پاسخ نامه تمرین ۴:

۱)

a)

$$x(t) = e^{-2|t-1|}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-1|}\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{1}^{\infty} e^{-2(t-1)} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{-\infty}^{1} e^{2(t-1)} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{e^{-j\omega}}{j\omega + 2} + \frac{e^{-j\omega}}{2 - j\omega} = \frac{4e^{-j\omega}}{\omega^2 + 4}$$

(b

$$x(t) = 1 + 3\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \qquad w_0 = 4\pi$$

$$= 1 + 3\left((\cos 4\pi t)\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) - \sin(4\pi t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\cos 4\pi t - \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin(4\pi t)$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \times \frac{e^{4\pi t j} + e^{-4\pi t j}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{e^{4\pi t j} - e^{-4\pi t j}}{2j}\right)$$

$$= \underbrace{1}_{a_0} + e^{4\pi t j}\underbrace{\left(\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4j}\right)}_{a_1} + e^{-4\pi t j}\underbrace{\left(\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4j}\right)}_{a_{-1}}$$

$$w_0 = 4\pi$$

طبق رابطه $x(t) = \sum a_k e^{jkw_0 t} \xleftrightarrow{F} X(jw) = \sum 2\pi a_k \delta(w - kw_0)$

$$\rightarrow X(jw) = 2\pi\delta(w) + 2\pi\left(\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4j}\right)\delta(w - 4\pi)$$

$$+ 2\pi\left(\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4j}\right)\delta(w + 4\pi)$$

(c

$$x(t) = e^{5\pi jt} - \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t}$$

$$e^{5\pi jt} \xleftrightarrow{F} 2\pi\,\delta(\omega - 5\pi)$$

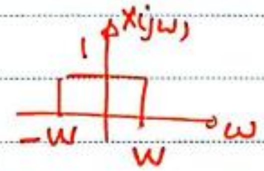
$$\frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \xleftrightarrow{F} \begin{cases} 1 & |\omega| < 2\pi \\ 0 & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$

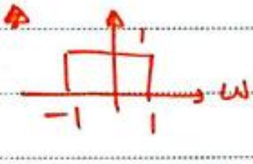
$$X(j\omega) = 2\pi\,\delta(\omega - 5\pi) - \begin{cases} 1 & |\omega| < 2\pi \\ 0 & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$

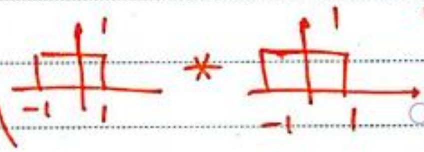
$$= \begin{cases} 2\pi\,\delta(\omega - 5\pi) - 1 & |\omega| < 2\pi \\ 2\pi\,\delta(\omega - 5\pi) & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$

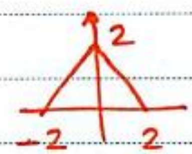
(d

$$x(t) = t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longrightarrow x(t) = t\,\frac{\sin(t)}{\pi t}\,\frac{\sin(t)}{\pi t}$$

* می‌دانیم $\quad x(t) = \dfrac{\sin(Wt)}{\pi t} \xleftrightarrow{FT}$ 

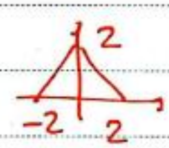
$$\Rightarrow \frac{\sin(t)}{\pi t} \longleftrightarrow$$ 

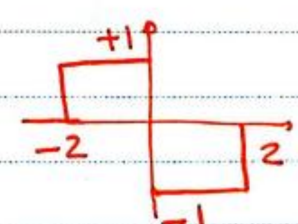
$$\Rightarrow \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}$$ 

$$= \frac{1}{2\pi}$$ 

* $x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$

$t\,x(t) \longleftrightarrow j\dfrac{d}{d\omega}X(j\omega)$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}$$ 

$$t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 \longleftrightarrow \frac{j}{2\pi}$$ 

(e

$$x(t) = \frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

Duality: $f(t) \longleftrightarrow F(j\omega)$

$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

we know: $e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{2}{1+\omega^2}$

$\xrightarrow{\text{Duality}}$ $\frac{2}{1+t^2} \longleftrightarrow 2\pi e^{-|\omega|}$

$\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $\frac{4t}{(1+t^2)^2} \longleftrightarrow j\omega\left(2\pi e^{-|\omega|}\right)$

(f

$x_3(t) = x(t) + x(t+1)$

با توجه به خواص linearity و time shifting داریم:

$X_3(j\omega) = X(j\omega) + e^{j\omega} X(-j\omega)$

$= \dfrac{1 + e^{j\omega} - e^{-1}(1 + e^{-j\omega})}{1 + j\omega}$

۲)

a)

$$X(jw) = ۲\delta(w+۴)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ۲\delta(w+۴)\, e^{jwt}\, dw = \frac{۲}{۲\pi} e^{-۴jt} = \frac{e^{-۴jt}}{\pi}$$

b)

