1 Sprawdzenie poprawności rachunków

1.1 Wzór na prawdopodobieństwo zmiany wartości jednego piksela w pojedynczym kroku próbnika Gibbsa

Autor rozwiązania wyprowadził następujące wyrażenie:

$$\mathbb{P}(x_n = 1|(x_m)) = \frac{e^{\beta \sum_m J_{n,m}x_m + H}}{e^{\beta \sum_m J_{n,m}x_m + H} + e^{-\beta \sum_m J_{n,m}x_m - H}} = \frac{1}{1 + e^{-2\beta \sum_m J_{n,m}x_m - 2H}} = \frac{1}{1 + e^{-2\beta b_n}}$$

gdzie:

$$b_n = \sum_m J_{n,m}x_m + H$$

Jest to prawdopodobieństwo zmiany n-tej współrzędnej stanu x na wartość 1, pod warunkiem ustalonych wartości na pozostałych współrzędnych. Zapis (x_m) rozumiemy jako $x_0 = s_0, ..., x_{n-1} = s_{n-1}, x_{n+1} = s_{n+1}, ..., x_d = s_d)$.

Spróbujemy wyprowadzić ten wzór. W rozważanym modelu, dana współrzędna może przyjąć tylko warotści -1 i 1. Zatem rozkład warunkowy zmiany wartości współrzędnej n w jednym kroku na wartość 1 będzie wyrażony wzorem:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(x_n = 1|x_1 = s_1, \ldots, x_{n-1} = s_{n-1}, x_{n+1} = s_{n-1}, \ldots, x_d = s_u) = \\ &= \frac{\mathbb{P}(x_1 = s_1, \ldots, x_{n-1} = s_{n-1}, x_n = 1, x_{n+1} = s_{n+1}, \ldots, x_d = s_d)}{\sum_{k\in\{-1,1\}} \mathbb{P}(x_1 = s_1, \ldots, x_{n-1} = s_{n-1}, x_n = k, x_{n+1} = s_{n+1}, \ldots, x_d = s_d)}\end{aligned}$$

Zakładając, że prawdopodobieństwo otrzymania danego stanu x jest brane z rozkładu Gibbsa uwzględniającego funkcję energii, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(x_1 = s_1, \ldots, x_{n-1} = s_{n-1}, x_n = s_n, x_{n+1} = s_{n+1}, \ldots, x_d = s_d) = \exp\left(\beta\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}s_is_j + \beta\sum_j Hs_j\right) \\ &=\exp\left(\beta\frac{1}{2}\left(2\sum_j J_{nj}s_ns_j + \sum_{i\neq n, j\neq n} J_{ij}s_is_j\right) + \beta Hs_n + \beta\sum_{j\neq n} Hs_j\right) \\ &=\exp\left(\beta\sum_j J_{nj}s_ns_j + \beta Hs_n\right)\exp\left(\beta\frac{1}{2}\sum_{i\neq n, j\neq n} J_{ij}s_is_j + \beta\sum_{j\neq n} Hs_j\right)\end{aligned}$$

Wobec powyższego, poprzednio zapisane prawdopodobieństwo warunkowe wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(x_n = 1|x_1 = s_1, \ldots, x_{n-1} = s_{n-1}, x_{n+1} = s_{n-1}, \ldots, x_d = s_u) = \\ &= \frac{\exp\left(\beta\sum_j J_{nj}s_j + \beta H\right)}{\exp\left(\beta\sum_j J_{nj}s_j + \beta H\right) + \exp\left(-\beta\sum_j J_{nj}s_j - \beta H\right)} = \\ &= \frac{1}{1 + \exp\left(-2\beta\sum_j J_{nj}s_j - 2\beta H\right)}\end{aligned}$$

s

1.2 Sformułowanie założeń dotyczących odszumionych zdjęć. Odszumione zdjęcie jako argument maksymalizujący prawdopodobieństwo a posteriori po obserwacji zdjęcia zaszumionego.

