Licence Informatique S4 – 2020
Probabilités-Statistique Fiche 3 – Version bis avec indications

18 mars 2020

1. *La propriété d'absence de mémoire*
   (a) Montrer que si X est une v. a. de loi géométrique, elle vérifie la propriété d'absence de mémoire suivante :
   $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k). \qquad (1)$$
   Indication : On calcule d'abord $P(X > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, en se souvenant de la loi géométrique. On utilise ensuite la définition de la probabilité conditionnelle $P(A|B)$ pour réécrire $P(X > n+k \mid X > n)$. Que se passe-t-il lorsque $A \subset B$? Il reste à conclure.
   Interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.
   (b) Trouver toutes les lois qui vérifient la propriété (**??**).

   *Indication : On notera $G(n) = P(X > n)$ et on montrera que (**??**) se traduit par une relation simple entre $G(n+k)$, $G(n)$ et $G(k)$. Que peut-on dire de $G(2), G(3), G(4)$ en relation avec $G(1)$? Conclure.*
2. Calculer l'espérance et la variance de X dans les cas suivants :
   (a) $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(p)$ (Bernoulli),
   (b) $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$ (Binomiale),
   (c) $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$ (Géométrique),
   (d) $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ (Poisson),
   (e) $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\alpha)$ (Exponentielle),
   (f) $X \rightsquigarrow \mathscr{N}(\mu,\sigma)$ (Normale).

Indication : On en a calculé plusieurs en cours. Une recherche sur internet permet de trouver des pistes pour calculer ces valeurs. Pour la loi normale, le calcul de σ n'est pas exigible.

3. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

Indication : On peut exprimer l'espérance sous la forme d'une double somme puis l'inverser. Concrètement :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) &= \mathbb{P}(X \geq 1) + \mathbb{P}(X \geq 2) + \mathbb{P}(X \geq 3) + \mathbb{P}(X \geq 4) + \dots \\
&= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \dots \\
&\qquad\qquad\quad + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \dots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) + \dots \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Dans le même esprit, montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X \geq n) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{n}.$$

Indication : On écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X \geq n) = \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X = n+3) + \mathbb{P}(X = n+4) + \dots$$

On peut alors remarquer que $n\mathbb{P}(n+k) \leq (n+k)\mathbb{P}(n+k)$ pour tout n et k. Puis contempler la formule pour $\mathbb{E}(X)$ et conclure.

4. *Temps d'attente de Pierre et Paul.* Pierre et Paul ont rendez-vous entre 12h et 12h30. Dans un premier temps, on discrétise le temps et on modélise cette situation par

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 30\}^2,$$

le tirage $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ représentant la situation où Pierre arrive ω_1 minutes après 12h et où Paul arrive ω_2 minutes après 12h. On fait l'hypothèse d'équiprobabilité.

   (a) Quelle est la probabilité de l'événement « Pierre et Paul arrivent en même temps » ?

   Indication : C'est analogue à l'exercice 7 du TD2, c'est-à-dire la probabilité d'avoir le même résultat en tirant 2 dès.

(b) Calculer la probabilité de l'événement ≪ Pierre attend plus de 5 minutes ≫ :

$$\{ (\omega_1, \omega_2) \in \Omega \; ; \; \omega_2 > \omega_1 + 5 \}.$$

Indication : Donc Pierre attend 6 minutes ou 7 minutes ou .... On aura le couples suivants :
si Pierre arrive à 12h01 : { (1,7), (1,8), ..., (1,30) },
si Pierre arrive à 12h02 : { (2,8), (2,9), ..., (2,30) },
$\vdots$
si Pierre arrive à 12h24 : { (24,30) }. Compter tous ces cas.

Quelle est celle de l'événement ≪ Pierre attend entre 5 et 15 minutes ≫ (ces deux valeurs extrêmes étant exclues) ?

