Simmetrie e leggi di conservazione

(Appunti per il corso di Fisica Nucleare e Subnucleare 2010/11)

Fiorenzo Bastianelli

Traccia schematica delle lezioni su simmetrie e leggi di conservazione. NB: questi appunti necessitano necessariamente di un'analisi critica e completamento tramite la lettura di libri di testo sull'argomento.

1 Simmetrie

Le simmetrie sono proprietà d'invarianza dei sistemi fisici estremamente utili per capire i meccanismi che sono alla base delle leggi fisiche ("equazioni del moto"). Spesso permettono di derivare facilmente conseguenze della dinamica mediante l'uso di leggi di conservazione, presenti proprio a causa delle simmetrie, senza dover esplicitamente risolvere le equazioni del moto. Ci dicono se alcuni processi possono avvenire o no, permettono di risolvere più facilmente problemi dinamici e sono alla base della descrizione teorica delle interazioni fondamentali discusse nel corso (interazioni elettromagnetiche, forti e deboli)

Come possiamo definire una simmetria? Una definizione utile è la seguente: "*Simmetrie sono trasformazioni che lasciano invarianti in forma le equazioni del moto*". Esplicitiamo questa definizione tramite esempi. Un esempio tipico è la simmetria per traslazioni del sistema di riferimento cartesiano nella descrizione del moto libero di una particella. L'equazione del moto di una particella libera di massa m in un sistema di riferimento inerziale è data da $m\ddot{\vec{x}}(t) = 0$. Sotto una traslazione del sistema di riferimento $\vec{x}(t) \to \vec{x}'(t) = \vec{x}(t) + \vec{a}$, dove $\vec{a}$ sono i parametri che descrivono la simmetria (simmetrie continue che formano un gruppo di Lie). Questa trasformazione è una simmetria perchè in termini delle nuove variabili le equazioni del moto diventano $m\ddot{\vec{x}}'(t) = 0$ e sono invarianti in forma. Come conseguenza della simmetria esistono quantità conservate: in questo caso il momento $\vec{p} \equiv m\dot{\vec{x}}(t)$ è conservato, cioè $\dot{\vec{p}} = 0$, come si vede facilmente usando le equazioni del moto. La connessione tra simmetrie continue (che dipendono in modo continuo da alcuni parametri, come il vettore $\vec{a}$ nell'esempio descritto sopra) e quantità conservate è esplicitata dal teorema di Noether, che descriveremo tra breve.

In teorie di campo le leggi di conservazione associate a simmetrie continue assumono solitamente la forma di conservazione locale, come descritta da un'equazione di continuità della forma $\partial_\mu J^\mu = 0$. Esplicitando $J^\mu = (J^0, \vec{J})$ possiamo riscriverla come $\partial_0 J^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ e costruire una grandezza conservata come $Q = \int d^3x\, J^0$, dove l'integrale è esteso su tutto lo spazio. Infatti calcolando la variazione temporale di Q otteniamo

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int d^3x\; J^0 = \int d^3x\; \partial_0 J^0 = -\int d^3x\; \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

dove si è usata l' equazione di continuità e l'ipotesi che la corrente $\vec{J}$ vada a zero in modo sufficientemente veloce all' infinito (abbiamo usato notazioni relativistiche con $c = 1$, ma senza necessariamente implicare un'invarianza relativistica, per cui J^μ non si trasforma necessariamente come un quadrivettore).

Combinando trasformazioni di simmetria si ottengono sempre trasformazioni di simmetria, ed è evidente che un linguaggio matematico appropriato per la loro discussione è dato dalla teoria dei gruppi.

Possiamo classificare le simmetrie in vari modi, dicendo che possono essere *continue* oppure *discrete* (a seconda che dipendano in modo continuo da alcuni parametri oppure no); *esatte* o *approssimate*; e nel caso di simmetrie continue possiamo classificarle come *rigide* (o globali) oppure *locali* (o di gauge), a seconda che i parametri da cui dipendono siano costanti oppure dipendenti in modo arbitrario dal tempo (e dallo spazio per teorie di campo).

