Universidad de La Laguna

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

COMPUTABILIDAD Y ALGORITMIA

Tema 1: Alfabetos, cadenas y lenguajes

F. de Sande

Curso 2024-2025

Indice

Indice

Introducción

¿Qué tienen en común los siguientes elementos?

- Palabras inglesas.
- Valores enteros.
- Programas escritos en algún lenguaje de programación.
- Frases escritas en algún lenguaje natural como el español.

Introducción

¿Qué tienen en común los siguientes elementos?

- Palabras inglesas.
- Valores enteros.
- Programas escritos en algún lenguaje de programación.
- Frases escritas en algún lenguaje natural como el español.

1. Cada uno está compuesto por secuencias de **símbolos** tomados de alguna colección finita.

Introducción

¿Qué tienen en común los siguientes elementos?

- Palabras inglesas.
- Valores enteros.
- Programas escritos en algún lenguaje de programación.
- Frases escritas en algún lenguaje natural como el español.

1. Cada uno está compuesto por secuencias de **símbolos** tomados de alguna colección finita.
   - Conjunto de letras del alfabeto junto con símbolos como el guión, apóstrofe, etc.

Introducción

¿Qué tienen en común los siguientes elementos?

- Palabras inglesas.
- Valores enteros.
- Programas escritos en algún lenguaje de programación.
- Frases escritas en algún lenguaje natural como el español.

1. Cada uno está compuesto por secuencias de **símbolos** tomados de alguna colección finita.
   - Conjunto de letras del alfabeto junto con símbolos como el guión, apóstrofe, etc.

Introducción

¿Qué tienen en común los siguientes elementos?

- Palabras inglesas.
- Valores enteros.
- Programas escritos en algún lenguaje de programación.
- Frases escritas en algún lenguaje natural como el español.

1. Cada uno está compuesto por secuencias de **símbolos** tomados de alguna colección finita.
    - Conjunto de letras del alfabeto junto con símbolos como el guión, apóstrofe, etc.
    - Identificadores legales del lenguaje, palabras reservadas, símbolos especiales, salto de línea, etc.

Introducción

¿Qué tienen en común los siguientes elementos?

- Palabras inglesas.
- Valores enteros.
- Programas escritos en algún lenguaje de programación.
- Frases escritas en algún lenguaje natural como el español.

1. Cada uno está compuesto por secuencias de **símbolos** tomados de alguna colección finita.
    - Conjunto de letras del alfabeto junto con símbolos como el guión, apóstrofe, etc.
    - Identificadores legales del lenguaje, palabras reservadas, símbolos especiales, salto de línea, etc.
    - Palabras del idioma, espacios, comas y otros signos de puntuación.

Introducción

¿Qué tienen en común los siguientes elementos?

- Palabras inglesas.
- Valores enteros.
- Programas escritos en algún lenguaje de programación.
- Frases escritas en algún lenguaje natural como el español.

1. Cada uno está compuesto por secuencias de **símbolos** tomados de alguna colección finita.
   - Conjunto de letras del alfabeto junto con símbolos como el guión, apóstrofe, etc.
   - Identificadores legales del lenguaje, palabras reservadas, símbolos especiales, salto de línea, etc.
   - Palabras del idioma, espacios, comas y otros signos de puntuación.
2. Las secuencias de símbolos tienen longitud finita.

Alfabetos

Definición

Un alfabeto Σ *es un conjunto no vacío y finito de símbolos.*

Alfabetos

Definición

Un alfabeto Σ *es un conjunto no vacío y finito de símbolos.*

Ejemplos

Alfabetos

Definición

Un alfabeto Σ es un conjunto no vacío y finito de símbolos.

Ejemplos

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$

Alfabetos

Definición

Un alfabeto Σ es un conjunto no vacío y finito de símbolos.

Ejemplos

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{., \_\}$

Alfabetos

Definición

Un alfabeto Σ es un conjunto no vacío y finito de símbolos.

Ejemplos

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{., \_\}$
- $\Sigma_3 = \{a, b, c, ..., z\}$

Alfabetos

Definición

Un alfabeto Σ es un conjunto no vacío y finito de símbolos.

Ejemplos

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{., \_\}$
- $\Sigma_3 = \{a, b, c, ..., z\}$
- $\Sigma_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Alfabetos

Definición

Un alfabeto Σ es un conjunto no vacío y finito de símbolos.

Ejemplos

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{., \_\}$
- $\Sigma_3 = \{a, b, c, ..., z\}$
- $\Sigma_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\Sigma_5 = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$

Alfabetos

Definición

Un alfabeto Σ es un conjunto no vacío y finito de símbolos.

