

Algorytmiczne Zastosowania Łańcuchów Markowa

Odszumianie obrazów z wykorzystaniem modelu Isinga

04.06.2025

Krzysztof Tkaczyk
Michał Zajączkowski

Plan prezentacji

- O modelu
- Dane
- Testy oryginalnej implementacji
- Poprawa

Wstęp teoretyczny

Model Isinga - przypomnienie

Rozpatruje się sieć n atomów rozłożonych w sieci. Każdy z atomów przyjmuje wartość spinu ze zbioru $\{-1, 1\}$. Energia w takim układzie jest określona następującym wzorem:

$$E(x) = E(x; J, H) = -\left(\frac{1}{2} \sum_{n,m} J_{n,m} x_m x_n + \sum_n H x_n\right)$$

gdzie:

- H - pole zewnętrzne
- x_n - spin n -tego atomu
- $J_{\{nm\}}$ - interakcja pomiędzy atomami n i m

Próbnik Gibbsa - przypomnienie

Niech $S = |d|^n$ - zbiór stanów.

Chcemy próbkować z rozkładu $\pi(x) = \frac{g(x)}{Z} \quad \forall x \in S \quad Z = \sum_{x \in S} g(x)$

Algorytm:

1. Wybieramy losowy stan x .
2. Wybieramy dowolną u -tą współrzędną stanu x . (Losowa z rozkładu jednostajnego)
3. Aktualizujemy u -tą współrzędną na nową wartość zgodnie z rozkładem:

$$\pi(x'_u | x_1, \dots, x_{u-1}, x_{u+1}, \dots, x_d) = \frac{\pi(x_1, \dots, x_{u-1}, x'_u, x_{u+1}, \dots, x_d)}{\sum_{y_u \in d} \pi(x_1, \dots, x_{u-1}, y_u, x_{u+1}, \dots, x_d)}$$

4. Wracamy do 2.

Problem odszumiania zdjęć w terminach Modelu Isinga

Stan: $x \leftarrow$ zdjęcie zbinaryzowane

Spin: $x_n \leftarrow$ wartość n -tego piksela (u nas $-1 \ 1$)

Interakcja: $J_{\{nm\}} \leftarrow$ przyjmuje wartość 1 gdy piksele są bezpośrednimi sąsiadami w siatce prostokątnej i 0 w p.p

Pole zewnętrzne: $H \leftarrow$ pewna stała rzeczywista (hiperparametr)

Chcemy minimalizować funkcję energii. Dlatego będziemy próbkować z rozkładu Gibbsa

$$P(X = x) = \frac{1}{Z(\beta)} \exp(-\beta E(x)).$$

Wykorzystamy do tego wcześniej opisany próbnik Gibbsa.

Minimalizacja energii

W naszym przypadku prawdopodobieństwo zmiany n-tego piksela na wartość 1 przy pozostałych pikselach niezmiennych wynosi (wyprowadzenie w dodatku):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_n = 1 | x_1 = s_1, \dots, x_{n-1} = s_{n-1}, x_{n+1} = s_{n+1}, \dots, x_d = s_d) &= \\ &= \frac{\exp\left(\beta \sum_j J_{nj} s_j + \beta H\right)}{\exp\left(\beta \sum_j J_{nj} s_j + \beta H\right) + \exp\left(-\beta \sum_j J_{nj} s_j - \beta H\right)} = \\ &= \frac{1}{1 + \exp\left(-2\beta \sum_j J_{nj} s_j - 2\beta H\right)}\end{aligned}$$

Zatem próbnik Gibbsa wybiera jednostajnie n-ty piksel i z wyliczonym wyżej prawdopodobieństwem ustawia jego wartość na 1, w przeciwnym razie ustawieniu go na -1.

Modelowanie szumu

Prawdopodobieństwo zaobserwowania zaszumionego obrazu y przy oryginalnym obrazie z wyraża poniższy wzór:

$$\mathbb{P}(Y = y \mid Z = z) = \prod_{i,j} \begin{cases} q & : y_{i,j} = z_{i,j}, \\ 1 - q & : y_{i,j} \neq z_{i,j}, \end{cases} = \prod_{i,j} \begin{cases} q & : y_{i,j} z_{i,j} = 1, \\ 1 - q & : y_{i,j} z_{i,j} = -1, \end{cases}$$

$1-q$ jest tutaj prawdopodobieństwem zaszumienia pojedynczego piksela.

Pstwo wystąpienia stanu Model Isinga +
rozkład Gibbsa

$$P(x) \propto \exp \left(\beta \left(\frac{1}{2} \sum_{n,m} J_{n,m} x_n x_m + \sum_n H_n x_n \right) \right)$$

Zał. pstwo wystąpienia zdjęcia

$$\mathbb{P}(Z = z) \propto \exp \left(\sum_{i,j} J_{i,j} z_i z_j \right)$$

Wzór Bayesa, pstwo zaobserwowania
zdjęcia oryginalnego pod warunkiem
zazsumionego

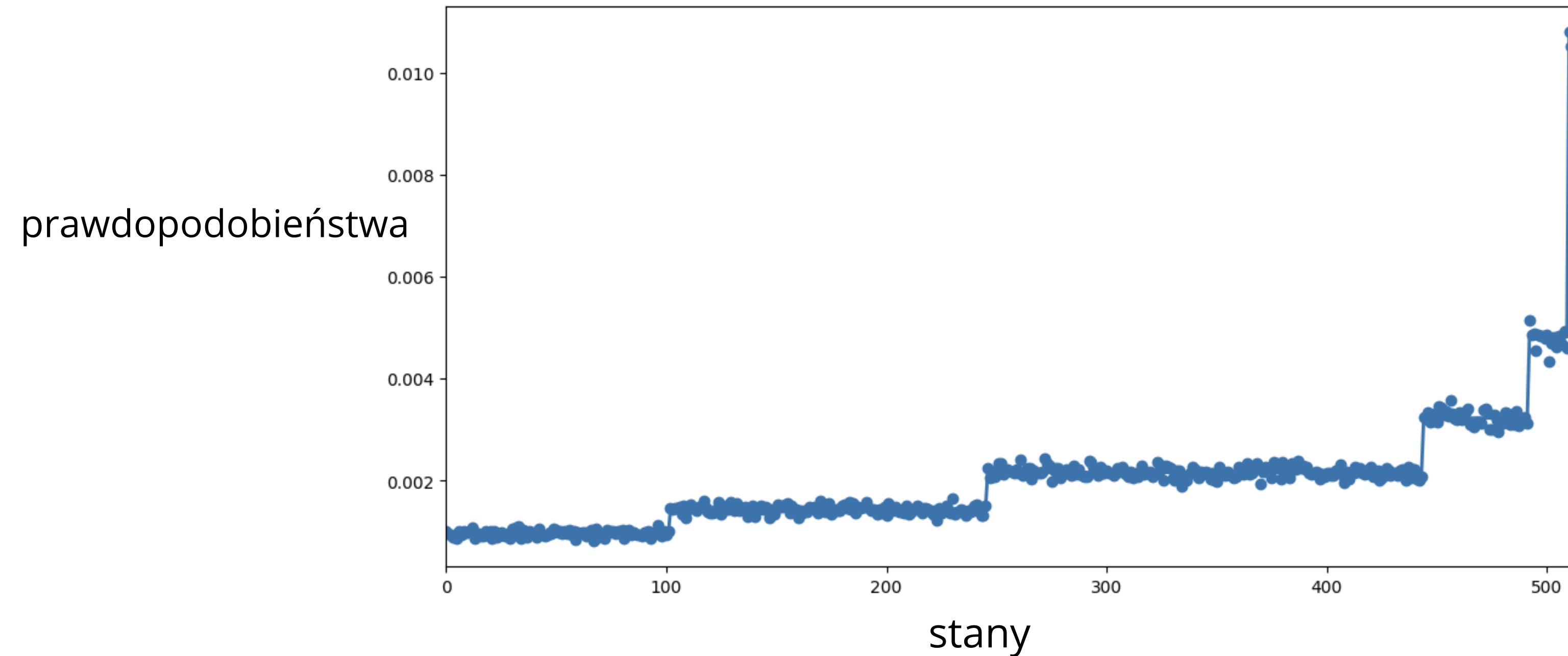
$$\mathbb{P}(Z = z | Y = y) \propto \mathbb{P}(Y = y | Z = z) \mathbb{P}(Z = z)$$

Sformułowanie problemu w postaci
pozwalającej na skorzystanie z algorytmu

$$\mathbb{P}(z = z | Y = y) \propto \exp \left(\sum_{ij} h y_{ij} z_{ij} + \sum_{ij} J_{ij} z_i z_j \right),$$
$$h = \log \left(\frac{q}{1-q} \right)$$

