Chapitre 4 : Calcul matriciel
BTS MCW2, 2021-2022

1. Généralités

Définition 1. Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ...a_{1j}... & a_{1n} \\ .. & ... & .. \\ .. & ... & .. \\ a_{i1} & ...a_{ij}... & a_{in} \\ .. & ... & .. \\ .. & ... & .. \\ a_{m1} & ...a_{mj}... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matrice A est dite de taille $m \times n$ si elle à m lignes et n colonnes .
Les nombres du tableau sont appelés coefficients de A .
Le coefficient a_{ij} est en i^{eme} ligne et j^{eme} colonne .
On note $A = (a_{ij})_{(1 \leqslant i \leqslant m)(1 \leqslant j \leqslant n)}$.
L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est celui des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$.
La matrice nulle noté $\mathcal{O}_{m,n}$ ou $\mathcal{O}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls .

Exemple 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ c'est une matrice de taille 2×3 avec $a_{11} = 1$ et $a_{23} = 7$.

Remarque 1.
- ⋆ Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et les mêmes coefficients .
- ⋆ Si $m = n$ on dit que la matrice est une matrice carrée et on note $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ...a_{1j}... & a_{1n} \\ .. & ... & .. \\ .. & ... & .. \\ a_{i1} & ...a_{ij}... & a_{in} \\ .. & ... & .. \\ .. & ... & .. \\ a_{n1} & ...a_{nj}... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- ⋆ Les coefficients $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ forment la diagonale de la matrice .
- ⋆ Si $m = 1$ la matrice est dite matrice ligne ou vecteur ligne : $A = (a_{11}.....a_{1n})$.
- ⋆ Si $n = 1$ la matrice est dite matrice colonne ou vecteur colonne : $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

2. Opérations algébriques sur les matrices

2. 1. Somme de deux matrices

Définition 2. Soient A et B deux matrices de même taille $n \times p$. La somme $C = A + B$ est la matrice $n \times p$ définie par $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple 2. Calculez $A + B$ et $A + C$ tels que :
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. 2. Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 3. Le produit d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par $\alpha \in \mathbb{R}$ est la matrice $\alpha A = (\alpha a_{ij})$

Exemple 3. Calculer $2A$ tel que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

Propriété 1. $-A = (-1)A$ est l'opposée de A .
La différence $A - B$ est définie par $A + (-1)B$.

Exemple 4. Calculer $A - B$ tels que : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Proposition 1. Soient A, B , et C trois matrices de taille $n \times p$ et α et β deux réels .

- ⋆ $A + B = B + A$ (La somme est commutative)
- ⋆ $A + (B + C) = (A + B) + C$ (La somme est associative)
- ⋆ $A + O = A$ (La matrice nulle est l'élément neutre de l'addition)
- ⋆ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- ⋆ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Exemple 5. On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & & \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$

Trouver α tel que $A - \alpha B$ soit la matrice nulle .

2. 3. Produit de matrices

Définition 4. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ de taille $p \times q$. La matrice $C = A \times B$ est de taille $n \times q$ définie par $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.

Exemple 6. On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

Calculer $A \times B$.

Remarque 2. Soit $A = (a_1 a_2 ... a_n)$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ alors $A \times B$ est une matrice de taille 1×1 et on a : $A \times B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$. Ce nombre s'appelle le produit scalaire des vecteurs A et B .

2. 4. Propriétés

- $\star$ $AB \neq BA$: Le produit de deux matrices n'est pas commutatif en général .
  $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
- $\star$ $AB = O$ n'implique pas $A = O$ ou $B = O$.
  $A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\star$ $AB = AC$ n'implique pas $B = C$
  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Proposition 2. $\star$ $A(BC) = (AB)C$
- $\star$ $A(B + C) = AB + AC$
- $\star$ $(B + C)A = BA + CA$
- $\star$ $A.O = O$ et $O.A = O$
- $\star$ $A^p = A \times A \times ... \times A$ (p fois) c'est la puissance de la matrice A .
- $\star$ $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

2. 5. La matrice identité

- $\star$ La matrice carrée suivante s'appelle la matrice identité, noté I_n ou I .
  $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $\star$ On définit le symbole de Kronecker $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & j \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$ Alors $I_n = (\delta_{ij})$.
- $\star$ Si A est une matrice de taille $n \times p$ alors $I_n \times A = A$ et $A \times I_p = A$.
- $\star$ $A^0 = I_n$

Exemple 7. Calculons A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. 6. Binôme de Newton

Soient A et B deux matrices carrés de taille n tel que $AB = BA$, alors pour tout entier $p \geqslant 0$ on a : $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^{p-k} B^k$ avec $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$

Exemple 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = A - I_4$

1) Montrer que $N^4 = 0$. On dit que N est nilpotente d'ordre 4 .
2) Calculer A^p en utilisant la binôme de Newton .

