Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Отчет по лабораторной работе № 14

**Решение краевой задачи для ОДУ 2-го порядка**

**(Метод конечных разностей 1-го порядка)**

Выполнил студент гр. 5030101/20001 Зайдиев А.И.

Преподаватель: Козлов К.Н.

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

[Формулировка задачи и ее формализация 3](#_Toc181724135)

[Алгоритм метода и условия применимости 3](#_Toc181724136)

[Алгоритм метода 3](#_Toc181724137)

[Условия применимости 4](#_Toc181724138)

[Тестовый пример 5](#_Toc181724139)

[Модульная структура программы 7](#_Toc181724140)

[Исследование метода 7](#_Toc181724141)

[Выводы 11](#_Toc181724142)

# Формулировка задачи и ее формализация

Задача заключается в исследовании метода конечных разностей 1-го порядка краевой задачи для ОДУ 2-го порядка:

на отрезке (0, 1). Граничные условия:

Для исследования метода требуется построить графики точного и численных решений для двух фиксированных значений шага на отрезке, график ошибки на отрезке для этих решений. Построить решение на сетке со сгущением в середине отрезка, построить график ошибки по отрезку для этого решения, построить график зависимости фактической погрешности от заданной точности.

# Алгоритм метода и условия применимости

## Алгоритм метода

На отрезке (0, 1) построим равномерную сетку , . Для решение ОДУ нужно приблизить значение производных следующим образом:

, ,

, *(1)*

Граничные условия приобретут вид:

*, (2)*

Из *(1) и* *(2)* получаем СЛАУ, состоящую из n+1 уравнений и n+1 неизвестных, матрица которой является трехдиагональной, и решаем ее методом прогонки. Алгоритм метода прогонки (метода Томаса):

Прямой ход прогонки состоит в вычислении прогоночных коэффициентов и , где i – номер строки матрицы. Этот этап выполняется при строго по возрастанию значения i. В первой строке матрицы используются формулы:

Для строк используются рекуррентные формулы:

При прямая прогонка завершается вычислением:

После этого производится обратная прогонка, в которой происходит вычисление неизвестных . Этот этап выполняется при строго по

убыванию значения .

В последней строке матрицы :

.

Для всех остальных строк при применяется формула:

## Условия применимости

Для работы метода требуется выполнение условия Липшица:

, где константа Липшица. Требуется непрерывность функции и ее первых двух производных:

.

Также требуется выполнение теоремы: :

# Тестовый пример

Изображение выглядит как текст, рукописный текст, бумага, чернила

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как текст, рукописный текст, бумага, Бумажное изделие

Автоматически созданное описание

# Модульная структура программы

**p(x), q(x), r(x), f(x)–** возвращают значения коэффициентных функций и значение точного решения в точке *x.*

**get\_grid (a, b, n) –** генерирует равномерную сетку на и возвращает массив, содержащий узловые точки сетки.

**system\_equations (h, n, grid)** – строит матрицу коэффициентов для системы линейных уравнений на основе заданной сетки и шага *h.* Возвращает указатель на матрицу коэффициентов.

**thomas\_algorithm (n, matrix) –** решает трёхдиагональную СЛАУ с использованием метода прогонки**.**

**solve\_with\_accuracy(a, b, eps)** - увеличивает число узлов до тех пор, пока максимальная разность между двумя последовательными решениями не станет меньше ϵ

# Исследование метода

Для исследования метода будем использовать пакет средств MATLAB.

На отрезке построим график точного и численных решений для фиксированного числа узлов: и

*Изображение выглядит как линия, диаграмма, График, снимок экрана

Автоматически созданное описание*

*Рис.1: Точное и численные решения для фиксированного числа узлов*

По графику видно, что решение для 10 узлов лучше приближает точное.

На отрезке построим график ошибки полученных численных решений:

Изображение выглядит как линия, диаграмма, График, снимок экрана

Автоматически созданное описание

*Рис. 2: Погрешность численных решений на отрезке*

По графику видно, что для решения погрешность меньше. Также можно наблюдать, что оба решения имеют ошибку порядка , что говорит о совпадении с теоретическим предположением.

На отрезке построим график решения на неравномерной сетке :

*Изображение выглядит как линия, График, диаграмма, текст

Автоматически созданное описание*

*Рис. 3: Решение на неравномерной сетке*

По графику видно, что решение не совпадает с точным, это может быть связано, с несовместимостью формул для неравномерных сеток.

Для решения задачи с заданной точностью ϵ используется метод, при котором последовательно увеличивается число узлов сетки. Для каждого увеличения числа узлов решается система уравнений, и оценка точности производится по разности между решениями, полученными на двух последовательных шагах с разными числами узлов.

Пусть— приближенное решение на текущем шаге с шагом h =

Пусть— приближенное решение на шаге с удвоенным количеством узлов n

Оценка точности производится по разности между решениями:  
max\_error = , где - точки сетки

Изображение выглядит как линия, График, диаграмма, текст

Автоматически созданное описание

Рис. 4: Ошибка численного решения на неравномерной сетке

Как видно из графика, погрешность решения достаточно высокая, что еще раз подтверждает нестабильность метода при работе с неравномерными сетками.

Построим зависимость фактической ошибки где точное решение, от заданной точности ε. На каждой итерации будем увеличивать количество узлов в 2 раза и находить максимальную погрешность решения, сравнивая ее со значением ε:

*Изображение выглядит как линия, График, диаграмма, текст

Автоматически созданное описание*

*Рис.5: Зависимость фактической ошибки от заданной точности*

По графику видно, что метод достигает заданной точности и успешно сходиться, вплоть до , дальнейшее уточнение не обеспечивает сходимость метода.

# Выводы

В ходе исследования было выявлено, что метод конечных разностей 1-го порядка является простым в реализации, но достаточно неэффективным в рамках точности, а также неточным при работе с неравномерной сеткой. Однако для равномерных сеток метод гарантирует свою теоретическую точность, имея ошибку порядка . При поиске решения с заданной точностью метод сходиться вплоть до

что является не лучшим результатом.Исходя из этого, при практическом использовании МКР 2-го порядка может быть более предпочтительным, несмотря на более сложные вычисления.