دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

پاسخ‌نامه تمرین سری دوم درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

(فصل دوم – سیستم‌های LTI)

۱) برای هر جفت از سیگنال های x و h ، کانولوشن آنها را محاسبه کنید.

پاسخ:

می دانیم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

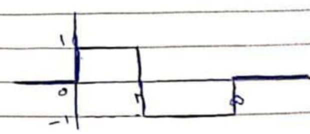
a) $x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$

$h(t) = e^{2t}u(1-t)$

پاسخ:

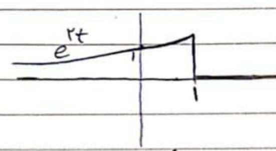
$$x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5)$$

$$= \begin{cases} t < 0 & \Rightarrow x(t) = 0 \\ 0 < t < 2 & \Rightarrow x(t) = 1 \\ 2 < t < 5 & \Rightarrow x(t) = -1 \\ t > 5 & \Rightarrow x(t) = 0 \end{cases}$$

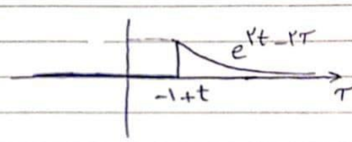


$$h(t) = e^{2t}u(1-t)$$

$$= \begin{cases} t < 1 : & e^{2t} \\ t > 1 : & 0 \end{cases}$$



$h(t-\tau)$



$x(t) * h(t) =$ ① $t-1 > 5 \Rightarrow y(t) = 0$

② $2 \leqslant t-1 \leqslant 5 \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{5} -e^{2t-2\tau}\, d\tau$

③ $0 \leqslant t-1 \leqslant 2 \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{2} e^{2t-2\tau}\, d\tau + \int_{2}^{5} -e^{-2t-2\tau}\, d\tau$

$$۴ \quad t-۱ \leqslant ۰ \Rightarrow y(t) = \int_{۰}^{۲} e^{۲t-۲\tau} d\tau + \int_{۲}^{۵} -e^{۲t-۲\tau} d\tau$$

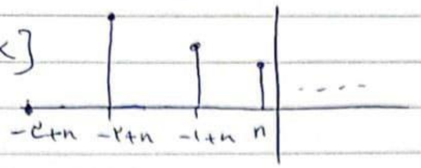
$$y(t) = \begin{cases} t \leqslant ۱ \Rightarrow y(t) = \int_{۰}^{۲} e^{۲t-۲\tau} d\tau + \int_{۲}^{۵} -e^{۲t-۲\tau} d\tau \\ ۱ \leqslant t \leqslant ۳ \Rightarrow y(t) = \int_{t-۱}^{۲} e^{۲t-۲\tau} d\tau + \int_{۲}^{۵} -e^{-۲t-۲\tau} d\tau \\ ۳ \leqslant t \leqslant ۶ \Rightarrow y(t) = \int_{t-۱}^{۵} -e^{۲t-۲\tau} d\tau \\ t > ۶ \Rightarrow y(t) = ۰ \end{cases}$$

b) $x[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n-4]$
$h[n] = 4^n u[2-n]$

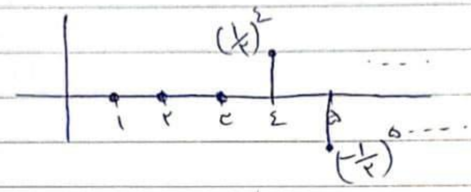
پاسخ:

$h[n] = ۴^{n}\, u[۲-n]$

$h[n-k]$



$x[n] =$



① $n-۲ \leq ۴ \Rightarrow n \leq ۶ \Rightarrow$

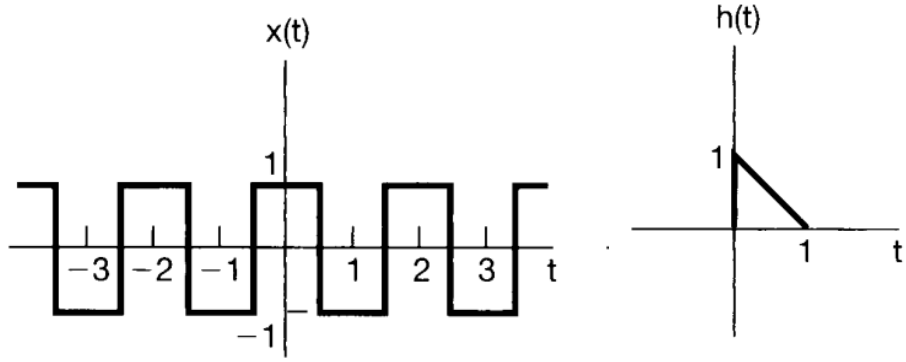
$$y[n] = ۴^{n}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-۱}{۸}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{۳}\left(\frac{-۱}{۸}\right)^{k} \right\}$$