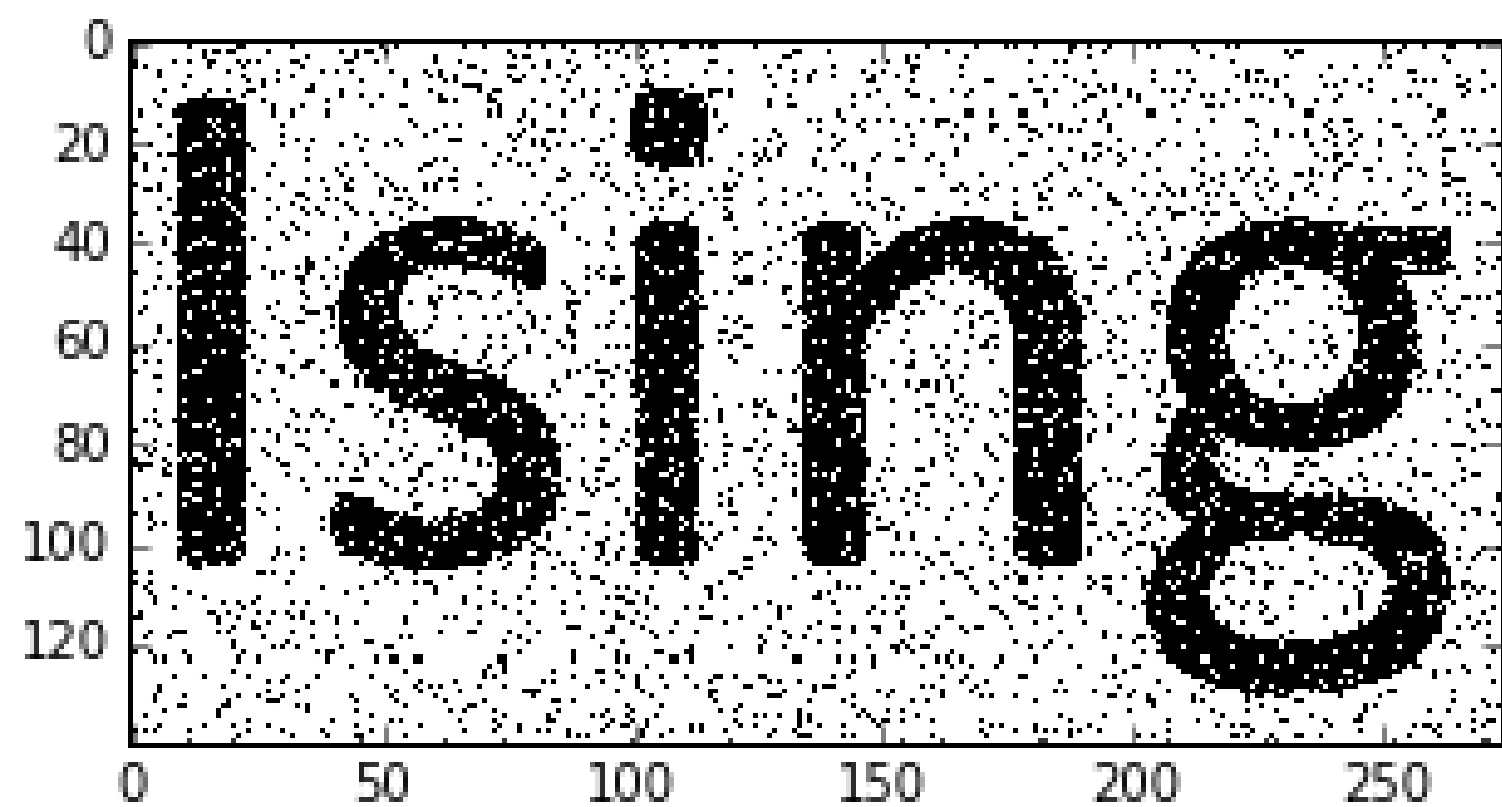
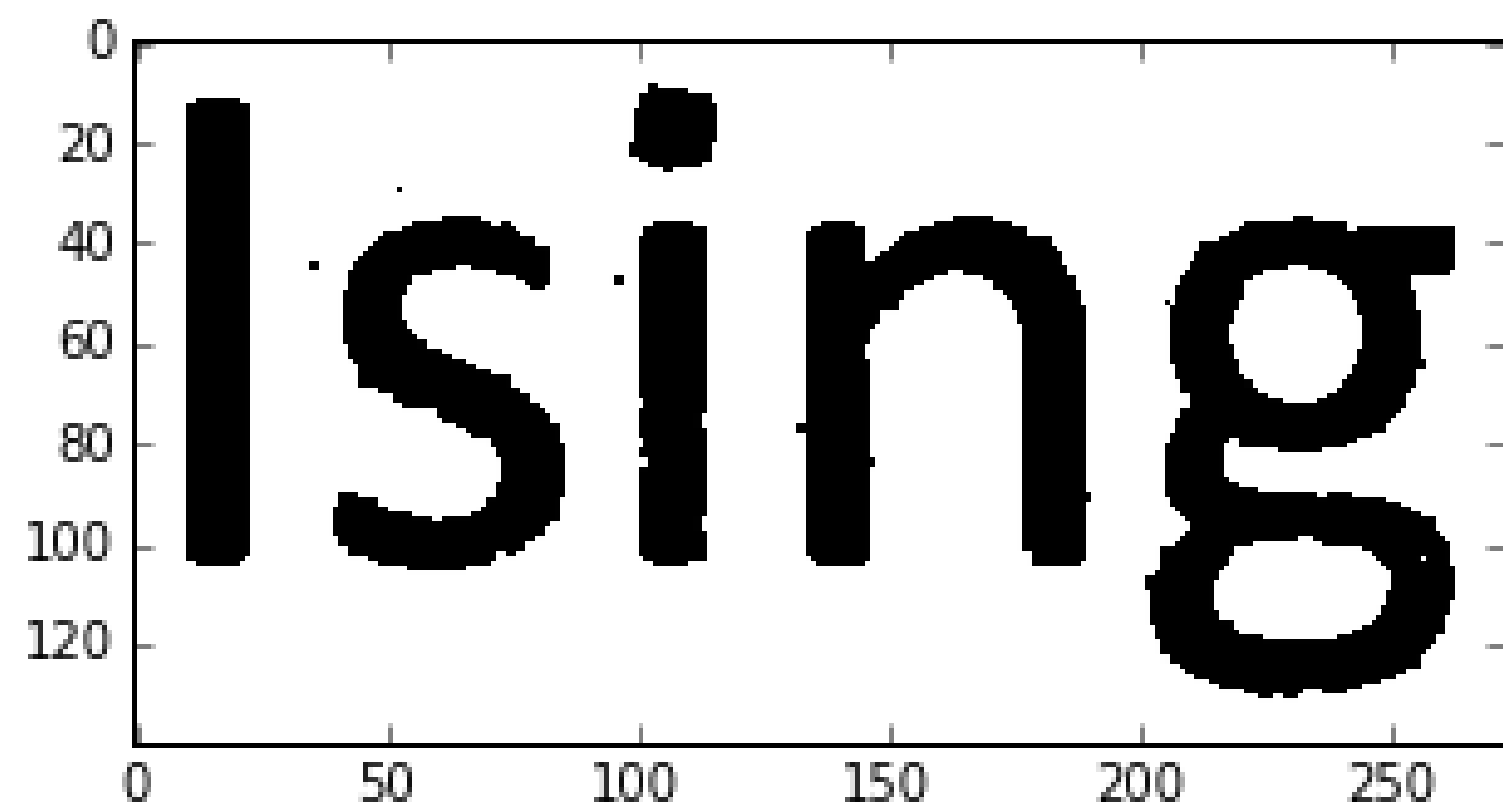
W dodatku dokładniej opisano skąd wynikają poszczególne wzory

