Hoja de problemas

Tema 1: Alfabetos, cadenas y lenguajes

1. Si $A \subseteq B$, ¿es siempre cierto que $A = B$?
2. Explique la diferencia entre los siguientes conceptos:
   a) ϵ y α
   b) a y $\{a\}$
   c) $\emptyset$ y $\{\emptyset\}$
   d) $\{\emptyset\}$ y ϵ
   e) $\emptyset$ y $\{\epsilon\}$
3. Considérese el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$
   a) ¿Cuantas cadenas de longitud 3 pueden formarse en ese alfabeto?
   b) ¿Y de longitud 4?.
   c) El número de cadenas que pueden formarse de una longitud n ¿es un número finito o infinito?
   d) El número de cadenas de longitud arbitraria que pueden formarse en ese alfabeto ¿es un número finito o infinito?
   e) Si le dan una cadena sobre ese alfabeto ($w \in \Sigma^*$) ¿Cómo puede obtener una cadena diferente de mayor longitud?
4. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   - Σ puede ser un conjunto vacío.
   - Si un alfabeto tiene infinitos símbolos, todos los lenguajes de cadenas sobre ese alfabeto serán también infinitos.
   - $\{0, 1\}$ es un lenguaje.
   - El número de sublenguajes de Σ^* es infinito no numerable.
5. Para todo lenguaje L, ¿qué es $L \cdot \emptyset$?

6. Sea $\Sigma = \{1\}$, ¿se puede decir que para todo número natural n hay alguna cadena $w \in \Sigma^*$ para la cual $|w| = n$? Si w es una cadena de Σ^* para la cual $|w| = n$, ¿es única? ¿Qué ocurriría si $\Sigma = \{1, 2\}$?

7. Para una cadena w, ¿se puede decir que $|w^{i+j}| = |w^i| + |w^j|$? Encontrar una expresión para $|w^{i+j}|$ en términos de i, j y $|w|$.

8. Definir las nociones de *sufijo* y *sufijo propio* de una cadena sobre un alfabeto.

9. Obtener todos los prefijos, sufijos y subcadenas de la cadena $w = sol$ sobre el alfabeto español.

10. Demostrar que $(wy)^I = y^I w^I$.

11. Sean $L_1 = \{el, mi\}$ y $L_2 = \{casa, libro, ordenador\}$, lenguajes sobre el alfabeto español. Obtener $L_1 \cdot L_2$, $L_1 \cdot L_1$, $L_1 \cdot L_2 \cdot L_2$.

12. Sea $L = \{\varepsilon, a\}$. Obtener L^n para $n = 0, 1, 2, 3$. ¿Cuántos elementos tiene L^n para un n arbitrario? ¿Cuáles son las cadenas de L^n para un n arbitrario?

13. Sean $L_1 = \{\varepsilon, ab\}$ y $L_2 = \{cd\}$, ¿cuántas cadenas hay en $L_1^n L_2$ para un n arbitrario?

14. Sean $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_2 = \{aa, ab, bb\}$, $L_3 = \{\varepsilon, aa, ab\}$ y $L_4 = \emptyset$. Obtener $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cup L_3$, $L_1 \cup L_4$, $L_4 \cup L_4$, $L_1 \cap L_2$, $L_2 \cap L_3$, $L_1 \cap L_4$, $L_3 \cap L_4$. Suponer que L es un lenguaje cualquiera. Obtener $L \cup L_4$ y $L \cap L_4$.

15. ¿Bajo qué condiciones $L^* = L^+$?

16. Obsérvese que para todo lenguaje L se tiene que $\varepsilon \in L^*$. ¿Cuándo $\varepsilon \in L^+$?

17. Sean A y B dos lenguajes sobre Σ. Demostrar que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

18. Obtener los lenguajes A, B, y C, tales que $A(B - C) \neq AB - AC$

19. Demostrar que para los lenguajes A y B, $(A \cup B)^* = (A^* B^*)^*$.

20. Demostrar que $(L^*)^* = L^*$, $(L^*)^+ = L^*$ y $(L^+)^* = L^*$.

21. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ y sea $L = \{c^i x c^j \mid i, j \geq 0\}$, donde x se restringe a $x = \varepsilon$, $x = aw$ o $x = wb$ para algún $w \in \Sigma$. ¿Se cumple que $L = \Sigma^*$? ¿Es cierto que $L^2 = \Sigma^*$?

22. Una cadena es *palíndroma* si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Por ejemplo, la palabra *reconocer* es palíndroma y también lo es la frase *Adán no calla con nada*. Dar una definición recursiva de una cadena palíndroma. Obsérvese que la cadena vacía es palíndroma.

23. **Cadenas exentas de cuadrados y excentas de cubos** (Ejercicio 1.8 del libro "*Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales*"). Sea Σ un alfabeto. Una cadena $w \in \Sigma^*$ se dice que está *exenta de cuadrados* si w no es de la forma uv^2x para las subcadenas u, v y x, donde $x \neq \epsilon$. La definición de *cadena exenta de cubos* es similar.

    Utilice el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ para poner 5 ejemplos de cadenas no exentas de cuadrados y 5 exentas de cubos.