Simmetrie e teorema di Noether

Descriviamo brevemente la connessione tra simmetrie e quantità conservate, garantita per simmetrie continue rigide (cioè non di gauge) dal teorema di Noether. Innanzi tutto è conveniente utilizzare il principio d'azione. Le simmetrie sono trasformazioni per cui le equazioni del moto sono invarianti in forma. Questo è garantito se l'azione corrispondente è invariante sotto la trasformazione a meno di termini di bordo, infatti se sotto $\vec{x}(t) \to \vec{x}'(t)$ si ha che

$$S[\vec{x}(t)] \;\to\; S[\vec{x}'(t)] = S[\vec{x}(t)] + \int dt\, \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{x})$$

l'ultimo termine, che aggiunge alla lagrangiana una derivata totale, corrisponde a termini di bordo, ma non modifica le equazioni del moto di Eulero-Lagrange. Siccome il funzionale d'azione rimane essenzialmente lo stesso, le equazioni del moto assumono la stessa forma sia che si usino le vecchie variabili che quelle trasformate: si ha quindi una simmetria.

Ad esempio, considerando la traslazione descritta sopra per il moto libero di una particella non relativistica $\vec{x}(t) \to \vec{x}'(t) = \vec{x}(t) + \vec{a}$, si verifica che la corrispondente azione è invariante

$$S[\vec{x}(t)] = \int dt\, \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \int dt\, \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}'^2 = S[\vec{x}'(t)]$$

per cui le equazioni del moto sono necessariamente invarianti in forma, come già notato.

Enunciamo ora il teorema di Noether: "*Per ogni simmetria continua ad n parametri esitono n grandezze conservate*".

Per indicarne una prova, consideriamo prima l'esempio delle traslazioni. È sufficiente considerare traslazioni infinitesime (poichè trasformazioni finite possono essere ottenute iterando trasformazioni infinitesime). Dunque una traslazione infinitesima produce una trasformazione delle variabili dinamiche data da

$$\delta_a x(t) \equiv x'(t) - x(t) = a$$

con a parametro infinitesimo (per semplicità notazionale consideriamo una sola direzione). Naturalmente si verifica facilmente che la variazione infinitesima dell'azione generata da questa trasformazione si annulla, $\delta_a S[x(t)] = 0$, per cui si ha una simmetria. Per trovare la connessione con quantità conservate consideriamo una trasformazione più generale, dove al posto della costante a utilizziamo una funzione arbitraria dipendente dal tempo $a(t)$

$$\delta_{a(t)} x(t) \equiv x'(t) - x(t) = a(t) \tag{1}$$

Questa trasformazione più generale non sarà in genere una simmetria, infatti possiamo calcolare la variazione dell'azione ed ottenere

$$\delta_{a(t)} S[x] \equiv S[x + \delta_{a(t)} x] - S[x] = \int dt\; m\dot{x}(t)\; \dot{a}(t) \tag{2}$$

che non si annulla per funzioni $a(t)$ generiche: le trasformazioni generalizzate non sono simmetrie. Possiamo però facilmente verificare ancora una volta che nel caso particolare di funzioni costanti si ha una simmetria, perchè in tal caso $\dot{a} = 0$ e la variazione dell'azione si annulla. Questo lo sapevamo già, ma ci fa apprezzare che per trasformazioni generiche la variazione generalizzata dell'azione non può contenere un termine della forma $\int dt\, F(t)a(t)$, perchè non sarebbe consistente con l'assunzione di avere una simmetria rigida. La variazione dell'azione può solo contenere termini proporzionali a $\dot{a}(t)$ (a meno di derivate totali che producono termini di bordo). Il vantaggio di usare queste trasformazioni generalizzate è quello di mostare che esiste una grandezza conservata nell'evoluzione dinamica del sistema. Questa grandezza conservata è il termine che motliplica $\dot{a}(t)$ in (2): questo termine è $m\dot{x}(t)$, che infatti corrisponde al momento lineare. Come mostrare in maniera generale che questo termine è conservato? Occorre usare le equazione del moto, le cui soluzioni sono quelle per cui l'azione è minima ed attorno a cui $\delta S = 0$ per qualunque variazione, in particolare quelle definite in (1). Dunque, imponendo le equazioni del moto si può scrivere

