Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Курсовая работа

**Решение задачи Коши для ОДУ 1 порядка методами Рунге-Кутты**

Метод Кутты-Мерсона (5-этапный 4 порядка)

Сравнение работы метода с методом Адамса-Башфорта 4-го

порядка

Выполнил студент гр. 5030101/20001 Зайдиев А.И.

Преподаватель: Козлов К.Н.

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

[Формулировка задачи и ее формализация 3](#_Toc181726008)

[Алгоритм метода и условия применимости 3](#_Toc181726009)

[Алгоритм метода 3](#_Toc181726010)

[Условия применимости 3](#_Toc181726011)

[Тестовый пример 5](#_Toc181726012)

[Модульная структура программы 7](#_Toc181726013)

[Исследование метода 7](#_Toc181726014)

[Сравнение метода Рунге-Кутты и Адамса-Башфорта 10](#_Toc181726015)

[Выводы 10](#_Toc181726016)

# Формулировка задачи и ее формализация

Задача заключается в исследовании метода Кутты-Мерсона (5-ти этапный 4 порядка) решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка на отрезке [1,3]:

Для исследования требуется построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке, график ошибки на отрезке для этих решений, а также график изменения шага по отрезку и зависимости фактической погрешности от заданной точности.

# Алгоритм метода и условия применимости

## Алгоритм метода

Представим решение задачи Коши на промежутке [𝑎, 𝑏] в виде:

(\*) , h =

На каждом i-ом шаге вычисляем (\*), после этого подсчитываем R = – условие окончания итерационного процесса. Если не выполнено, уменьшаем шаг ℎ вдвое.

## Условия применимости

Для выполнения алгоритма нужно потребовать непрерывность функции 𝑓(𝑥, 𝑦)и ее производной 𝑓′(𝑥, 𝑦). То есть, 𝑓(𝑥, 𝑦) ∈ С(1)[𝑎, 𝑏]. Также требуется условие

|𝜀𝑘| ≤ 𝐷ℎ𝑠 0, где 𝐷 = 𝑐(𝑏 − 𝑎)𝑒𝐿(𝑏−𝑎), |𝜀𝑘| - погрешность метода, s – его порядок.

# Тестовый примерИзображение выглядит как текст, рукописный текст, бумага, Бумажное изделие Автоматически созданное описание

# Модульная структура программы

**double f(double x, double y)**: Возвращает значение функции 𝑥(𝑦’ − 𝑦) = 𝑒𝑥.

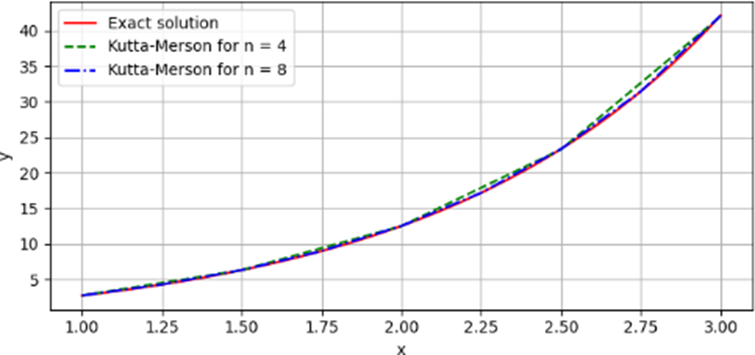
**double exact(double x)**: Возвращает точное решение 𝑦 = 𝑒𝑥(ln(|𝑥|) + 1)

**double kuttaMerson(double a, double y\_0, double b, int\* n, double (\*f)(double x, double y), double epsilon)**: Возвращает значение ошибки, на котором достигается заданная точность по методу Кутты-Мерсона на интервале [a, b].

# Исследование метода

Для исследования метода будем использовать библиотеку matpolib языка Python.

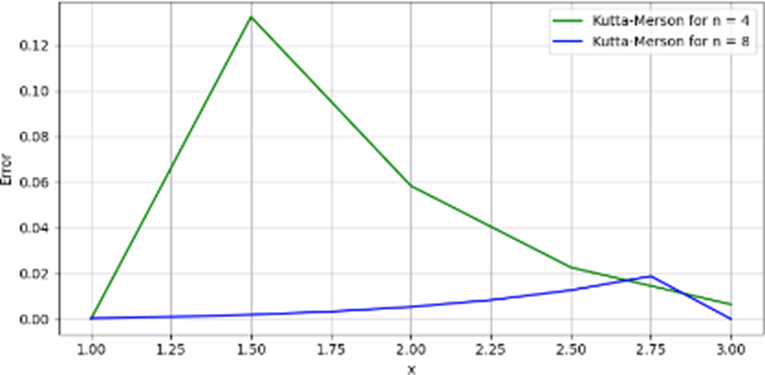
На отрезке [1,3] построим график точного и численного решения для двух фиксированных значений узлов 𝑛 = 4(ℎ = 0.5) и 𝑛 = 8(ℎ = 0.25)



*Рисунок 1. Точное и численные решения для двух фиксированных значений узлов*

Как видно из графика, точность решения при большем разбиении (𝑛 = 8(ℎ = 0.25)) выше.

