Théorie des possibilités

Notations :

Notations:

- $\mathcal{L}$ un langage propositionnel fini
- Ω l'ensemble des interprétations associées à $\mathcal{L}$.
- $\varphi, \Psi, \ldots$ des formules propositionnelles.
- ω est une interprétation.
- $\omega \models \varphi$ ou $\omega \in [\varphi]$ signifie que ω satisfait φ.

a-Distributions de possibilités:

_ Une distribution de possibilités π sur l'ensemble des interprétations Ω, est une fonction de Ω vers [0,1] , La distribution des possibilités π décrit les états plus ou moins possibles du monde.

- Si $\pi(\omega)=0$ alors l'interprétation ω est impossible
- Si $\pi(\omega)=1$ alors l'interprétation ω est complètement possible
- Si $\pi(\omega) > \pi(\omega')$ alors l'interprétation ω est préférée à ω'

La condition de normalisation satisfait la condition suivante:

$\exists\, \omega \in \Omega, \quad \pi(\omega)=1.$

Elle exprime qu'il existe une interprétation dans Ω complètement possible c.a.d complètement cohérente avec les croyances disponibles.

b-Degré de possibilité:

Toute distribution de possibilité π sur Ω induit une mesure de possibilité Π.

Le degré de cohérence ou la mesure de possibilité d'une formule φ est défini par:

$\Pi(\varphi) = \max \{\pi(\omega) : \omega \quad \varphi \}$

Il évalue dans quelle mesure φ est cohérente avec les croyances disponibles exprimées par π.

$\Pi(\varphi)=1$ et $\Pi(\neg\varphi)=1$ Ignorance totale sur φ

$\Pi(\varphi)=1$ et $\Pi(\neg\varphi)=0$ φ est certainement vraie

$\Pi(\varphi \vee \psi)=\max(\Pi(\varphi), \Pi(\psi))$

c- Degré de nécessité:

Le degré de certitude ou de nécessité d'une formule φ est défini par:

$N(\varphi) = 1 - \Pi(\neg\varphi)$

Il évalue dans quelle mesure φ peut être déduite à partir des croyances disponibles.

$N(\varphi)$ exprime à quel point il est certain que φ soit vraie.

$N(\varphi)=1$ et $N(\neg\varphi)=0$ φ est certaine

$N(\varphi)=0$ et $N(\neg\varphi)=0$ ignorance totale

$N(\varphi \wedge \psi)=\min(N(\varphi), N(\psi))$

$N(\varphi) > 0 \Rightarrow \Pi(\varphi)=1.$

Un événement est complètement possible avant qu'il soit un peu certain.

d- Le conditionnement:

Dans la théorie des possibilités, deux types de conditionnement ont été définis :

- Le conditionnement basé sur le minimum défini par:

$$\pi(\omega|\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(\omega) = \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \models \varphi_i \\ \pi(\omega) & \text{si } \pi(\omega) < \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \models \varphi_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est assigné au meilleur modèle de φ le degré maximal de possibilités

- Le conditionnement basé sur le produit défini par :

$$\pi(\omega|\varphi) = \begin{cases} \frac{\pi(\omega)}{\Pi(\varphi)} & \text{si } \omega \models \varphi_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les éléments sont augmentés proportionnellement

Exemple :
Considérons le problème pour définir l'ère à laquelle appartient un fossile. Supposons que les géologues utilisent un test radioactif sur les fossiles afin de définir à quelle race ils appartiennent telles que race={Mammifère, poisson, oiseau} et ère ={Ceno,Méso,Paleo}.
Les distributions initiales sont données par le tableau suivant :

Ere	Race	$\pi(\text{Ere} \wedge \text{Race})$
Ceno	Mammifère	0.2
Ceno	Poisson	1
Ceno	Oiseau	0
Méso	Mammifère	0.3
Méso	Poisson	0.7
Méso	Oiseau	0.7
Paléo	Mammifère	0.5
Paléo	Poisson	0.2
Paléo	Oiseau	1

Supposons que nous avons une information certaine indiquant que le fossile appartient à la classe des mammifères. La croyance est représentée par φ.

1- Calculez le degré de possibilité de $\Pi(\varphi)$ et le degré de nécessité $N(\varphi)$.

L'information certaine φ: mammifère.

1- $\omega_1 \models \varphi$; $\omega_4 \models \varphi$; $\omega_7 \models \varphi$; d'où

$\Pi(\varphi)=\max\{\boldsymbol{\pi}(\omega) : \omega \models \varphi\}= \max(0.2,0.3,0.5)=0.5$

$N(\varphi)=\min\{1-\boldsymbol{\pi}(\omega) : \omega \not\models \varphi\}=\min\{1-1,1-0,1-0.7,1-0.2\}=0$

$\omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_8, \omega_9 \not\models \varphi$

2- En utilisant les deux équations du conditionnement, calculez les nouvelles distributions $\pi(\text{Ere} \wedge \text{Race}|\varphi)$ dans les cas où le conditionnement est basé sur le minimum et sur le produit.

	Ere	**Race**	$\boldsymbol{\pi(\omega)}$	$\boldsymbol{\pi(\omega|_{*}\varphi)}$	$\boldsymbol{\pi(\omega|_{min}\varphi)}$
ω_1	Ceno	Mammifère	0.2	0.2	0.4
ω_2	Ceno	Poisson	1	0	0
ω_3	Ceno	Oiseau	0	0	0
ω_4	Méso	Mammifère	0.3	0.3	0.6
ω_5	Méso	Poisson	0.7	0	0
ω_6	Méso	Oiseau	0.7	0	0
ω_7	Paléo	Mammifère	0.5	1	1
ω_8	Paléo	Poisson	0.2	0	0
ω_9	Paléo	Oiseau	1	0	0