$$0 = \delta_{a(t)} S[x] = \int dt\, m\dot{x}(t)\, \dot{a}(t) = -\int dt\, \underbrace{\frac{d}{dt}(m\dot{x}(t))}_{=0}\, a(t) \tag{3}$$

dove si è integrato per parti ed utilizzata l'assoluta arbitrarietà della funzione $a(t)$ per dimostrare l'annullarsi del termine che la moltiplica sotto il segno di integrale ($a(t)$ può essere scelta anche in modo da annullare i termini di bordo nell'integrazione per parti): quindi $\frac{d}{dt}(m\dot{x}(t)) = 0$ ed il momento lineare $m\dot{x}(t)$ è costante durante l'evoluzione del sistema. Si noti che dopo aver valutato la variazione dell'azione, le funzioni $x(t)$ sono ora soluzione delle equazioni del moto, non sono più funzioni arbitrarie.

Questo esempio mostra come procedere nel caso generale. Dimostriamolo direttamente per una generale teoria di campo, che include come sottocaso anche sistemi con un numero finito di gradi di libertà. Indichiamo con x^μ le coordinate spazio-temporali e collettivamente con $\phi(x)$ i campi dinamici. Una trasformazione di simmetria che dipende da un parametro α può essere descritta in tutta generalità come

$$\begin{aligned} x'^\mu \qquad &\longrightarrow \qquad x'^\mu = f^\mu(x,\alpha) \\ \phi(x) \qquad &\longrightarrow \qquad \phi'(x') = F(\phi(x), x, \alpha) \end{aligned} \tag{4}$$

dove la dipendenza da α è scelta in modo tale da ottenere la trasformazione identità per $\alpha = 0$ (la funzione F può anche dipendere dalle derivate di $\phi(x)$, anche se per semplicità di notazione questo non è indicato esplicitamente). Le trasformazioni infinitesime (con parametro $\alpha \ll 1$) si possono scrivere nel seguente modo

$$\delta_\alpha \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) = \alpha G(\phi(x), x) \tag{5}$$

con un'opportuna funzione G ottenibile dalla F in (4). Per definizione di simmetria si ha che $\delta_\alpha S[\phi] = 0$, a meno di termini di bordo. Ora per provare che esiste una grandezza conservata associata a questa simmetria, estendiamo la trasformazione di simmetria ad una trasformazione più generale con parametro $\alpha(x)$, non più costante ma funzione arbitraria dipendente dal tempo e dallo spazio

$$\delta_{\alpha(x)} \phi(x) \equiv \phi'(x) - \phi(x) = \alpha(x) G(\phi(x), x)\ . \tag{6}$$

In generale questa trasformazione non sarà più una simmetria, ma possiamo certamente affermare che l'azione si trasforma nel modo seguente

$$\delta_{\alpha(x)} S[\phi] = \int d^4x\, \partial_\mu \alpha(x) J^\mu \tag{7}$$

a meno di termini di bordo (integrali di derivate totali). Infatti, se prendiamo il caso di α costante sappiamo che l'azione deve essere invariante perchè per ipotesi abbiamo una simmetria. Ora la corrente J^μ è la corrente che soddisfa l'equazione di continuità associata alla conservazione di una carica. Per vederlo usiamo le equazioni del moto, che rendono nulla la variazione dell'azione sotto qualunque trasformazione (principio di minima azione) e in particolare sotto le trasformazioni con parametro locale descritte in (6)

$$0 = \delta_{\alpha(x)} S[\phi] = \int d^4x \; \partial_\mu \alpha(x) J^\mu = -\int d^4x \; \alpha(x) \partial_\mu J^\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \partial_\mu J^\mu = 0 \tag{8}$$

dove abbiamo integrato per parti ed usato l'arbitrarietà della funzione $\alpha(x)$ per dedurre l'equazione di continuità.

