دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

پاسخنامه تمرین سری اول درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(فصل اول)

سوال ۱

آ)

$$\text{آ)}\quad x_1(t) = \sin^4\left(-\frac{t+\pi}{6}\right) + \cos^4\left(\frac{2t+5\pi}{3}\right)$$

$$x(t+T) = x(t)$$

$$\sin^4\left(-\frac{t+T+\pi}{6}\right) + \cos^4\left(\frac{2(t+T)+5\pi}{3}\right) = \sin^4\left(-\frac{t+\pi}{6}\right) + \cos^4\left(\frac{2t+5\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(-\frac{t+T+\pi}{6}\right) = \pm\sin\left(-\frac{t+\pi}{6}\right) : \quad \frac{\cancel{-t}-T-\pi}{6} = \frac{\cancel{-t}-\pi}{6} + k\pi$$

$$-T \cancel{-\pi} = \cancel{-\pi} + 6k\pi$$

$$T = 6k\pi \quad \text{I}$$

$$\cos\left(\frac{2t+2T+5\pi}{3}\right) = \pm\cos\left(\frac{2t+5\pi}{3}\right) :$$

$$\frac{\cancel{2t}+2T+\cancel{5\pi}}{3} = \frac{\cancel{2t}+\cancel{5\pi}}{3} + k\pi$$

$$2T = 3k\pi \quad \text{II}$$

$$\text{I}, \text{II} \Rightarrow \boxed{T_0 = 6\pi}$$

ب)

$$\text{ب)}\quad x_2[n] = (-1)^n \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] \qquad \text{متناوب نیست}$$

شرط تناوب : $x_2[n] = x_2[n+N]$

$$(-1)^n \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] = (-1)^{n+N}\cos\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right]$$

$$\xrightarrow{N=2k} \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] = \cos\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right] \Rightarrow \underbrace{\left[\frac{\pi}{8}n\right] + 2k\pi}_{\text{غلط}} = \underbrace{\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right]}_{\text{صحیح}} \quad \times$$

$$\xrightarrow{N=2k+1} \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right] = -\cos\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right] \Rightarrow \underbrace{\left[\frac{\pi}{8}n\right] + 2k\pi + \pi}_{\text{غلط}} = \underbrace{\left[\frac{\pi}{8}(n+N)\right]}_{\text{صحیح}} \quad \times$$

ج)

ج) $x_3[n] = e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)}$ تناوب نیست

شرط تناوب : $x_3[n] = x_3[n+N]$

$$e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)} = e^{j\left(\frac{6\pi(n+N)}{\sqrt{5}}\right)} \Rightarrow \cancel{e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)}} = \cancel{e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)}}\, e^{j\left(\frac{6\pi N}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$1 = e^{j\left(\frac{6\pi N}{\sqrt{5}}\right)}$$

$$\frac{6\pi N}{\sqrt{5}} = 2k\pi \qquad N = \frac{\sqrt{5}}{3}k \notin \mathbb{Z}$$

د)

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right)$$

شرط تناوب : $\cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(n+N)^2\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}(n^2+N^2+2nN)\right)$$

$$\cancel{\frac{\pi}{4}n^2} + 2k\pi = \cancel{\frac{\pi}{4}n^2} + \frac{\pi}{4}N^2 + \frac{\pi}{4}\times 2nN$$

$$8k = N^2 + 2nN$$

$8k = N(N+2n)$ X $\rightarrow$ نمی‌توان N را بدست آورد

متناوب نیست

۵)

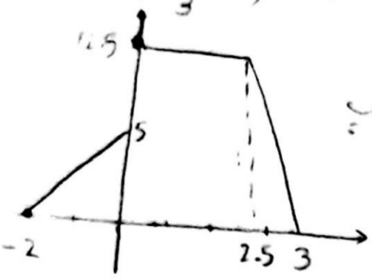
$$x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t+2T-k)}\, u(2t+2T-k) \xRightarrow{k'=k-2T} x(t+T) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t-k')} u(2t-k')$$

$$if\ 2T \in \mathbb{Z} \Rightarrow x(t+T) = x(t)$$

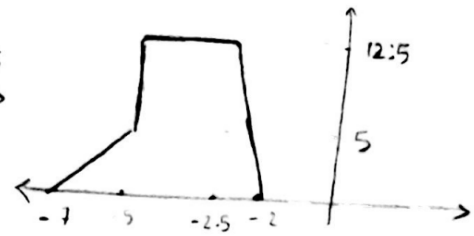
$$T = \frac{n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow T_0 = \frac{1}{2}$$