می دانیم معکوس تبدیل فوریه $\frac{2\sin(3w)}{w}$ برابر با یک موج مربعی می باشد:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} 1 & |t| < 3 \\ 0 & |t| > 3 \end{Bmatrix}$$

علاوه بر این طبق خاصیت *time shifting* و *duality* داریم:

$$e^{jw_0t}x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j(w-w_0))$$

بنابراین پاسخ نهایی بدین شکل می باشد:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} e^{2\pi t} & |t| < 3 \\ 0 & |t| > 3 \end{Bmatrix}$$

(c

$$X(j\omega) = ۲\left[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\right] + ۳\left[\delta(\omega-۲\pi) + \delta(\omega+۲\pi)\right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{\pi} e^{jt} - \frac{1}{\pi} e^{-jt} + \frac{۳}{۲\pi} e^{۲j\pi t} + \frac{۳}{۲\pi} e^{-۲j\pi t}$$

$$\Rightarrow e^{jt} = \cos t + j\sin t$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\left(\overset{0}{\cancel{\cos t - \cos t}} + j\sin t + j\sin t\right) + \frac{۳}{۲\pi}\left(\cos ۲\pi t + \cos(-۲\pi t)\right.$$

$$\left. + \cancel{j\sin ۲\pi t} + \cancel{j\sin(-۲\pi t)}\right)$$

$$x(t) = \frac{۲j}{\pi}\sin t + \frac{۳}{\pi}\cos ۲\pi t$$

(d

$$\frac{۷j\omega + ۴۶}{-\omega^۲ + ۱۳j\omega + ۴۲} = \frac{۷j\omega + ۴۶}{(j\omega)^۲ + ۱۳j\omega + ۴۲} = \frac{۷j\omega + ۴۶}{(j\omega + ۷)(j\omega + ۶)}$$

$$= \frac{A}{j\omega + ۷} + \frac{B}{j\omega + ۶} \qquad \left\{ \begin{array}{l} A + B = ۷ \\ 6A + 7B = ۴۶ \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} A = ۳ \\ B = 4 \end{array}$$

$$\frac{1}{j\omega + ۷} \longleftrightarrow e^{-۷t} u(t)$$

$$\frac{1}{j\omega + ۶} \longleftrightarrow e^{-۶t} u(t)$$

$$X(j\omega) = \frac{۳}{j\omega + ۷} + \frac{۴}{j\omega + ۶} \longleftrightarrow (۳e^{-۷t} + e^{-۶t}) u(t)$$

۳)

- می دانیم که سیگنال real و فرد x(t) تبدیل فوریه فرد و purely imaginary با نماد X(jw) دارد. حال سیگنال purely imaginary و فرد jx(t) را در نظر میگیریم. با استفاده از خاصیت linearity، می دانیم که تبدیل فوریه سیگنال مورد نظر jX(jw) خواهد بود که به وضوح real و فرد است. در نتیجه جمله داده شده غلط است.
- می دانیم که تبدیل فوریه زوج مربوط به یک سیگنال زوج و تبدیل فوریه فرد مربوط به یک سیگنال فرد است. کانولوشن یک تبدیل فوریه فرد با تبدیل فوریه زوج در حوزه سیگنال در واقع ضرب یک سیگنال فرد و یک سیگنال زوج در حوزه زمان است که همواره نتیجه آن یک سیگنال فرد است. می دانیم که تبدیل فوریه این سیگنال فرد هم فرد است. در نتیجه، این جمله درست است.

(۴

می‌دانیم که

$$x(at) \overset{F}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{۳} X\left(\frac{j\omega}{۳}\right) \cdot \frac{1}{۳} H\left(\frac{j\omega}{۳}\right)$$

$$= \frac{1}{۹} X\left(\frac{j\omega}{۳}\right) H\left(\frac{j\omega}{۳}\right)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{۹} Y\left(\frac{j\omega}{۳}\right) = \frac{1}{۳} \times \frac{1}{۳} Y\left(\frac{j\omega}{۳}\right)$$

$$\frac{1}{۳} Y\left(\frac{j\omega}{۳}\right) \longleftrightarrow y(۳t)$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{1}{۳} y(۳t) \Rightarrow \begin{cases} A = 1/۳ \\ B = ۳ \end{cases}$$

۵)

الف)

عکس تبدیل فوریه را محاسبه می‌کنیم تا $x(t)$ را بدست آوریم:

$$\delta(\omega) \xleftrightarrow{F.} \frac{1}{2\pi} \qquad \delta(\omega-\pi) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} e^{j\pi t}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} e^{j\pi t} + \frac{1}{2\pi} e^{j5t}$$

در نتیجه، سیگنال $x(t)$ مجموع یک عدد ثابت و دو سیگنال نمایی با فرکانس پایه $\frac{2\pi}{5}$ و ۲ است. چون نسبت این دو فرکانس عدد گویا نیست پس یک فرکانس پایه مشترک نمی‌توان برای آن‌ها پیدا کرد. پس سیگنال $x(t)$ متناوب نیست.

