WSTĘP DO MATEMATYKI FINANSOWEJ

BARTOSZ KOŁODZIEJEK

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Laboratoria 3

Projekt „NERW 2 PW. Nauka - Edukacja - Rozwój - Współpraca" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 10 pn. „Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych", realizowane w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka - Edukacja - Rozwój - Współpraca", współfinansowanego jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

19 marca 2025

Legenda: – Definicja, **TW.** – Twierdzenie, – Przykład, – Uwaga, **LEM.** – Lemat, – Oznaczenie

1. L3 - Model CRR

(1) Model CRR (Coxa-Rossa-Rubinsteina) jest jednym z prostszych modeli rynku skończonego. Pomimo swojej prostoty, model ten może być stosowany do aproksymacji modeli ciągłych, np. słynnego modelu Blacka-Sholesa. Na przykładzie tego modelu będziemy uczyli się wyceniać bardziej skomplikowane wypłaty oraz *mądrze* korzystać z metod Monte-Carlo.

(2) Zakładamy, że czas jest dyskretny, transakcje mogą odbywać się w momentach $t \in \mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$.

(3) Na rynku występują dwa instrumenty finansowe. Pierwszy z nich to rachunek bankowy $(B_t)_{t\in\mathcal{T}}$ dany przez

$$B_t = (1 + r)^t, \qquad t \in \mathcal{T},$$

gdzie $r \geq 0$ jest ustaloną (parametrem rynku) stopą procentową. $(B_t)_t$ jest nielosowym (deterministycznym) procesem stochastycznym.

Drugi z instrumentów to $(S_t)_{t\in\mathcal{T}}$. Zakładamy, że $S_0 = const$ (kolejny parametr rynku) oraz

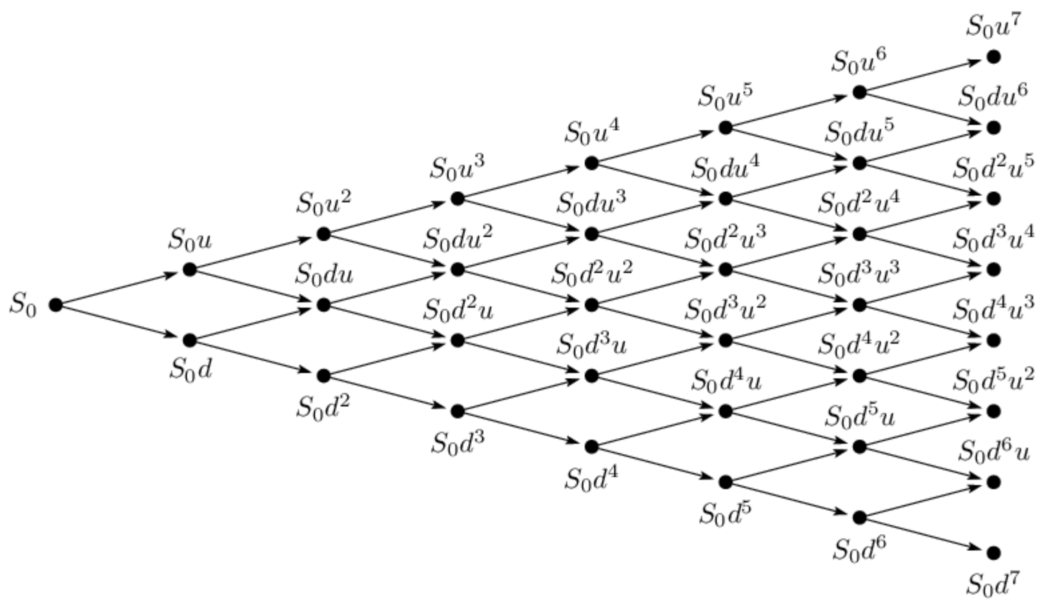
$$\frac{S_t}{S_{t-1}} = U_t, \quad t \in \mathcal{T},\ t \geq 1,$$

gdzie $(U_t)_t$ jest ciągiem zmiennych losowych iid z rozkładu

$$\mathbb{P}(U_t = u) = p, \qquad \mathbb{P}(U_t = d) = 1 - p,$$

gdzie $p \in (0, 1)$ oraz $u > d > 0$ są parametrami.

Zbiór możliwych cen $(S_t)_t$ tworzy tzw. drzewo rekombinujące:



(4) Formalnie ten rynek można zdefiniować następująco. Niech $\Omega = \{d, u\}^T$ oraz $\mathcal{F} = 2^\Omega$. Niech $U_t(\omega) = \omega_t$. Niech $\mathbb{P}_p$ będzie prawdopodobieństwem produktowym, tzn.

$$\mathbb{P}_p(\{\omega_1, \ldots, \omega_T\}) = \mathbb{Q}_p(\{\omega_1\}) \cdot \ldots \cdot \mathbb{Q}_p(\{\omega_T\}),$$

gdzie $\mathbb{Q}_p(\{u\}) = p = 1 - \mathbb{Q}_p(\{d\})$. Wtedy też filtracja naturalna procesów cen jest dana przez

$$\mathcal{F}_t = \sigma(S_0, \ldots, S_t) = \sigma(U_1, \ldots, U_t).$$

(5) W zależności od wartości parametrów r, u, d na rynku może istnieć lub nie istnieć arbitraż.
Ponadto, wiemy, że "prawdziwe" prawdopodobieństwo p ruchów ceny w górę nie ma znaczenia dla wycen. Ważna jest tzw. miara risk neutral (miara martyngałowa) $\mathbb{P}^*$ względem której proces $S^* = (S_t/B_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest martyngałem.
LEM. Jeśli $d < 1 + r < u$, to $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}_{\frac{1+r-d}{u-d}}$ jest jedyną miarą risk neutral.
Oznacza to, że w model CRR rozważamy bezarbitrażowy rynek zupełny, tzn. wszystkie wypłaty są replikowalne.

