سوال 1

آ)

$$x_1(t) = 1 + \sin\omega_0 t + 3\cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

چون که رابطه حاصل جمع یک DC با دو سیگنال سینوسی است می‌توانیم با تبدیل کردن x به صورت $x(t) = \sum a_k e^{jk\omega_0 t}$ ضرایب a_k را تعیین کرد.

$$x_1(t) = 1 + \underbrace{\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right)}_{\text{همان sin است.}} + \frac{3}{2}\left(e^{j(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})} + e^{-(j2\omega_0 t + j\frac{\pi}{4})}\right)$$

$$e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \overset{a_0}{1} + \overset{a_1}{\frac{1}{2j}} e^{j\omega_0 t} - \overset{a_{-1}}{\frac{1}{2j}} e^{-j\omega_0 t} + \overbrace{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}^{a_2} e^{j2\omega_0 t}$$

$$+ \underbrace{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{a_{-2}} e^{-j2\omega_0 t} \quad , \quad a_k = 0 \quad \text{for } |k| > 2.$$

ب) $T = 3 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{3}\int_0^3 x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 2e^{-jk\frac{2\pi}{3}t} dt + \frac{1}{3}\int_1^2 1e^{-jk\frac{2\pi}{3}t} dt$$

$$= \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{-1}{jk\frac{2\pi}{\cancel{3}}} e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\Big|_0^1 + \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{-1}{jk\frac{2\pi}{\cancel{3}}} e^{-jk\frac{2\pi}{3}t}\Big|_1^2$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{j}{k\pi}\left(e^{-j\frac{2k\pi}{3}} - 1\right) + \frac{j}{2k\pi}\left(e^{-jk\frac{4\pi}{3}} - e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)$$

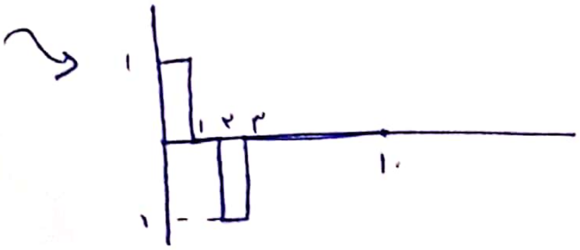
انتگرال گیری با فرض $k \neq 0$ گرفته شده است چون تعریف نشده است لذا برای $k = 0$ جداگانه حساب می کنیم:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_0^1 2\,dt + \int_1^2 1\,dt = \frac{1}{3}(3) = 1$$

(ج-۱

از تابع مشتق می‌گیریم.

$x_3(t) = x_3(t+10)$



$x_2(t) \longrightarrow a_k$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x_2(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt = \frac{1}{10}\left(\int_0^1 e^{-jk\frac{\pi}{5}t}dt - \int_2^3 e^{-jk\frac{\pi}{5}t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2jk\pi}\left(1-e^{-jk\frac{\pi}{5}}\right)\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{5}}\right)$$

$$\Rightarrow a_k = j\omega_0 k b_k \Rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{1}{5} & k=0 \\ \frac{10}{4j^2k^2\pi^2}\left(1-e^{-jk\frac{\pi}{5}}\right)\times\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{5}}\right) \end{cases}$$

2) الف)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k:\text{even}}}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k:\text{odd}}}^{+\infty} 2e^{jk\omega_0 t}$$

$$k \to 2k+1$$

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2k\omega_0 t} + 2e^{j2k\omega_0 t} e^{+j\omega_0 t}$$

$$= (2e^{j\omega_0 t} + 1) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2k\omega_0 t}$$

عبارت سیگما همان تابع دلتا است که دوره تناوبش برابر $\frac{2\pi}{2\omega_0}$ است

$$\Rightarrow x(t) = (2e^{jk\omega_0 t} + 1) \times \delta\left(t - k\frac{\pi}{\omega_0}\right)$$