ب)

فرض می‌کنیم $y(t) = x(t) * h(t)$ باشد ← نتیجه می‌گیریم که $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$

همچنین $h(t)$ را به حوزه فرکانس می‌بریم و داریم:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega} \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

چون وقتی $\omega = k\pi$ باشد مقدار $H(j\omega)$ صفر است پس داریم:

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - 5)$$

وقتی $Y(j\omega)$ را به حوزه فرکانس ببریم داریم:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} e^{j5t}}$$

میدانیم این بخش متناوب است.

همچنین می‌دانیم که اضافه کردن عدد ثابت تاثیری در متناوب بودن ندارد. در نتیجه

$y(t)$ یا $x(t) * h(t)$ متناوب است و فرکانس پایه آن $\frac{2\pi}{5}$ است.

ج) در بخش های قبل متوجه شدیم که x(t) متناوب نیست. همچنین می دانیم که h(t) هم متناوب نیست. ولی کانولوشن آن ها متناوب است. پس جواب بله است.

۶)

ابتدا باید $y(t)$ را به حوزه فرکانس ببریم:

$$e^{-۳t}u(t) \longleftrightarrow \frac{۱}{jw+۳}$$

$$-e^{-۴t}u(t) \longleftrightarrow \frac{-۱}{jw+۴}$$

$$\Rightarrow Y(jw) = \frac{۱}{jw+۳} - \frac{۱}{jw+۴} = \frac{۱}{(jw+۳)(jw+۴)}$$

همچنین می‌دانیم که $Y(jw) = X(jw)\,H(jw)$

$$X(jw) = \frac{Y(jw)}{H(jw)} = \frac{\frac{۱}{\cancel{(jw+۳)}(jw+۴)}}{\frac{۱}{\cancel{(jw+۳)}}} = \frac{۱}{jw+۴}$$

$$X(jw) = \frac{۱}{jw+۴} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} e^{-۴t}u(t)$$

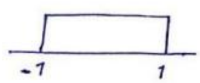
داریم $\Rightarrow x(t) = e^{-۴t}u(t)$

۷) با نوشتن رابطه پارسوال می توانیم x(t) را مطابق حل زیر بدست آوریم. سپس تبدیل فوریه آن را بدست می آوریم.(تبدیل فوریه معادل $\frac{sin(t)}{\pi t}$ را هم به عنوان دانش اولیه داریم و می دانیم که اگر در حوزه زمان سیگنالی در t ضرب بشود، باید از معادل سیگنال در حوزه فرکانس مشتق بگیریم)

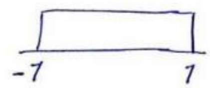
در نهایت، باقی پارامترهای لازم برای جایگذاری در رابطه پارسوال را از همین اطلاعات بدست آمده داریم و می توانیم با قرار دادن آنها در رابطه پارسوال، حاصل انتگرال را بدست آوریم.

$$|x(t)|^2 = t^2\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^4 \Rightarrow x(t) = t\left(\frac{\sin(t)}{\pi t}\right)^2 = t \times \frac{\sin(t)}{\pi t} \times \frac{\sin(t)}{\pi t}$$

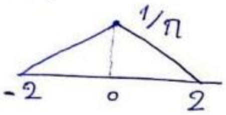
$$\frac{\sin^2(t)}{\pi^2 t^2} \xleftrightarrow{F.T} \frac{1}{2\pi} \times$$



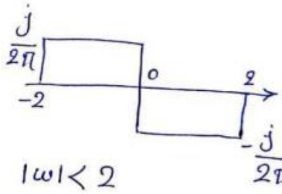
$$*$$



$$=$$



$$t\,\frac{\sin^2(t)}{\pi^2 t^2} \xleftrightarrow{F.T}$$



$$= X(j\omega)$$

$$\Rightarrow |X(j\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & |\omega|<2 \\ 0 & o.w \end{cases} \Rightarrow |X(j\omega)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} & |\omega|<2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi^3}$$