Zakładamy, że prawdopodobieństwo zaobserwowania zaszumionego obrazu y przy oryginalnym obrazie z wyraża wzór:

$$\mathbb{P}(Y=y \mid Z=z)=\prod_{i,j}\begin{cases} q & : y_{i,j}=z_{i,j}, \\ 1-q & : y_{i,j}\neq z_{i,j}, \end{cases} =\prod_{i,j}\begin{cases} q & : y_{i,j}z_{i,j}=1, \\ 1-q & : y_{i,j}z_{i,j}=-1, \end{cases}$$

1-q jest wtedy prawdopodobieństwem zaszumienia pojedynczego piksela.

Zakładamy również, że prawdopodobieństwo zaobserwowania obrazu z wyraża wzór:

$$\mathbb{P}(Z=z)=\frac{\exp\left(\sum_{ij}J_{ij}z_iz_j\right)}{\sum_{s\in S}\exp\left(\sum_{ij}J_{ij}s_is_j\right)},$$

gdzie indeksy i, j odpowiadają współrzędnym pikseli, J_{ij} przyjmuje wartość 1 dla sąsiednich pikseli oraz wartość 0 w przeciwnym przypadku, a S jest zbiorem wszystkich możliwych obrazów.

Przy takich założeniach, korzystając z wzoru Bayesa i podstawiając wcześniej wyprowadzone wzory otrzymujemy:

$$\mathbb{P}(z=z \mid Y=y)\propto P(Y=y \mid Z=z)\cdot P(Z=z)=\prod_{ij}\left(\left(\frac{q}{1-q}\right)^{y_{ij}z_{ij}}\cdot q^{\frac{1}{2}}(1-q)^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{\exp\left(\sum_{ij}J_{ij}z_iz_j\right)}{\sum_{s\in S}\exp\left(\sum_{ij}J_{ij}s_is_j\right)}$$

Logarytmując obie strony powyższego wyrażenia otrzymujemy:

$$\log(\mathbb{P}(z=z \mid Y=y))\propto\sum_{ij}\left[\log\left(\frac{q}{1-q}\right)y_{ij}z_{ij}+\frac{1}{2}\log q+\frac{1}{2}\log(1-q)\right]+\sum_{ij}J_{ij}z_iz_j-\log\left(\sum_{s\in S}\exp\left(\sum_{ij}J_{ij}s_is_j\right)\right)$$

Co z dokładnością do stałych prowadzi nas do pożądanej postaci, znanej z modelu Isinga:

$$\mathbb{P}(z=z \mid Y=y)\propto\exp(\sum_{ij}hy_{ij}z_{ij}+\sum_{ij}J_{ij}z_iz_j),$$

gdzie $h=\log(\frac{q}{1-q})$.'

1.3 Uzasadnienie stosowania modelu Isinga

Tak sformułowany model w problemie odszumiania obrazów promuje *"zwięzłe"* obrazy, to znaczy takie, których sąsiednie piksele mają taką samą wartość. Wynika to z faktu, że w modelu Isinga składnik

$$\sum_{ij}J_{ij}z_iz_j$$

przyjmuje większe wartości, gdy sąsiednie piksele mają zgodne znaki (czyli tę samą wartość: $+1$ lub -1), ponieważ wtedy ich iloczyn wynosi $+1$. W praktyce oznacza to preferencję dla obrazów gładkich, bez szumu.

Z drugiej strony, składnik

$$\sum_{ij}hy_{ij}z_{ij}$$

odpowiada za dopasowanie do danych obserwowanych — promuje takie wartości z_{ij}, które są zgodne z zaszumionym obrazem y_{ij}, a jego siła zależy od parametru

$$h=\log\left(\frac{q}{1-q}\right),$$

który odzwierciedla poziom zaufania do obserwacji.

Dzięki opisanej postaci rozkładu a posteriori możemy zastosować próbkowanie Gibbsa, do szukania obrazu z, który maksymalizuje te warunkowe prawdopodobieństwo — czyli jest najbardziej prawdopodobnym oryginałem przy zaobserwowanym obrazie zaszumionym.