DATE / / SUBJECT: به نام خدا

1) آ) $\sin^4\left(-\frac{t+\pi}{6}\right) + \cos^4\left(\frac{2t+5\pi}{3}\right)$

نکته: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$$\frac{1-\cos^2\left(-\frac{t+\pi}{3}\right)}{2} + \frac{1+\cos^2\left(\frac{4t+6\pi}{3}\right)}{2}$$

اعداد ثابت تاثیری در مقدار دوره تناوب ندارند:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big(\overbrace{1+\cos\left(-\frac{2}{3}(t+\pi)\right)}^{A}\Big) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Big(\overbrace{\cos\left(\frac{8t+20\pi}{3}\right)}^{B}\Big)$$

و $T = \frac{2\pi}{w}$

$T_A = \frac{2\pi}{-\frac{2}{3}} = -3\pi$ $T_B = \frac{2\pi}{8/3} = \frac{3}{4}\pi$

حال کوچکترین مضرب مشترک بین $T_A$ و $T_B$ را پیدا می‌کنیم از آنجا که 3 مضربی از $\frac{3}{4}$ است پس $T_A$ می‌شود دوره تناوب کل

$T_{کل} = T_A = 3\pi$

ب) $x_2[n] = (-1)^n \cos\left[\frac{\pi}{8}n\right]$ از آنجا که $(-1)^n$ به طور متناوب در اعداد زوج حاصل را به همان صورت $\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right]$ و در اعداد فرد حاصل را قرینه می‌کند پس می‌توان گفت متناوب است

شرط تناوب در سیگنال های گسسته: $w_0 N = 2\pi m \xrightarrow{\text{m عدد صحیح}} \frac{\pi}{8}N = 2\pi m$ $N = 16m$

به ازای $m=1 \Leftarrow N = 16$

ج) $x_3[n] = e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)} = \cos\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right) + j\sin\left(\frac{6\pi n}{\sqrt{5}}\right)$

شرط تناوب: $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}N = 2\pi m \rightarrow N = \frac{\sqrt{5}}{3}m \rightarrow m = 3$

$N = \sqrt{5}$

DATE / / SUBJECT: به نام خدا

1) T) $\sin^4\left(-\frac{t+\pi}{6}\right)+\cos^4\left(\frac{2t+5\pi}{3}\right)$

نکته: $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$$\frac{1-\cos^2\left(-\frac{t+\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1+\cos^2\left(\frac{4t+10\pi}{3}\right)}{2}$$

اعداد ثابت تأثیری در مقدار دوره تناوب ندارند.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\underbrace{\left(1+\cos\left(-\frac{2}{3}(t+\pi)\right)\right)}_{A}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\underbrace{\left(\cos\left(\frac{8t+20\pi}{3}\right)\right)}_{B}$$

و $T=\frac{2\pi}{\omega}$

$T_A=\frac{2\pi}{-\frac{2}{3}}=-3\pi$ $T_B=\frac{2\pi}{8/3}=\frac{3}{4}\pi$

حال کوچکترین مضرب مشترک بین $T_A$ و $T_B$ را پیدا می‌کنیم از آنجا که 3 مضربی از $\frac{3}{4}$ است

از آنجا که $3\pi$ عدد صحیح نیست دوره تناوب ندارد و متناوب نیست $T_{کل}=T_A=3\pi$

ب) $x_2[n]=(-1)^n\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right]$ از آنجا که $(-1)^n$ به طور متناوب در اعداد زوج حاصل را به همان صورت $\cos\left[\frac{\pi}{8}n\right]$ و در اعداد فرد حاصل را قرینه می‌کند پس می‌توان گفت متناوب است

شرط تناوب در سیگنال های گسسته: $\omega_0 N=2\pi m \xrightarrow{\text{هر عدد صحیح}} \frac{\pi}{8}N=2\pi m$ $N=16m$