② $n-۲ > ۴ \Rightarrow n > ۶ \Rightarrow$

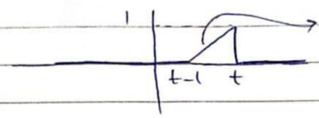
$$y[n] = ۴^{n}\left\{ \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-۱}{۸}\right)^{k} - \sum_{k=0}^{n-۱}\left(\frac{-۱}{۸}\right)^{k} \right\}$$

داریم $\Rightarrow y[n] = \begin{cases} \left(\frac{۸}{۹}\right)\left(\frac{-۱}{۸}\right)^{۴} ۴^{n} & n \leq ۶ \\ \left(\frac{۸}{۹}\right)\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{n} & n > ۶ \end{cases}$

c)

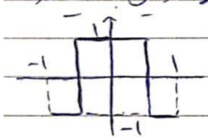


پاسخ:

$h(t-\tau)$ 

معادله خط $= \tau+1-t$

می‌دانیم وقتی $x(t)$ متناوب است پس $y(t)$ هم متناوب خواهد بود. در این جا یک دوره



تناوب $x(t)$ را بررسی می‌کنیم

$$① \begin{cases} -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} < t-1 < -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{-\frac{1}{2}} (t-\tau-1)\, d\tau + \int_{-\frac{1}{2}}^{t} (\tau+1-t)\, d\tau$$

$$② \begin{cases} \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} < t-1 < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y(t) = \int_{t-1}^{\frac{1}{2}} (\tau+1-t)\, d\tau + \int_{\frac{1}{2}}^{t} (t-\tau-1)\, d\tau$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} + t - t^2 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ t^2 - 3t + \frac{7}{4} & \frac{1}{2} < t < \frac{3}{2} \end{cases}$$

d) $x[n] = \frac{1}{4^n}$

$h[n] = \delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n]$

پاسخ:

$$x[n] * h[n] = \left(\frac{1}{۴}\right)^n * \left(\delta[n+۲] + \delta[n+1] + \delta[n]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{۴}\right)^n * \delta[n+۲] + \left(\frac{1}{۴}\right)^n * \delta[n+1] + \left(\frac{1}{۴}\right)^n * \delta[n]$$

$$= \left(\frac{1}{۴}\right)^{n+۲} + \left(\frac{1}{۴}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{۴}\right)^n$$

e) $x(t) = e^{-t}u(t+1)$
$h(t) = e^{2t}u(-t)$

پاسخ:

From the definition of the convolution, we have the following expression for the output y(t):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