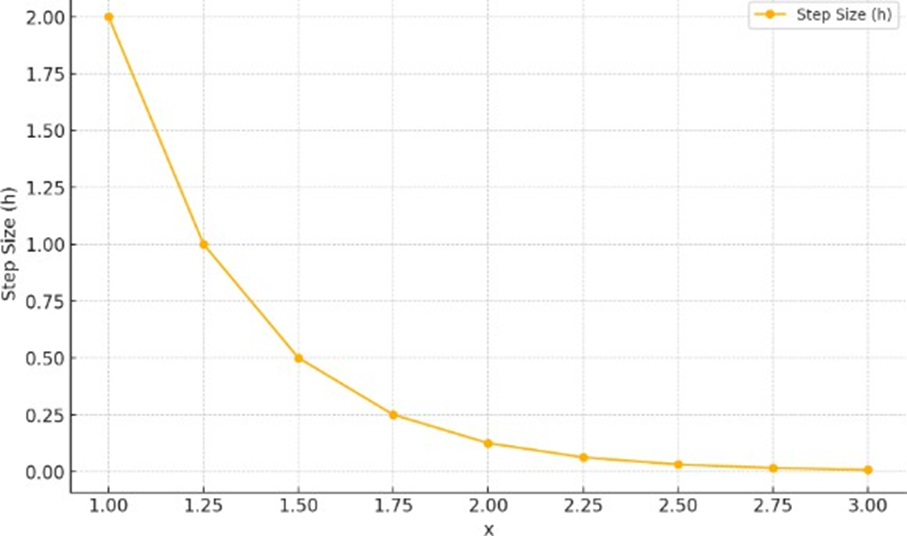
Построим график ошибки для этих решений:



*Рисунок 2. График ошибки численных решений для дув фиксированных значений узлов*

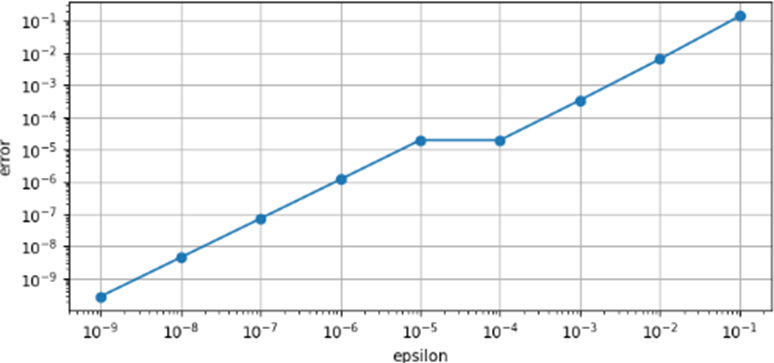
Как видно из графика, ошибка для 𝑛 = 4(ℎ = 0.5) больше почти на всем отрезке.

Построим график изменения шага по отрезку:



*Рисунок 3. Изменение шага по отрезку*

Построим график зависимости фактической ошибки |𝑦 − 𝑦∗| от заданной точности ε:



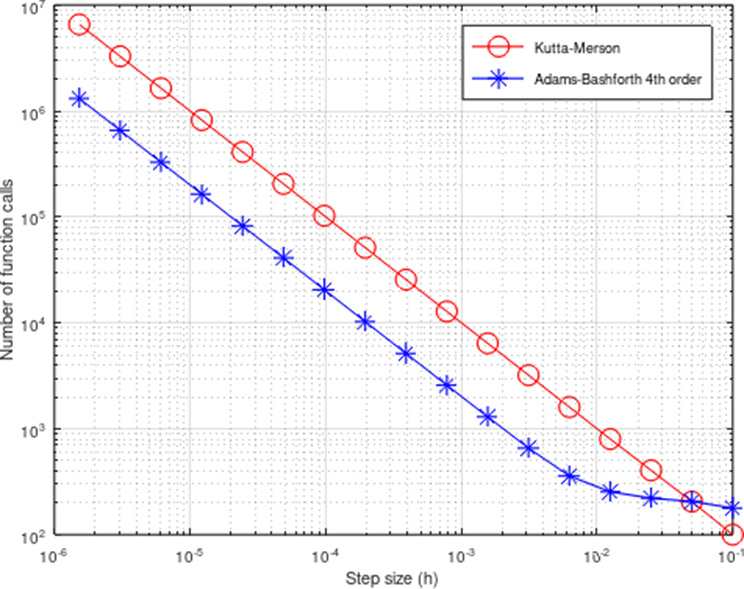
*Рисунок 4. Зависимость фактической ошибки от заданной точности*

По графику видно, что зависимость линейная: при уменьшении точности в 108 раз ошибка возрастает примерно в 108 раз.

# 

# Сравнение метода Рунге-Кутты и Адамса-Башфорта

Для сравнения метода Адамса-Башфорта и метода Рунге-Кутты построим график зависимости количества вызовов правой части от величины шага.



Как видно из графика, метод Адамса-Башфорта 4-го порядка имеет лучшие показатели в контексте количества вызовов правой части. Так, при значении шага порядка 105 количество вызовов функций у него становится меньше на порядок по сравнению с методом Кутты-Мерсона. Можно сделать вывод, что метод Адамса-Башфорта является более эффективным методом для решения практических задач.

# Выводы

В ходе исследования было выявлено, что модификация Кутты-Мерсона является достаточно эффективным и простым способом решения задачи Коши ОДУ 1-го порядка, метод гарантированно сходится к заданной точности, а также является достаточно точным благодаря линейному возрастанию погрешности при увеличении точности. Тем не менее, метод имеет большее количество вызовов функции по сравнению с методом Адамса- Башфорта 4-го порядка, что оспаривает эффективность метода.