Ejemplos

- $\Sigma_1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma_2 = \{., \_\}$
- $\Sigma_3 = \{a, b, c, ..., z\}$
- $\Sigma_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $\Sigma_5 = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}$

Si Σ es un alfabeto, $\sigma \in \Sigma$ indica que σ es un símbolo del alfabeto Σ.

Cadenas o palabras

Definición

Una cadena o palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto.

Cadenas o palabras

Definición

Una cadena o palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto.

Ejemplos

Cadenas o palabras

Definición

Una cadena o palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto.

Ejemplos

- $w_1 = 01101$

Cadenas o palabras

Definición

Una cadena o palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto.

Ejemplos

- $w_1 = 01101$
- $w_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Cadenas o palabras

Definición

Una cadena o palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto.

Ejemplos

- $w_1 = 01101$
- $w_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $w_3 =$ hola

Cadenas o palabras

Definición

Una cadena o palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto.

Ejemplos

- $w_1 = 01101$
- $w_2 = . \ . \ . \ \_ \ \_ \ \_ \ \_ \ . \ . \ .$
- $w_3 =$ hola
- $w_4 = 1024$

Cadenas o palabras

Definición

Una cadena o palabra es una secuencia finita de símbolos de un determinado alfabeto.

Ejemplos

- $w_1 = 01101$
- $w_2 = . . . \_ \_ \_ \_ \_ . . .$
- $w_3 =$ hola
- $w_4 = 1024$

Nota

La experiencia nos lleva a identificar el término palabra con las palabras de algún lenguaje natural
Para evitar esta idea preconcebida, en CyA se utilizará el término cadena en lugar de palabra

Algunas consideraciones sobre las cadenas

Algunas consideraciones sobre las cadenas

- Todo símbolo de un alfabeto es una cadena sobre dicho alfabeto

Algunas consideraciones sobre las cadenas

- Todo símbolo de un alfabeto es una cadena sobre dicho alfabeto
  Dos cadenas con los mismos símbolos en distinto orden, son distintas: Sea $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$, $las \neq sal$

Algunas consideraciones sobre las cadenas

- Todo símbolo de un alfabeto es una cadena sobre dicho alfabeto
  Dos cadenas con los mismos símbolos en distinto orden, son distintas: Sea $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$, $las \neq sal$
- El número de símbolos que componen una cadena w es su **longitud** y se denota por $|w|$

Algunas consideraciones sobre las cadenas

- Todo símbolo de un alfabeto es una cadena sobre dicho alfabeto
  Dos cadenas con los mismos símbolos en distinto orden, son distintas: Sea $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$, $las \neq sal$
- El número de símbolos que componen una cadena w es su **longitud** y se denota por $|w|$
- La cadena vacía, ε es la que no tiene ningún símbolo: $|\varepsilon| = 0$

Algunas consideraciones sobre las cadenas

- Todo símbolo de un alfabeto es una cadena sobre dicho alfabeto
  Dos cadenas con los mismos símbolos en distinto orden, son distintas: Sea $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$, $las \neq sal$
- El número de símbolos que componen una cadena w es su **longitud** y se denota por $|w|$
- La cadena vacía, ε es la que no tiene ningún símbolo: $|\varepsilon| = 0$
- El símbolo ε no pertenece a ningún alfabeto, $\varepsilon \notin \Sigma$

Algunas consideraciones sobre las cadenas

- Todo símbolo de un alfabeto es una cadena sobre dicho alfabeto
  Dos cadenas con los mismos símbolos en distinto orden, son distintas: Sea $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$, $las \neq sal$
- El número de símbolos que componen una cadena w es su **longitud** y se denota por $|w|$
- La cadena vacía, ε es la que no tiene ningún símbolo: $|\varepsilon| = 0$
- El símbolo ε no pertenece a ningún alfabeto, $\varepsilon \notin \Sigma$
- ε es una cadena sobre cualquier alfabeto Σ puesto que es una cadena vacía de símbolos tomados de cualquier alfabeto

Notas

En cierta bibliografía y herramientas relacionadas con CyA se utiliza λ en lugar de ε para representar la cadena vacía

En CyA, las cadenas carecen de significado

Lenguajes

Definición

Un lenguaje (formal) es un conjunto de cadenas.

Lenguajes

Definición

Un lenguaje (formal) es un conjunto de cadenas.