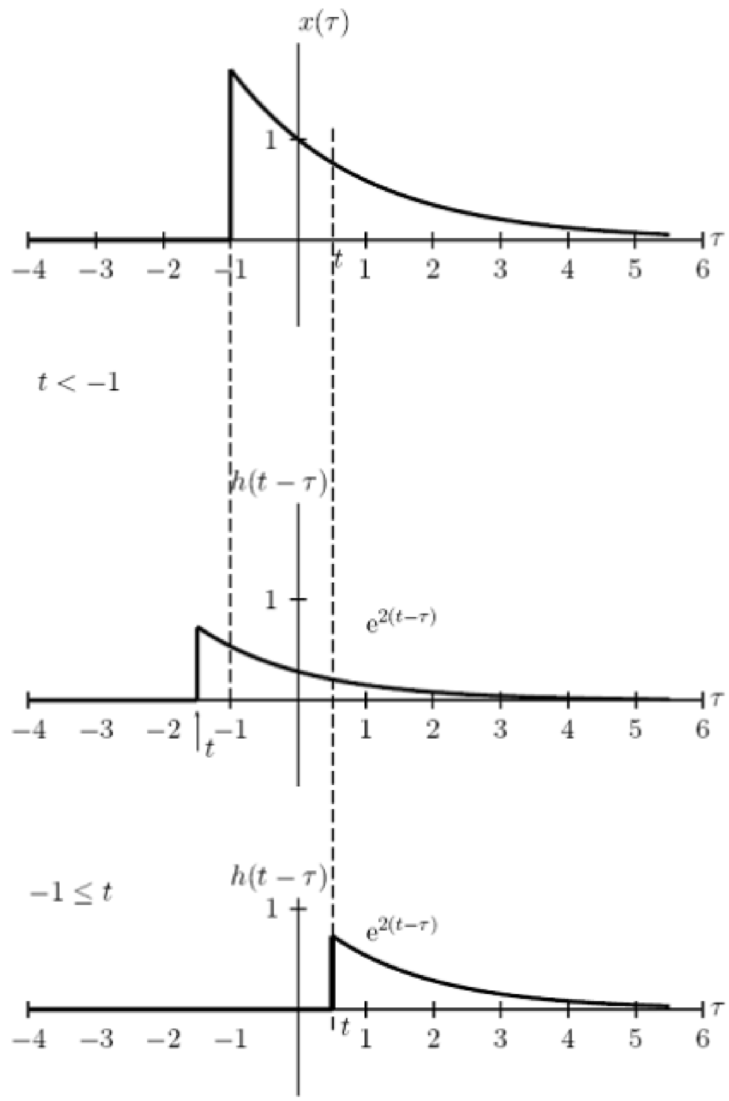
Based on the given x(t) and h(t), we can break the integration up into 2 regions as illustrated in the diagram. The ranges are t<−1 and t→−1.

For the range t < −1, the region where $h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ is non-zero is from $-1 \to \infty$. So, the expression for y(t) is given by:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-1}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-1}^{\infty} e^{2(t-\tau)}e^{-\tau}d\tau \\ &= e^{2t}\int_{-1}^{\infty} e^{-3\tau}d\tau = e^{2t}\left[-\frac{1}{3}e^{-3\tau}\right]_{-1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{3}e^{2t+3} \end{aligned}$$

For the range t > −1, the region where $h(t-\tau)x(\tau)d\tau$ is non-zero is from $\tau > t$. So, the expression for y(t) is given by:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{t}^{\infty} e^{2(t-\tau)}e^{-\tau}d\tau \\ &= e^{2t}\int_{t}^{\infty} e^{-3\tau}d\tau = e^{2t}\left[-\frac{1}{3}e^{-3\tau}\right]_{t}^{\infty} \\ &= e^{2t}\left[-\frac{1}{3}e^{-3t}\right] \\ &= \frac{1}{3}e^{-t} \end{aligned}$$



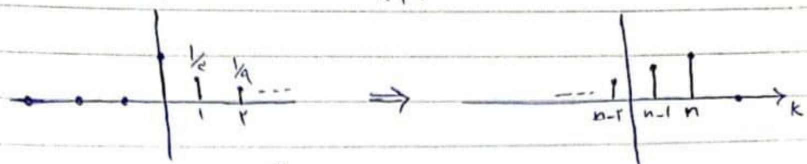
$x(\tau)$
$t < -1$
$h(t-\tau)$
$e^{2(t-\tau)}$
$-1 \le t$
$h(t-\tau)$
$e^{2(t-\tau)}$

f) $x[n] = 3^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

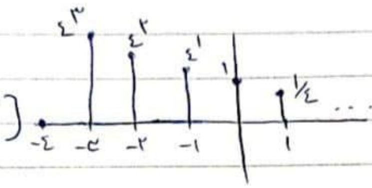
$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$

پاسخ:

$$y_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$$



$\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$



$$y_1[n] = \begin{cases} n < -4 & \Rightarrow y_1[n] = 0 \\ n \geq -4 & \Rightarrow y_1[n] = -3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3(256)\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

$$y_2[n] = 3^n u[-n-1] * \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n+3]$$

مشابه راه‌حل بالا داریم:

$$y_2[n] = \begin{cases} n < -4 & \Rightarrow y_2[n] = \left(\frac{12^4}{11}\right) 3^n \\ n \geq -3 & \Rightarrow y_2[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{11}\right) \end{cases}$$

