《概率论与数理统计》模拟试卷

一、填空题

1．三只考签由三个学生轮流放回抽取一次，每次取一只，设 A_i 表示第 i 只考签被抽到 $(i=1,2,3)$，则“至少有一只考签没有被抽到”这一事件可表示为______________.

2．设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\bigcup B)=0.6$，则 $P(A\overline{B})=$__________.

3．已知一袋中装有10个球，其中3个黑球，7个白球，先后两次不放回从袋中各取一球，则第二次取到的是黑球的概率为__________.

4．已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 0.4, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$_______.

5．设随机变量 $X\sim N(\mu,25)$，且 $P\{X>5\}=0.5$，则 $\mu=$______________.

6．设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}Ax, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则常数 $A=$________.

7．设随机变量 X 服从参数为 n,p 的二项分布，且 $n=16$，$D(X)=4$，则 $p=$__________.

8．设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	0	1	2
0	0.1	0.1	0.1
1	0.1	0.2	0.1
2	0.1	0.1	0.1

则 $P\{X=Y\}=$____________________.

9．设随机变量 X 服从参数为1的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$______________.

10．设随机变量 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(-1,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则 $E[(X-Y)^2]=$________.

11．已知 $D(X)=1$，$D(Y)=9$，$\rho_{XY}=0.5$，则 $D(3X-2Y+1)=$___________.

12．设 X 和 Y 的方差 DX 和 DY 都存在，且满足 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$________.

13．设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自总体 $X\quad N(0,1)$ 的简单随机样本，则统计量 $X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2$ 服从自由度 $n=$___________的 χ^2 分布.

14．设来自总体 $X\sim N(\mu,1)$ 的容量为16的样本的样本均值 $\overline{x}=5.11$，其未知参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(4.62,5.60)$，则 $\alpha=$__________.

15．设正态总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则检验假设 $H_0:\mu=0,H_1:\mu\ne 0$ 的 t 检验方法使用统计量 $t=$_____________.

二、计算题

1．设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 2-x, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求(1) $P\{X\ge 1\}$；(2)分布函数 $F(x)$.

2．设随机变量 X 的概率密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，(1)求 $Y=e^X$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$；(2)求 Y 的数学期望 $E(Y)$.

3．设 X,Y 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}x+y, 0<x<1, 0<y<1\\ 0, \text{其他}\end{cases}$，(1)求 X 和 Y 的边缘概率密度函数

$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；⑵判断 X 与 Y 的是否独立?

4．将两封信随意投入3个邮筒，设 X 和 Y 分别表示投入第1和2号邮筒中信的数目，⑴求 X 和 Y 的联合分布律；⑵求 X 与 Y 的协方差 $Cov(X,Y)$．

5．设总体 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta^2},0<x<\theta\\0,\ 其他\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本．⑴求未知参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；⑵判断所求的估计量 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量．

6．设总体 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}(-\infty<x<+\infty)$，其中 $\theta>0$ 为未知参数，$-6,-3,-1,2,4,7,8,9$ 为来自总体的 X 样本值，求 θ 的极大似然估计值．

参考答案

一、填空题

1．$\overline{A_1A_2A_3}$	2．0.3	3．0.3	4．0.6	5．5
6．2	7．0.5	8．0.4	9．$\frac{1}{2e}$	10．6
11．27	12．0	13．10	14．0.05	15．$\frac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$

三、计算下列概率问题

1．解：⑴ $P\{X\ge1\}=1-P\{X<1\}=1-\int_0^1 xdx=0.5$

⑵当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；　当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_0^x xdt=\frac{x^2}{2}$；

当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=\int_0^1 xdx+\int_1^x(2-x)dx=2x-\frac{x^2}{2}-1$；当 $x\ge2$ 时，$F(x)=1$；

所以 $F(x)=\begin{cases}0,\ x<0\\\frac{x^2}{2},0\le x<1\\2x-\frac{x^2}{2}-1,1\le x<2\\1,x\ge2\end{cases}$．

