WSTĘP DO MATEMATYKI FINANSOWEJ

BARTOSZ KOŁODZIEJEK
ADAM PRZEMYSŁAW CHOJECKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Laboratoria 6

Projekt „NERW 2 PW. Nauka - Edukacja - Rozwój - Współpraca" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 10 pn. „Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych", realizowane w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka - Edukacja - Rozwój - Współpraca", współfinansowanego jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

14 maja 2025

1. L6 - Monte Carlo do wyceny w modelu B-S

(1) Korzystając z metody Monte Carlo, wyceń w modelu Blacka-Scholesa wypłatę europejskiej opcji call $X = (S_T - K)^+$. W tym przypadku akurat da się obliczyć jej wartość teoretyczną, ale my dla ćwiczenia będziemy ją estymować metodami Monte Carlo:

$$\Pi_0(X) = c(S_0, T, K, \sigma, r) := S_0\Phi(d_+(S_0, T, K, \sigma, r)) - Ke^{-rT}\Phi(d_-(S_0, T, K, \sigma, r)),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu $\mathrm{N}(0,1)$ oraz

$$d_\pm(S_0, T, K, \sigma, r) := \frac{\log\frac{S_0}{K} + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Przypomnijmy, że w modelu Blacka-Scholesa mamy

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t},$$

gdzie W_t jest procesem Wienera przy mierze martyngałowej. Metodą MC chcemy aproksymować wartość oczekiwaną

$$\Pi_0(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-rT}(S_T - K)^+\right].$$

⚠ Wystarczy wygenerować wiele obserwacji z rozkładu

$$S_T \overset{d}{=} S_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z + (r - \frac{\sigma^2}{2})T},$$

gdzie $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Rozważ parametry rynku $S_0 = 100$, $r = 0.1$, $T = 1$, $\sigma = 1$ oraz opcję call dla ceny wykonania $K = 80$ (opcja In The Money, czyli gdy $S_0 > K$) i dla $K = 120$ (opcja Out Of The Money, $S_0 < K$).

Poza „czystym" Monte Carlo, zastosuj następujące metody redukcji wariancji:

(a) metoda zmiennych kontrolnych: jako zmienną kontrolną wybrać $e^{-rT}S_T$.

(b) metoda zmiennych kontrolnych w wersji turbo: jako zmienną kontrolną wybrać $\hat{b}^* S_T$, gdzie $\hat{b}^*$ jest estymatorem optymalnej (minimalizującej odpowiednią wariancję) wartości parametru b^* danego przez

$$\hat{b}^* = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2} \approx \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\mathrm{Var}[Y]} = b^*,$$

gdzie wektory $(X_i, Y_i)_{i=1}^n$ są i.i.d. z rozkładu $(e^{-rT}(S_T - K)^+, S_T)$.

(c) metoda zmiennych antytetycznych: jako S_T' wziąć $S_0 e^{\sigma\sqrt{T}(-Z) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}$.

(d) metoda warstwowania: Warstwy wyznaczamy w oparciu o rozbicie W_T. Niech k będzie liczbą warstw oraz rozważmy

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[e^{-rT}(S_T - K)^+] = \sum_{i=1}^k \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[e^{-rT}(S_T - K)^+ \mid W_T \in A_i]p_i,$$

gdzie rozbicie $(A_i)_i$ dobrane tak, by $\mathbb{P}(W_T \in A_i) = p_i = \frac{1}{k}$.
Żeby wygenerować zmienną z rozkładu $W_T \mid W_T \in A_i$ możemy zauważyć, że (gdy $A_i = [a_i, a_{i+1})$)

$$(W_T \mid W_T \in A_i) \overset{d}{=} \sqrt{T}\Phi^{-1}\left(\frac{i - 1 + U}{k}\right), \quad i = 1, \ldots, k,$$

gdzie $U \sim \mathrm{U}([0,1])$. Załóż alokację proporcjonalną, tzn. $n_1 = \ldots = n_k = \frac{n}{k}$.

(e) metoda importance sampling: mamy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[e^{-rT}(S_T - K)^+] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-rT}\left(S_0 e^{\sigma W_T + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K\right)^+\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-rT}\left(S_0 e^{\sigma Y + (r - \frac{\sigma^2}{2})T} - K\right)^+ \frac{f_{W_T}(Y)}{f_Y(Y)}\right],\end{aligned}$$

gdzie Y ma rozkład (względem miary $\mathbb{P}^*$) normalny $\mathrm{N}(\mu, T)$. Zbadaj wpływ zmiany parametru $\mu \in \mathbb{R}$ na szybkość zbieżności (wariancję estymatora).

⚠ Jak prezentować wyniki?