$y[n] = y_1[n] + y_2[n]$: پس با استفاده از distributive property داریم:

$$y[n] = \begin{cases} \left(\frac{12^4}{11}\right) 3^n & n < -4 \\ \left(\frac{1}{11}\right) 4^4 & n = -4 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1}{11}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n + 3(256)\left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq -3 \end{cases}$$

g) $x(t) = e^{-t}u(t)$

$h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t- \ 1) + 0.3\delta(t-2)$

پاسخ:

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

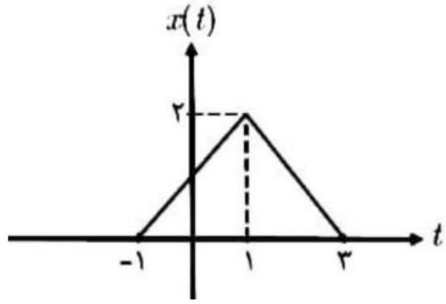
$$h(t) = \delta(t) + ۰٫۵\,\delta(t-۱) + ۰٫۳\,\delta(t-۲)$$

$$x(t) * h(t) = e^{-t}u(t) * \delta(t) + e^{-t}u(t) * ۰٫۵\,\delta(t-۱)$$

$$+ e^{-t}u(t) * ۰٫۳\,\delta(t-۲) =$$

$$= e^{-t}u(t) + \frac{۱}{۲}e^{-t+۱}u(t-۱) + \frac{۳}{۱۰}e^{-t+۲}u(t-۲)$$

۲) پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ برابر با $u(t+2) - u(t-6)$ داده شده است. پاسخ این سیستم وقتی ورودی قسمت زوج سیگنال $x(t)$ باشد، چه خواهد بود؟

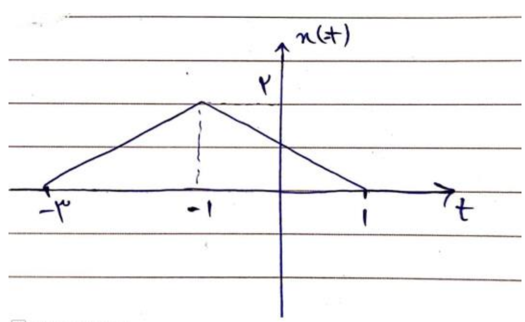


پاسخ:

می دانیم که قسمت زوج سیگنال x(t) از این رابطه بدست می‌آید:

$$Even\{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{۲}$$

با رسم نمودار x(-t) مطابق شکل زیر متوجه می شویم که x(-t) = x(t + 2)



سپس داریم:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t+۲) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t+۲)$$

$$\tfrac{1}{۲}x(t) + \tfrac{1}{۲}x(t+۲) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow \tfrac{1}{۲}y(t) + \tfrac{1}{۲}y(t+۲)$$

پس پاسخ سیستم برابر است با:

$$y_{final}(t) = \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{2}y(t+2) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(u(t+2) - u(t-6) + u(t+4) - u(t-4)\Big)$$

۳) خواص علّی بودن و پایداری سیستم های LTI زیر را که با پاسخ ضربه یا معادله صریح مشخص شده‌اند را تعیین کنید.

پاسخ:

برای بررسی علّی بودن و پایداری شرط های زیر را داریم:

پایداری $\Rightarrow$ if $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \rightarrow$ summable $\rightarrow y[n]$ is bounded

if $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \rightarrow$ integrable $\rightarrow y(t)$ is 〃

علّی بودن $\Rightarrow$ if $h(t) = 0$ for $t < 0$

if $h[n] = 0$ for $n \leq -1$

a) $h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$

پاسخ:

مثال نقض $\quad n = -1 \Rightarrow h[n] = -2 + \frac{100}{101} \neq 0$

علّی نیست

$$h[n] = \begin{cases} n < 0 & \Rightarrow h[n] = (1.01)^n \\ 0 \leq n \leq 1 & \Rightarrow h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n + (1.01)^n \\ n > 1 & \Rightarrow h[n] = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{cases}$$

با توجه به مقادیر بالا نتیجه می‌گیریم که $h[n]$، summable هست پس پایدار است.

b) $h[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

پاسخ:

علّی بودن $\Rightarrow h[n] = \begin{cases} 0 & n<1 \\ n(\frac{1}{3})^n & n\geq 1 \end{cases}$ پس علّی هست.