به ازای $m=1 \Leftarrow N=16$

ج) $x_3[n]=e^{j\left(\frac{6\pi n}{\sqrt5}\right)}=\cos\left(\frac{6\pi n}{\sqrt5}\right)+j\sin\left(\frac{6\pi n}{\sqrt5}\right)$

شرط تناوب: $\frac{6\pi}{\sqrt5}N=2\pi m\rightarrow N=\frac{\sqrt5}{3}m\rightarrow m=3 \rightarrow N=\sqrt5$

N عدد صحیح نیست پس دوره تناوب ندارد و متناوب نیست

DATE / / SUBJECT:

د) $x_4[n] = \cos(\frac{\pi}{4} n^2)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}(n+N)^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(n^2+2nN+N^2)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2 + \frac{\pi}{2}nN + \frac{\pi}{4}N^2\right)$$

$$\frac{\pi}{2}nN + \frac{\pi}{4}N^2 = 2\pi K \rightarrow 2nN + N^2 = 8K$$

از آنجا که سمت راست مضرب 8 است کاری می‌کنیم طرف چپ با کمترین مقدار $N$ مضرب 8 شود

به ازای $N=4$ : $8n+16 = 8K$ ✓

$N=2$ : $4n+4 \neq 8K$

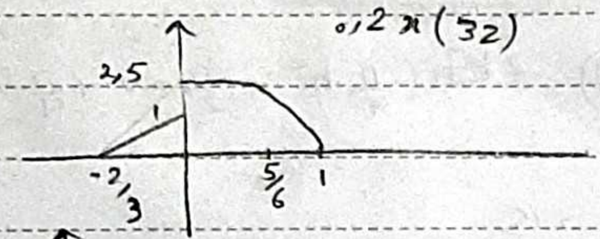
پس $N=4$ کوچکترین دوره تناوب می‌باشد

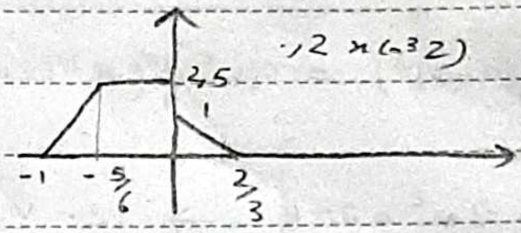
ه) $x_5(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{(2t+k)} u(2t-k)$ متناوب نیست

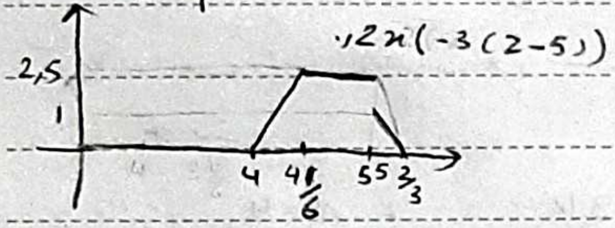
زیرا مقادیر متفاوت از سیگنال های $\sin$ و $\cos$ با هم جمع می‌شوند.

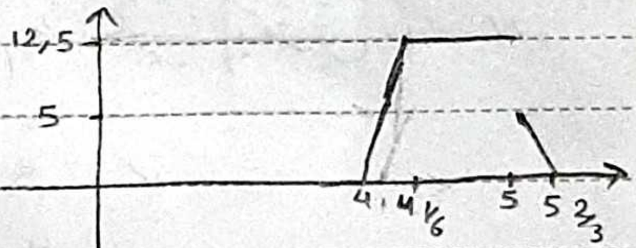
DATE / / SUBJECT:

$z = -\frac{t}{3} + 5 \qquad t = -3(z-5) \longrightarrow y(z) = 0{,}2\,x(z)$ (2 آ)