Indication : Différence entre la probabilité que Pierre attend plus de 5 minutes et la probabilité que Pierre attend plus de 14 minutes.

(c) Quelle est la probabilité que Pierre et Paul arrivent avec k minutes de différence (pour $k \in \{0, \ldots, 29\}$) ?

Indication : Pierre peut arriver k minutes avant Paul ou k minutes après Paul. Pour $k \geq 1$ fixé, compter les couples (ω_1, ω_2) qui vérifient $|\omega_1 - \omega_2| = k$. Pour $k = 0$, on a déjà répondu.

(d) Quelle autre modélisation aurait-on pu choisir ? Est-ce que cela aurait changé les probabilités des événements considérés ?

Indication : On aurait pu compter en secondes, milli-secondes, etc.

5. *En attendant le bus.* Un arrêt de bus est desservi tous les quart d'heures à partir de 7h du matin (inclus). Un passager arrive à l'arrêt à un instant alèatoire de loi uniforme sur [7h ; 7h30].

   Quelle est la probabilité qu'il attende moins de 5 mn pour un bus ? Plus de 10 mn ?

   Indication : Le bus arrive donc à 7h, 7h15 et 7h30. Préciser les intervalles de temps pour le passager et la densité de la loi uniforme.

6. Le temps d'attente (en minutes) pour accéder à des données suit une loi uniforme $\mathscr{U}([1,6])$.

   (a) Déterminer la probabilité d'attendre au moins 5 minutes.

   Indication : Préciser l'intervalle de temps et la densité de la loi uniforme.

   (b) Déterminer le temps d'attente moyen.

   Indication : Donner l'espérance.

7. (a) Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[1,3]$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

(b) Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0,\pi]$. Calculer $\mathbb{E}(\sin(X))$ et $\mathbb{E}(\cos(X))$.

(c) Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}(e^{X/2})$ lorsqu'elle existe.

Indication : Utiliser la formule de transfert dans tous ces calculs.

8. Soient $X_1,\ldots,X_N$ des v.a. discrètes indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$. On pose $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$. Calculer $\mathbb{E}(S_N)$ et $\mathsf{Var}(S_N)$.

   Indication : Calculer d'abord $\mathbb{E}(X_i)$ et $\mathsf{Var}(X_i)$: c'est fait dans l'exercice 2 ci-dessus. Que peut-on dire de $\mathbb{E}(X_iX_j)$ lorsque $i \neq j$? Utiliser ces résultats pour conclure dans le cas ou $N = 2$. Refaire le calcul pour $N = 3$. Généraliser.

   Soit maintenant $X_1,\ldots,X_N$ des v.a. quelconques indépendantes de même loi et ayant l'espérance et écart type commun $\mathbb{E}(X_i) = \mu, \mathsf{Var}(X_i) = \sigma$. Calculer $\mathbb{E}(S_N)$ et $\mathsf{Var}(S_N)$ en fonction de N, de μ et de σ.

   Indication : C'est pareil ! Vous trouverez des indications supplémentaires en cherchant bien dans le DicoProbaStat.

9. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs -1 et 1 avec probabilité $1/2$ chacune. Posons $Z = XY$. Etudier l'indépendance deux à deux des variables aléatoires X, Y et Z, puis l'indépendance de la famille (X,Y,Z).

   Indication : On se rappellera de la définition de variables aléatoires indépendantes, notamment dans le cas où elles sont discrètes, comme ici. On vérifiera alors si X,Y,Z sont deux à deux indépendantes. On peut s'inspirer de ce qui a été fait pour la fiche de TD2.

10. Soit X une variable uniforme sur $[1,3]$ et $a \in [1,3]$.

    (a) On considère la variable aléatoire $Y = \min\{X,a\}$. Déterminer, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $P(Y \le y)$. Déterminer aussi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $P(Y = y)$. Est-ce que la variable Y admet une densité ?