Ejemplos

Lenguajes

Definición

Un lenguaje (formal) es un conjunto de cadenas.

Ejemplos

- $L_1 = \{1, 234, 912, 456\}$ es un lenguaje sobre $\Sigma_1 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$

Lenguajes

Definición

Un lenguaje (formal) es un conjunto de cadenas.

Ejemplos

- $L_1 = \{1, 234, 912, 456\}$ es un lenguaje sobre $\Sigma_1 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$
- $L_2 = \{a, aa, aaa, aaaa, ...\}$ es un lenguaje sobre $\Sigma_2 = \{a\}$

Lenguajes

Definición

Un lenguaje (formal) es un conjunto de cadenas.

Ejemplos

- $L_1 = \{1, 234, 912, 456\}$ es un lenguaje sobre $\Sigma_1 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$
- $L_2 = \{a, aa, aaa, aaaa, ...\}$ es un lenguaje sobre $\Sigma_2 = \{a\}$
- El conjunto de palabras inglesas "correctas" es un lenguaje sobre el alfabeto inglés.

Algunas consideraciones sobre los lenguajes

Algunas consideraciones sobre los lenguajes

- Si Σ es un alfabeto, también es un lenguaje (el formado por todas las cadenas con un único símbolo).

Algunas consideraciones sobre los lenguajes

- Si Σ es un alfabeto, también es un lenguaje (el formado por todas las cadenas con un único símbolo).
- Los lenguajes pueden ser infinitos, a pesar de que todas sus cadenas tengan longitud finita:
  - $L = \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$

Algunas consideraciones sobre los lenguajes

- Si Σ es un alfabeto, también es un lenguaje (el formado por todas las cadenas con un único símbolo).
- Los lenguajes pueden ser infinitos, a pesar de que todas sus cadenas tengan longitud finita:
  - $L = \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$
- Cuando el cardinal de un lenguaje es grande, resulta difícil especificar qué cadenas lo componen.

Algunas consideraciones sobre los lenguajes

- Si Σ es un alfabeto, también es un lenguaje (el formado por todas las cadenas con un único símbolo).
- Los lenguajes pueden ser infinitos, a pesar de que todas sus cadenas tengan longitud finita:
  - $L = \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$
- Cuando el cardinal de un lenguaje es grande, resulta difícil especificar qué cadenas lo componen.
- El lenguaje vacío $\emptyset$ es el lenguaje que no contiene ninguna cadena.
  - El lenguaje vacío no es el mismo que el que consta de la cadena vacía: $\emptyset \neq \{\varepsilon\}$

Algunas consideraciones sobre los lenguajes

- Si Σ es un alfabeto, también es un lenguaje (el formado por todas las cadenas con un único símbolo).
- Los lenguajes pueden ser infinitos, a pesar de que todas sus cadenas tengan longitud finita:
  - $L = \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$
- Cuando el cardinal de un lenguaje es grande, resulta difícil especificar qué cadenas lo componen.
- El lenguaje vacío $\emptyset$ es el lenguaje que no contiene ninguna cadena.
  - El lenguaje vacío no es el mismo que el que consta de la cadena vacía: $\emptyset \neq \{\varepsilon\}$
- Supongamos que Σ es un alfabeto y w es una cadena sobre Σ. Si L es el lenguaje formado por algunas de las cadenas sobre Σ y si w está en L, entonces $w \in L$ y se dice que w es un elemento de L.
  - $aaaa \in \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$
  - $234 \in \{1, 234, 912, 456\}$

Lenguaje Universal

Definición

El lenguaje universal sobre Σ o cierre de Σ es el lenguaje compuesto por **todas** *las cadenas sobre el alfabeto Σ.*

- Se denota por Σ^*
- Para cualquier alfabeto, Σ^* es infinito (puesto que los alfabetos son no vacíos, $\Sigma \neq \emptyset$)

Lenguaje Universal

Definición

El lenguaje universal sobre Σ *o cierre de* Σ *es el lenguaje compuesto por* **todas** *las cadenas sobre el alfabeto* Σ.