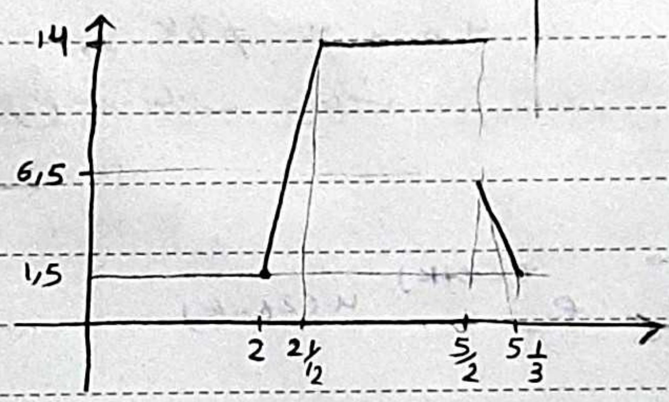



ب)




ج)

$$x(t) = \begin{cases} 75t - 300 & 4 \leq t < 4\frac{1}{6} \\ 12{,}5 & 4\frac{1}{6} \leq t < 5 \\ -7{,}5t + \frac{85}{2} & 5 < t < 5\frac{2}{3} \end{cases}$$

$t$ در بازه‌های $t$ کمتر از 2 و بیشتر از $5\frac{2}{3}$ تعریف نشده است پس :

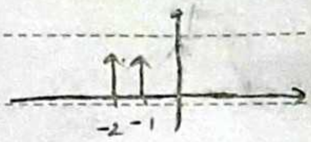
$$\int_{-\infty}^{2} x(t)\,dt = 0$$

Sahand

(3

الف) $x(t) = \delta(3t^2 + 9t + 6)$

$3t^2 + 9t + 6 = 0 \quad = 3(t+1)(t+2)$




$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |\delta^2(3t^2+9t+6)|\, dt$$

از آنجا که $x(t)$ فقط در دو نقطه 1-، 2- دارای مقدار 1 است

$E_\infty = 1+1 = 2 \qquad P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{2T} = 0$

سیگنال انرژی زیرا مقدار انرژی کل متناهی است

ب) $x[n] = (3n+1)(u[n+2] - u[n-4]) = (3n+1)u[n+2] - (3n+1)u[n-4]$

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < -2 \\ 3n+1 & -2 \leq n < 4 \\ 0 & 4 \leq n \end{cases} \Rightarrow E_\infty = \sum_{-\infty}^{\infty} |(3n+1)|^2 = \sum_{-2}^{4} (3n+1)^2$$

از آنجا که $E_\infty$ متناهی خواهد شد سیگنال انرژی است

ج) $x(t) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3|t|}$

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{3}^{-3|t|}\right|^2 dt = \int_0^{\infty} 3^{6t}\, dt = \infty$$

نه انرژی نه توان

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{3^{6t-1}\Big|_0^T}{\ln 3 \times 2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{3^{6T}-1}{6T\ln 3} = \infty$$

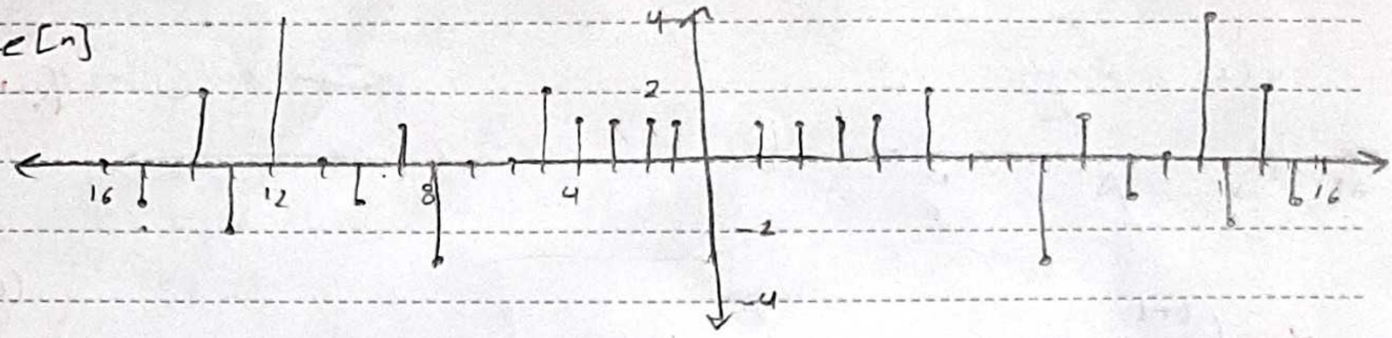
د) $x[n] = \frac{1}{4}^n u[n] \xrightarrow{n\geq 0} x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\xrightarrow{n<0} 0$

$$E_\infty = \sum_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\frac{1}{4}\right)^n\right|^2 = \sum_0^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