2．解：⑴ $f(x)=\begin{cases}1,&0<x<1,\\0,&其他\end{cases}$　　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；　当 $y\ge0$，时，$F_Y(y)=P\{X\le\ln y\}=F_X(\ln y)$，

$f_Y(y)=F_Y{}'(y)$，于是 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y},&1<y<e\\0,&其他\end{cases}$

⑵ $E(Y)=E(e^X)=\int_0^1 e^x dx=e-1$

3．解：⑴当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1(x+y)dy=x+\frac{1}{2}$；

$\therefore f_X(x)=\begin{cases}x+\frac{1}{2},0<x<1\\0,其他\end{cases}$

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^1(x+y)dx=y+\frac{1}{2}$；

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}y+\frac{1}{2},0<y<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

(2) $\because f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)\therefore X$ 与 Y 不是相互独立的。

4．解：(1) X 和 Y 各自的可能取值均为 $0,1,2$，由古典概型计算得联合分布律

Y \ X	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

(2) $E(X)=0\times4/9+1\times4/9+2\times1/9=2/3$ ， $E(Y)=0\times4/9+1\times4/9+2\times1/9=2/3$

$E(XY)=0\times0\times1/9+0\times1\times2/9+0\times2\times1/9+1\times0\times2/9+1\times1\times2/9+1\times2\times0$

$+2\times0\times1/9+2\times1\times0+2\times2\times0=2/9$，

$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=2/9-4/9=-2/9$

三、求解统计问题（本大题 15 分）

1．解：(1) $\mu=E(X)=\int_0^\theta x\frac{2x}{\theta^2}dx=\frac{2\theta}{3}$，

以 $\bar{X}$ 代替 μ，得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}\bar{X}$．

(2) $E(\hat{\theta})=E(\frac{3}{2}\bar{X})=\frac{3}{2}E(\bar{X})=\frac{3}{2}E(X)=\frac{3}{2}\int_0^\theta x\frac{2x}{\theta^2}dx=\theta$　　　$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量.

2．解：$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{1}{\theta}|x_i|}=\frac{1}{2^n\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n|x_i|}$

$\ln L(\theta)=-n\ln2-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n|x_i|$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n|x_i|=0$

$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|x_i|$　　$\hat{\theta}_{MLE}=\frac{1}{8}(|-6|+|-3|+|-1|+|2|+|4|+|7|+|8|+|9|)=5$

试题一

一 、选择题（10 小题，共 30 分）

1．设 A,B 为随机事件，则 A,B 中至少有一个发生可表示为（　　）.

A．$A\cup B$　　B．$A\cap B$　　C．$A-B$　　D．$\bar{A}\cup\bar{B}$

2．对于任意两个事件 A 与 B，则必有 P(A-B)=（　　）.

A．P(A)-P(AB)　　B．P(A)-P(B)+P(AB)　　C．P(A)-P(B)　　D．P(A)+P(B)

3．设连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}x & 0<x<A\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则常 $A=$（　　）.

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

4. 设$DX = DY = 2$, X 与 Y 相关系数 $\rho_{XY} = \dfrac{1}{2}$, 则 $D(X+Y) =$ (　　).

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 6

5. 某人射击中靶的概率为 $p(0<p<1)$, 则在第 2 次中靶之前已经失败 3 次的概率为(　　).

A. $4p^2(1-p)^3$　　B. $4p(1-p)^3$　　C. $10p^2(1-p)^3$　　D. $p^2(1-p)^3$

6. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X = EX^2\right\} =$ (　　).

A. 1　　B. 2　　C. e^{-1}　　D. $\dfrac{1}{2}e^{-1}$

7. 设总体 $X \sim N(\mu, 9)$，其中 μ 为未知参数，X_1, X_2, X_3 为来自总体的容量为 3 的样本．下面四个关于 μ 的估计中，(　　) 是无偏的.

