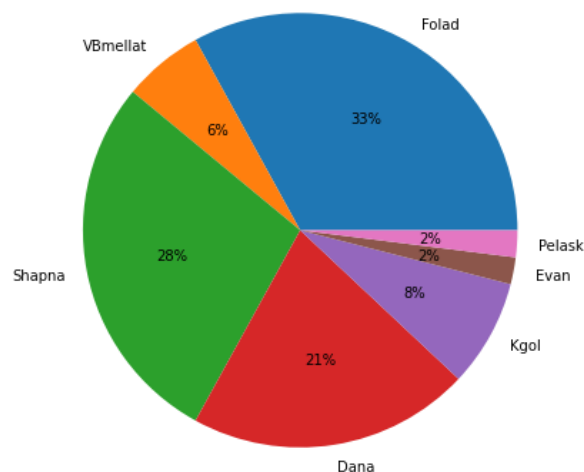


در این روش از لایبرری *scipy* استفاده می‌کنیم. ابتدا تابع هدف را تعیین می‌کنیم که اختلاف همان دو نمودار رسم شده است. سپس فیوود را مشابه مارکوویتز تعیین می‌کنیم و تابع را اجرا می‌کنیم.

### ۲.۴.۳. مقایسه نتیجه با پرتفو مارکوویتز

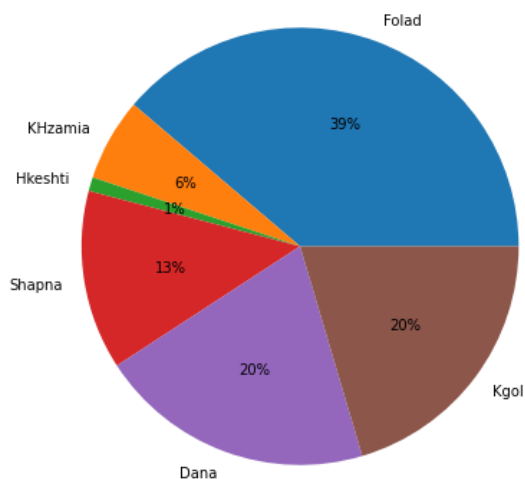
در پرتفو مارکوویتز مقدار حداکثر ریزش پرتفو را بدست آوردیم:

Expected return:4.0% , Maximum drawdown:21.25% , risk(markovitz):9.3%



این مقدار ۲۱.۲۵ درصد بود که مقدار زیادی است. یعنی اگر همان پرتفوی بهینه مارکوویتز در زمان بدی خریداری می‌شد باعث ضرر ۲۱ درصدی ما می‌شد. حال پرتفو جدید با شرط مینیمم بودن حداکثر ریزش را ببینیم:

Expected return:4.0% , Maximum drawdown:14.46% , risk(markovitz):9.6%



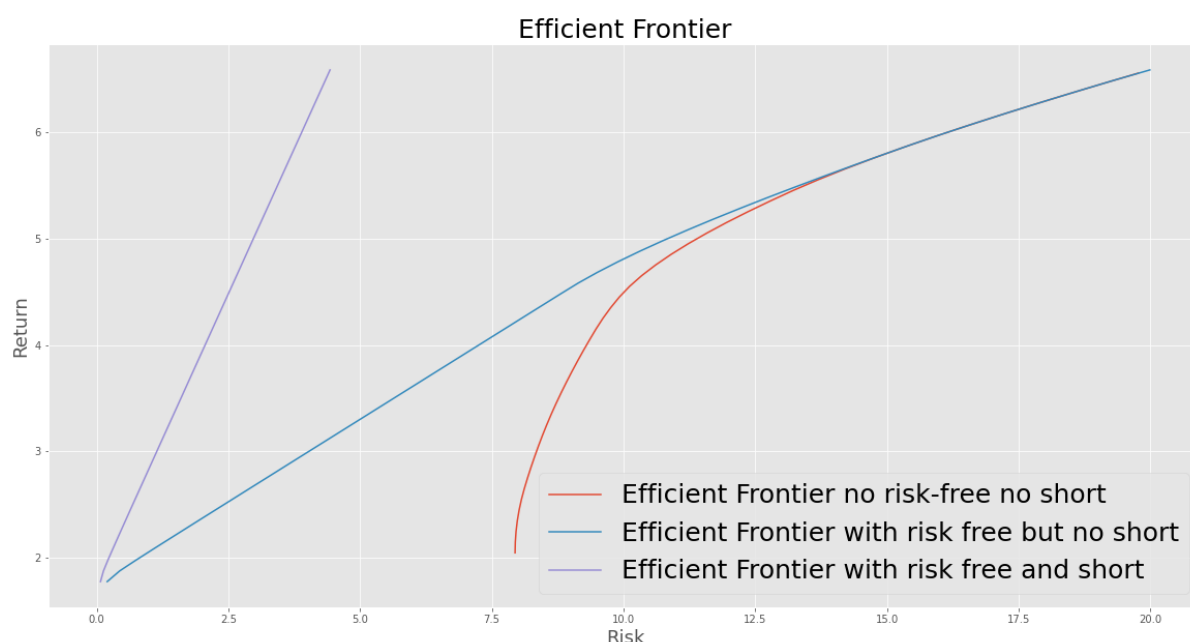
این پرتفو جدید از جهت ریسک مارکوویتز تنها ۰.۳ ریسکی تر است. اما از جهت حداکثر ریزش قیمتی بسیار بهتر عمل می‌کند. حداکثر ریزش آن ۱۴.۴۶ واحد است که عدد بسیار بهتری را نشان می‌دهد.

## نتیجه گیری

در نتیجه تمامی روش های اندازه گیری ریسک، به نظر می رسد ترکیب روش مارکویتز و روش حداقل سازی حداکثر ریزش بهترین گزینه باشد. همچنین از  $Var$  همواره میتوان به عنوان یک معیار قابل گزارش به کاربر استفاده کرد.

از طرفی حتما اوراق درآمد ثابت و کلاس های دارایی خارج از بازار بورس مانند طلا می توانند در پوشش ریسک بسیار موثر واقع شوند. افزایش صندوق های بر پایه اوراق طلا و یا صندوق های درآمد ثابت و یا صندوق های شاخصی از جمله پیشرفت های قابل تقدیر بورس ایران در سال های اخیر است که امکان چینش سبد های سهامی با ریسک بسیار کمتر را به مخاطبان می دهد.

نتیجه مهم دیگر این پژوهش اثر گذاری قابل توجه فروش استقراضی در پوشش ریسک سرمایه گذاران بود. اضافه شدن این امکان به بورس ایران بسیار ضروری به نظر می رسد و بهتر است از این ابزار یا ابزارهای مشابه که امکان دو طرفه شدن بازار را ایجاد می کنند استقبال شود. فروش استقراضی یا معاملات آتی<sup>۲۷</sup> و یا اختیار معامله<sup>۲۸</sup> نیز می توانند تا حدودی نقش فروش استقراضی را بازی کنند. در آخر نمودار مهمی را قرار داده ایم که بازار بدون طلا و درآمد ثابت و بازار به همراه امکان فروش استقراضی را ترسیم می کند.



مرز کارا برای بازار با امکان انجام فروش استقراضی دارای شیب به شدت بالایی است که نشان از آن دارد که هر واحد ریسک بیشتر منجر به بازده انتظاری بیشتری نسبت به دو مرز دیگر شده است و این اختلاف قابل توجه است.

<sup>۲۷</sup>. Future

<sup>۲۸</sup>. Option

[۱] Markowitz, H.M. and Todd, G.P., 2000. *Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets* (Vol. 66). John Wiley & Sons.

[۲] امینی, م., جوادی, س., ساجده, & سلیمانی دامنه. (2019). انتخاب بهینه سبد سهام بر مبنای ریسک های گوناگون. نشریه ریاضی و جامعه, 4(1), 49-67.

[۳] Krokmal, P., Palmquist, J. and Uryasev, S., 2002. Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *Journal of risk*, 4, pp.43-68.

[۴] Chekhlov, A., Uryasev, S. and Zabarankin, M., 2005. Drawdown measure in portfolio optimization. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 8(01), pp.13-58.