Simmetria U(1) dell'equazione di Dirac e conservazione del numero femionico

L'equazione di Dirac libera è data da

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \tag{9}$$

con notazioni descritte precedentemente. È facile mostrare l'invarianza sotto trasformazioni di fase del gruppo $U(1)$ definite da

$$\psi(x) \qquad \longrightarrow \qquad \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \tag{10}$$

Infatti moltiplicando per $e^{i\alpha}$ la (9) si vede subito che l'equazione nelle nuove variabili è data da

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi'(x) = 0 \tag{11}$$

ed è quindi invariante in forma.

Descriviamo ora il sistema tramite la sua azione per derivare le correnti conservate con il metodo di Noether. Per scrivere l'azione conviene introdurre il coniugato di Dirac $\bar{\psi}$ del campo ψ, definito come

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \beta = \psi^\dagger i \gamma^0 \tag{12}$$

che ha la proprietà di trasformarsi in modo da rendere il prodotto $\bar{\psi}\psi$ uno scalare di Lorentz. L'azione è data da

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \, \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) \; , \qquad \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = -\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi \; . \tag{13}$$

Variando $\bar{\psi}$ e ψ ed usando il principio di minima azione si ottengono l'equazione di Dirac e la sua coniugata

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \; , \qquad \bar{\psi}(x)(\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) = 0 \; . \tag{14}$$

Ora consideriamo in dettaglio la simmetria interna generata dalle trasformazioni di fase del gruppo $U(1)$

$$\begin{array}{lcl} \psi(x) & \longrightarrow & \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) & \longrightarrow & \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x) \end{array} \tag{15}$$

dove la seconda equazione segue dalla prima considerando che $\bar{\psi}(x)$ contiene essenzialmente il complesso coniugato di $\psi(x)$. È facile vedere che l'azione (13) è invariante. Per trasformazioni infinitesime

$$\begin{array}{rcl} \delta\psi(x) & = & i\alpha\, \psi(x) \\ \delta\bar{\psi}(x) & = & -i\alpha\, \bar{\psi}(x) \end{array} \tag{16}$$

e considerando subito un parametro locale $\alpha(x)$ si calcola

$$\delta S[\psi, \bar{\psi}] = -\int d^4x\, \partial_\mu \alpha (\underbrace{i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{J^\mu}) \tag{17}$$

da cui si verifica di nuovo la simmetria $U(1)$ (per α costante) e si ottiene la relativa corrente di Noether

$$J^\mu = i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{18}$$

che è conservata $\partial_\mu J^\mu = 0$. In particolare la densità di carica conservata è definita positiva

$$J^0 = i\bar{\psi}\gamma^0\psi = i\psi^\dagger i\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \geq 0 \tag{19}$$

ed fu originariamente considerata da Dirac come una densità di probabilità. Quantizzado la teoria di Dirac questa densità di carica non rimane più definita positiva, ma la corrispondente carica conservata $Q = \int d^3x\, \psi^\dagger\psi$ conta il numero di particelle fermioniche meno il numero di antiparticelle fermioniche.

Questo tipo di cariche conservate sono interpretate nel caso dei fermioni del Modello Standard come le varie cariche elettriche, numero barionico, numero leptonico, stranezza etc., tutte associate a diversi gruppi $U(1)$. Ad esempio, se abbiamo due campi di Dirac ψ_1 e ψ_2, con cariche $U(1)$ conservate q_1 e q_2, questo significa che tutte le interazioni sono invarianti per la trasformazione

$$\begin{aligned} \psi_1(x) \quad &\longrightarrow \quad \psi_1'(x) = e^{iq_1\alpha}\psi_1(x) \\ \psi_2(x) \quad &\longrightarrow \quad \psi_2'(x) = e^{iq_2\alpha}\psi_2(x) \end{aligned} \tag{20}$$

e la grandezza conservata che emerge tramite il teorema di Noether è data da

$$Q = \int d^3x \Big(q_1\psi_1^\dagger(x)\psi_1(x) + q_2\psi_2^\dagger(x)\psi_2(x) \Big) .$$

Possiamo riassumere nella seguente tabella le cariche per alcuni gruppi di simmetria $U(1)$ del modello standard

Fermioni	Q	L	L_e	L_μ	L_τ	B	U	D	C	S	T	B'
ν_e	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	-1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_μ	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
μ	-1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
ν_τ	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
τ	-1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
u	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	0	0
d	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	-1	0	0	0	0
c	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	-1	0	0
t	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	1	0
b	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	-1

Naturalmente le antiparticelle hanno cariche opposte.

