Fundusze Europejskie Wiedza Edukacja Rozwój
Rzeczpospolita Polska
Politechnika Warszawska
Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

WSTĘP DO MATEMATYKI FINANSOWEJ

BARTOSZ KOŁODZIEJEK
WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

Laboratoria 2

Projekt „NERW 2 PW. Nauka - Edukacja - Rozwój - Współpraca" współfinansowany jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Zadanie 10 pn. „Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych", realizowane w ramach projektu „NERW 2 PW. Nauka - Edukacja - Rozwój - Współpraca", współfinansowanego jest ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

5 marca 2025

1. L2 - Generowanie procesów stochastycznych

(1) Chcemy wygenerować trajektorię procesu Wienera $(W_t)_{t\in[0,T]}$, gdzie $T > 0$ jest ustalone. Oczywiście, wygenerowanie jej we wszystych punktach $t \in [0, T]$ jest niemożliwe i z tego względu zadowalamy się ciągiem $(W_{t_0}, W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$, gdzie $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ (zwykle zakłada się równe odstępy między $(t_i)_i$). Ciąg ten możemy otrzymać na conajmniej dwa sensowne sposoby.

- Startujemy z $W_{t_0} = 0$, a jeśli mamy już W_{t_k}, to
$$W_{t_{k+1}} = W_{t_k} + \sqrt{t_{k+1} - t_k} Z_k,$$
gdzie $(Z_i)_i$ są i.i.d. z rozkładu $\mathrm{N}(0, 1)$.
- Wiemy, że wektor losowy $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ ma rozkład normalny wielowymiarowy $\mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$, gdzie $\Sigma_{ij} = \min\{t_i, t_j\}$, tzn.
$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & t_1 & \ldots & t_1 \\ t_1 & t_2 & t_2 & \ldots & t_2 \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_3 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$$
Pozostaje teraz kwestia wygenerowania wektora losowego z rozkładu $\mathrm{N}_n(\mathbf{0}, \Sigma)$. Możemy oczywiście skorzystać z pierwszego punktu lub gotowych bibliotek (i ogólnie tak pewnie jest robić najlepiej), ale możemy to też zrobić ręcznie i przy okazji się czegoś nauczyć. Wiemy, że jeśli $X_1, \ldots, X_n$ są i.i.d. z rozkładu $\mathrm{N}(0, 1)$ lub równoważnie, $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)^\top \sim \mathrm{N}_n(\mathbf{0}, I_n)$, to dla każdej macierzy $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mamy
$$A \cdot \underline{X} = A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}_k(\mathbf{0}, A \cdot A^\top)$$
o ile macierz $A \cdot A^\top$ jest nieosobliwa (wyznacznik $\neq 0$).
Zatem, na podstawie n zmiennych i.i.d z rozkładu $\mathrm{N}(0, 1)$, możemy wygenerować jedną obserwację z rozkładu $\mathrm{N}_n(0, \Sigma)$ o ile znajdziemy macierz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taką, że
$$A \cdot A^\top = \Sigma.$$
Takich macierzy jest nieprzeliczalnie wiele, więc warto szukać jakichś szczególnie prostych, np. macierzy (dolno lub górno) trójkątnych. Do tego służy algorytm Cholesky'ego oraz różne jego modyfikacje. Poniżej algorytm Cholesky'ego-Banachiewicza.

```
from math import sqrt

def cholesky(S):  #S - macierz kwadratowa dodatnio okreslona

        n = len(S)

        L = [[0.0] * n for i in xrange(n)]

        for i in xrange(n):
        for k in xrange(i+1):
        tmp_sum = sum(L[i][j] * L[k][j] for j in xrange(k))

        if (i == k):
        L[i][k] = sqrt(S[i][i] - tmp_sum)
        else:
        L[i][k] = (1.0 / L[k][k] * (S[i][k] - tmp_sum))
        return L
```

(2) Zadania:

(a) Wygeneruj trajektorię procesu Poissona z zadaną intensywnością $\lambda > 0$.

(b) Wygeneruj trajektorię procesu Wienera korzystając z dwóch pierwszych metod. Zaimplementuj zaprezentowaną powyżej dekompozycję Cholesky'ego, poświęć chwilę by zrozumieć jej działanie (najlepiej z kartką papieru i macierzą 4×4). Porównaj czasy obu metod.

