



Programmation par Contraintes

Module du Master "Systèmes Informatiques Intelligents" 2ème année

Annexe 5

Logique du premier ordre

Mr ISLI

Département d'Informatique

Faculté d'Electronique et d'Informatique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

BP 32, El-Alia, Bab Ezzouar

DZ-16111 ALGER

http://perso.usthb.dz/~aisli/TA_PpC.htm

aisli@usthb.dz



Annexe 5

Logique du premier ordre

La logique du premier ordre est également appelée

- calcul des prédicats
- logique des prédicats
- logique des prédicats du premier ordre



Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Les termes
- Les propositions atomiques
- Les formules logiques

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Les termes :

Soient S_F un ensemble dénombrable de symboles de fonction dénotés par f, g, \dots ($\alpha(f)$ est l'arité de f) ; V un ensemble infini dénombrable de variables (d'arité 0) dénotées par x, y, \dots .
L'ensemble T des termes du premier ordre est le plus petit ensemble satisfaisant :

- $V \subseteq T$
- Si $f \in S_F$ avec $\alpha(f)=n$, et $M_1, \dots, M_n \in T$, alors $f(M_1, \dots, M_n) \in T$



Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Les propositions atomiques :

Soit S_p un ensemble de symboles de prédicat dénotés par p, q, \dots . L'arité d'un prédicat p est désignée par $\alpha(p)$. L'ensemble P_a des propositions atomiques du premier ordre est défini comme suit :

$$P_a = \{p(M_1, \dots, M_n) \mid p \in S_p, \alpha(p) = n \text{ et } M_1, \dots, M_n \in T\}$$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

■ Les formules logiques :

Soit $S_L = \{\neg, \vee, \exists\}$ l'ensemble des symboles usuels de négation logique, de ou logique et de quantification existentielle.

L'ensemble P des formules logiques du premier ordre est le plus petit ensemble satisfaisant :

- $P_a \subseteq P$
- $\phi \in P \Rightarrow \neg \phi \in P$
- $\phi, \varphi \in P \Rightarrow \phi \vee \varphi \in P$
- $x \in V, \phi \in P \Rightarrow \exists x \phi \in P$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

■ Variables libres (free variables) :

L'ensemble des variables libres d'une formule ϕ , dénoté par $FV(\phi)$, est défini comme suit :

- $FV(x) = \{x\}$
- $FV(f(M_1, \dots, M_n)) = \cup_{i=1 \dots n} FV(M_i)$
- $FV(p(M_1, \dots, M_n)) = \cup_{i=1 \dots n} FV(M_i)$
- $FV(\neg \phi) = FV(\phi)$
- $FV(\phi \vee \varphi) = FV(\phi) \cup FV(\varphi)$
- $FV(\forall x \phi) = FV(\exists x \phi) = FV(\phi) \setminus \{x\}$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Variables liées (bound variables) :

L'ensemble des variables liées d'une formule ϕ , dénoté par $BV(\phi)$, est défini comme suit :

- $BV(x) = \emptyset$
- $BV(f(M_1, \dots, M_n)) = \emptyset$
- $BV(p(M_1, \dots, M_n)) = \emptyset$
- $BV(\neg \phi) = BV(\phi)$
- $BV(\phi \vee \varphi) = BV(\phi) \cup BV(\varphi)$
- $BV(\forall x \phi) = BV(\exists x \phi) = \{x\} \cup BV(\phi)$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Formule close :

Soit ϕ une formule logique avec $FV(\phi) = \{x_1, \dots, x_n\}$

- ϕ est close si $FV(\phi) = \emptyset$
- $\forall(\phi)$ désigne la formule close $\forall x_1 \dots \forall x_n \phi$
- $\exists(\phi)$ désigne la formule close $\exists x_1 \dots \exists x_n \phi$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Syntaxe

- Littéral :

Un littéral est :

- une proposition atomique : on parle alors de littéral positif
- ou la négation d'une proposition atomique : on parle alors de littéral négatif

- Clause :

Une clause est une disjonction de littéraux universellement quantifiés : $\forall(L_1 \vee \dots \vee L_n)$

- Clause de Horn :

Clause ayant au plus un littéral positif



Annexe 5

Logique du premier ordre

Sémantique

- Pré-interprétation :

Une pré-interprétation d'un langage du premier ordre est une paire $\langle D, [] \rangle$, D étant un domaine d'interprétation, et $[]$ une fonction sémantique associant à tout symbole de constante $c \in S_F$ un élément $[c] \in D$, et à tout symbole de fonction $f \in S_F$ d'arité supérieure ou égale à 1 une fonction $[f]: D^n \rightarrow D$

Annexe 5

Logique du premier ordre

Sémantique

■ Valuation :

- Une valuation des variables est une fonction $\rho: V \rightarrow D$
- La valuation des termes induite par une valuation ρ des variables et une pré-interprétation $\langle D, [] \rangle$ est définie comme suit :
 1. $[]_{\rho} : T \rightarrow D$
 2. $[X]_{\rho} = \rho(X)$, pour toute variable X
 3. $[c]_{\rho} = [c]$, pour tout $c \in S_F$ avec c d'arité 0 (symbole de constante)
 4. $[f(M_1, \dots, M_n)]_{\rho} = [f]([M_1]_{\rho}, \dots, [M_n]_{\rho})$



Annexe 5

Logique du premier ordre

Sémantique

- Interprétation :

Pré-interprétation $\langle D, [] \rangle$ associant à tout symbole de prédicat $p \in S_p$ d'arité n une relation $[p]: D^n \rightarrow \{0, 1\}$