Dokładne prawdopodobieństwa oraz otrzymane z próbnika Gibbsa

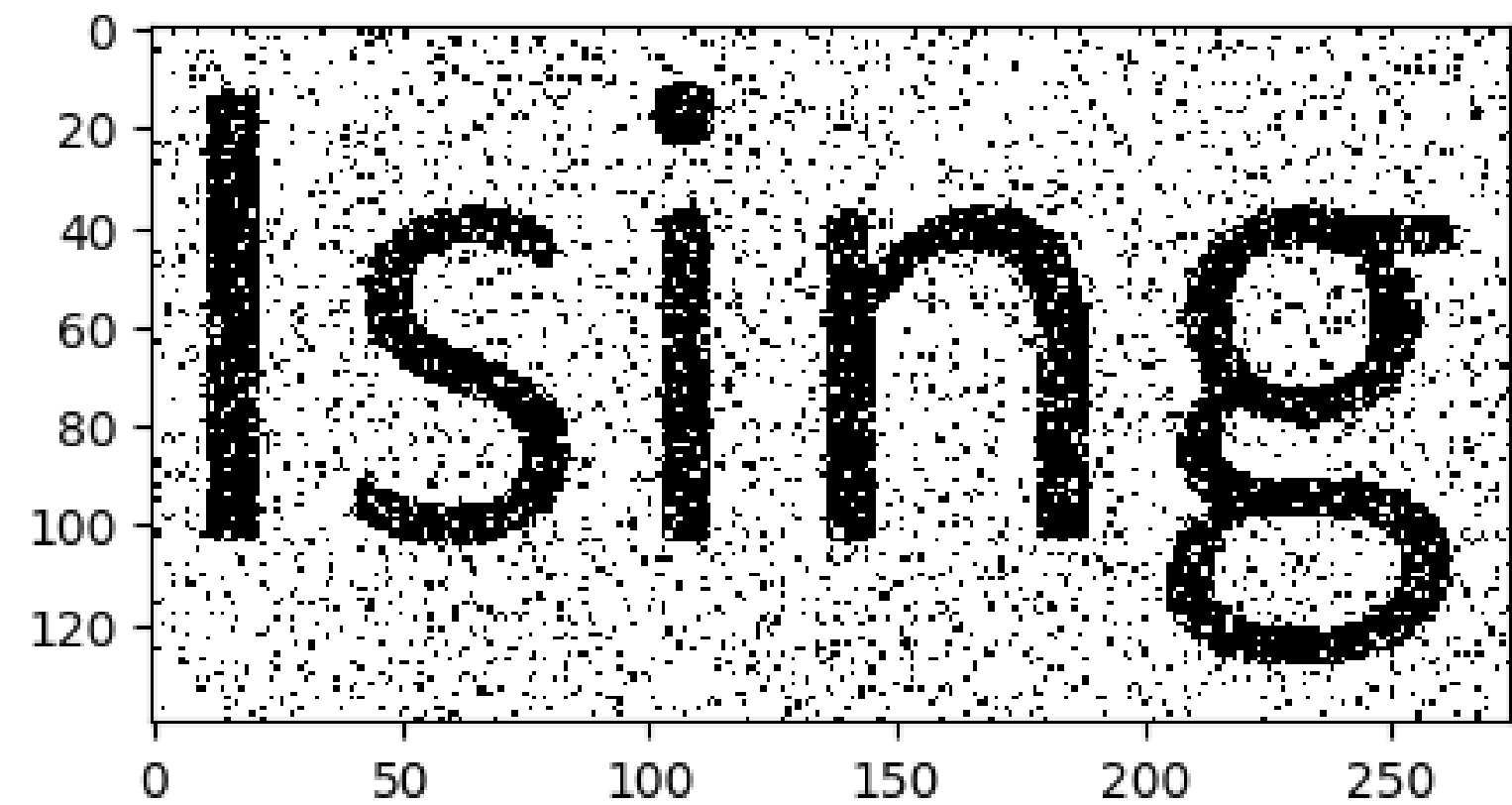
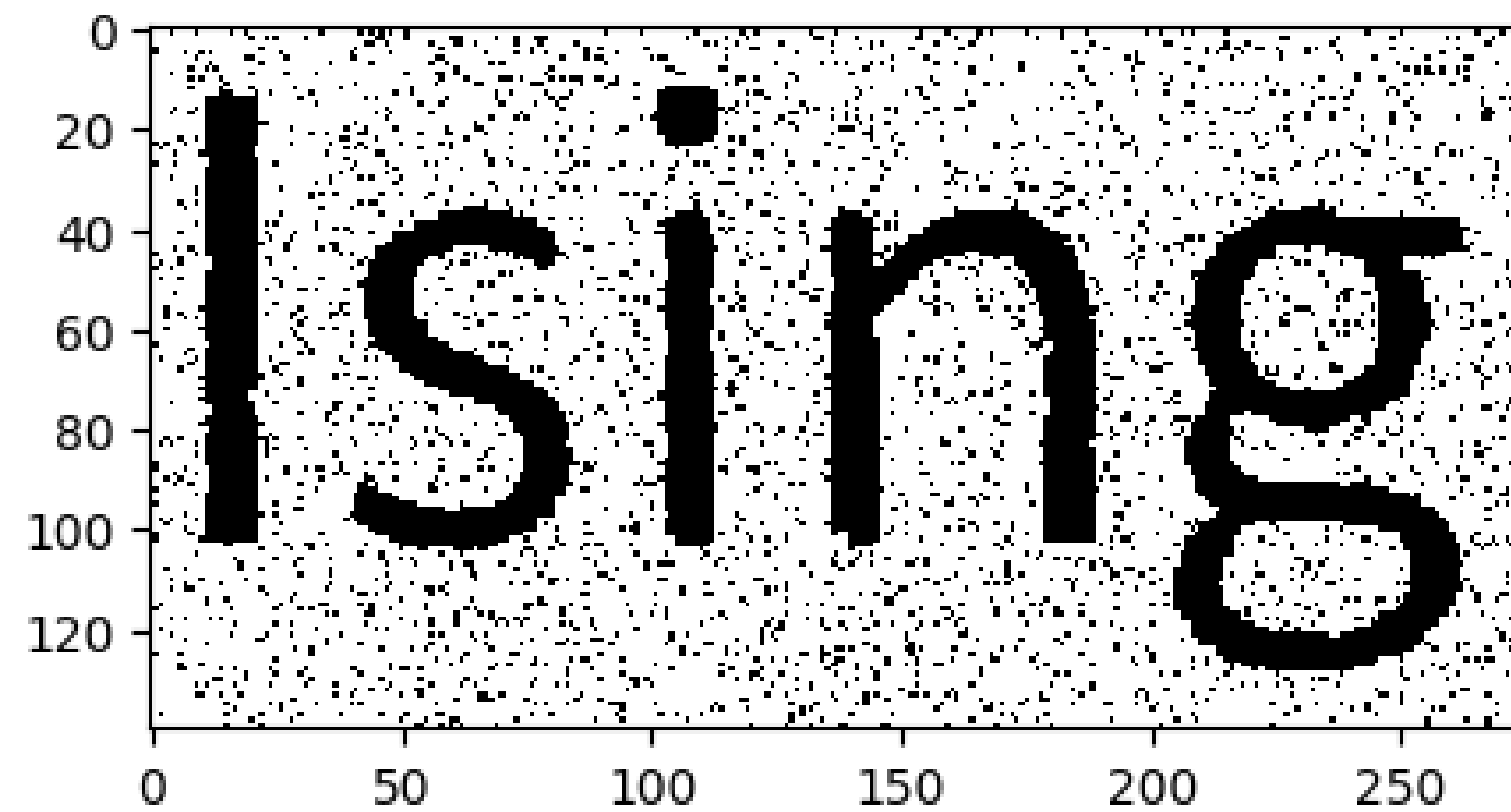