(c) Wygeneruj i zwizualizuj trajektorię dwuwymiarowego procesu Wienera $\underline{W}_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ o składowych niezależnych.

(d) Wygeneruj i zwizualizuj trajektorię dwuwymiarowego procesu Wienera $\underline{W}_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ o składowych zależnych takich, że dla każdego $t > 0$, $\mathrm{Cor}(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}) = \rho$, gdzie $\rho \in [-1, 1]$ jest ustaloną liczbą.

- Wskazówka: Niech $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ będzie procesem Wienera z niezależnymi składowymi. Uzasadnij, że $V_t^{(2)} := \rho W_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} W_t^{(2)}$ jest procesem Wienera. Rozważ proces $(V_t^{(1)}, V_t^{(2)})$, gdzie $V_t^{(1)} = W_t^{(1)}$.
- Zastanowić się dlaczego ρ powyżej nie może zmieniać się z t.
- Co robić ogólnie, gdy mamy do czynienia z d-wymiarowym Wienerem? Niech $\underline{W}_t = (W_t^{(1)}, \dots W_t^{(d)})$. Wtedy

$$\underline{W}_{t_{n+1}} = \underline{W}_{t_n} + \sqrt{t_{n+1} - t_n} A \cdot \begin{pmatrix} Z_1^{(n+1)} \\ \ddots \\ Z_d^{(n+1)} \end{pmatrix},$$

gdzie $(Z_i^{(j)})_{i,j}$ są i.i.d. $\mathrm{N}(0,1)$ oraz

$$A \cdot A^\top = \Big(\mathrm{corr}(W_1^{(i)}, W_1^{(j)})\Big)_{i,j}.$$

Wartości $\mathrm{corr}(W_1^{(i)}, W_1^{(j)})$ musimy zadać tak, by powyższa macierz korelacji była dodatnio określona.

(e) Spróbuj zaobserwować różnicę w zbieżności z prawdopodobieństwem 1, według prawdopodobieństwa oraz brakiem zbieżności na przykładzie Mocnego i Słabego Prawa Wielkich Liczb:

- MPWL: Niech $(X_n)_n$ będą niezależne z rozkładu

$$\mathbb{P}(X_n = \pm(n+1)) = \frac{1}{2(n+1)^{3/2}}, \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{3/2}}.$$

Wtedy $\mathbb{E}[X_n] = 0$ oraz warunek Kołmogorowa $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Var}[X_n]/n^2 < \infty$ jest spełniony, a więc

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{1} 0.$$

Zbieżność ta mówi nam, że dla każdej trajektorii $((X_1 + \ldots + X_n)/n)_n$ istnieje n_0, takie że $(X_1 + \ldots + X_n)/n \in (-\epsilon, \epsilon)$ dla $n \geq n_0$. ⚠ n_0 zależy od ω, czyli może być różne dla różnych trajektorii.

- SPWL: Niech $(Y_n)_n$ będą niezależne z rozkładu

$$\mathbb{P}(Y_n = \pm(n+1)) = \frac{1}{2(n+1)\log(n+1)}, \qquad \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}.$$

Dla ciągu (Y_n) zachodzi SPWL, ale nie MPWL (nie jest to banalne do pokazania). SPWL mówi, że większość (tym więcej im dalej patrzymy) trajektorii $((Y_1 + \ldots + Y_n)/n)_n$ wpadnie w przedział $(-\epsilon, \epsilon)$, ale nie możemy być pewni że konkretna trajektoria taka będzie.

- Brak zbieżności: Niech $(Z_n)_n$ będą niezależne z rozkładu

$$\mathbb{P}(Z_n = \pm(n+1)) = \frac{1}{2(n+1)}, \qquad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Wtedy nie zachodzi SPWL ani MPWL i nie powinniśmy widzieć powyżej opisanych zjawisk.

(f) Spróbuj zweryfikować empirycznie prawdziwość Prawa Iterowanego Logarytmu:

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{|W_t|}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1 \qquad \mathbb{P}\text{-p.n.}$$

W tym celu wygeneruj dużo trajektorii $(W_t)_{t \in [0,T]}$ (chociaż powinna wystarczyć też jedna) dla dużego T oraz narysuj je razem z funkcjami $f_\pm(t) = \pm\sqrt{2t \log\log t}$. Być może dobrze będzie rozważyć skalę logarytmiczną na osi odciętych.