Podstawowym miernikiem szybkości zbieżności jest wariancja estymatora MC, która jest proporcjonalna do wariancji pojedynczego składnika:

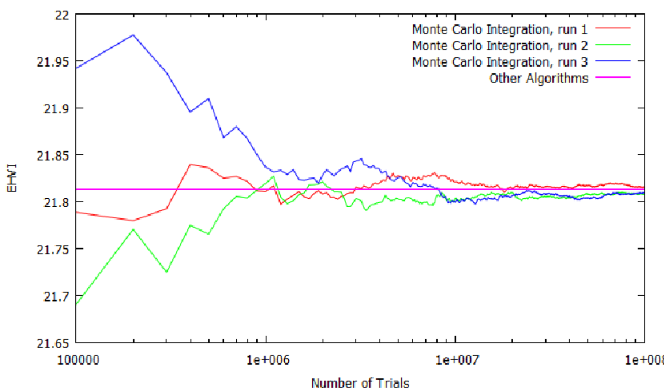
$$\mathrm{Var}\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}\right] = \frac{\mathrm{Var}[X_1]}{n}.$$

Dobrze jest zatem przedstawiać estymator wariancji $\mathrm{Var}[X_1]$, który jest dany np. przez

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2.$$

Jest to estymator nieobciążony (stąd dzielenie przez $(n-1)$), tzn. $\mathbb{E}[S_n^2] = \mathrm{Var}[X_1]$.

Dodatkowo, symulacje fajnie jest prezentować na wykresie. Zbieżności w metodach Monte Carlo przedstawiamy jako wykres $n \sim (\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_p^{(n)})$, gdzie $\mu_i^{(n)}$ jest estymatorem Monte Carlo wyznaczonym na obserwacjach $\{1, \ldots, n\}$ w oparciu o metodę $i \in \{1, \ldots, p\}$. Ponieważ tutaj znamy dokładną wartość (wzór analityczny, patrz poprzednie zadanie) wypłaty, to fajnie by na wykresie znalazła się jako odniesienie. Coś w stylu wykresu poniżej



Należy podkreślić, że patrzenie tylko na taki wykres może być złudne, jednak zwykle jest pożyteczne. Metoda MC jest losowa, więc jest ryzyko, że dla danej symulacji jedna z metod zadziałała dużo lepiej niż zachowuje się typowo. Żeby się przed tym trochę obronić można rysować dla każdej z metod wiele trajektorii.

(2) Wycenić w modelu Blacka-Scholesa wypłatę opcji azjatyckiej daną przez

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_{T_i} - K\right)^+.$$

Poza „czystym” Monte Carlo, zastosuj metodę zmiennych kontrolnych ze zmienną $Y = \left(\left(\prod_{i=1}^{N} S_{T_i}\right)^{1/N} - K\right)^+$. W tym celu będzie potrzebna wartość (wzór analityczny) na wycenę wypłaty Y, czyli

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-rT}\left(\left(\prod_{i=1}^{N} S_{T_i}\right)^{1/N} - K\right)^+\right].$$

Znajdź tę wartość korzystając z faktu, że jeśli $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, to

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(e^{\alpha Z+\beta}-K)^+\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}(e^{\alpha x+\beta}-K)^+ e^{-x^2/2}dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log K-\beta}{\alpha}}^{\infty}(e^{\alpha x+\beta}-K)e^{-x^2/2}dx, & \alpha>0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\log K-\beta}{\alpha}}(e^{\alpha x+\beta}-K)e^{-x^2/2}dx, & \alpha<0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{\beta+\alpha^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\log K-\beta}{\alpha}}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2\alpha+\alpha^2}{2}}dx - K\left(1-\Phi\left(\frac{\log K-\beta}{\alpha}\right)\right), & \alpha>0, \\ e^{\beta+\alpha^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\log K-\beta}{\alpha}} e^{-\frac{x^2-2\alpha+\alpha^2}{2}}dx - K\Phi\left(\frac{\log K-\beta}{\alpha}\right), & \alpha<0, \end{cases} \\
&= e^{\beta+\alpha^2/2}\Phi\left(\frac{\beta-\log K+\alpha^2}{|\alpha|}\right) - K\Phi\left(\frac{\beta-\log K}{|\alpha|}\right)
\end{aligned}
$$

Wskazówka: $\alpha^2 = \mathrm{Var}\left[\log\left(\prod_{i=1}^N S_{T_i}\right)^{1/N}\right]$.

(3) Stosując mix metod Monte Carlo, zaproponuj metodę aproksymacji (w modelu B-S dla $T=10$) wartości

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-rT}\left(K_1-S_5-S_{10}\right)^+ \mathbb{1}_{\#\{k\in\{1,2,\dots,10\}:S_k>K_2\}\geq 5}\right].$$

Jest to cena opcji wypłacającej $(K_1-S_5-S_{10})^+$, gdy co najmniej w pięciu momentach $1,\dots,10$ cena procesu akcji przekroczy poziom K_2.

Przyjmij $S_0=100$, $\sigma=1$, $r=0.1$, $K_1=200$, $K_2=100$.

Podaj wartość wyceny oraz estymator wariancji S_n^2 zaproponowanego estymatora. Porównaj z „czystym” MC.