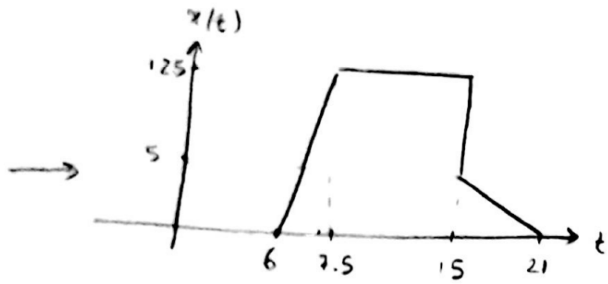
سوال ۲

آ) $0.2\,x\left(-\frac{t}{3}+5\right) \rightarrow x\left(-\frac{t}{3}+5\right) \rightarrow x(-t/3) \rightarrow x(t)$



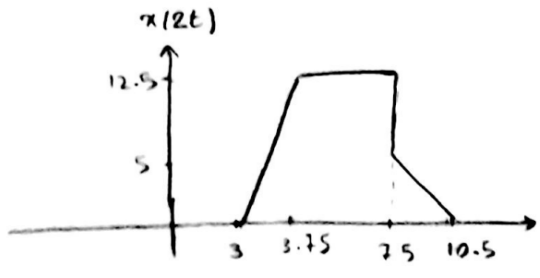
5 واحد شیفت به چپ

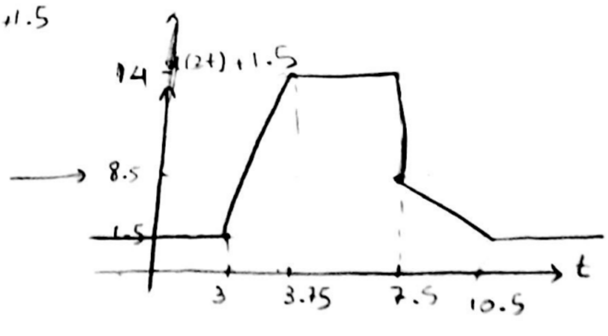




ب) $x(2t)+1.5$

$x(t) \longrightarrow x(2t) \longrightarrow x(2t)+1.5$





ج) $\int_{-\infty}^{2} x(t)\,dt = \int_{6}^{21} x(t)\,dt = \frac{12.5\times 1.5}{2} + 7.5\times 12.5 + \frac{6\times 5}{2}$

مساحت زیر نمودار

$= \boxed{118.125}$

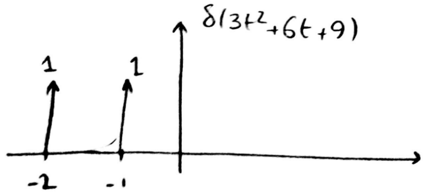
سوال ۳

آ)

آ) $x(t) = \delta(3t^2+6t+9)$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2(3t^2+6t+9)\,dt = \delta^2(3t^2+6t+9)\Big|_{3t^2+6t+9=0}$$

$$3t^2+6t+9=0 \qquad 3(t+1)(t+2)=0 \begin{cases} t=-1 \\ t=-2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \boxed{E_\infty = 2}$$

E_∞ متناهی $\Rightarrow P_\infty = 0$

ب)

ب) $x[n] = (3n+1)(u[n+2]-u[n-4])$

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (3n+1)^2 \underbrace{(u[n+2]-u[n-4])}_{\text{در بازه } -2 \leq n \leq 3 \text{ مقدار غیرصفر دارد}} = \sum_{n=-2}^{3} (3n+1)^2$$

$$= 25+4+1+16+49+100 = 195$$

ج)

$$\text{ج)}\ x(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3|t|} = \begin{cases} (1/3)^{-3t} & t \geq 0 \\ (1/3)^{3t} & t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 27^{t} & t \geq 0 \\ (1/27)^{t} & t < 0 \end{cases}$$

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} x^2(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} x^2(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} (27)^{-2t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} (27)^{2t}\,dt = +\infty$$

$$P_{\infty} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-\infty}^{0} (27)^{-2t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} (27)^{2t}\,dt \right) = +\infty$$