Testowanie modelu

Oczekiwania

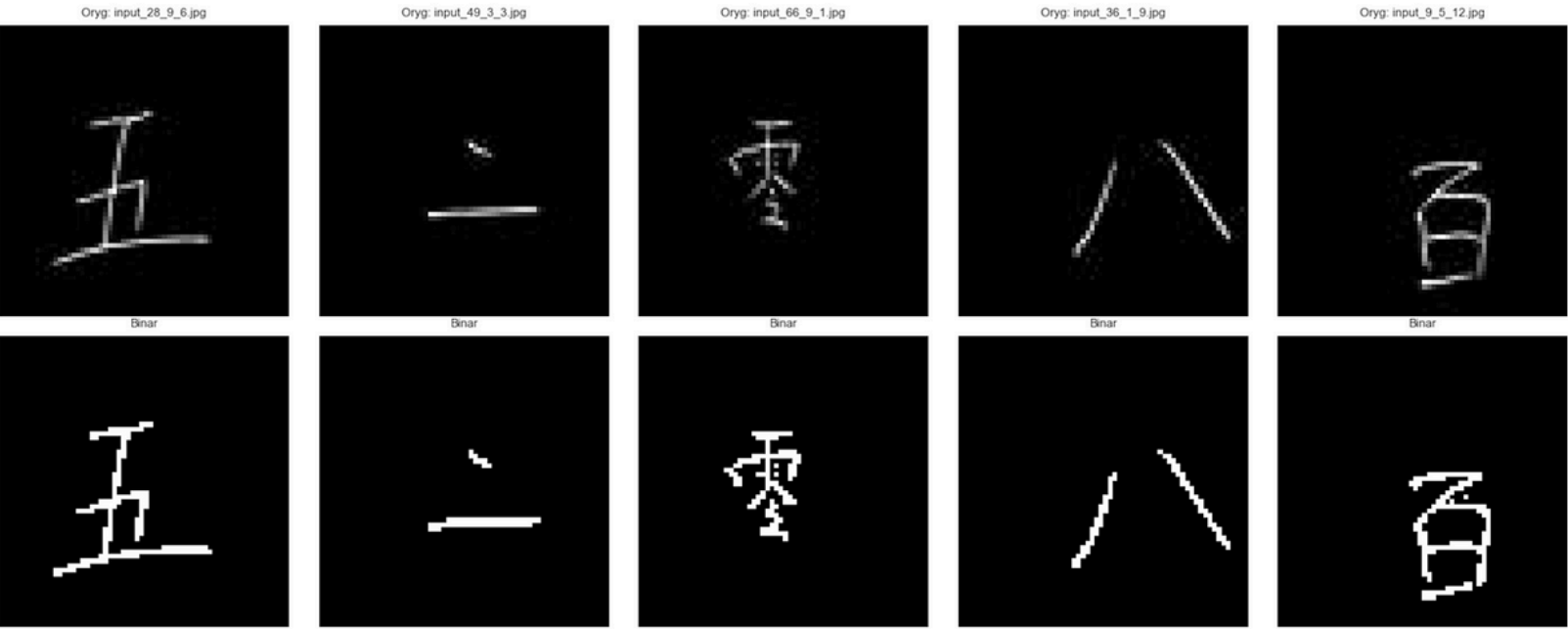


Rzeczywistość

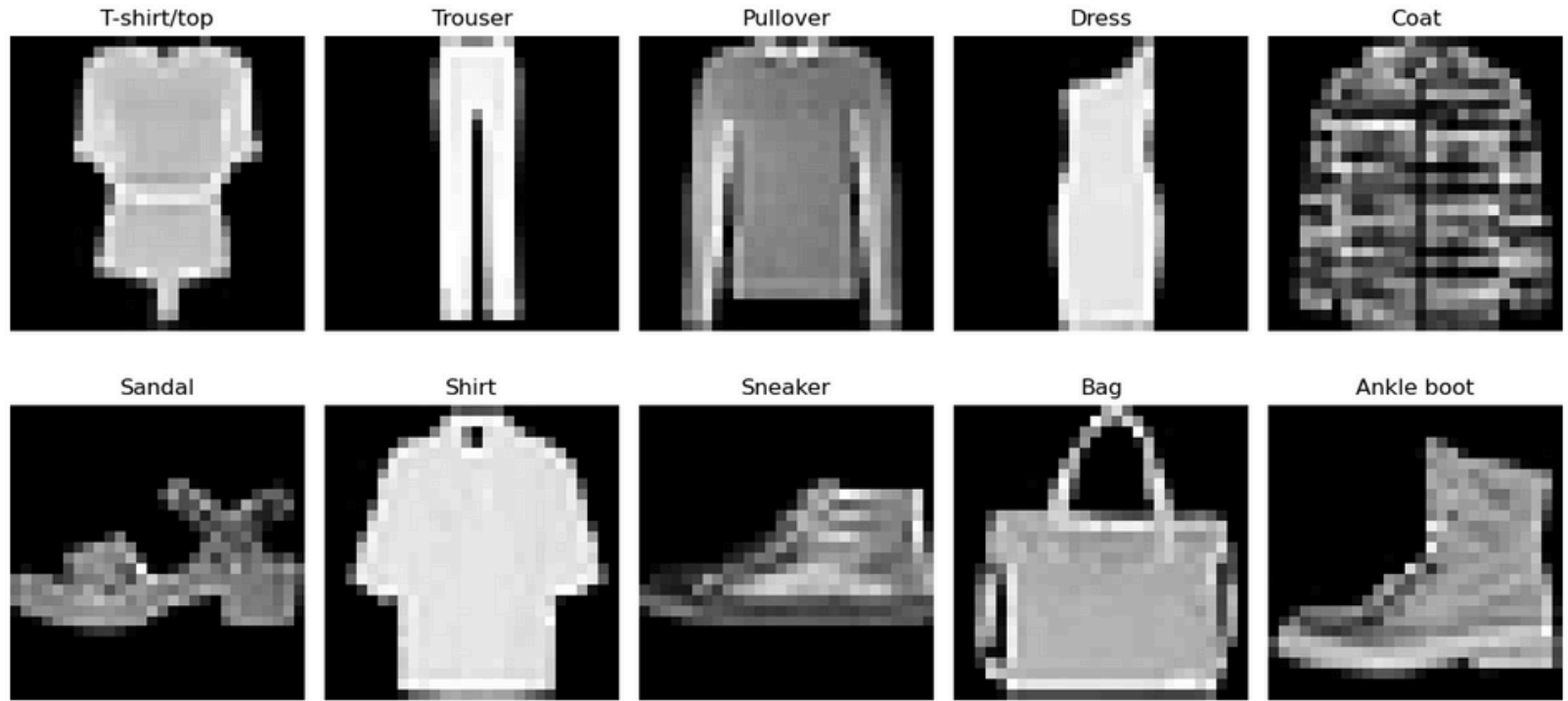


Dane

Zbiór Chinese MNIST

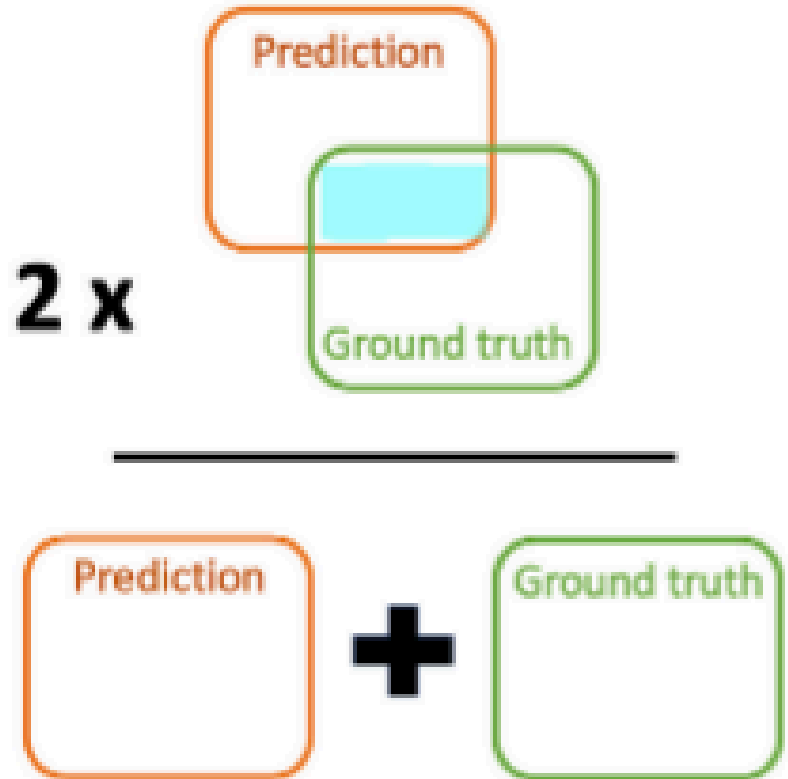


Zbiór Fashion MNIST




Wpływ intensywności zaszumienia na jakość odszumienia

Dice score

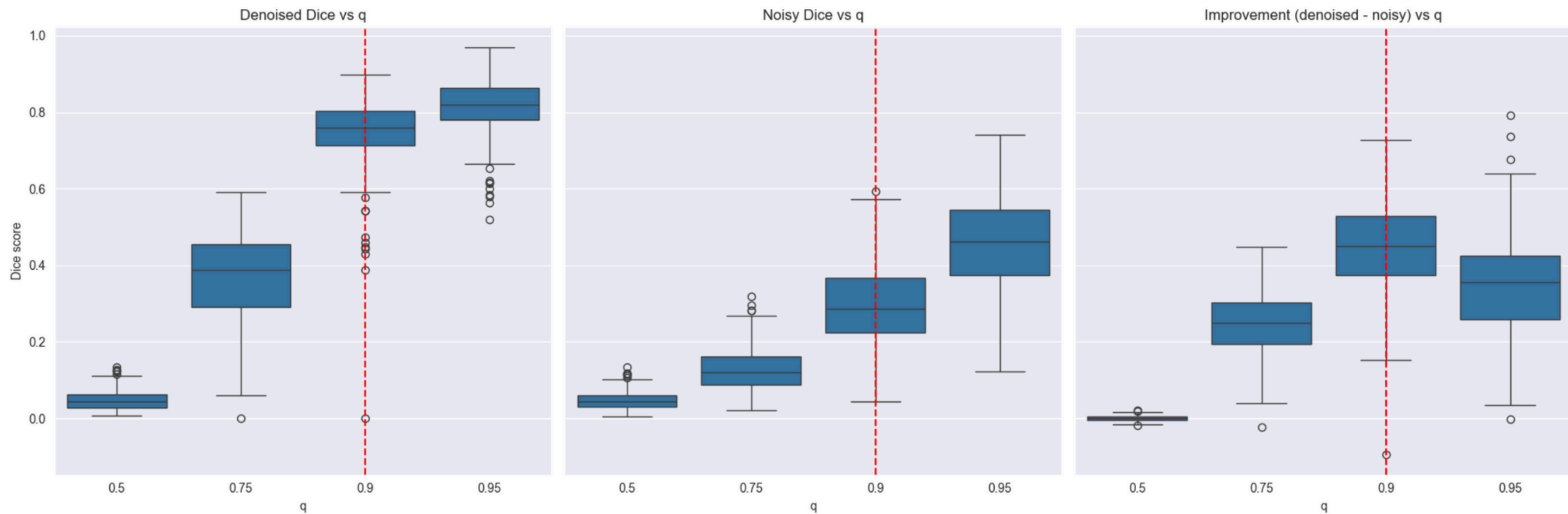