Dowód: Pokażemy coś słabszego: jeśli $\mathbb{P}^* = \mathbb{P}_p$, to $p = \frac{1+r-d}{u-d}$. Z definicji miary risk neutral mamy $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[S^*_{t+1}|\mathcal{F}_t] = S^*_t$ dla $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$. Ponieważ $S_{t+1} = S_t U_{t+1}$ oraz $\mathcal{F}_t = \sigma(U_1, \dots, U_t)$ otrzymujemy

$$S^*_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[S^*_{t+1}|\mathcal{F}_t] = S_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{U_{t+1}}{B_{t+1}}|\mathcal{F}_t\right] \overset{\text{nzl}}{=} S_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{U_{t+1}}{B_{t+1}}\right] = S^*_t \frac{B_t}{B_{t+1}}\big(u \cdot \mathbb{P}^*(U_{t+1} = u) + d \cdot \mathbb{P}^*(U_{t+1} = d)\big).$$

Ponieważ $B_{t+1}/B_t = 1 + r$, otrzymujemy stąd dla $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$,

$$\mathbb{P}^*(U_{t+1} = u) = 1 - \mathbb{P}^*(U_{t+1} = d) = \frac{1+r-d}{u-d}.$$

(6) Z ogólnej teorii wiemy, że cena wypłaty europejskiej X może być wyznaczona ze wzoru

$$\Pi_t(X) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{X}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right], \qquad t \in \mathcal{T}.$$

Pozostaje zrozumieć co ten wzór oznacza. Obie strony powyższych równości są zmiennymi losowymi. X jest znaną nam zmienną losową. Np. jeśli rozważamy europejską opcję typu call, to $X(\omega) = (S_T(\omega) - K)^+$.

⚠ Przypomnienie: Jeśli zmienna losowa X jest $\sigma(Y)$-mierzalna, to istnieje funkcja borelowska m taka, że $X(\omega) = m(Y(\omega))$ dla $\omega \in \Omega$.

Interesuje nas $\Pi_0(X)$, ale podchodzimy do sprawy indukcyjnie. Ponieważ $\Pi_t(X)$ jest $\mathcal{F}_t$-mierzalne oraz $\mathcal{F}_t = \sigma(U_1, \dots, U_t)$, to $\Pi_t(X) = m(U_1, \dots, U_t)$ dla pewnej borelowskiej funkcji m. Z definicji zmiennych U_t (tzn. $U_t(\omega) = \omega_t$) oznacza to, że $\Pi_t(X)(\omega_1, \dots, \omega_t, \dots, \omega_T)$ jest funkcją, która zależy tylko od $(\omega_1, \dots, \omega_t)$. W szczególności nie zależy od $(\omega_{t+1}, \dots, \omega_T)$, a $\Pi_0(X)$ jest po prostu stałą. Z tego względu zamiast $\Pi_t(X)(\omega_1, \dots, \omega_t, \dots, \omega_T)$ będziemy pisali $\Pi_t(X)(\omega_1, \dots, \omega_t)$. Indukcja zaczyna się od końca: zachodzi $\Pi_T(X) = X$ oraz X znamy. Przypomnijmy, że $(V_t(\varphi)/B_t)_t$ jest $\mathbb{P}^*$ martyngałem o ile $\varphi \in \Phi$. Zatem, dla $t \in \{0, \dots, T-1\}$ oraz $(\omega_i)_{i=1}^t \in \{d, u\}^t$ mamy

$$\begin{aligned}\Pi_t(X)(\omega_1, \dots, \omega_t) &= B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\Pi_{t+1}(X)}{B_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t\right](\omega_1, \dots, \omega_t) \\ &= \frac{B_t}{B_{t+1}}\big(p^*\,\Pi_{t+1}(X)(\omega_1, \dots, \omega_t, u) + (1-p^*)\Pi_{t+1}(X)(\omega_1, \dots, \omega_t, d)\big).\end{aligned}$$

Powyżej oznaczyliśmy $p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$.

(7) ⚙ Zadania:

(a) Zaimplementować model CRR. Spróbuj to zrobić możliwie ładnie. Chcemy mieć możliwość wyceny tych samych instrumentów (funkcji wypłat) na różnych rynkach. Wypłaty mogą zależeć od całej trajektorii procesu cen akcji.

(b) Wyceń europejskie opcje call i put. Przyjmij parametry rynku $S_0 = 100$, $d = 0.8$, $u = 1.3$, $r = 0.1$, $T = 10$ oraz strike opcji $K = 90$. Na wszelki wypadek porównaj z wartością teoretyczną:

$$C_{T-t} = \frac{1}{(1+r)^t}\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j} p^{*j}(1-p^*)^{t-j}(S_{T-t}u^j d^{t-j} - K)^+, \qquad t = 0, 1, \dots, T.$$

Na tym samym rynku wyceń wypłatę $X = \max_{t \in \mathcal{T}}\{S_t\}$.