سیگنال انرژی

$Ev\{x[n]\} = \frac{1}{2}[x[n]+x[-n]]$  $x_e[n] = x_e[-n]$ (4

$x_e[n]$



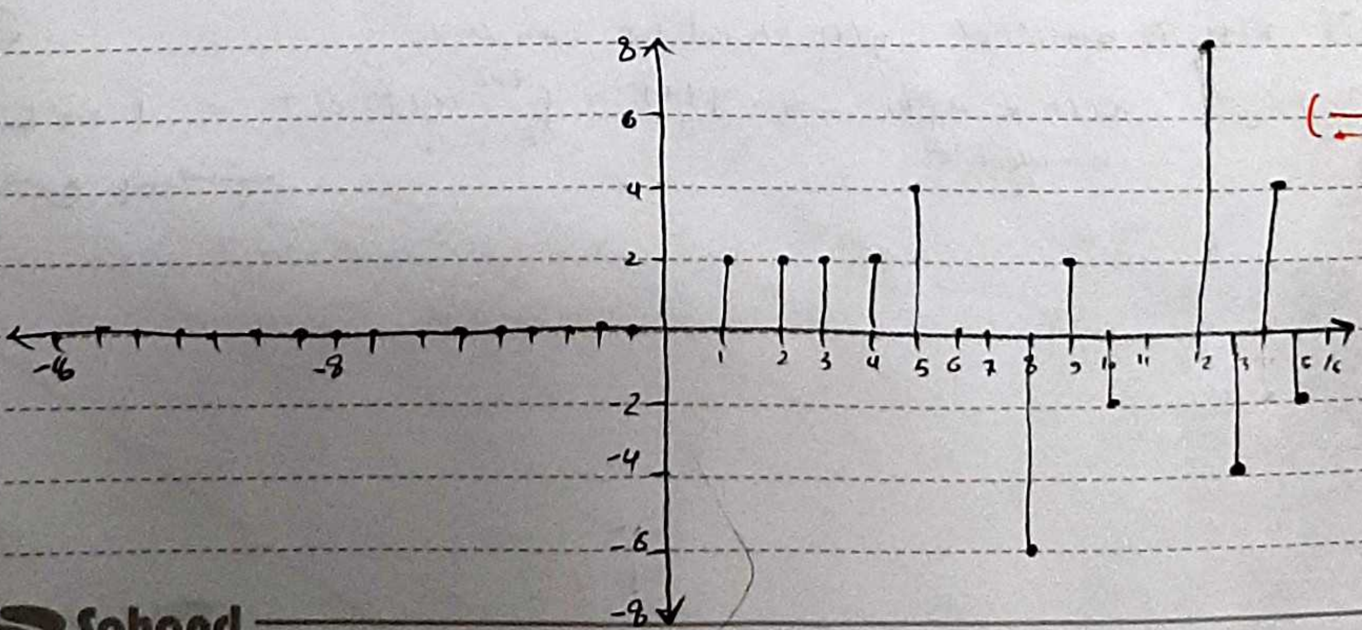
$-n<0 \rightarrow x[-n]=0$

$n>0$ برای : $x_e[n] = \frac{[x[n]+x[-n]]}{2} \Rightarrow x_e[n] = \frac{x[n]}{2}$

$\Rightarrow x[n] = 2x_e[n]$

$E_\infty = \sum_{-\infty}^{\infty}|x[n]|^2 = \sum_{0}^{16}|x[n]|^2 = (4+4+4+4+16+36+$ (آ