$$\text{Dice} = \frac{2 \times \text{Area of overlap}}{\text{Total area}} = \frac{2 \times \text{Area of overlap}}{\text{Prediction} + \text{Ground truth}}$$


Understanding Evaluation Metrics in Medical Image Segmentation

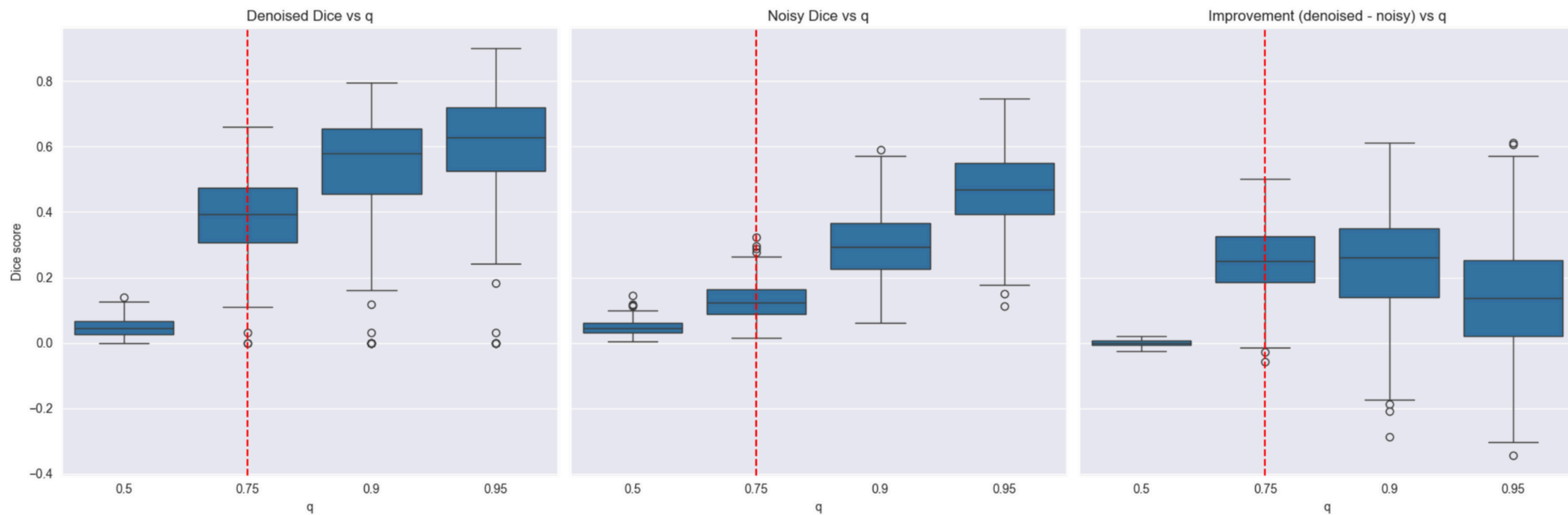
Implementation of some evaluation metrics in Python