3. Transposée et trace d'une matrice

3. 1. Transposée d'une matrice

Définition 5. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n 1 \leqslant j \leqslant p}$ La matrice transposée de la matrice A, notée A^T ou ${}^tA$ est la matrice de taille $p \times n$ définie par : ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & .... & \mathrm{a}_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & .... & \mathrm{a}_{n2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{1p} & a_{2p} & .... & \mathrm{a}_{np} \end{pmatrix}$

Exemple 9. Calculer la transposée des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Théorème 2. $\star$ ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- $\star$ ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^tA$
- $\star$ ${}^t({}^tA) = A$
- $\star$ ${}^t(AB) = {}^tA {}^tB$
- $\star$ Si A est inversible alors ${}^tA$ l'est aussi et on a $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

3. 2. La trace d'une matrice

Définition 6. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée de taille $n \times n$. La trace de A est la somme de ses éléments diagonaux. On a : $TrA = a_{11} + a_{22} + \ldots\ldots + a_{nn}$

Exemple 10. Calculer la trace de : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 10 & 0 & -10 \end{pmatrix}$

Théorème 3. Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ alors :
- $\star$ $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$
- $\star$ $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$
- $\star$ $Tr({}^tA) = Tr(A)$
- $\star$ $Tr(AB) = Tr(BA)$

4. Matrices symétriques et antisymétriques

4. 1. Matrices symétriques

Définition 7. Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale à sa transposée c'est à dire $A =^t A$. Autrement dit $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots\ldots, n$, les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale .

Exemple 11. Les matrices suivantes sont symétriques : $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & 8 & -10 \end{pmatrix}$

Remarque 3. Pour toute matrice B quelconque on a toujours ${}^tBB$ et B^tB sont symétriques .

4. 2. Matrices antisymétriques

Définition 8. Une matrice carrée A de taille $n \times n$ est antisymétrique si ${}^tA = -A$ .Autrement dit $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots\ldots, n$.

Exemple 12. Les matrices suivantes sont antisymétriques :
$A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -5 & 0 & -8 \\ 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 4. Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours nuls (pour $i = j$ on a : $a_{ii} = -a_{ii}$) .
Toute matrice carrée est somme d'une matrice symétrique et une autre antisymétrique. On a $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A = \dfrac{A +^t A}{2} + \dfrac{A -^t A}{2}$, la première est symétrique et la deuxième est antisymétrique.

5. Méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice

5. 1. En utilisant la définition

Définition 9. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$, s'il existe une matrice B de taille $n \times n$ telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$, alors A est dite inversible on appelle B l'inverse de A et on le note A^{-1} .

Remarque 5. $\star$ Il suffit de vérifier soit $AB = I_n$ ou $BA = I_n$

- $\star$ Quand A est inversible, on note $A^{-p} = (A_{-1})^p = A_{-1}A_{-1}...A_{-1}$, p fois .
- $\star$ L'ensemble des matrices inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$
- $\star$ I_n est inversible et son inverse est $I_n^{-1} = I_n$
- $\star$ La matrice nulle n'est pas inversible .

Exemple 13. 1) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible .

2) Montrez que $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible .

Proposition 3. $\star$ Si A est inversible alors son inverse est unique .

- $\star$ Soit A une matrice inversible, alors A^{-1} est aussi inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
- $\star$ A et B deux matrices carrées inversibles ayant la même taille, alors AB est inversible et son inverse est $(AB)_{-1} = B_{-1}A_{-1}$.
- $\star$ De façon analogue, si $A_1, A_2, \ldots.., A_n$ sont inversibles alors $(A_1A_2....A_n)^{-1} = A_n^{-1}\ldots\ldots A_1^{-1}$.
- $\star$ Soient A, B deux matrices carrés de taille $n \times n$ et C une matrice carré inversible de même taille. Si $AC = BC$ alors $A = B$.

Exercice 1. 1) Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer $A^{-1}B^{-1}$, $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$, A^{-2} .

2) Calculer l'inverse de la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3) On considère $D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer $2D - D^2$ puis déduire sans calcul D^{-1}.