2) ب

$$x(t) = -3je^{-j3\omega_0 t} + 3je^{j3\omega_0 t} - 2je^{-j2\omega_0 t} + 2je^{j2\omega_0 t} - je^{-j\omega_0 t} + je^{j\omega_0 t}$$

$$= 3j \times 2j(\sin 3\omega_0 t) + 2j \times 2j(\sin 2\omega_0 t) + j \times 2j(\sin \omega_0 t) = -6\sin 3\omega_0 t - 4\sin 2\omega_0 t - 2\sin \omega_0 t$$

---

3) آ

$$x(t-t_0) + x(t+t_0) \Rightarrow x(t) \rightarrow a_k$$

$$\Rightarrow x(t-t_0) \longrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0}, \quad x(t+t_0) \longrightarrow a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow a'_k = a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k e^{-jk\omega_0 t} = 2a_k \cos(k\omega_0 t)$$

ب)

$$even(x) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \quad x(+t) \rightarrow a_k \Rightarrow x(-t) \rightarrow a_{(-k)}$$

$$\Rightarrow a'_k = \frac{a_k + a_{-k}}{2} = even(a_k)$$

ج)

$$Re(x(t)) = \frac{x(t) + x^*(t)}{2}, \quad x(t) \rightarrow a_k \Rightarrow x^*(t) \longrightarrow a^*_{-k}$$

$$\Rightarrow a'_k = \frac{a_k + a^*_{-k}}{2}$$

Scanned with CamScanner

د)

$$x''(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \qquad x(t) \rightarrow a_k \Rightarrow x'(t) \rightarrow jk\omega_0 a_k$$

$$\Rightarrow x''(t) \rightarrow j^2 k^2 \omega_0^2 a_k = -k^2 \omega^2 a_k$$

ه)

$$x(t) \rightarrow a_k \Rightarrow x(t-1) \rightarrow e^{-jk\omega_0} a_k$$

$$\Rightarrow x(3t-1) \rightarrow a_k e^{-jk\omega_0}$$ چون : $\alpha > 0$

4) از داده سوال استفاده می کنیم: ① تبدیل ضرب به جمع سینوس ها:

$$x(t) = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}t + \pi\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{3\pi}{4}\left(\cos\frac{9\pi}{4}t + \cos\frac{3\pi}{4}t\right).$$

$$= -\frac{3\pi}{4} \times \left(\frac{e^{j\frac{9\pi}{4}t} + e^{-j\frac{9\pi}{4}t}}{2} + \frac{e^{j\frac{3\pi}{4}t} + e^{-j\frac{3\pi}{4}t}}{2} \right)$$

$$\rightsquigarrow a_1 = a_{-1} = -\frac{3\pi}{8}, \quad a_{3,-3} = \frac{-3\pi}{8}, \quad \omega_0 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\rightsquigarrow P = \sum |a_k|^2 = 4 \times \frac{+9\pi^2}{\cancel{64}\,16} = \frac{9\pi^2}{16}$$

Scanned with CamScanner

$$y(t) = \frac{x(t) e^{j\frac{\pi}{4}t}}{2} + \frac{x(t) e^{-j\frac{\pi}{4}t}}{2} + x(4t) \sim T'' = 1$$

$$T = 4 \sim \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad a_k = j^k \rightarrow T' = 8$$

$$f_s\left(x(t) e^{j\frac{\pi}{4}t}\right) = \frac{1}{T'}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\frac{\pi}{4}t} e^{j\frac{2\pi}{8}kt}$$