 Medium / Sep 18, 2024

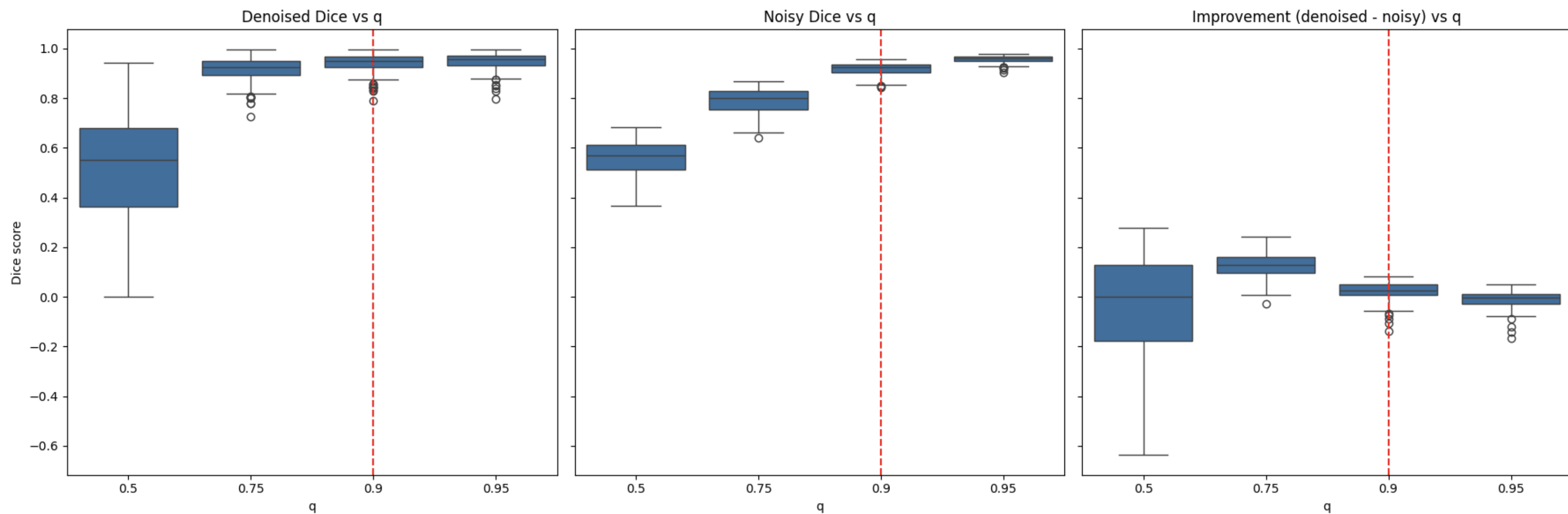
Wyniki gdy w modelu $q = 0.9$ [Chinese MNIST]



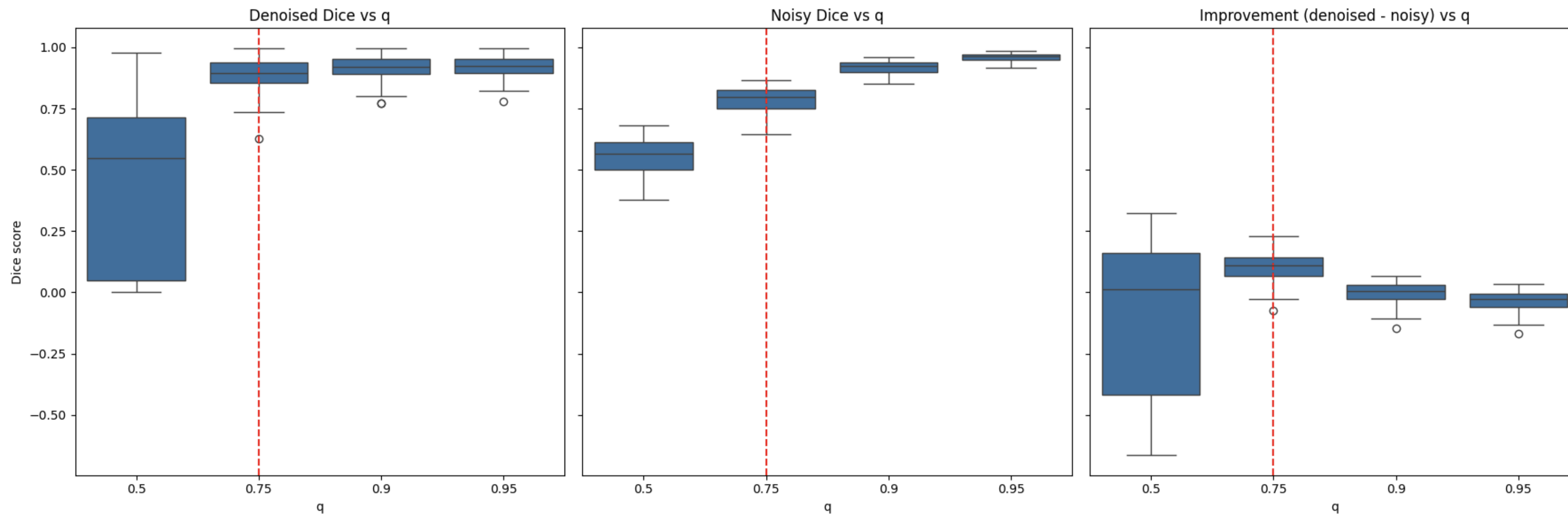
Wyniki gdy w modelu $q = 0.75$ [Chinese MNIST]



Wyniki gdy w modelu $q = 0.9$ [Fashion MNIST]



Wyniki gdy w modelu $q = 0.75$ [Fashion MNIST]



Wpływ kształtu obrazu na jakość odszumienia

Clumpiness

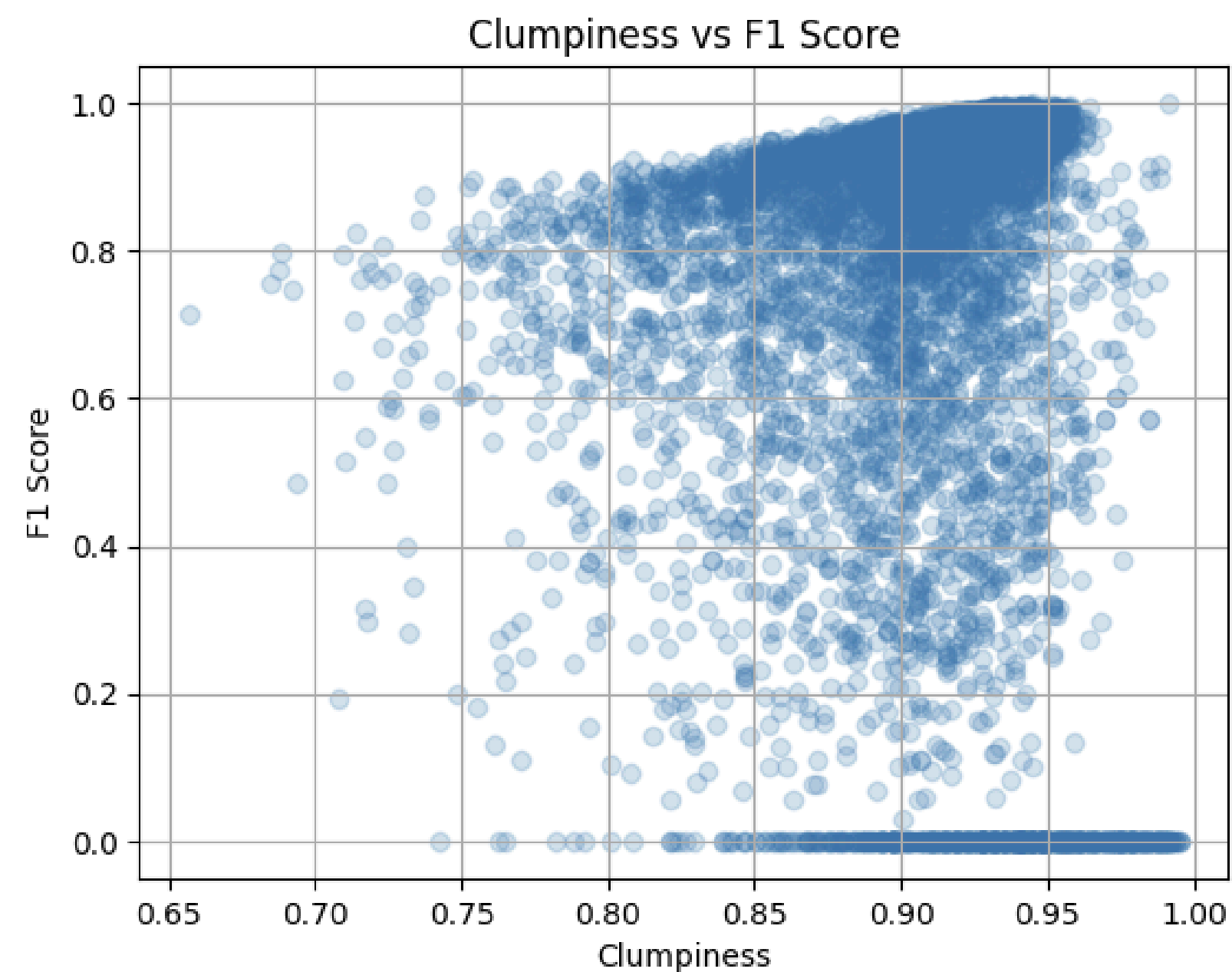
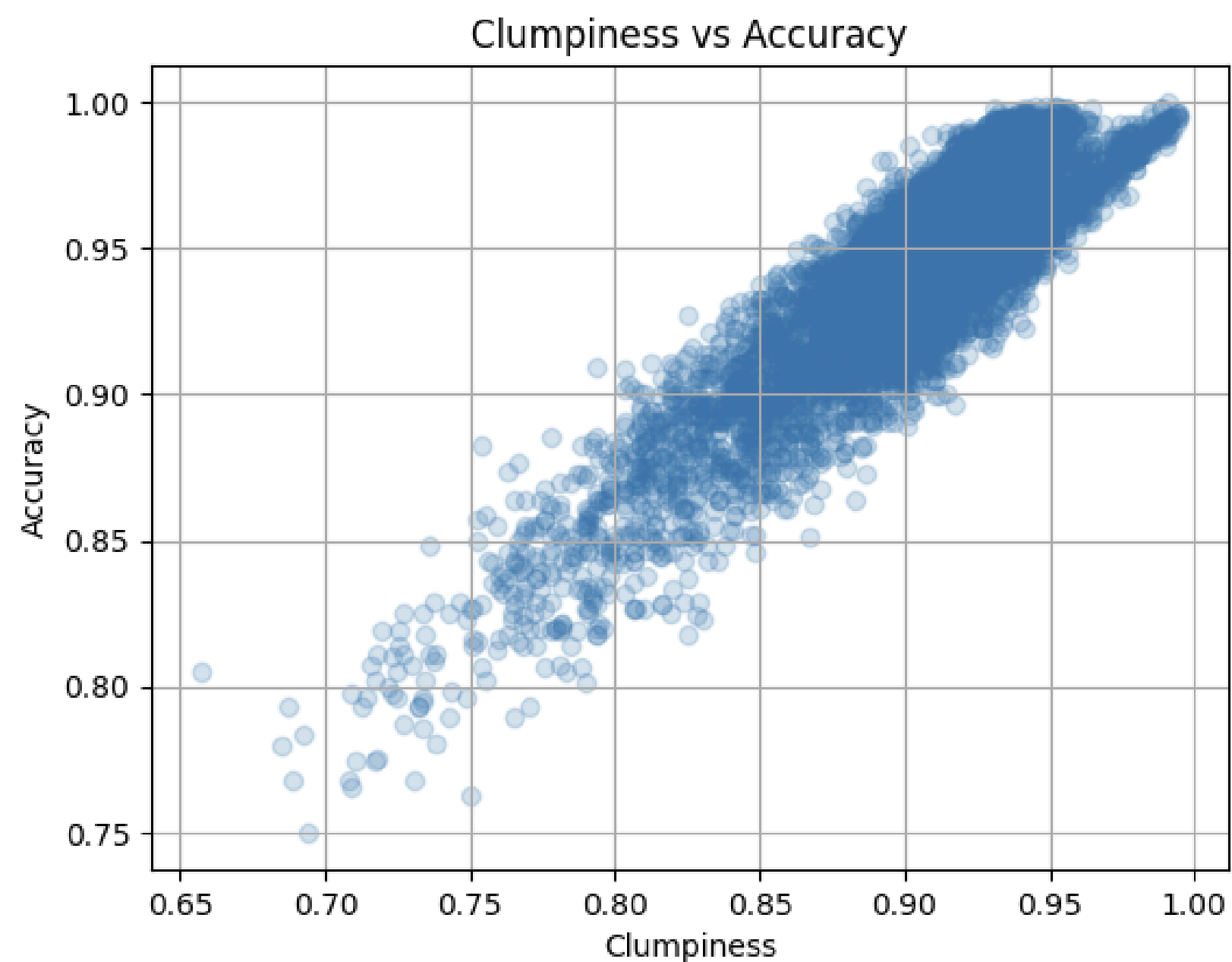
Algorithm 1 Obliczanie zwiezłości (clumpiness)

