دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

پاسخ تمرین درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(فصل ششم – تبدیل فوریه سیگنال های گسسته زمان)

.۱

a) $N = 8 \to \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$$a_k = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{7} x[n]e^{-jk\frac{\pi}{4}n} \to \text{ضرایب} = \frac{1}{8}[4 + 3^{-jk\frac{\pi}{4}} + \cdots + 3e^{-jk\frac{7\pi}{4}}]$$

b) $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

در این قسمت دوره تناوب sin برابر با ۱۲ است و تناوب cos برابر ۸ است. دوره تناوب مشترک به اندازه ک.م.م این دو عدد به اندازه ۲۴ می‌شود.

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right) = \frac{e^{j\frac{\pi}{6}n} - e^{-j\frac{\pi}{6}n}}{2j}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \frac{e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2}$$

$$x[n] = \frac{e^{j\frac{\pi}{6}n} - e^{-j\frac{\pi}{6}n}}{2j} + \frac{e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2} = \sum_{k=<24>} a_k e^{jk\frac{\pi}{12}n}$$

$$\to a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = 2 \\ -\frac{1}{2j} & k = -2 \\ \frac{1}{2} & k = \pm 3 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

.۲

a) $x_1[n] = x[n - n_0] + x[n_1 - n]$

در این قسمت ما به صورت فرمولی در خواص تبدیل فوریه داریم

$$x[n - n_0] \dashrightarrow e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

همچنین در خواص داریم:

$$x[-n] \dashrightarrow X(e^{j\omega})$$

پس تبدیل فوریه $x_1[n]$ می‌شود:

$$e^{-j\omega n_0}X\left(e^{j\omega}\right) + e^{j\omega n_1}X(e^{j\omega})$$

b) $x_2[n] = 3nx[n]$

در فرمول ها داریم که فرمول ها داریم که

$$nx[n] = j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

که عدد ۳ نیز تنها یک ضریب است و در آن ضرب می‌شود. پس تبدیل فوریه $x_2[n]$ برابر می‌شود با:

$$3\,j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

c) $x_3[n] = (n - n_1)^2 x[n]$

طبق خواص تبدیل فوریه داریم

$$nx[n] = j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

همچنین اگر یکبار دیگر مشتق بگیریم، داریم:

$$n^2x[n] = j^2\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2} = -\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2}$$

حال $x_3[n]$ را باز می‌کنیم.

$$(n - n_1)^2x[n] = n^2x[n] + n_1^2x[n] - 2n_1nx[n]$$

تبدیل فوریه عبارت بالا برابر است با:

$$-\frac{d^2X(e^{j\omega})}{d\omega^2} + n_1^2X(e^{j\omega}) - 2n_1j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

.۳

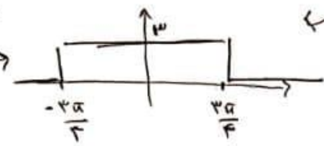
a) $x[n] = 6 + \sin\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{1}{4}\right) \rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{4} \rightarrow N = 8$

$$x[n] = 6 + \frac{1}{2j}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{4}n+\frac{1}{4}\right)} - e^{-j\left(\frac{\pi}{4}n+\frac{1}{4}\right)}\right) \rightarrow \begin{cases} a_0 = 6 = a_8 = \cdots \\ a_1 = \frac{1}{2j}e^{j\frac{1}{4}} = a_9 = \cdots \\ a_{-1} = \frac{-1}{2j}e^{-j\frac{1}{4}} = a_7 = \cdots \end{cases}$$

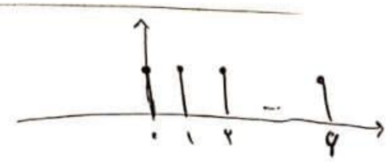
---

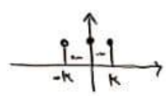
b) $x[n] = \dfrac{2\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)}{\pi n}$

$$\frac{\sin(Wn)}{\pi n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \begin{cases} 0 & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 1 & W < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$x[n] \xleftrightarrow{FT}$ 

---

c) $x[n] = u[n] + u[n-7] =$ 

$y[n] =$ 

$\xleftrightarrow{FT} \dfrac{\sin\left(\frac{2K+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ همچنین می‌دانیم

$\rightarrow$ انتقال زمانی $\rightarrow x[n] \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega 3}\dfrac{\sin\left(\frac{7}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

---

d) $x[n] = (n+1)a^n u[n]$

می‌دانیم $a^n u[n] \xleftrightarrow{FT} \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

و می‌دانیم $n\,x[n] \xleftrightarrow{FT} j\dfrac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})$

$$x[n] = \underbrace{n\,a^n u[n]}_{y[n]} + a^n u[n]$$

$$y[n] \longleftrightarrow j\frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right] = \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

$$\rightarrow x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{-j\omega}}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

۴.