(۸

الف) اگر از هر طرف معادله تبدیل فوریه حساب بکنیم ، داریم:

$$j^2\omega^2 H(j\omega) + 6j\omega H(j\omega) + 8H(j\omega) = 2$$

$$H(j\omega)\left(j^2\omega^2 + 6j\omega + 8\right) = 2$$

$$H(j\omega) = \frac{2}{j^2\omega^2 + 6j\omega + 8} = \frac{2}{-\omega^2 + 6j\omega + 8} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$= \frac{1}{j\omega + 2} - \frac{1}{j\omega + 4}$$

که اگر $H(j\omega)$ را به حوزه زمان ببریم داریم:

$$h(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

$$* \quad \frac{1}{j\omega + 2} \longleftrightarrow e^{-2t}u(t)$$

ریشه مخرج $= -2$

$=$ ضریب t در توان e

ب) داریم $\Rightarrow \; x(t) = t e^{-2t} u(t)$

ابتدا این سیگنال را به حوزه‌ی فرکانس می‌بریم:

$$e^{-2t} u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega + 2}$$

$$t e^{-2t} u(t) \longleftrightarrow \left(\frac{1}{j\omega + 2}\right)^2 = j \frac{d\left(\frac{1}{j\omega+2}\right)}{d\omega} = X(j\omega)$$

می‌دانیم که $\quad Y(j\omega) = X(j\omega)\, H(j\omega)$

$$Y(j\omega) = \left(\frac{1}{j\omega + 2}\right)^2 \left(\frac{2}{-\omega^2 + 6j\omega + 8}\right)$$

$$= \frac{2}{(j\omega+2)^3 (j\omega+4)}$$

$$= \frac{A}{j\omega+2} + \frac{Bj\omega + E}{(j\omega+2)^2} + \frac{G + C(j\omega)^2 + Fj\omega}{(j\omega+2)^3} + \frac{D}{j\omega+4}$$

$$= \frac{1/4}{j\omega+2} + \frac{-1/2}{(j\omega+2)^2} + \frac{1}{(j\omega+2)^3} + \frac{-1/4}{j\omega+4}$$

$Y(jw)$ را به حوزه زمان می‌بریم و $y(t)$ را بدست می‌آوریم،

$$y(t) = \frac{1}{4} e^{-2t} u(t) - \frac{1}{2} t e^{-2t} u(t) + t^2 e^{-2t} u(t) - \frac{1}{4} e^{-4t} u(t)$$

۹)

الف) ابتدا با روابطی که داریم پاسخ ضربه را به حوزه فرکانس می بریم. سپس با توجه به اینکه می دانیم که کانولوشن $h(t)$ و $h^{-1}(t)$ برابر تابع ضربه است، با بردن آن به حوزه فرکانس داریم:

$$H(w) \times H^{-1}(w) = 1$$

و به کمک این رابطه $H^{-1}(w)$ را بدست می آوریم و سپس آن را به حوزه زمان می بریم.

ب) ابتدا ورودی را به حوزه فرکانس می بریم و $X(jw)$ را محاسبه می کنیم. سپس می دانیم که $Y(jw) = X(jw)H(jw)$ است و در نهایت پس از محاسبه ی $Y(jw)$ و بردن حاصل آن به حوزه زمان، پاسخ سیستم را به عنوان نتیجه سوال خواهیم داشت.

الف) سیستم را به حوزه‌ی فرکانس می‌بریم.

$$h(t) = \delta(t) - 3e^{-t}u(t)$$

$$H(\omega) = 1 - \frac{3}{1+j\omega} = \frac{1+j\omega-3}{1+j\omega} = \frac{j\omega-2}{1+j\omega}$$

$$h(t) * h^{-1}(t) = \delta(t) \Rightarrow H(\omega) \times H^{-1}(\omega) = 1 \rightarrow H^{-1}(\omega) = \frac{1}{H(\omega)}$$

$$H^{-1}(\omega) = \frac{1+j\omega}{j\omega-2} = 1 + \frac{3}{j\omega-2} = 1 - \frac{3}{2-j\omega}$$

$$h^{-1}(t) = \delta(t) - 3e^{2t}u(-t)$$

ب)

$$x(t) = (e^{-3t} - e^{-4t})u(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega} - \frac{1}{4+j\omega}$$

$$X(j\omega)H(j\omega) = \frac{j\omega-2}{(3+j\omega)(1+j\omega)} - \frac{j\omega-2}{(4+j\omega)(1+j\omega)} = \frac{A}{3+j\omega} + \frac{B}{1+j\omega} - \left(\frac{C}{4+j\omega} + \frac{D}{1+j\omega}\right) = \frac{\frac{5}{2}}{3+j\omega} + \underbrace{\frac{-\frac{3}{2}}{1+j\omega} - \frac{2}{4+j\omega} + \frac{1}{1+j\omega}}_{\frac{-1/2}{1+j\omega}}$$

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(t) - 2e^{-4t}u(t)$$