A. $\dfrac{2}{3}X_1 + \dfrac{1}{3}X_2 + \dfrac{1}{3}X_3$　　B. $\dfrac{1}{4}X_1 + \dfrac{3}{4}X_2 + \dfrac{1}{4}X_3$

C. $\dfrac{1}{6}X_1 + \dfrac{1}{6}X_2 + \dfrac{1}{6}X_3$　　D. $\dfrac{1}{6}X_1 + \dfrac{1}{3}X_2 + \dfrac{1}{2}X_3$

8. 设 $X_1, X_2, \cdots X_8$ 是来自总体 X　$N(0,1)$ 的样本, 则统计量 $X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_8^2$　(　　).

A. $\chi^2(8)$　　B. $t(8)$　　C. $F(1,8)$　　D. $N(0,8)$

9. 设来自总体 $X \sim N(\mu, 1)$ 的容量为 25 的样本，样本均值为 $\bar{X}$, 其未知参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\bar{X} - 0.392, \bar{X} + 0.392)$, 则 $\alpha =$ (　　).

A. 0.05　　B. 0.01　　C. 0.025　　D. 0.1

10. 设总体 X　$N(\mu, \sigma^2), \mu, \sigma^2$ 均未知, $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为来自总体 X 的样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差, 欲检验假设 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2; H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, 则检验统计量为(　　).

A. $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　　B. $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$　　C. $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$　　D. $t = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

二、计算题（7 小题，每题 10 分，共 70 分）

1. 已知男子有 5% 是色盲患者，女子有 2% 是色盲患者，今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者, 问此人是男性的概率是多少?

2. 设离散型随机变量 X 分布律为

X	-1	0	1	4
p_k	0.1	0.2	a	0.4

（1）求常数 a；（2）设 $Y = X^2$, 求 Y 的分布律;

3. 设随机变量 (X, Y) 分布律为

Y \ X	-1	0	1	2
0	0.00	0.05	0.05	0.20
1	0.10	0.10	0.15	0.05
2	0.10	0.15	0.00	0.05

（1）求 X 和 Y 边缘分布律;（2）求 $U = \max(X, Y)$ 的分布律.

4. 设 X 服从 $f(x) = \begin{cases} 4x^3, 0 < x < 1 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$，求 (1) $p\{0.5 < X \le 2\}$; (2) DX

5. 已知随机变量 X 服从 $[0, 2]$ 上的均匀分布，求 $Y = 3X - 1$ 的概率密度函数.

6. 设 X, Y 的联合概率密度函数为: $f(x, y) = \begin{cases} 4xy, 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, \text{其它} \end{cases}$ 求（1）X, Y 的边缘概率密度函数;（2）$COV(X, Y)$

7. 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，其中 $\lambda>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的一组样本，求:（1）λ 的矩估计量；（2）λ 的最大似然估计量。

参考答案

一、选择题：

AABDA, DDAAB

二、计算题：

1 设 B 表示色盲，A_1 表示取自男性，A_2 表示取自女性。

$$(1)P(B)=P(B\mid A_1)P(A_1)+P(B\mid A_2)P(A_2)=0.5\times0.05+0.5\times0.02=0.035\cdots(5')$$

$$(2)P(A_1\mid B)=\frac{0.5\times0.05}{0.035}=\frac{5}{7}\cdots(5')$$

2

$$(1)a=0.3\cdots(5')$$

$$(2)Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 16\\ 0.2 & 0.4 & 0.4\end{pmatrix}\cdots(5')$$

3

$$(1)X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.3\end{pmatrix}\cdots(3')$$

$$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\end{pmatrix}\cdots(2')$$

$$(2)U\quad\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.05 & 0.4 & 0.55\end{pmatrix}\cdots(5')$$

4、

$$(1)p(0.5<X\le2)=\int_{0.5}^{1}4x^3dx=\frac{15}{16}\cdots(5')$$

$$(2)EX=\int_0^1 4x^4dx=\frac{4}{5}\cdots(2');EX^2=\int_0^1 4x^5dx=\frac{2}{3}\cdots(2')$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{2}{75}\cdots(1')$$

5. $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le2\\ 0, & 其它\end{cases}\cdots(1')$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X\le\frac{y+1}{3}\}=F_X(\frac{y+1}{3})\cdots(4')$$

求导得到：$f_Y(y)=f_X(\frac{y+1}{3})\cdot\frac{1}{3}=\begin{cases}\frac{1}{6} & -1\le y\le5\\ 0 & 其他\end{cases}\cdots(5')$