$4+4+64+4+16+4) = 164$



(ب

DATE / / SUBJECT:

5) آ) خیر وارون پذیر نیست $\delta[n], \delta[-n]$

ب) معکوس پذیر است $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

6)

T) $y(t) = \int_{t}^{t+1} x(\tau)\, d\tau$

① حافظه دار است (به زمان آینده (t+1) وابسته است)

② علی نیست زیرا به آینده وابسته است

③ $x(\tau - t_0) \rightarrow y_1 = \int_{t}^{t+1} x(\tau - t_0)\, d(\tau - t_0) = \int_{t}^{t+1} x(\tau - t_0)\, d\tau$

$y_2 = y(t - t_0) = \int_{t-t_0}^{t-t_0+1} x(\tau)\, d\tau$

پس تغییر ناپذیر با زمان نیست و نامتغیر با زمان است

④ $y_1(t) = \int_{t}^{t+1} x_1(\tau)\, d\tau \qquad y_2(t) = \int_{t}^{t+1} x_2(\tau)\, d\tau$

$y_3(t) = \int_{t}^{t+1} (a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau))\, d\tau = a \int_{t}^{t+1} x_1(\tau)\, d\tau + a_2 \int_{t}^{t+1} x_2(\tau)\, d\tau$

$= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$ پس خطی است

⑤ if $x(t)$ is bounded $y(t)$ should be bounded

برای مثال $\underset{\text{bounded}}{x(t) = u(t)} \longrightarrow y(t) = \int_{t}^{t+1} u(\tau)\, d\tau = 1 \rightarrow$ bounded

پس پایدار است

Sahand

DATE / / SUBJECT:

ب) $y(t) = \frac{dx}{dt}$

① حافظه دار نیست ② درنتیجه علی است

$x(t-t_0) \rightarrow y_1 = \frac{dx}{dt}$ ③

$y_2(t-t_0) = \frac{dx}{d(t-t_0)} = \frac{dx}{dt}$ $y_1 = y_2$

پس نامتغیر با زمان نیست

$y_1(t) = \frac{dx_1}{dt}$ $y_2(t) = \frac{dx_2}{dt}$ $y_3(t) = \frac{d(ax_1 + bx_2)}{dt}$ ④

$= a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dx_2}{dt} = ay_1(t) + by_2(t)$ پس خطی است

if $x(t) = \sin(t) \rightarrow y(t) = \frac{d\sin(t)}{dt} = \cos(t)$ : bounded ⑤

بازای مقادیر ورودی محدود مشتق آن هم محدود اند پس پایدار است

ج) $y[n] = \sin(x[n])$

① حافظه دار نیست ← ② علی است

$y_1 = \sin(x[n-n_0])$ ③

$y_2[n-n_0] = \sin(x[n-n_0])$ $\rightarrow y_1 = y_2$

پس نامتغیر با زمان نیست

$y_1 = \sin(x_1[n])$ $y_2 = \sin(x_2[n])$ $y_3 = \sin(ax_1[n] + bx_2[n])$ ④

$\sin(ax_1[n])\cos(bx_2[n]) + \sin(bx_2[n])\cos(ax_1[n])$

$\neq a\sin(x_1[n]) + b\sin x_2[n]$

خطی نیست

⑤ از آنجاکه همواره $-1 < \sin t < 1$ درنتیجه مستقل از ورودی همواره $y[n]$ bounded است

پایدار است

Sahand

DATE / / SUBJECT:

ز) $y(t) = [\cos(3t)]\, x(t)$

① حافظه‌دار نیست ← ② علی است

$x_1 = x(t-t_0) \rightarrow y_1 = [\cos(3t)]\, x(t-t_0)$ ③

$y_2(t-t_0) = [\cos(3(t-t_0))]\, x(t-t_0) \rightarrow y_1 \neq y_2$

نامتغیر با زمان است

$y_1 = [\cos(3t)]\, x_1(t) \qquad y_2(t) = [\cos(3t)]\, x_2(t)$ ④

$y_3 = [\cos(3t)]\,(a x_1(t) + b x_2(t)) = a y_1 + b y_2$ خطی است

$\text{if } a < x(t) < b \;;\; -1 \leq [\cos(3t)] \leq 1 \Rightarrow \overset{c = \max(a,b)}{-c \leq y(t) \leq c}$ ⑤