پایداری $\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{9} + 3\times\frac{1}{27} + \ldots$

چون جملات این دنباله به صفر میل می‌کنه پس مقدار مجموع $|h[k]|$ ما summable است پس پایدار است.

c) $h(t) = e^{-6|t|}$

پاسخ:

$h(t) = e^{-6|t|} = \begin{cases} e^{6t} & t<0 \\ e^{-6t} & t\geq 0 \end{cases}$ پس علّی نیست.

پایداری $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{6\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-6\tau} d\tau$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ پس سیستم پایدار است.

d) $h(t) = te^{-t}u(t)$

پاسخ:

$h(t) = te^{-t}u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ te^{-t} & t\geq 0 \end{cases}$ پس علّی هست.

پایداری $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \int_{0}^{\infty} \tau e^{-\tau} d\tau = 1$

پس پایدار هم هست.

e) $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)u(t-\tau)x(\tau)\, d\tau$

پاسخ:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)u(t-\tau)x(\tau)\, d\tau$$

$$\Rightarrow h(t) = t\,u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t\geq 0 \end{cases}$$ پس علّی هست

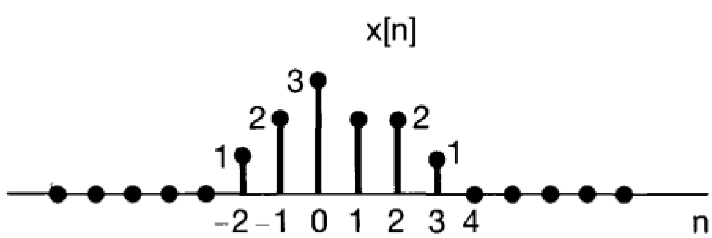
پایداری $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau = \int_{0}^{\infty} \tau\, d\tau = \frac{\tau^2}{۲} \not< \infty$

پس پایدار نیست.

۴) سیستم *LTI* زیر را که *initially at rest* است و با معادله‌ی دیفرانسیلی زیر تعریف می‌شود، در نظربگیرید.

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2]$$

پاسخ این سیستم را به ورودی زیر با حل معادله دیفرانسیلی به صورت بازگشتی بدست آورید.



پاسخ:

می دانیم:

initially at rest $\Rightarrow y[n] = 0 \qquad n < -۲$

حل رابطه به صورت بازگشتی به این صورت می باشد:

$$y[n] = x[n] + 2x[n-2] - 2y[n-1]$$

$$y[-2] = x[-2] + 2x[-4] - 2y[-3] = 1$$

$$y[-1] = x[-1] + 2x[-3] - 2y[-2] = 0$$

$$y[0] = x[0] + 2x[-2] - 2y[-1] = 5$$

$$y[1] = x[1] + 2x[-1] - 2y[0] = -4$$

$$y[2] = x[2] + 2x[0] - 2y[1] = 16$$

$$y[3] = x[3] + 2x[1] - 2y[2] = -27$$

$$y[4] = x[4] + 2x[2] - 2y[3] = 58$$

$$y[5] = x[5] + 2x[3] - 2y[4] = -114$$

$$y[6] = x[6] + 2x[4] - 2y[5] = 228$$

$$\vdots$$

در نتیجه داریم:

$$y[n] = -2y[n-1] \qquad n \geqslant 6$$

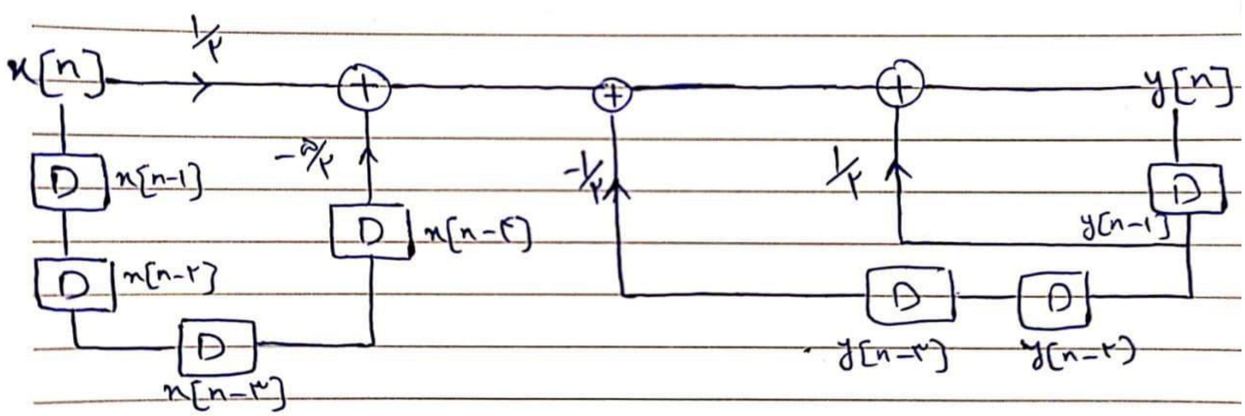
۵) برای معادله دیفرانسیلی زیر block diagram مناسبی رسم کنید.