د)

$$E_{\infty} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \Sigma_{0}^{+\infty} (1/16)^n = 1 + 1/16 + 1/256 + \ldots$$
$$= 1/(1 - 1/16) = 16/15$$

$$Pav_{\infty} = \lim_{N \to \infty} 1/(2N+1)\, \Sigma_{-N}^{+N} |x[n]|^2 = \lim_{N \to \infty} 1/(2N+1)\, \Sigma_{n=0}^{+N} (1/16)^n$$
$$= C/\infty = 0$$

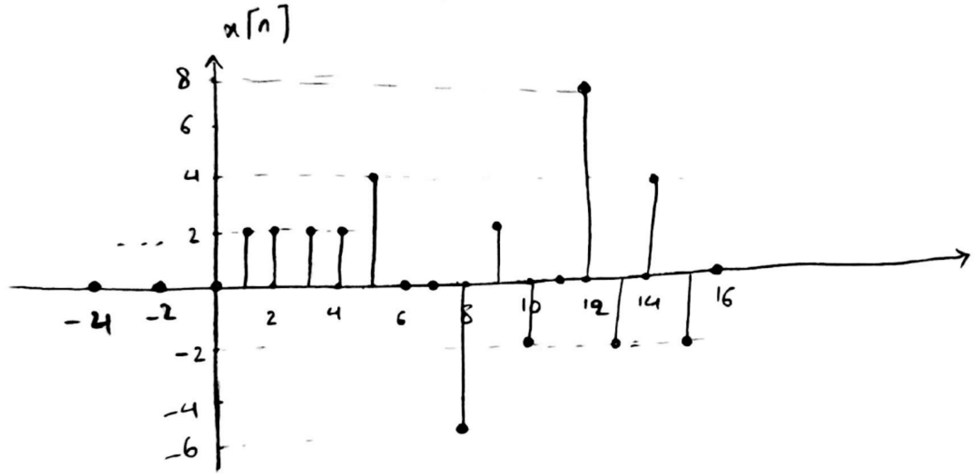
سوال ۴

$$x[n] = x_o[n] + x_e[n]$$

$$n<0: \quad x[n]=0 \Rightarrow x_e[n] = -x_o[n]$$

$$n>0: \quad x[n] = x_e[n] + x_o[n] = x_e[n] - x_o[-n] = x_e[n] + x_e[-n]$$
$$= 2x_e[n]$$

$$n=0: \quad x[n] = x_e[n] + \cancelto{0}{x_o[n]} = x_e[n] = 0$$



$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=1}^{15} x^2[n] = 8\times 4 + 2\times 16 + 36 + 64 = \boxed{164}$$

سوال ۵

آ)

$y[n] = x[n-1]x[n-3]$

$x_1 = \delta[n] + \delta[n+2] \rightarrow y[n] = \delta[n-1]$

$x_2 = -\delta[n] - \delta[n+2] \rightarrow y[n] = \delta[n-1]$

$x_1 \neq x_2$

معکوس پذیر نیست

ب)

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{-\infty}^{t+\Delta t} x(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{t}^{t+\Delta t} x(\tau)d\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t)\Delta t}{\Delta t} = x(t)$$

معکوس سیستم: $x(t) = \frac{dy}{dt}$

سوال ۶

آ)

$$y(t) = \int_{t}^{t+1} x(\tau)d\tau$$

- حافظه دار است
- علی نیست زیرا y(t) به مقادیر آینده x(t) نیاز دارد
- پایدار است y(t) <= max[x(t)]، y(t) حتما از ماکسیمم x(t) در بازه [t, t+1] کمتر است و از آنجایی که x(t) پایدار است y(t) نیز پایدار است
- خطی است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \int_{t}^{t+1} x_1(\tau)d\tau$$
$$x_2(t) \xrightarrow{s} y_2(t) = \int_{t}^{t+1} x_2(\tau)d\tau$$

$$x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \xrightarrow{s} y_3(t) = \int_t^{t+1} x_3(\tau)d\tau$$

$$= \int_t^{t+1} (Ax_1(\tau) + Bx_2(\tau))d\tau$$

$$= A\int_t^{t+1} x_1(\tau)d\tau + B\int_t^{t+1} x_1(\tau)d\tau$$

- تغییرناپذیر با زمان است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \int_t^{t+1} x_1(\tau)d\tau$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \xrightarrow{s} y_2(t) = \int_{t-t_0}^{t-t_0+1} x_1(\tau)d\tau$$

$$y_1(t - t_0) = \int_{t-t_0}^{t-t_0+1} x_1(\tau)d\tau$$

$$y_2(t) = y_1(t - t_0)$$

ب)

