Étude Numérique Approfondie d'une Intégrale Physique :

Comparaison des Méthodes Numériques dans L'Etude de Mouvement de Pendule Simple

Membres : Zakaria LOURGHI

24 janvier 2025

Introduction

Les intégrales jouent un rôle fondamental en mathématiques appliquées et en physique. Elles permettent de modéliser des phénomènes variés, allant de la propagation des ondes au calcul d'énergies potentielles. Cependant, certaines intégrales, notamment celles associées à des problèmes réels, ne peuvent pas être résolues analytiquement à cause de la complexité des fonctions impliquées. Ces intégrales nécessitent donc des méthodes numériques pour être approximées avec précision.

Dans ce travail, nous abordons une intégrale issue de la physique qui modélise la période d'un pendule simple. Ce problème est particulièrement intéressant car il met en évidence des défis typiques des calculs numériques : singularités, convergence des méthodes et limitations des approximations.

Nous proposons une étude détaillée en utilisant trois approches :
- La méthode des trapèzes, une technique simple basée sur des approximations linéaires.
- La méthode de Simpson, qui utilise des paraboles pour une meilleure précision.
- Une méthode basée sur les fonctions elliptiques pour obtenir une estimation analytique approchée.

Présentation du problème

Le mouvement du pendule simple

Un pendule simple est un système mécanique idéal constitué d'une masse ponctuelle suspendue à une longueur L et oscillant sous l'effet de la gravité g. Lorsque les oscillations sont petites, la période T peut être approximée par la formule classique :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Cependant, lorsque l'amplitude augmente, cette approximation devient inexacte. Dans ce cas, la période exacte est donnée par l'expression suivante :

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta,$$

où k est une constante dépendant de l'amplitude maximale Θ_0 du pendule :

$$k = \sin\left(\frac{\Theta_0}{2}\right).$$

Cette intégrale est une forme spéciale de l'intégrale elliptique de première espèce. Elle ne peut pas être résolue analytiquement dans sa forme générale, ce qui justifie l'utilisation des méthodes numériques.

Défis associés à cette intégrale

Plusieurs aspects rendent ce problème intéressant :

- La présence de la racine $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ introduit une singularité lorsque $k \to 1$.
- La précision des méthodes numériques dépend du choix du nombre de subdivisions n.
- Les calculs numériques doivent converger rapidement tout en restant efficaces en termes de coût computationnel.

Méthodes numériques étudiées

Pour résoudre l'intégrale, nous appliquons trois méthodes classiques : les trapèzes, Simpson et une solution basée sur les fonctions elliptiques.

1. Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes approxime l'intégrale en découpant l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles, puis en remplaçant chaque segment par un trapèze. La formule est donnée par :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right],$$

où $h = \frac{b-a}{n}$ est la largeur des sous-intervalles.

2. Méthode de Simpson

La méthode de Simpson utilise des paraboles pour approcher l'aire sous la courbe. La formule est donnée par :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{\text{impair}} f(x_i) + 2\sum_{\text{pair}} f(x_i) + f(b)\right].$$

Cette méthode est généralement plus précise que celle des trapèzes pour un même nombre de subdivisions.

3. Approximation par les fonctions elliptiques

L'intégrale étudiée est équivalente à une intégrale elliptique de première espèce $K(k)$, donnée par :

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta.$$

Nous utilisons une approximation numérique de $K(k)$ pour comparer nos résultats.

Résultats numériques

Les calculs numériques ont été effectués pour différentes valeurs de subdivisions n. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci-dessous :

n	Trapèze	Simpson	Erreur Trapèze	Erreur Simpson
2	4.276300	3.584088	9.196999e-01	2.274873e-01
4	3.533865	3.286386	1.772642e-01	7.021431e-02
8	3.368911	3.313926	1.231046e-02	4.267413e-02
16	3.356693	3.352621	9.294095e-05	3.979567e-03
32	3.356601	3.356570	7.468645e-09	3.097036e-05
64	3.356601	3.356601	8.881784e-16	2.489548e-09
128	3.356601	3.356601	8.881784e-16	4.440892e-16
256	3.356601	3.356601	8.881784e-16	8.881784e-16

Table 1 – Comparaison des méthodes numériques avec erreurs associées

Graphes des résultats

Pour mieux visualiser les résultats, les graphes suivants présentent l'évolution des valeurs des méthodes des trapèzes et de Simpson, ainsi que les erreurs associées en fonction de n (nombre de subdivisions).