$$2y[n] - y[n-1] + y[n-3] = x[n] - 5x[n-4]$$

پاسخ:

با توجه به قوانین رسم block diagram گفته شده در اسلایدها، داریم:

$$y[n] = \frac{۱}{۲} y[n-۱] - \frac{۱}{۲} y[n-۳] + \frac{۱}{۲} x[n] - \frac{۵}{۲} x[n-۴]$$



۶) حافظه‌دار بودن یا نبودن سیستم های LTI زیر را که پاسخ ضربه آنها داده شده است، مشخص و اثبات کنید.

پاسخ:

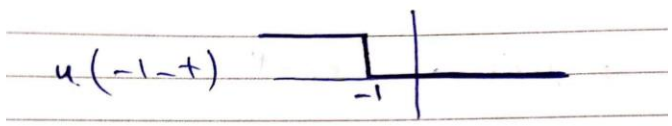
می دانیم که اگر شرط زیر در سیستم برقرار باشد، آن سیستم بدون حافظه است:

$$h[n] = 0 \quad for \quad n \neq 0$$

$$h(t) = 0 \quad for \quad t \neq 0$$

a) $h(t) = e^{3t}u(-1-t)$

پاسخ:



$$h(t) = \begin{cases} e^{3t} & t < -1 \\ 0 & t > -1 \end{cases}$$

پس سیستم حافظه‌دار است.

b) $h(t) = sin(5\pi t)u(t)$

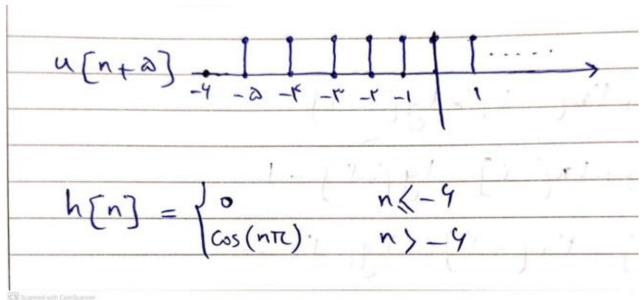
پاسخ:

$$h(t) = \begin{cases} \sin(5\pi t) & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

پس سیستم حافظه‌دار است.

c) $h[n] = cos(n\pi)u[n+5]$

پاسخ:



پس سیستم حافظه‌دار است.

۷) با توجه به پاسخ ضربه‌ی داده شده، برای هر مورد پاسخ پله را بدست آورید.

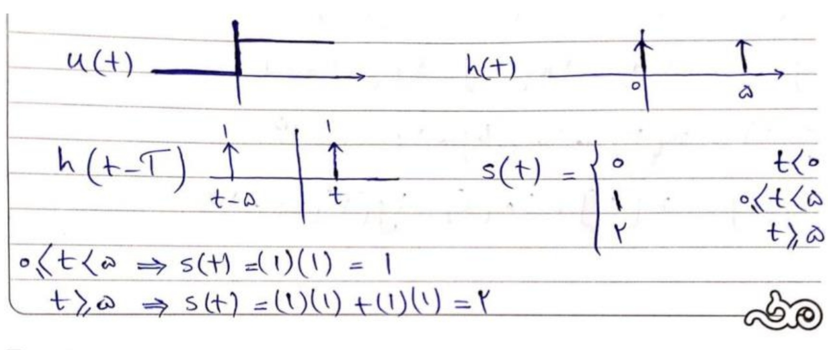
پاسخ:

می دانیم که پاسخ پله برابر است با :

$$S(t) = u(t) * h(t)$$

a) $h(t) = \delta(t-5) + \delta(t)$

پاسخ:

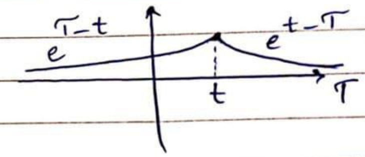


در نتیجه $s(t) = u(t) + u(t-5)$ خواهد بود.