La carica elettrica Q, il numero leptonico L ed il numero barionico B sono conservati dalle interazioni em, forte e debole. Sono essenzialmente conservati separatamente anche i numero leptonici elettronici, muonici e tauonici (L_e, L_μ, L_τ), eccetto che per una loro violazione dovuta al fenomeno delle oscillazioni di neutrino, per cui solo $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ rimane esattamente conservata. I vari numeri quantici di sapore U, D, S, etc. (numero di up, numero di down, numero di strange o stranezza, etc.) sono conservati dalle interazioni em e forte, ma violati dalle interazioni deboli (con B' si è indicato il numero di "bottom", per differenziarlo dal numero barionico B). Una loro combinazione lineare è naturalmente il numero barionico B, mentre la combinazione $U + D$ è proporzionale alla terza componente dell'isospin forte I_3, e precisamente $I_3 = \frac{1}{2}(U + D)$. Per quanto riguarda i quark, possiamo facilmente verificare le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{3}(U + C + T) + \frac{1}{3}(D + S + B') \\ &= \frac{B}{2} + \frac{1}{2}(U + D + C + S + T + B') \\ &= I_3 + \frac{Y}{2} \end{aligned} \tag{21}$$

dove nell'ultima uguaglianza è stata definita l'ipercarica forte $Y = B + S + C + B' + T$. Quest'ultima relazione ($Q = I_3 + \frac{Y}{2}$) è nota come formula di Gell-Mann–Nishijima, formula soddisfatta dai numeri quantici degli adroni.

La simmetria di isospin forte è una simmetria approssimata delle interazioni forti, algebricamente simile alla simmetria per rotazioni spaziali che dà origine alla conservazione del momento angolare totale. È una simmetria $SU(2)$ che ruota i campi del quark up e del quark down tra di loro, lasciando approssimativamente invariata solo la parte di azione che descrive le interazioni forti (questa simmetria è esplicitamente rotta dalle interazioni em e deboli). Infatti se consideriamo i quark u e d liberi, la lagrangiana che li descrive prende la forma

$$\Delta\mathcal{L} = -\bar{\psi}_u(\gamma^\mu\partial_\mu + m_u)\psi_u + -\bar{\psi}_d(\gamma^\mu\partial_\mu + m_d)\psi_d \tag{22}$$

e nell'approssimazione di masse identiche $m_u = m_d$, questa risulta invariante per le trasformazioni di isospin forte

$$\begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \psi'_u \\ \psi'_d \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{pmatrix} \qquad\qquad g \in SU(2) \tag{23}$$

È una simmetria approssimata perchè le masse dei quark up e down sono leggermente diverse. Questa è la simmetria di isospin forte, che comporta cariche conservate che soddisfano l'algebra di Lie di $SU(2)$, proprio come il momento angolare.

Aggiungendo anche il quark strange, e nell'approssimazione che $m_u = m_d = m_s$, queste trasformazioni di simmetria si estendono al gruppo $SU(3)$

$$\begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \\ \psi_s \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \psi'_u \\ \psi'_d \\ \psi'_s \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \\ \psi_s \end{pmatrix} \qquad\qquad g \in SU(3) \tag{24}$$

base del modello statico a quark ("eightfold way" di Gell-Mann).

L'aggiunta del quark charm permette di descrivere trasformazioni con gruppo $SU(4)$, ma poiché la massa del quark c è sensibilmente più grande (circa 1.3 GeV, mentre $m_u \sim 1.7 - 3.3$ MeV, $m_d \sim 4.1 - 5.8$ MeV e $m_s \sim 101$ MeV), la simmetria approssimata diventa meno buona.