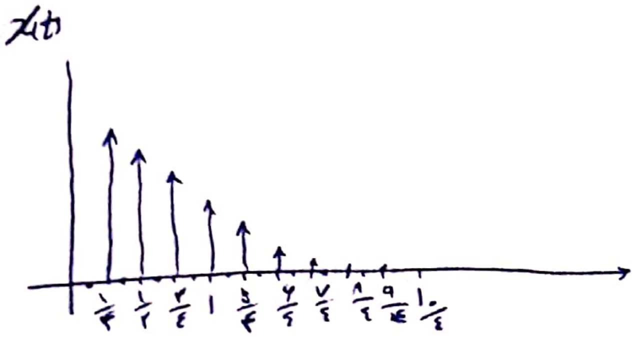
$$\Rightarrow = \frac{1}{8}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\frac{\pi}{4}(k+1)t} \Rightarrow a_{k+1}$$

با توجه به این که دوره تناوب دو برابر قبلی در نظر گرفته شده پس فرکانس ها در اینجا نصف فرکانس های خود $x(t)$ است یعنی مثلا $x(t)$ در فرکانس های $f = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \dots$ مولفه داشت ولی الان a_k ها در فرکانس های $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \dots$ مقدار دارد.

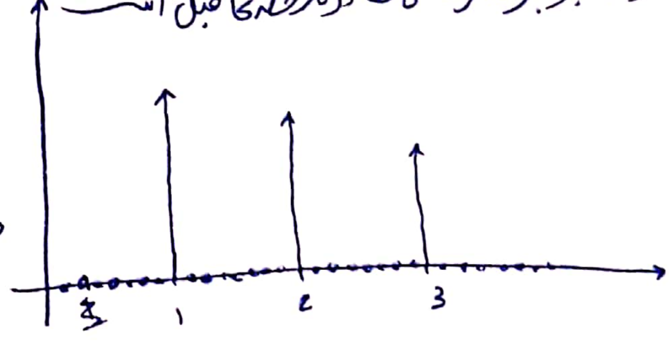
در این جا هم دوره تناوب نسبت به $x(t)$ ، $\frac{1}{4}$ برابر می‌شود

$x(4t) \Rightarrow a_k'$

پس فرکانس ها ۴ برابر حالت $x(t)$ است یعنی به این صورت در آمده است.
و 8 برابر فرکانس ها در مرحله ی قبل است



$\Rightarrow$

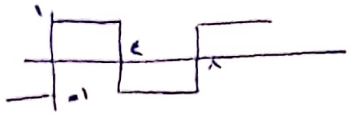


پس در جمع a_k ها ، a_k هایی که در $x(4t)$ به فرکانس اشاره می کنند 8 برابر فرکانس a_k است.

پس داریم: $a_k'' = a_{\frac{k}{8}}$

$$f_s(y(t)) = \frac{1}{4}\left(j^{k+1} + j^{k-1}\right) + j^{\frac{k}{8}} \delta_{k(8n)}$$

اگر k ضریبی از 8 نباشد مقدارش صفر است.



جمع دو پالس هست :

$$a_k = \frac{\sin k\pi\left(\frac{1}{2}\right)}{k\pi} e^{-jk\frac{\pi}{2}} - \frac{\sin\frac{k\pi}{2}\, e^{jk\frac{\pi}{2}}}{k\pi}$$

$$= \frac{-j\sin\frac{k\pi}{2}\left(2\sin\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} = -\frac{2j}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)^2$$

$a_0 = 0$ و

توابع سینوس و کسینوس توابع ویژه سیستم های LTI هستند پس وقتی از یک سیستم LTI رد می شوند فقط در پاسخ سیستم به آن فرکانس ضرب می شوند:

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow y(t) = \sum a_k H(j\omega) e^{jk\omega_0 t} \Rightarrow b_k = a_k H(j\omega)$$

فرکانس مربوط به $k \Longleftarrow \omega = k\omega_0$

$$\Rightarrow b_k = \frac{\sin(4k\omega_0)}{k\omega_0} \times \left(-\frac{2j}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{\sin k\pi}{k\omega_0}\left(-\frac{2j}{k\pi}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)^2\right) = 0$$

پس سیستم ما مولفه های فرکانسی را از خود رد نمی کند و خروجی برابر صفر است.

$y(t) = 0$