b) $h(t) = e^{-|t|}$

پاسخ:

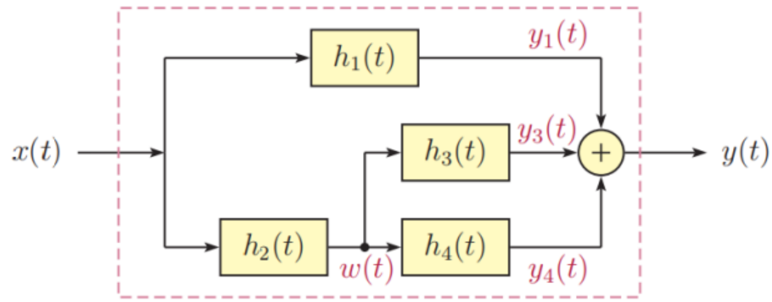
$h(t) = e^{-|t|}$ $\qquad h(t-\tau)$



$$s(t) \Rightarrow \begin{cases} t<0 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{t-\tau}\,d\tau = -e^{t-\tau}\Big|_0^{\infty} = e^{t} \\ t>0 \Rightarrow \int_0^{t} e^{\tau-t}\,d\tau + \int_t^{\infty} e^{t-\tau}\,d\tau = \text{۲} - e^{-t} \\ \qquad = \text{۲} - e^{-t} \end{cases}$$

$$s(t) = e^{t}u(-t) + (\text{۲} - e^{-t})u(t)$$

۸) سیستم CTLTI زیر را در نظر بگیرید.



اطلاعات زیر در رابطه با پاسخ ضربه این سیستم موجود است:

$$h_1(t) = e^{-t}u(t)$$

$$h_2(t) = h_3(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$h_4(t) = \delta(t-1)$$

الف) پاسخ ضربه h_{eq} کل سیستم معادل را بدست آورید.

پاسخ:

مطابق روابطی که برای دو سیستم موازی یا سری داشتیم، در اینجا داریم:

$$h_{eq} = h_1(t) + h_2(t) * \left(h_3(t) + h_4(t)\right)$$

$$= h_1(t) + h_2(t) * h_3(t) + h_2(t) * h_4(t)$$

$$= e^{-t}u(t) + \left(\left(u(t) - u(t-1)\right) * \left(u(t) - u(t-1)\right)\right) +$$

$$+ \left(u(t) - u(t-1)\right) * \delta(t-1)$$

از distributive property استفاده میکنیم

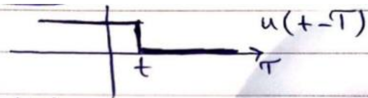
$$h_{eq} = e^{-t}u(t) + tu(t) - 2(t-1)u(t-1) + (t-2)u(t-2)$$

$$+ u(t-1) - u(t-2)$$

$$h_{eq} = (e^{-t} + t)u(t) + (3-2t)u(t-1) + (t-3)u(t-2)$$

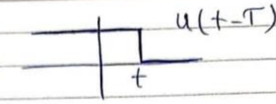
نکات تکمیلی:

$u(t) * u(t) \Rightarrow$

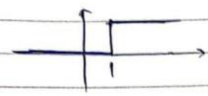


$$\begin{cases} t<0 \Rightarrow u(t)*u(t)=0 \\ t>0 \Rightarrow u(t)*u(t) = (1)(t) = t = \int_0^t 1\, d\tau = t \end{cases}$$

$u(t) * u(t-1) \Rightarrow$



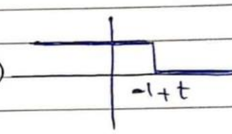
$u(t-1)$



$$\begin{cases} t<1 \Rightarrow u(t)*u(t-1) = 0 \\ t>1 \Rightarrow u(t)*u(t-1) = \int_1^t 1\, d\tau \\ \qquad = t-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow u(t) * u(t-1) = (t-1)\, u(t-1)$

$u(t-1) * u(t-1)$ $\qquad u(t-\tau+1)$



$$\begin{cases} t-1<1 \Rightarrow 0 \\ t-1>1 \Rightarrow \int_1^{t-1} 1\, d\tau = t-۲ \end{cases}$$

$\Rightarrow u(t-1) * u(t-1) = (t-۲)\, u(t-۲)$

$u(t) * \delta(t-1) = u(t-1)$

$u(t-1) * \delta(t-1) = u(t-۲)$

ب) فرض کنید سیگنال ورودی $x(t) = u(t)$ باشد، سیگنال‌های $\omega(t)$ و $y_1(t)$ و $y_3(t)$ و $y_4(t)$ را بدست آورید.