6. （1）$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}\cdots(3')$，$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}\cdots(2')$

（2）$EX=\frac{2}{3}\cdots(1')$，$EY=\frac{2}{3}\cdots(1')$，$E(XY)=\frac{4}{9}\cdots(1')$

$$C\mathrm{ov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0\cdots(2')$$

7．(1) $EX=\frac{1}{\lambda}\cdots(2')$，令 $EX=\overline{X}\cdots(2')$ ，得 $\hat{\lambda}=\frac{1}{\overline{X}}\cdots(1')$

(2) $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda e^{-\lambda x_i})=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdots(2')$

$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\frac{\partial\ln L(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\cdots(2')$

$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}=\frac{1}{\overline{X}}\cdots(1')$

模拟二

参考数据：$t_{0.05}(15)=1.7531, t_{0.025}(15)=2.1315,\ \Phi(1)=0.8413, \Phi(2)=0.9772$

一、填空题：（每空 2 分，共 20 分）

1．设 $P(A)=0.6, P(B)=0.5$，A 与 B 相互独立，则 $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$=______

2．袋中有 5 个球，其中 3 个新球，2 个旧球，每次取一个，无放回地取两次，则两次取到的均为新球的概率为_

3． 设随机变量 X $N(1,4)$，则 $P(-1<X<3)=$____；若 $P(X>a)=0.5$，则 $a=$____

4．设 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}1/4, & 0<x<4\\ 0, & 其它\end{cases}$，则分布函数 $F(x)=\Big\{$______

5．设 $X\sim B(10000,0.1)$，使用中心极限定理计算 $P\{X\le 1030\}\approx$__________

6． 设 $E(X)=1, \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)=3$，则 $D(2X+1)=$______

7． 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1), Y\sim N(1,4)$，则分布 $X-Y\sim$ ___________

8． X_1,X_2 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，当 a,b 满足____________ 时，aX_1+bX_2 是 μ 的无偏估计．

9．设样本均值和样本方差为 $\overline{X}=20, S^2=16$，样本容量 $n=16$，写出正态总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间________________

二、求解下列概率问题（2 小题，共 28 分）

1、（本题 16 分）已知离散型随机变量 X 的分布律为：

X	-2	-1	0	1
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

(1) 求 $P(-1.5<X<1.5)$；(2) 求分布函数 $F(x)$；(3) 求出期望 $E(X)$，方差 $D(X)$．

2、（本题 12 分）设随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 2-x, & 1\le x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$， (1) 求 $P(X\ge 0.5)$；(2) 求出期望 $E(X)$，方差 $D(X)$．

三、求解下列各题（3 小题，共 28 分）

1、（本题 8 分）设随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，求 $Y=e^{2X}$ 的概率密度．

2、（本题 8 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且 $E(X)=1, E(Y)=2, D(X)=2, D(Y)=4$，求 $E(X^2)$，相关系数 ρ_{XY}，$D(XY)$．

3、（本题 12 分）设 $(X,\ Y)$ 的联合概率分布为

Y \ X	1	2	3
0	0．1	0．2	0．1
1	0．2	0．1	0．3

（1）求边缘分布律；（2）判别 X 与 Y 是否相互独立；（3）求 $Cov(X,Y)$．

四、求解下列数理统计问题（3 小题，共 24 分）

1、（本题 8 分）设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}\,x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$，$\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$，是取自总体的样本，求 θ 的矩估计．

2、（本题 8 分）设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$，$\lambda>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$，是取自总体的样本，求 λ 的最大似然估计．

3、（本题 8 分）要求一种元件使用寿命不得低于 1000 小时，今从这批元件中随机抽取 25 个，测得其寿命的平均值为 950 小时． 已知该种元件寿命服从标准差为 $\sigma=100$ 小时的正态分布．试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下确定这批元件是否合格？设总体均值为 μ，即检验假设 $H_0:\mu\ge 1000 \leftrightarrow \mathrm{H}_1:\mu<1000$．　　（ 参考值：$u_{0.05}=1.645, u_{0.025}=1.96$）