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- حافظه دار است مشتق تنها با استفاده از اطلاعات یک نقطه قابل محاسبه نیست
- علی نیست برای محاسبه مشتق باید اطلاعات یک Δt بعد از نقطه فعلی را داشته باشیم
- کراندار نیست، مثال نقض سیگنال های دارای ناپیوستگی
- خطی است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \frac{dx_1}{dt}$$

$$x_2(t) \xrightarrow{s} y_2(t) = \frac{dx_2}{dt}$$

$$x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \xrightarrow{s} y_3(t) = \frac{dx_3}{dt} = \frac{d\big(Ax_1(t) + Bx_2(t)\big)}{dt}$$
$$= A\frac{dx_1}{dt} + B\frac{dx_2}{dt}$$

- تغییرناپذیر با زمان است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = \frac{dx_1}{dt}$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \xrightarrow{s} y_2(t) = \frac{dx_2}{dt}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_2(t+\Delta t) - x_2(t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1(t+\Delta t - t_0) - x_1(t-t_0)}{\Delta t}$$
$$y_1(t-t_0) = \frac{dx_1(t-t_0)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1(t+\Delta t - t_0) - x_1(t-t_0)}{\Delta t}$$
$$y_2(t) = y_1(t-t_0)$$

ج)

$$y[n] = \sin(x[n])$$

- حافظه دار نیست
- علی است
- کراندار است. -1 <= sin(x[n]) <= 1
- خطی نیست

$$x_1[n] \xrightarrow{s} y_1[n] = \sin(x_1[n])$$
$$x_2[n] \xrightarrow{s} y_2[n] = \sin(x_2[n])$$
$$x_3[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n]$$
$$\xrightarrow{s} y_3[n] = \sin(Ax_1[n] + Bx_2[n]) \neq Asin(x_1[n]) + Bsin(x_2[n])$$

- تغییرناپذیر با زمان است

$$x_1[n] \xrightarrow{s} y_1[n] = \sin(x[n]) \Longrightarrow y_1[n-n_0] = \sin(x[n-n_0])$$
$$x_2[n] = x_1[n-n_0] \xrightarrow{s} y_2[n] = \sin(\ x_1[n-n_0])$$

د)

$$y(t) = [\cos(3t)]x(t)$$

- حافظه دار نیست
- علی است
- پایدار است. چرا که 1 => [cos(t)] =>1- و در صورتی که x(t) پایدار باشد y(t) نیز قطعا پایدار خواهد بود
- خطی است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = [\cos(3t)]x_1(t)$$
$$x_2(t) \xrightarrow{s} y_2(t) = [\cos(3t)]x_2(t)$$
$$\begin{aligned} x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t) \xrightarrow{s} y_3(t) &= [\cos(3t)]x_3(t) \\ &= [\cos(3t)]\big(Ax_1(t) + Bx_2(t)\big) \\ &= A[\cos(3t)]x_1(t) + [\cos(3t)]x_2(t) \end{aligned}$$

- تغییرپذیر با زمان است

$$x_1(t) \xrightarrow{s} y_1(t) = [\cos(3t)]x_1(t)$$
$$x_2(t) = x_1(t-t_0) \xrightarrow{s} y_2(t) = [\cos(3t)]x_2(t) = [\cos(3t)]x_1(t-t_0)$$
$$y_1(t-t_0) = [\cos(3(t-t_0)]x_1(t-t_0)$$
$$y_2(t) \neq y_1(t-t_0)$$