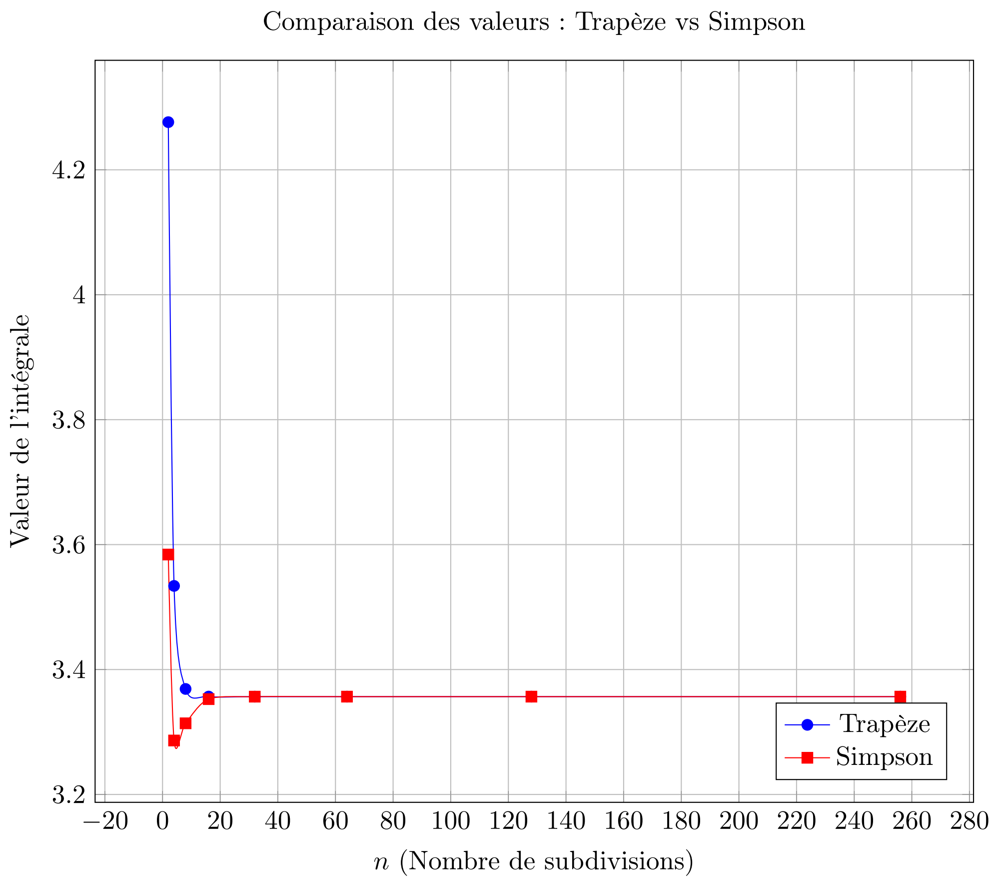

Figure 1 – Comparaison des valeurs calculées pour les méthodes des trapèzes et de Simpson

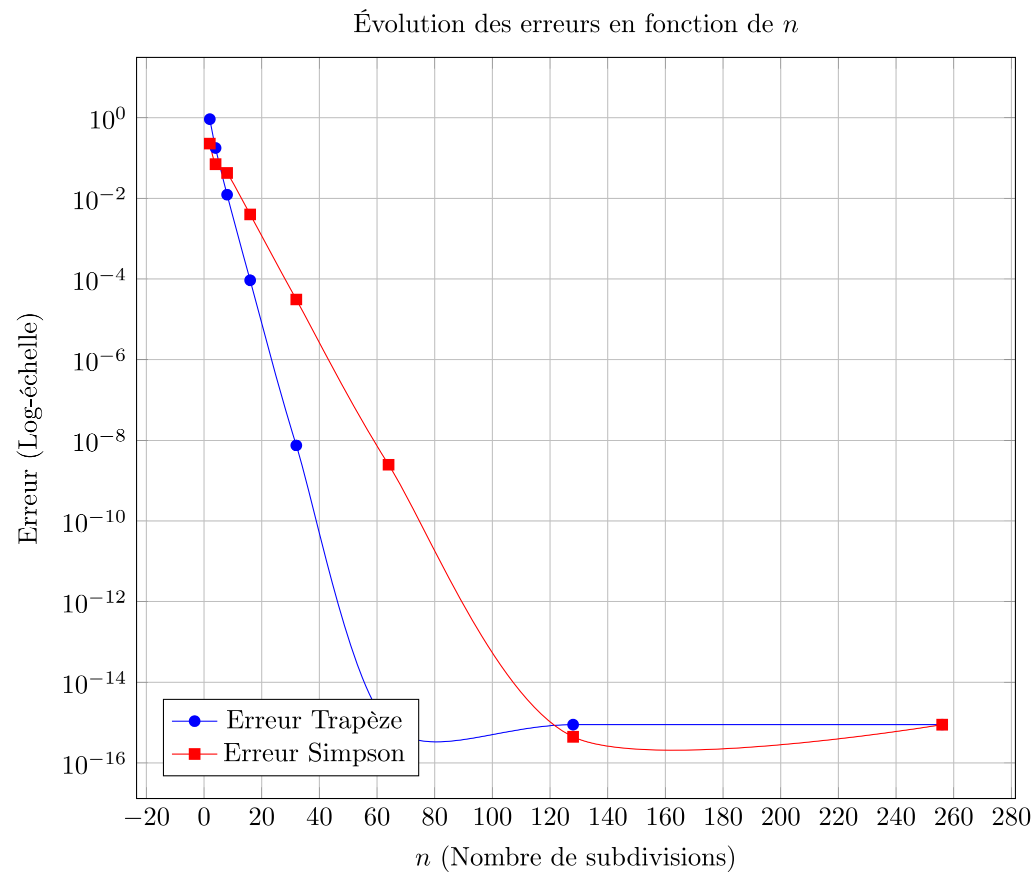

FIGURE 2 – Évolution des erreurs numériques (Trapèze et Simpson) en fonction de n

Analyse des résultats

- La méthode de Simpson converge plus rapidement vers la valeur exacte, nécessitant moins de subdivisions pour atteindre une précision acceptable.
- La méthode des trapèzes est moins précise mais reste une alternative simple et robuste.
- Les erreurs pour les deux méthodes diminuent rapidement à mesure que n augmente, confirmant la convergence des résultats.

Conclusion

Ce travail a permis de comparer plusieurs méthodes numériques pour résoudre une intégrale complexe liée à la physique. La méthode de Simpson se distingue par sa précision et son efficacité, tandis que la méthode des trapèzes offre une solution intuitive pour des calculs rapides. Enfin, l'utilisation des fonctions elliptiques permet de valider les résultats obtenus.