参考答案

一、填空题：1．$\underline{0.7}$　2．$\underline{0.3}$　3．$\underline{0.6826,\ 1}$　4．$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{4}x, & 0<x<4\\ 1, & x\ge 4\end{cases}$　5．$\underline{0.8413}$

6．$\underline{8}$　7．$\underline{N(-1,5)}$　8．$\underline{a+b=1}$　9．$\underline{(20\pm 2.1315)=(17.8685,22.1315)}$

二、求解下列概率问题

1．(1) $P(-1.5<x<1.5)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=5/6$

(2) $F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 1/6, & -2\le x<-1\\ 1/2, & -1\le x<0\\ 5/6, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$　(3) $E(X)=-\dfrac{1}{2},\cdots 4'$　$E(X^2)=\dfrac{7}{6}$，

$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\dfrac{11}{12}\cdots 4'$

2．(1)　$P(X\ge 0.5)=\int_{0.5}^{1}xdx+\int_{1}^{2}(2-x)dx=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{8}$

(2) $E(X)=\int_0^1 x\cdot xdx+\int_1^2 x(2-x)dx=1$

$D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\int_0^1 x^2\cdot xdx+\int_1^2 x^2(2-x)dx-1=\dfrac{7}{6}-1=\dfrac{1}{6}$

三、求解下列各题

1．$f(x)=\begin{cases}1, & 1<x<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^{2x}\le y)$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；　　当 $y\ge 0$，时，$F_Y(y)=P(X\le\frac{1}{2}\ln y)=F(\frac{1}{2}\ln y)$，$f_Y(y)=F_Y'(y)$.，

于是 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & e^2<y<e^4\\ 0, & others\end{cases}$

2. $E(X^2)=D(X)+(EX)^2=2+1=3$　　由于 X,Y 相互独立，故 $\rho_{XY}=0$

$\mathrm{D(XY)=E}(\mathrm{XY})^2-(E(XY))^2=E(X^2Y^2)-(EXEY)^2=3\times8-4=20$

3. 解（1）：

X	0	1
$p_{i\cdot}$	0．4	0．6

Y	1	2	3
$p_{\cdot j}$	0．3	0．3	0．4

(2) $P\{X=0,Y=1\}\neq P\{X=0\}P\{Y=1\}$，故 X,Y 不独立（其他做法也可以）

（3）$E(X)=0*0.4+1*0.6=0.6$ ，$E(Y)=1*0.3+2*0.3+3*0.4=2.1$

$E(XY)=1.3$，$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=1.3-0.6*2.1=0.04$

四、求解下列数理统计问题

1. 矩估计 $EX=\int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，$\sqrt{\theta}=\dfrac{E(X)}{1-E(X)}$，　　从而 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$.

2. MLE: $L(\lambda)=\lambda^n\prod_{i=1}^{n}e^{-\lambda X_i}\Rightarrow\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i$ 令 $\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=0$，　得 $\hat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$.

3. 拒绝域 $R=(-\infty,-u_\alpha)=(-\infty,-1.645)$　$\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\dfrac{950-1000}{100/5}=-2.5<-1.645$

所以拒绝原假设 H_0，即认为这批元件不合格.

模拟三

可能用到的数据：$\Phi(1)=0.8413,\Phi(2)=0.9772,t_{0.025}(35)=1.99006,t_{0.025}(36)=1.98667$

一、填空题（本题共 10 空格，每空格 3 分，共 30 分）

1. 抛一枚骰子，记录其出现的点数，该随机试验的样本空间为 ________.

2. 设 A,B 为两随机事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{4},P(B)=\dfrac{1}{2},P(B|A)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(A\cup B)=$__，$P(\overline{A}B)=$__.

3. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}cx^2,x\in(0,1)\\0,\text{其它}\end{cases}$，则常数 $c=$________.

4. 设随机变量 X 的概率分布律为

X	-1	0	3
p_i	0．25	0．5	0．25

则 $P\{|X-EX|<0.5\}=$_________.