    Indication : Distinguer les cas $X < a$ et $X \ge a$. Calculer $P(Y \le y)$ pour $y \le 1$, $1 \le y \le a$ et $y \ge a$.

    (b) Calculer son espérance (en utilisant le bon sens notamment).

    (c) Que vaut cette espérance si $a = 1$? $a = 3$? Est-ce que vous auriez pu trouver ces deux résultats autrement ?

11. Trouver la constante $c > 0$ telle que la fonction

$$\rho(x) = cx1_{[0,1]}(x) + (2-x)1_{[1,2]}(x)$$

    soit une densité de probabilité. Tracer ρ. Soit X une variable aléatoire de densité ρ. Calculer son espérance et sa variance. Calculer $P(X \ge \frac{1}{2})$.

Indication : Vérifier que $\rho(x) \geq 0$ et déterminer c tel que $\int_0^2 \rho(x)dx = 1$. Voir espérence et variance de X à densité ρ dans le DicoProbaStat. Quel lien entre $P(X \geq \frac{1}{2})$ et $P(X \leq \frac{1}{2})$, qu'on peut calculer ?

12. Soit $a > 0$
$$\rho(x) = c(a - |x|) \text{ if } x \in [-a, a]$$
et $\rho(x) = 0$ sinon. Trouver c telle que ρ soit une densité de probabilité et tracer ρ. Soit X une variable aléatoire de densité ρ. Calculer son espérance et son écart type. Expliquer pourquoi leur comportement en fonction de a est conforme à ce qu'on attend d'une espérance et d'un écart type.
Indication : Déterminer c tel que $\int_{-a}^{a} \rho(x)dx = 1$ et remarquer que $\rho(x)$ est symétrique en 0. Calculer la variance en utilisant la formule de Koenig.

13. Soit
$$\rho(x) = \frac{a}{x^5}$$
si $x \in (1,2)$ et on pose
$$\rho(x) = 0$$
sinon ($a \in \mathbb{R}$).
   (a) Calculer a pour que ρ soit une densité.
   (b) Si X est une v.a. de densité ρ, calculer
$$P(1 \leq X \leq \frac{3}{2}).$$

N.B. : le théoréme de De Moivre-Laplace mentionné plus loin est un cas particulier du théoréme de la limite centrale pour la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$; les conditions pratiques d'utilisation sont $n \geq 30$ et $np \geq 10$.

14. Un écran d'ordinateur est formé de petits points lumineux appelés pixels. Il comporte 768 lignes de 1024 pixels, soit 786432 pixels en tout.
   (a) On utilise un procédé de fabrication qui assure que les pixels sont indépendants et que chacun n'a qu'une probabilité 9.10^{-7} d'étre inutilisable. Quelle est la loi du nombre X de pixels grillés sur l'écran ?
   Indication : On a $n = 786432$ pixels indépendants, chaque pixel est inutilisable avec probabilité $p = 9.10^{-7}$ (c'est une répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p, quelle est cette loi ?)
   (b) L'écran est invendable si trois pixels au moins sont grillés. Calculer (en justifiant !) une valeur approchée de la probabilité pour un écran d'étre invendable.

Indication : Calculez $P(X \geq 3)$ et appliquez le théorème de la limite centrale.

15. Un écran d'ordinateur portable dit à matrice active est formé de 240 000 pixels (résolution 600×400). Un pixel est le plus petit point lumineux que peut afficher l'écran. Chaque pixel est commandé par un transistor et la probabilité qu'un tel transistor fonctionne plus de 10000 heures est $p = 0,74$.

    (a) Soit X le nombre aléatoire de pixels valides au bout de 10000 heures de fonctionnement. Quelle est la loi de X, son espérance , sa variance, son écart type ?

    Indication : D'après l'exercice 2, si $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$.