ه)

$$y[n] = Even\{n-1\} = \frac{x[n-1] - x[1-n]}{2}$$

- پایدار است چرا که y[n] جمع شیفت داده شده x[n] است که یعنی در صورتی که x[n] پایدار باشد y[n] نیز پایدار است
- حافظه دار است
- علی نیست زیرا در n<0 برای محاسبه y[n] به مقادیر مثبت n نیز نیاز داریم
- خطی است

$$x_1[n] \overset{s}{\rightarrow} y_1[n] = \frac{x_1[n-1] - x_1[1-n]}{2}$$
$$x_2[n] \overset{s}{\rightarrow} y_2[n] = \frac{x_2[n-1] - x_2[1-n]}{2}$$
$$x_3[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n] \overset{s}{\rightarrow} y_3[n] = \frac{x_3[n-1] - x_3[1-n]}{2}$$
$$= \frac{A(x_1[n-1] - x_1[1-n]) + B(x_2[n-1] - x_2[1-n])}{2}$$
$$= Ay_1[n] + By_2[n]$$

- تغییرپذیر با زمان است

$$x_1[n] \overset{s}{\rightarrow} y_1[n] = \frac{x_1[n-1] - x_1[1-n]}{2}$$
$$x_2[n] = x_1[n-n_0] \overset{s}{\rightarrow} y_2[n] = \frac{x_2[n-1] - x_2[1-n]}{2}$$
$$= \frac{x_1[n-n_0-1] - x_1[1-n-n_0]}{2}$$
$$y_1[n-n_0] = \frac{x_1[n-n_0-1] - x_1[1-n+n_0]}{2}$$
$$y_1[n-n_0] \neq y_2[n]$$

و)

$$y[n] = x[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$$

تابع در نقاطی که n زوج باشد برابر باشد y[n]=x[n] است در بقیه نقاط y[n]=0

- بدون حافظه است چون y[n] تنها به x[n] وابسته است

- پایدار است چون y[n] تنها به x[n] وابسته است پس اگر x[n] کراندار باشد y[n] نیز کراندار است
- علی است چرا که y[n] به مقادیر آینده x[n] وابسته نیست
- خطی است

$$y_1[n] = x_1[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$$

$$y_2[n] = x_2[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$$

$$\begin{aligned} x_3[n] = Ax_1[n] + Bx_2[n] \xrightarrow{s} y_3[n] &= x_3[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \\ &= (Ax_1[n] + Bx_2[n]) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \\ &= Ax_1[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] + Bx_2[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \\ &= Ay_1[n] + By_2[n] \end{aligned}$$

- تغییر پذیر با زمان است

$$x_1[n] \xrightarrow{s} y_1[n] = x_1[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k]$$

$$\begin{aligned} x_1[n] = x_1[n-n_0] \xrightarrow{s} y_2[n] &= x_2[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \\ &= x_1[n-n_0] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] \end{aligned}$$

$$y_1[n-n_0] = x_1[n-n_0] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-n_0-2k]$$

$$y_2[n] \neq y_1[n-n_0]$$

سوال ۷

آ)

آ) $\forall x[n] \Rightarrow \sum_{n=-N}^{+N} x^2[n] = \sum_{n=-N}^{+N} x_o^2[n] + \sum_{n=-N}^{+N} x_e^2[n]$

$$\sum_{n=-N}^{+N} x^2[n] = \sum_{n=-N}^{+N} (x_o[n] + x_e[n])^2 = \sum_{n=-N}^{+N} (x_o^2[n] + x_e^2[n] + 2x_o[n]x_e[n])$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} x_o^2[n] + \sum_{n=-N}^{+N} x_e^2[n] + \underbrace{2\sum_{n=-N}^{-1} x_e[n]x_o[n] + 2\sum_{n=1}^{N} x_e[n]x_o[n]}$$

$+ 2x_o[0]$

$$2\sum_{n=1}^{N} x_e[-n]x_o[-n] + 2\sum_{n=1}^{N} x_e[n]x_o[n]$$

$$= -2\sum_{n=1}^{N} x_o[n]x_e[n] + 2\sum_{n=1}^{N} x_e[n]x_o[n] = 0$$

ب)

ب) $f(t)\dot{\delta}(t) = f(0)\dot{\delta}(t) - f'(0)\delta(t)$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(f(t)\delta(t)\right)} = \underbrace{f'(t)\delta(t)} + f(t)\dot{\delta}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(f(0)\delta(t)\right) = f(0)\dot{\delta}(t) \qquad f'(0)\delta(t)$$

$$\Rightarrow f(0)\dot{\delta}(t) = f'(0)\delta(t) + f(t)\dot{\delta}(t)$$

$$\Rightarrow f(t)\dot{\delta}(t) = f(0)\dot{\delta}(t) - f'(0)\delta(t)$$