حل:

(الف) فرض کنید $x[n]=\delta[n-1]+\delta[n+1]$. با استفاده از معادله آنالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹). تبدیل فوریه $\left(e^{j\omega}\right)$ برای این سیگنال عبارتست از:

$$x\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[n]e^{-jn}$$

$$=e^{-j\omega}+e^{j\omega}=2\cos\omega$$

(ب) فرض کنید $x[n]=\delta[n+2]-\delta[n-2]$. با استفاده از معادله آنـالیز تبـدیل فوریـه (۵,۹)، تبدیل فوریه $x\left(e^{j\omega}\right)$ این سیگنال برابر است با:

$$x\left(c^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$$=e^{2j\omega}-e^{-2j\omega}=2j\sin(2\omega)$$

۵.

$$\begin{aligned}
x[n] &= a_0+a_2e^{j2(2\pi/N)n}+a_{-2}e^{-j2(2\pi/N)n}+a_4e^{j4(2\pi/N)n}+a_{-4}e^{-j4(2\pi/N)n}\\
&= 1+e^{j(\pi/4)}e^{j2(2\pi/5)n}+e^{-j(\pi/4)}e^{-2j(2\pi/5)n}\\
&\quad +2e^{j(\pi/3)}e^{j4(2\pi/N)n}+2e^{-j(\pi/3)}a_{-4}e^{-j4(2\pi/N)n}\\
&= 1+2\cos(\frac{4\pi}{5}n+\frac{\pi}{4})+4\cos(\frac{8\pi}{5}n+\frac{\pi}{3})\\
&= 1+2\sin(\frac{4\pi}{5}n+\frac{3\pi}{4})+4\sin(\frac{8\pi}{5}n+\frac{5\pi}{6})
\end{aligned}$$

۶.

رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\oint_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

شکل سیگنال زوج است پس می توان بجای یک بازه 2π از ۰ تا π انتگرال گرفت

ونتیجه را در ۲ ضرب کرد. معادله خط در بازه ۰ تا π نیز $\frac{2}{\pi}\omega$ است.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = 2\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\omega\right)^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{3\pi^2}\omega^3\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\times\frac{4}{3\pi^2}\times\pi^3 = \frac{4}{3}$$

حال چون $x[n]$ زوج و حقیقی است، پس $X(e^{j\omega})$ نیز زوج و حقیقی است (و برعکس)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{-1}|x[n]|^2 + |x[0]|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}|x[n]|^2 = |x[0]|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|x[n]|^2$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\oint_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \xrightarrow{n=0} x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega})\times 1\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\times 2\times\pi = 1$$

$$\longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x[n]|^2 = \left(\frac{4}{3}-1\right)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

.۷

از اطلاعات داده شده:

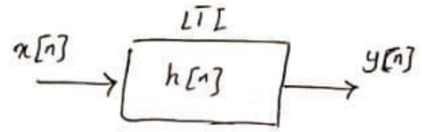
$$
\begin{aligned}
x[n] &= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)\int_{-\pi}^{\pi} x\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\,d\omega \\
&= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)\int_{-\pi}^{\pi} \left|x\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\circ\{x(e^{j\omega})\}}e^{j\omega n}\,d\omega \\
&= \left(\tfrac{1}{2\pi}\right)\int_{-\pi/4}^{\pi} e^{-\frac{3}{2}\omega}e^{j\omega n}\,d\omega \\
&= \frac{\sin\left\{\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)\right\}}{\pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

سیگنال $x[n]$ هنگامیکه $\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)$ یک ضریب غیرصفر π باشد و یا هنگامیکه $|n|\to\infty$، صفر خواهد بود. مقدار $\frac{\pi}{4}\left(n-\frac{3}{2}\right)$ هرگز مانند حالتی که آن یک ضریب غیرصفر π است باشد.

بنابراین $x[n]=0$ تنها وقتی $n=\pm\infty$.

برای این سوال راه بدیهی استفاده از کانولوشن است ولی ضرب برای این ۲ سیگنال، محاسبه انتگرال مشکل است.

در سیستم‌های LTI با سیگنال‌های گسسته، رابطه زیر را داریم



اگر $y[n] \xleftrightarrow{FS} b_k$, $x[n] \xleftrightarrow{FS} a_k$ و $h[n] \xleftrightarrow{FT} H(e^{j\omega})$

$$b_k = a_k H(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[r] e^{-j\omega r}$$

$x[n] = \cos(\frac{3\pi}{5} n) \rightarrow \omega_0 = \frac{3\pi}{5} \rightarrow \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{10\pi}{3} \rightarrow$ با دوره تناوب ۱۰ متناوب است)

$$x[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{3\pi}{5}n} + e^{-j\frac{3\pi}{5}n}\right) = \sum_{k=\langle 10\rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{10}kn}$$

$$\rightarrow a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm 3 = \pm 13 = \dots \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} h[r] e^{-j\omega r} = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha^r e^{-j\omega r} = \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^r$$

$$= \frac{1-(\alpha e^{-j\omega})^\infty}{1-\alpha e^{-j\omega}} = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

$$\rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{1}{2(1-\alpha e^{-j\omega})} & k = \pm 3, \pm 13, \dots \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

$$\rightarrow y[n] = \sum_{k=\langle 10\rangle} b_k e^{j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{1}{2(1-\alpha e^{-j\omega})}\left(e^{-j\frac{3\pi}{5}n} + e^{j\frac{3\pi}{5}n}\right)$$

موفق باشید.