    (b) Soit U la proportion aléatoire de pixels valides au bout de 10000 heures de fonctionnement ($U = X/240000$)). En utilisant le théorème central limite, donner une valeur approchée des probabilités suivantes :

    $$P(U \leq 0,74) \qquad P(U \leq 0,738) \qquad P(U > 0,742).$$

    Indication : Utilisez le théorème de la limite centrale.

    (c) On considére que la durée de vie T en heures d'un transistor est une variable aléatoire de densité exponentielle de paramétre a. Quelle valeur doit avoir le paramétre a pour que $P(T > 10000) = 0,74$?

    Indication : Si $X \rightsquigarrow \mathscr{E}(\alpha)$ alors elle admet comme densité la fonction $\rho(x) = \alpha \exp(-\alpha x)$. Donc $P(T > a) = \int_a^{+\infty} \alpha \exp(-\alpha t)dt = \exp(-\alpha a)$. Ici $a = 10000$, donc on cherche la bonne valeur de α pour que $\exp(-10000\alpha) = 0,74$.

16. On sait que le nombre d'automobiles réparées dans un garage pendant une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50.

    (a) Que peut-on dire de la probabilité que le garage répare plus de 75 voitures en une semaine ?

    Indication : Utilisez l'inégalité de Markov : Si X une variable aléatoire positive alors

    $$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}, \quad \forall a > 0.$$

    (b) Si on sait de plus que la variance du nombre de voitures réparées est 25, que peut-on dire de la probabilité que ce nombre soit compris strictement entre 40 et 60 ?

Indication : Pour minorer $P(X \in [40,50])$, essayez de majorer $P(X \notin [40,50])$ $\big($puisque $P(X \in A) = 1 - P(X \notin A)\big)$ en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| > \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Ici $E(X) = 50$, $V(X) = 25$ et la bonne valeur de α est 10.

17. Un constructeur d'ordinateurs décroche un marché pour la fourniture de 2000 PC é un ministére. Le contrat prévoit pour la premiére année une garantie totale piéces et main d'oeuvre avec intervention sur site d'un technicien en moins de 24 heures pour chaque panne signalée. Pour les deux années suivantes, la garantie ne couvre que les piéces. L'expérience accumulée par le fabricant lui permet d'estimer que pour chaque machine installée,
    — la probabilité qu'elle ait au moins une panne au cours de la premiére année est de $0,002$;
    — la probabilité qu'elle ait au moins une panne au cours des 2 années suivantes est de $0,04$.

    On note X le nombre de machines ayant au moins une panne lors de la première année et Y le nombre de machines n' ayant *aucune* panne lors des deux années suivantes.

    (a) Pour chacune des deux variables aléatoires X et Y, donner sa loi exacte, son espérance et sa variance.

    (b) En utilisant l'inégalité de Tchebycheff, donner un *minorant* de

    $$P(1900 \leq Y \leq 1940).$$

    (c) Proposer une *valeur approchée* de cette méme probabilité en utilisant le théoréme de De Moivre-Laplace.

    (d) Par quelle loi discréte classique peut-on approcher la loi de X ? Utiliser cette approximation pour évaluer $P(X \geq 4)$.

Table des valeurs de la fonction de répartition F_X de la loi normale centrée réduite

$$F_X(x) = \mathsf{P}\{X \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-t^2/2)\, dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Table pour les grandes valeurs de x

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	4.0	4.5
$F_X(x)$	0.99865	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999841	0.999928	0.999968	0.999997

La table donne les valeurs de $F_X(x)$ pour x positif. Lorsque x est négatif, on utilise la relation $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$ qui résulte de la parité de la densité gaussienne $N(0,1)$. Exemple : pour $x = -1,8$, on trouve : $F_X(x) = 1 - 0,9641 = 0,0359$.

Pour les « trés grandes valeurs de x », (i.e. $|x| \geq 4$), l'encadrement suivant (valable pour tout $x > 0$) donne une bonne évaluation de la « queue » de la loi normale :

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) < 1 - F_X(x) < \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$