Require: Macierz Z o wymiarach $h \times w$

Ensure: Wartość zwiezłości (liczba rzeczywistych z przedziału $[0, 1]$)

```
1:  $suma \leftarrow 0$ 
2:  $liczność \leftarrow 0$ 
3: Zdefiniuj sasiedztwa:  $kierunki \leftarrow \{(-1, 0), (1, 0), (0, -1), (0, 1)\}$ 
4: for każde przesunięcie  $(dx, dy)$  w  $kierunki$  do
5:    $Z_{\text{shift}} \leftarrow$  macierz  $Z$  przesunięta o  $(dx, dy)$  z zawijaniem krawedzi
6:    $A \leftarrow \frac{Z \cdot Z_{\text{shift}} + 1}{2}$  {1 jeśli takie same, 0 jeśli różne}
7:    $suma \leftarrow suma + \sum A$ 
8:    $liczność \leftarrow liczność + h \cdot w$ 
9: end for
10: return  $suma/liczność$ 
```

Wyniki gdy w modelu $q = 0.9$ [Fashion MNIST]



Porównanie odszumienia z oryginałem, $q = 0.9$

[Fashion MNIST]

Images with the Highest Clumpiness

Clumpiness: 0.95



Clumpiness: 0.95



Clumpiness: 0.95



Clumpiness: 0.95



Clumpiness: 0.95



Images with lowest clumpiness

Clumpiness: 0.66



Clumpiness: 0.68



Clumpiness: 0.69



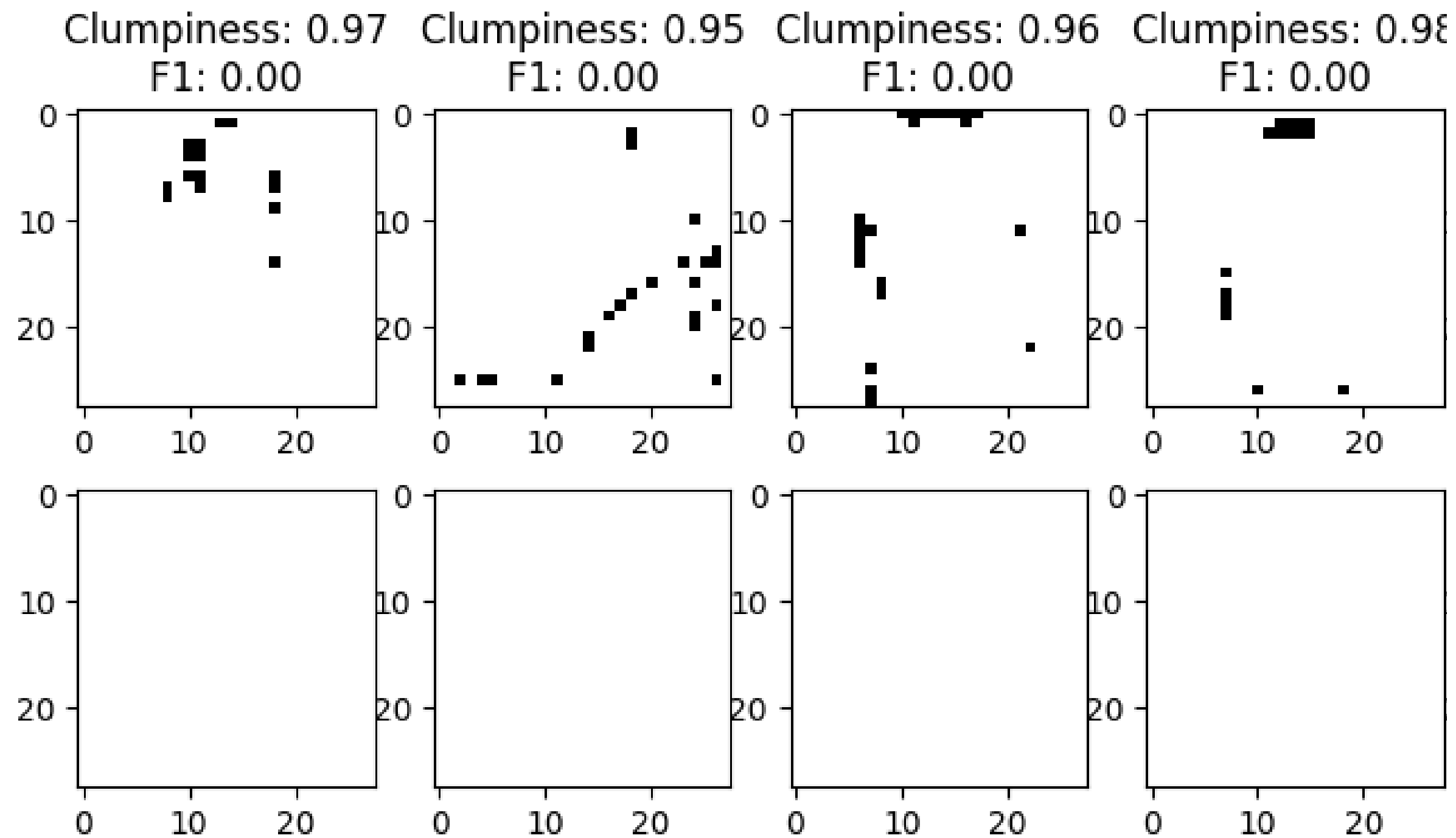
Clumpiness: 0.69



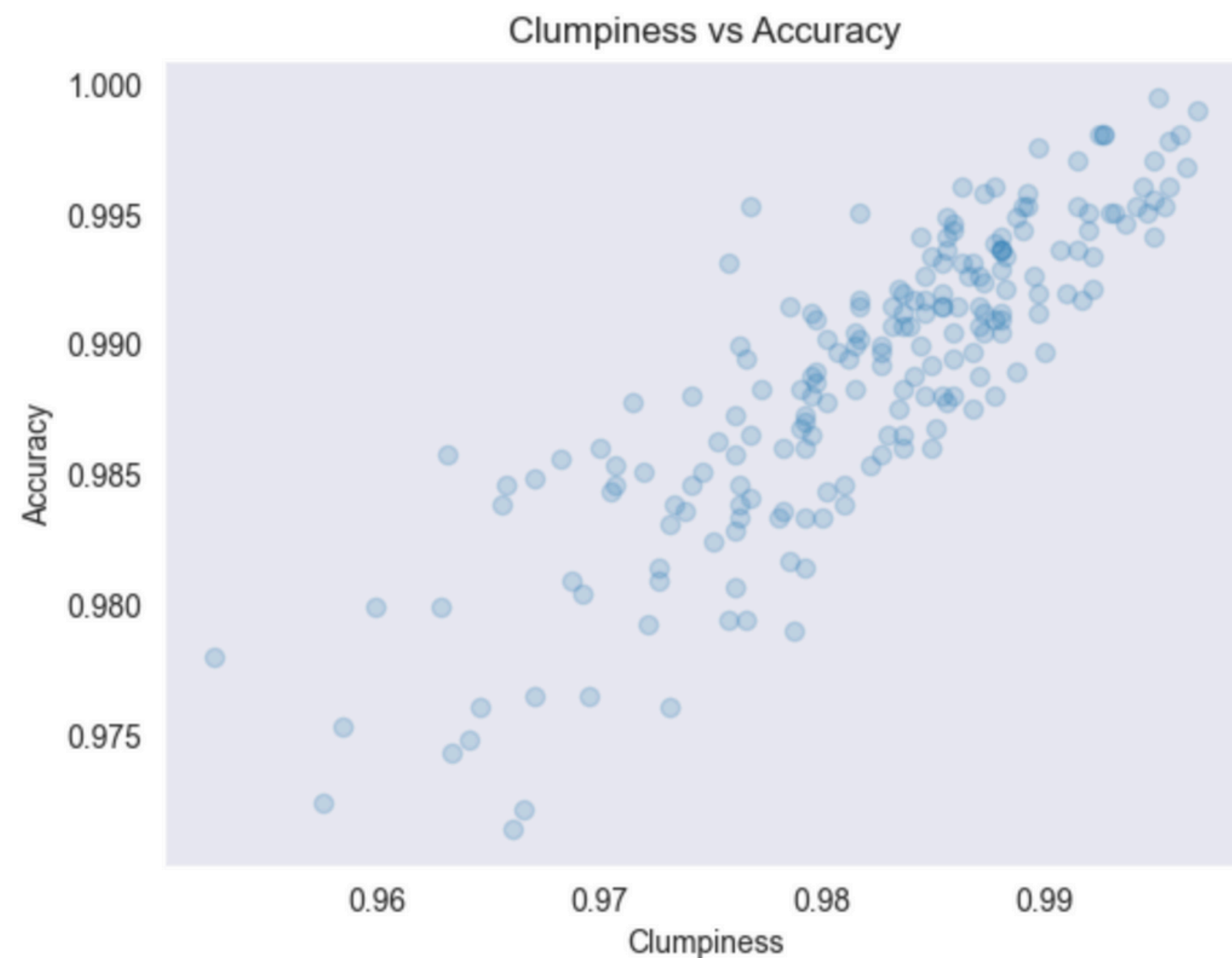
Clumpiness: 0.69



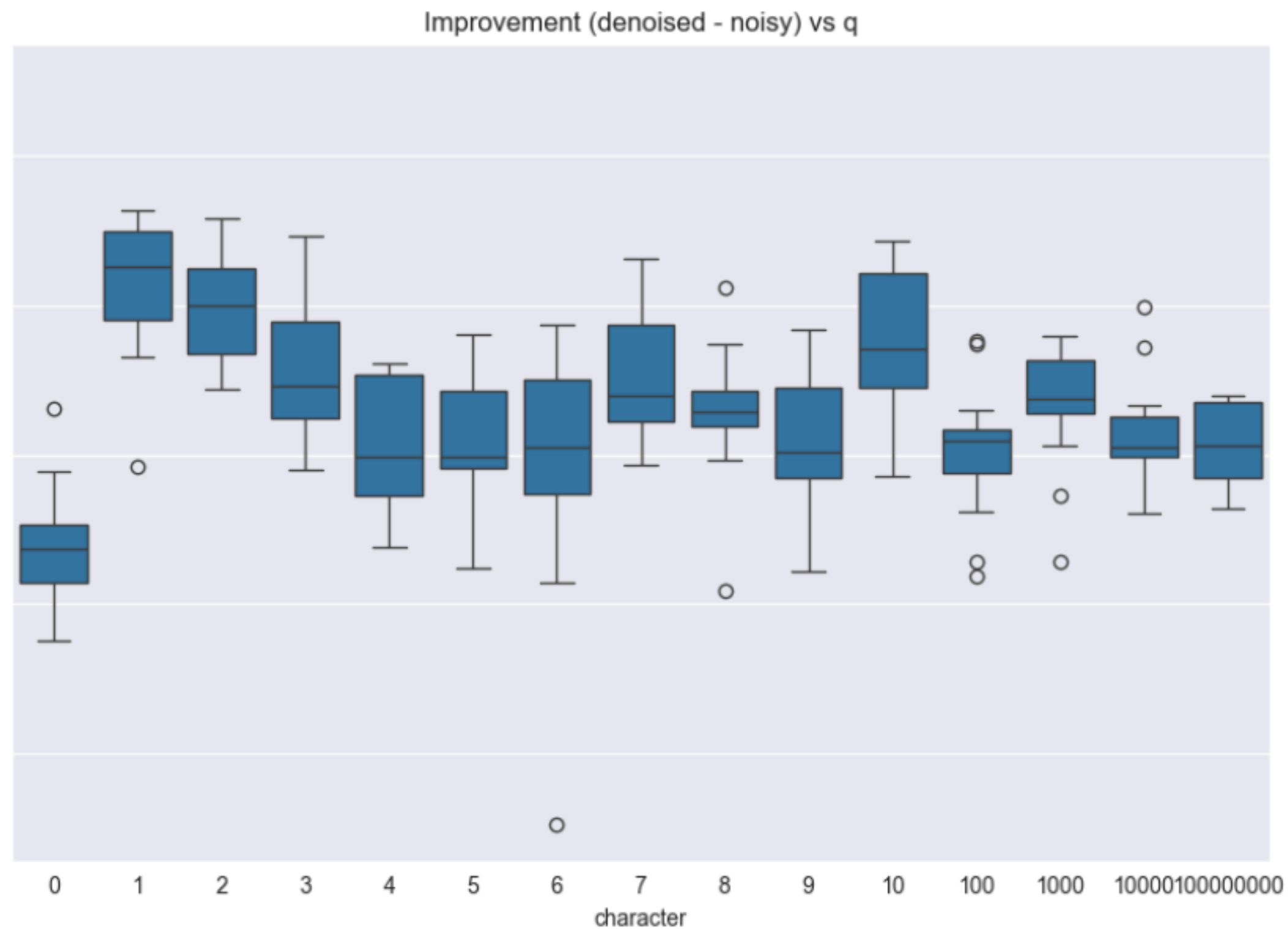
Obserwacje odstające - F1 score



Wyniki gdy w modelu $q = 0.9$ [Chinese MNIST]



Wyniki gdy w modelu $q = 0.9$ [Chinese MNIST]



Porównanie odszumienia z oryginałem, $q = 0.9$

[Chinese MNIST]

Znak: 0
Original



Znak: 0
Original



Znak: 0
Original



Znak: 0
Original



Znak: 0
Original



Denoised



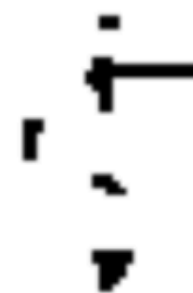
Denoised



Denoised



Denoised



Denoised



Porównanie odszumienia z oryginałem, $q = 0.9$

[Chinese MNIST]

Znak: 1
Original



Znak: 1
Original



Znak: 1
Original



Znak: 1
Original



Znak: 1
Original



Denoised



Denoised



Denoised



Denoised



Denoised



Modyfikacje

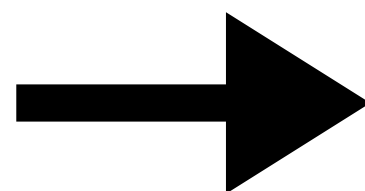
Zmiana sąsiedztwa

Zmiana sąsiedztwa

Poprzez modyfikacje współczynników $J_{\{nm\}}$:

4 sąsiadów

0 1 0
1 x 1
0 1 0

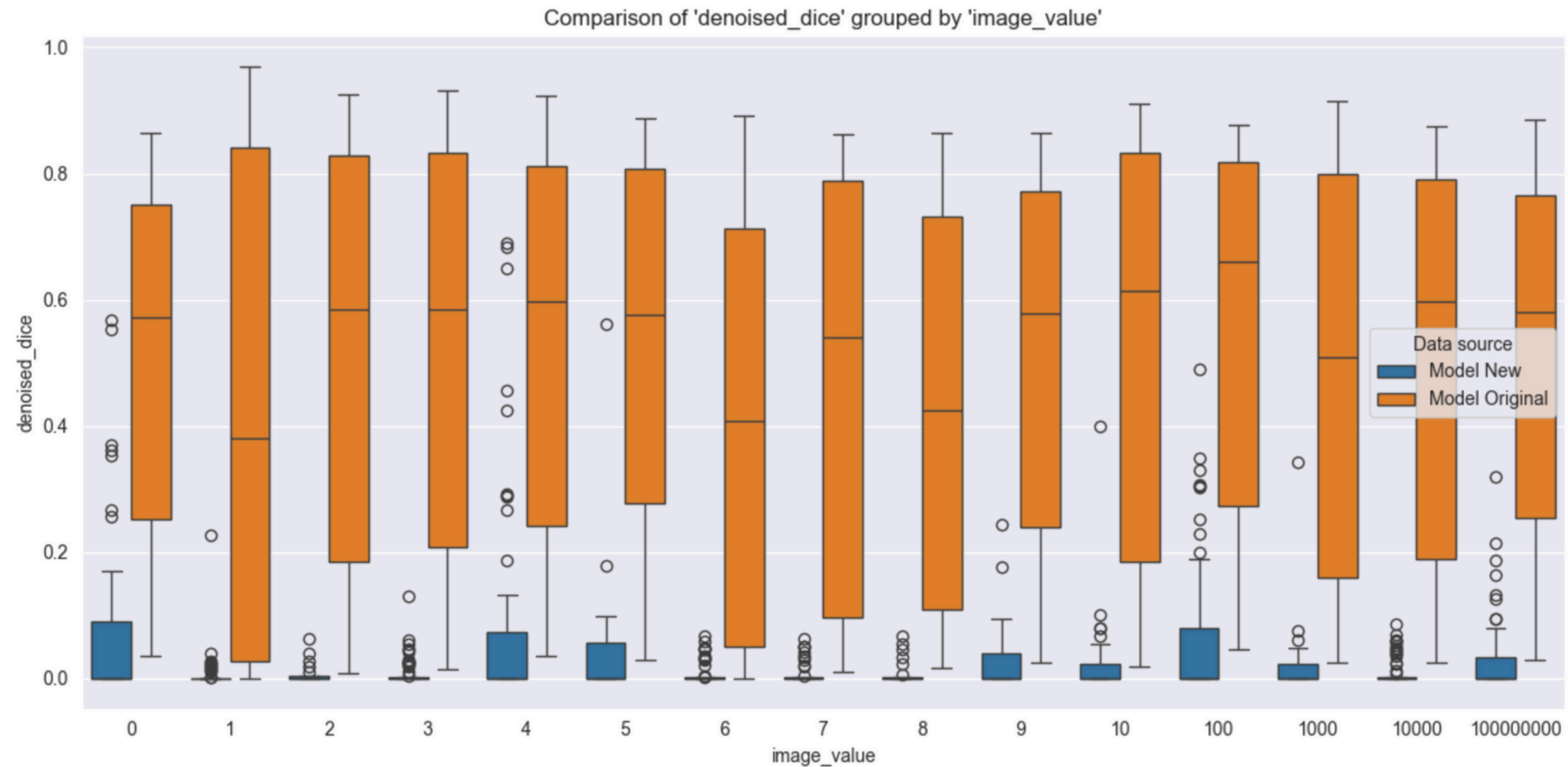


8 sąsiadów

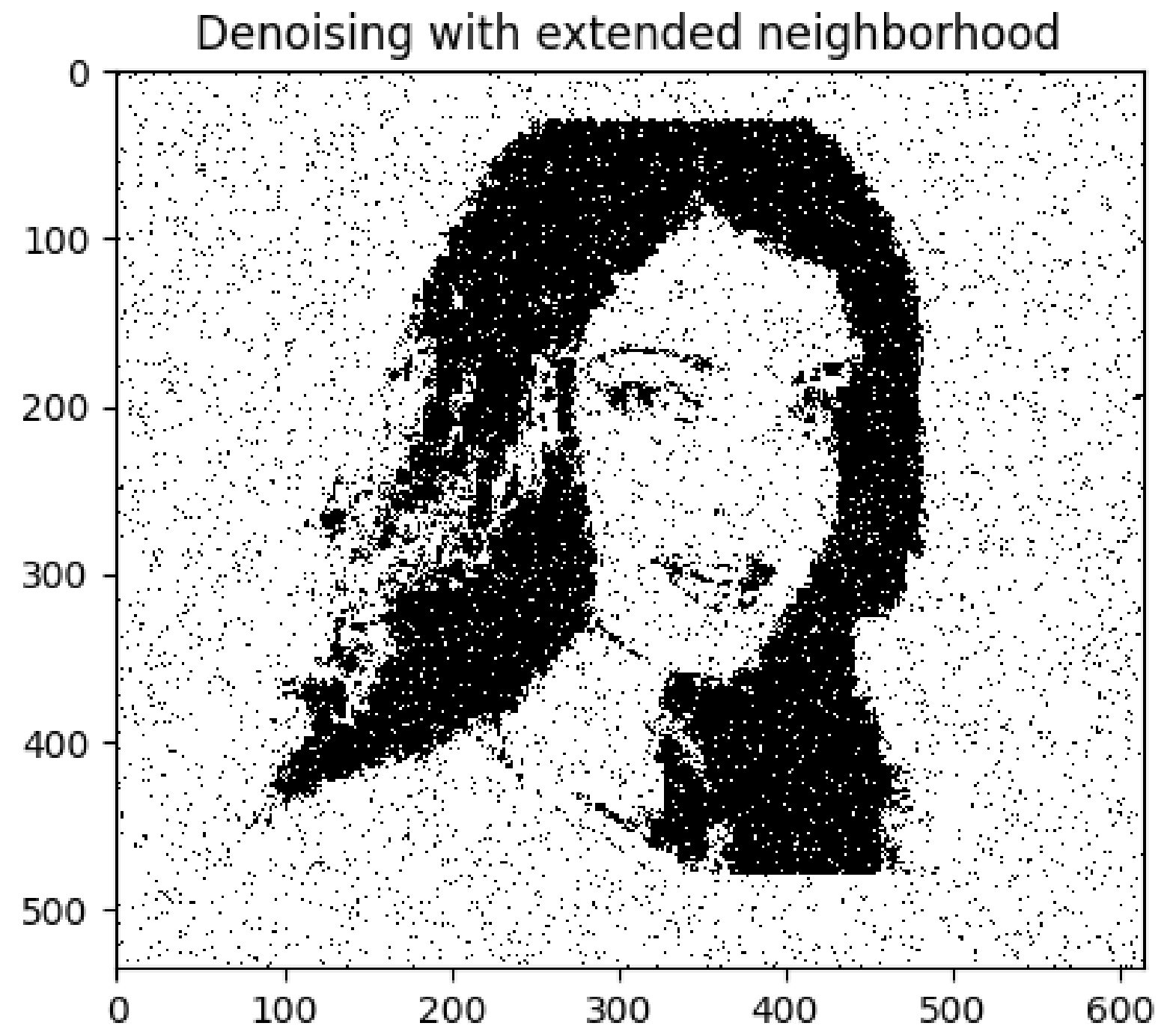
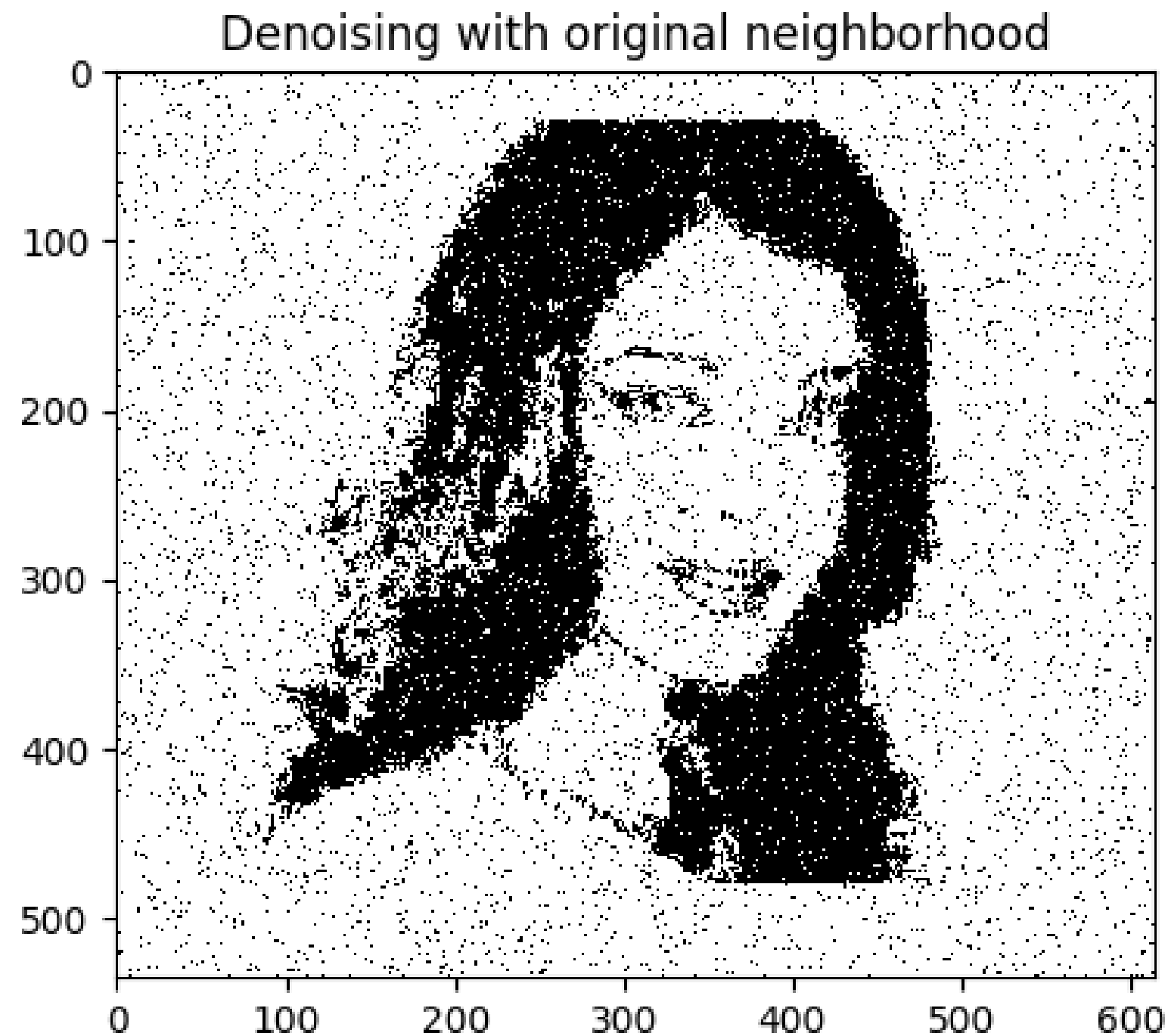
1 1 1
1 x 1
1 1 1

Porównanie wyników przed i po zmianie sąsiedztwa, $q = 0.9$

[Chinese MNIST]



Porównanie wyników odszumiania z wykorzystaniem nowego sąsiedztwa



Dodanie symulowanego wyżarzania

W celu poprawy procesu próbkowania i unikania lokalnych minimów w przestrzeni stanów, zastosowano różne schematy wyżarzania:

- liniowy
- wykładniczy
- potęgowy
- cosinusowy

W każdym ze schematów początkową wartość parametru beta ustawiano na 0.1 a docelową na 2.

Liczba kroków burn-in - kroków nie wykorzystywanych do obliczania wyników końcowych wynosiła 50000.

Znacznie lepsze odszumienie tła

Annealing: linear

Ising

Annealing: exponential

Ising

Annealing: power

Ising

Annealing: cosine

Ising

Annealing: linear



Annealing: exponential



Annealing: power



Annealing: cosine



Dziękujemy za uwagę!