5. 2. En utilisant la méthode de pivot de Gauss

Définition 10. Consiste à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A jusqu'à transformer A en matrice identité I_n, on fait simultanément les même opérations sur I_n et à la fin A sera transformé en I_n et I_n en A^{-1}. En pratique, on forme le tableau (A/In) et on fait des opérations élémentaire en même temps sur A et I_n jusqu'à l'obtention du tableau $(I_n/B) = (I_n/A^{-1})$.

Exemple 14. Calculer l'inverse des matrices suivantes en utilisant la méthode de pivot de Gauss.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. 3. En utilisant le déterminant

5. 3.1 Matrice de taille 2×2

Définition 11. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2×2. Si $det(A) = ad - bc \neq 0$ alors A est inversible et on a : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exemple 15. Calculer si possible l'inverse des matrices suivantes : $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,$A_4 = \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

5. 3.2 Matrice de taille 3×3

Définition 12. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ une matrice de taille 3×3. Si A est inversible alors son inverse est $A^{-1} = \dfrac{1}{detA}\,{}^{t}comA$ avec :

$$detA = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ et

$$comA = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Remarque 6.
- $\star$ $det(AB) = detA \times detB$
- $\star$ $detA^{-1} = \dfrac{1}{detA}$
- $\star$ $det\mathcal{O} = 0$
- $\star$ $detI_n = 1$

Exemple 16. Calculer l'inverse des matrices A et B en utilisant la méthode du déterminant
$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

6. Matrices triangulaires et matrices diagonales

6. 1. Matrices triangulaires

Définition 13. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. On distingue deux types des matrices triangulaires :

$\star$ Matrices triangulaires supérieures : $A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$

A est triangulaire supérieure équivalent à dire $\forall i > j, \quad a_{i,j} = 0$.

$\star$ Matrices triangulaires inférieures : $A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$

A est triangulaire inférieure équivalent à dire $\forall i < j, \quad a_{i,j} = 0$.

Exemple 17. Dites si les matrices suivantes sont triangulaires supérieurs ou triangulaires inférieurs :

$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Théorème 4. Une matrice carré de taille $n \times n$ triangulaire est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

6. 2. Matrices diagonales

Définition 14. Une matrice qui est à la fois triangulaire supérieur et triangulaire inférieur est dite matrice diagonale : pour $i \neq j$ on a $a_{ij} = 0$.

Exemple 18. Les matrices suivantes sont diagonales :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque 7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$

Alors pour tout entier naturel k on a : $A^k = \begin{pmatrix} a_{1,1}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2}^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n}^k \end{pmatrix}$

7. Application du calcul matriciel à la résolution des systèmes linéaires

7. 1. Matrices et systèmes linéaires

Considérons le système linéaire de n équations et à p inconnues est la suivante :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1p}x_p & = & b_1 & (\text{é}quation \quad 1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{21}x_p & = & b_2 & (\text{é}quation \quad 2) \\ \quad ... & ... & ... & \\ \quad ... & ... & ... & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + ... + a_{ip}x_p & = & b_i & (\text{é}quation \quad i) \\ \quad ... & ... & ... & \\ \quad ... & ... & ... & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{np}x_p & = & b_n & (\text{é}quation \quad n) \end{cases}$$

Ce système s'écrit : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & \mathrm{a}_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & \mathrm{a}_{2p} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & \mathrm{a}_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_p \end{pmatrix}$

Le vecteurs X est solution du système si et seulement si $AX = B$.

7. 2. Matrices inversibles et systèmes linéaires

Dans cette partie, nous allons se focaliser sur le cas où le nombre d'équations égale au nombre d'inconnus.

Une matrice inversible est une matrice dont le déterminant est non nul.

Proposition 4. $\star$ Si la matrice A est inversible, alors la solution du système $AX = B$ est unique et la solution $X = A^{-1}B$.

$\star$ Si A n'est pas inversible, soit le système n'admet aucune solution, soit il admet une infinité de solutions.

Théorème 5. Une matrice carrée est inversible si et seulement si sa forme échelonnée réduite est la matrice identité (c'est la méthode de Gauss pour inverser une matrice).

Corollaire 6. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$\star$ La matrice A est inversible.

$\star$ Le système linéaire $AX = O$ (vecteur nul) a une unique solution $X = O$ (vecteur nuls).

$\star$ Pour tout B, le système linéaire $AX = B$ a une unique solution $X = A^{-1}B$.

Exemple 19. Résoudre les systèmes linéaires suivants en inversant la matrice A :

$\begin{cases} 2x & + & 4y & =7 \\ -2x & + & 3y & =\text{-14} \end{cases}$ et $\begin{cases} x & + & z & =1 \\ -2y & + & 3z & =1 \\ x & - & z & =1 \end{cases}$