5. 设随机变量 X 服从[0, 10]上的均匀分布，则关于 y 的二次方程 $y^2+4y+X=0$ 有实根的概率为 _________.

6. 设随机变量 X 的期望为 1，方差为 4，随机变量 Y 的期望为 0，方差为 1，且 X,Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-0.2$，则 $Z=X-2Y+1$ 的数学期望为____________，方差为____________.

7. 设总体 X 是 $(a,a+1)$ 上的均匀分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为样本均值，若 $\overline{X}+k$ 为 a 的无偏估计量，则 $k=$_____

8．设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 未知，抽取容量为 36 的样本，算得样本均值为 66．5，样本标准差为 15，统计假设为 $H_0:\mu=70,H_1:\mu\neq 70$，检验统计量为 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，则在显著水平 0.05 下应___(填接受或拒绝) H_0．

二、(本题 15 分) 某厂生产电子产品，其月产量 $X\sim N(20,25^2)$ (单位：万件)，在产量不超过 18 万件时，其产品的次品率为 0．01，而当产量超过 18 万件时，次品率则为 0．09．(1) 求该厂某月产量超过 18 万件的概率；(2) 现从该月生产的总产品中任取一件，求取出的这件产品是次品的概率．

三、(本题 10 分) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},0<x<2\\ 0,\text{其它}\end{cases}$，求 $Y=3X-2$ 的概率密度函数．

四、(本题 10 分) 设离散型随机变量 X 的概率分布律为

X	-2	-1	0	1
p_i	0．25	0．1	0．3	0．35

试求 $Y=X^2$ 的期望和方差．

五、(本题 15 分) 设随机变量 (X,Y) 的联合概率分布律为：

Y \ X	0	1
-1	0．1	0．3
1	0．2	0．4

试求 (1) X,Y 的边缘概率概率分布律；(2) 判别 X,Y 是否相互独立？(3) $COV(X,Y)$．

六、(本题 10 分) 设总体 X 的概率分布律为 $P\{X=i\}=\dfrac{1}{\theta},\ i=1,2,\cdots,\theta$，未知参数 θ 为正整数． $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的一组样本，求 θ 的矩估计量．

七、(本题 10 分) 设总体 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1},0<x<1\\ 0,\text{其它}\end{cases}$，$\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体的一组样本．求 θ 的最大似然估计量．

参考答案

一、填空题：

1．$\{1,2,3,4,5,6\}$ 2．$\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{4}$ 3．3 4．0 5．0.4 6．2, 9.6 7．$-\dfrac{1}{2}$ 8．接受

二解：(1) $P\{X>18\}=P\{\dfrac{X-20}{2}>\dfrac{18-20}{2}\}=\Phi(1)=0.8413$

(2) 全概率公式

$0.09P\{X>18\}+0.01P\{X\le 18\}=0.09\Phi(1)+0.01(1-\Phi(1))=0.077304$

三、$y=g(x)=3x-2$ 为严格增函数，

则 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y+2}{18},-2<y<4\\ 0,\text{其它}\end{cases}$

四、(1) X^2 的概率分布律为

X	0	1	4
p_i	0．3	0．45	0．25

EX＝0×0．3+1×0．45+4×0．25=1．45

$EX^2=0^2\times 0.3+1^2\times 0.45+4^2\times 0.25=4.45$

$DX = EX^2 - (EX)^2 = 4.45 - 1.45^2 = 2.3475$

五、（1） X 的边缘概率分布律为

X	0	1
p_i	0．3	0．7

Y 的边缘概率分布律为

X	-1	1
p_i	0．4	0．6

（2）不独立

（3） $EX = 0.7, EY = 0.2$

$E(XY) = 0.1$

$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY = -0.04$

六、 $EX = \sum_{i=1}^{\theta} i\frac{1}{\theta} = \frac{1+\theta}{2}$

令 $\overline{X} = \frac{1+\theta}{2}$

得 $\hat{\theta} = 2\overline{X} - 1$

七、 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta-1}$

$\ln L(\theta) = n\ln\theta + (\theta-1)\ln(\prod_{i=1}^{n} x_i)$

$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$ $\qquad \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$