پاسخ:

می‌دانیم ⇐

$$\omega(t) = x(t) * h_2(t)$$

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

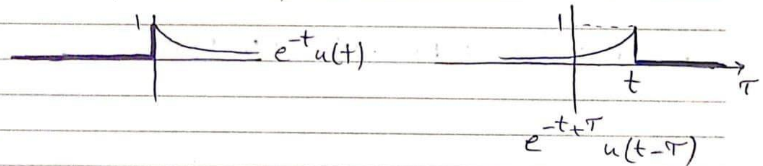
$$y_3(t) = \omega(t) * h_3(t)$$

$$y_4(t) = \omega(t) * h_4(t)$$

$$\omega(t) = x(t) * h_2(t) = u(t) * h_2(t) = u(t) * \left(u(t) - u(t-1)\right)$$

$$= \left(u(t) * u(t)\right) - \left(u(t) * u(t-1)\right) = t\,u(t) - (t-1)\,u(t-1)$$

$$y_1(t) = u(t) * e^{-t}u(t) =$$



$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_0^t e^{-t+\tau}\, d\tau = e^{-t+\tau}\Big|_0^t = 1 - e^{-t} & t>0 \end{cases}$$

$$y_3(t) = \big(tu(t) - (t-1)u(t-1)\big) * \big(u(t) - u(t-1)\big)$$

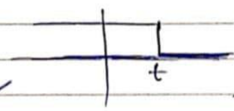
$$= tu(t) * u(t) - tu(t) * u(t-1) - u(t) * (t-1)u(t-1)$$

$$+ \big((t-1)u(t-1)\big) * u(t-1)$$

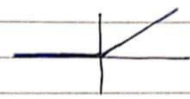
$$= u(t) * u(t) * u(t) - u(t) * u(t) * u(t-1) - u(t) * u(t) *$$

$$u(t-1) + u(t) * u(t-1) * u(t-1)$$

$tu(t) * u(t) \Rightarrow$



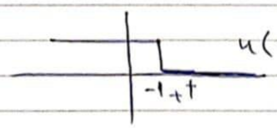
$tu(t)$



$$\begin{cases} t<0 \Rightarrow 0 \\ t>0 \Rightarrow \int_0^t \tau\, d\tau = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow tu(t) * u(t) = \frac{t^2}{2} u(t)$$

$tu(t) * u(t-1)$



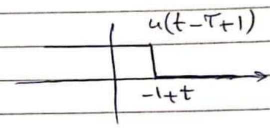
$$\begin{cases} t-1<0 \Rightarrow 0 \\ t-1>0 \Rightarrow \int_0^{t-1} \tau\, d\tau = \frac{(t-1)^2}{2} \end{cases}$$

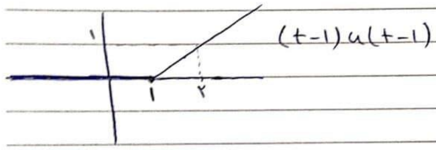
$$tu(t) * u(t-1) = \frac{(t-1)^2}{2} u(t-1)$$

می‌دانیم $\Rightarrow u(t)*(t-1)u(t-1) = u(t)*u(t)*u(t-1)$

$$= tu(t)*u(t-1)$$

$$u(t-1)*((t-1)u(t-1))$$





$$\begin{cases} t-1<1 \Rightarrow 0 \\ t-1>1 \Rightarrow \int_{1}^{t-1}(\tau-1)\,d\tau = \frac{(t-2)^2}{2} \end{cases}$$

$$u(t-1)*((t-1)u(t-1)) = \frac{(t-2)^2}{2}u(t-2)$$

$$\Longrightarrow y_2(t) = \frac{t^2}{2}u(t) - 2\frac{(t-1)^2}{2}u(t-1) + \frac{(t-2)^2}{2}u(t-2)$$

$$y_4(t) = (tu(t)-(t-1)u(t-1))*\delta(t-1)$$

$$=(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)$$