پایدار است

ح) $\text{Even}\{x[n-1]\} = \frac{1}{2}\left[x[n-1] + x[-n-1]\right]$

① حافظه‌دار هست - ② علی است

$x_1 = x(n-n_0) \rightarrow y_1 = \frac{1}{2}\left[x[n-n_0-1] + x[-n+n_0-1]\right]$ ③

$y_2[n-n_0] = y_1 \Rightarrow$ متغیر با زمان است

$y_1 = \frac{1}{2}\left[x_1[n-1] + x_1[-n-1]\right] \qquad y_2 = \frac{1}{2}\left[x_1[n-1] + x_2[-n-1]\right]$ ④

$y_3 = \frac{1}{2}\left[a x_1[n-1] + b x_1[n-1] + a x_1[-n-1] + b x_2[-n-1]\right]$

$y_3 \neq a y_1 + b y_2$ خطی نیست

⑤ اگر $x$ bounded باشد جزء صحیح مجموع آن با هم هم bounded خواهد شد

پایدار است

Sahand

DATE / / SUBJECT:

و) $y[n] = x[n] \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-2k] = x[n] \cdot u[2n]$

① حافظه‌دار است ② علّی نیست

③ $y_1 = x[n-n_0]\, u[2n] \quad y_2 = y[n-n_0] = x[n-n_0]\, u[2n-2n_0] = x[n-n_0]\, u[2n]$

$\Rightarrow y_1 = y_2$ تغییرناپذیر با زمان می‌باشد (نا تغییرناپذیر با زمان نیست)

④ $y_1 = x_1[n]\, u[2n] \quad y_2 = x_2[n]\, u[2n]$

$y_3 = (a x_1[n] + b x_2[n])\, u[2n] = a y_1 + b y_2$ خطی است

⑤ $\text{if } a < x[n] < b \;;\; 0 \leq u[2n] \leq 1 \rightarrow$ $y[n]$ هم محدود است

پایدار است

7) آ) $\forall x[n] \Rightarrow \sum_{k=-N}^{+N} x^2[n] = \sum_{k=-N}^{+N} x^2_{odd}[n] + \sum_{k=-N}^{+N} x^2_{even}[n]$

$= x^2[n] = x^2_{odd}[n] + x^2_{even}[n]$

$x^2_{even}[n] = \frac{1}{2}\left[x^2[n] + x^2[-n]\right]$

$x^2_{odd}[n] = \frac{1}{2}\left[x^2[n] - x^2[-n]\right]$

$\Rightarrow x^2_{even}[n] + x^2_{odd}[n] = \frac{1}{2}\left[x^2[n] + \cancel{x^2[-n]} + x^2[n] - \cancel{x^2[-n]}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[2x^2[n]\right] = x^2[n]$ حکم ثابت شد

ب) $f(t)\,\dot{\delta}(t) = f(0)\,\dot{\delta}(t) - f'(0)\,\delta(t)$

$$f(t)\,\dot{\delta}(t) = f(0)\,\dot{\delta}(t) - f'(0)\,\delta(t)$$

از آنجا که $f(t)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t) \Leftarrow$

$$f(0)\,\dot{\delta}(t) = f(0)\,\dot{\delta}(t) - f'(0)\,\delta(t)$$

$$f(0)\,\dot{\delta}(t) = f(0)\,\dot{\delta}(t) + f'(0)\,\delta(t) = \left(f(0)\,\delta(t)\right)'$$

انتگرال از طرفین: $f(0)\,\delta(t) = f(0)\,\delta(t)$