- Se denota por Σ^*
- Para cualquier alfabeto, Σ^* es infinito (puesto que los alfabetos son no vacíos, $\Sigma \neq \emptyset$)

Ejemplos

Lenguaje Universal

Definición

El lenguaje universal sobre Σ *o cierre de* Σ *es el lenguaje compuesto por* **todas** *las cadenas sobre el alfabeto* Σ*.*

- Se denota por Σ^*
- Para cualquier alfabeto, Σ^* es infinito (puesto que los alfabetos son no vacíos, $\Sigma \neq \emptyset$)

Ejemplos

- Si $\Sigma = \{a\}$, entonces:
  $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$

Lenguaje Universal

Definición

El lenguaje universal sobre Σ o cierre de Σ es el lenguaje compuesto por **todas** *las cadenas sobre el alfabeto Σ.*

- Se denota por Σ^*
- Para cualquier alfabeto, Σ^* es infinito (puesto que los alfabetos son no vacíos, $\Sigma \neq \emptyset$)

Ejemplos

- Si $\Sigma = \{a\}$, entonces:
  $\Sigma^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, ...\}$
- Si $\Sigma = \{0, 1\}$, entonces:
  $\Sigma^* = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, ...\}$

Lenguaje Universal

Lenguajes sobre un alfabeto Σ

Puesto que el lenguaje universal, Σ^* contiene todas las cadenas que es posible formar con símbolos de Σ, cualquier lenguaje sobre un alfabeto Σ será un subconjunto del lenguaje universal.
Así pues, cuando se escribe $L \subseteq \Sigma^*$ se está diciendo que L es un lenguaje sobre el alfabeto Σ

Indice

Concatenación

Sean w, z cadenas sobre cualquier alfabeto Σ

Definición

La concatenación de w con z es la cadena que se obtiene al añadir a la cadena w la cadena z.

Se denota como wz o $w \cdot z$

Concatenación

Sean w, z cadenas sobre cualquier alfabeto Σ

Definición

La concatenación de w con z es la cadena que se obtiene al añadir a la cadena w la cadena z.

Se denota como wz o $w \cdot z$

Ejemplo

- Sea $w = abra$ y $z = cadabra$, entonces: $wz = abracadabra$

Concatenación

Sean w, z cadenas sobre cualquier alfabeto Σ

Definición

La concatenación de w con z es la cadena que se obtiene al añadir a la cadena w la cadena z.

Se denota como wz o $w \cdot z$

Ejemplo

- Sea $w = abra$ y $z = cadabra$, entonces: $wz = abracadabra$

- $|wz| = |w| + |z|$

Concatenación

Sean w, z cadenas sobre cualquier alfabeto Σ

Definición

La concatenación de w con z es la cadena que se obtiene al añadir a la cadena w la cadena z.

Se denota como wz o $w \cdot z$

Ejemplo

- Sea $w = abra$ y $z = cadabra$, entonces: $wz = abracadabra$

- $|wz| = |w| + |z|$
- ε es la identidad para la concatenación: $\varepsilon \cdot w = w \cdot \varepsilon = w$

Repeticiones

Sea w una cadena y $n \in \mathbb{N}$

Definición

Dada una cadena sobre un alfabeto, su potencia se define como:

$$w^n = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } n = 0 \\ ww^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Repeticiones

Sea w una cadena y $n \in \mathbb{N}$

Definición

Dada una cadena sobre un alfabeto, su potencia se define como:

$$w^n = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } n = 0 \\ ww^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Si $w = aba$ es una cadena sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, se tiene que:

- $w^0 = \varepsilon$
- $w^1 = aba$
- $w^2 = abaaba$
- $w^3 = abaabaaba$

Igualdad de cadenas

Definición

Si w y z son cadenas, se dice que $w = z$ si tienen la misma longitud ($|w| = |z|$) y los mismos símbolos en la misma posición.

Igualdad de cadenas

Definición

Si w y z son cadenas, se dice que $w = z$ si tienen la misma longitud ($|w| = |z|$) y los mismos símbolos en la misma posición.

Ejemplo

Sea $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$

- $\alpha\beta\beta = \alpha\beta\beta$
- $\alpha\beta\beta \neq \beta\beta\alpha$

Prefijos y sufijos

Sean $w, x \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que x *es* **prefijo** *de* w *si* $\exists y \in \Sigma^* \mid w = xy$

Prefijos y sufijos

Sean $w, x \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que x *es* **prefijo** *de* w *si* $\exists y \in \Sigma^* \mid w = xy$

Ejemplo

- Si $w = subprograma$, entonces $x = sub$ es un prefijo de w ($y = programa$)
- Si $y = \varepsilon$, entonces para $w = xy$ se tiene que $w = x$ (toda cadena puede considerarse prefijo de sí misma)
- La cadena vacía ε es un prefijo de cualquier cadena

Prefijos y sufijos

Sean $w, x \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que x es **prefijo** *de w si $\exists y \in \Sigma^* \mid w = xy$*

Ejemplo

- Si $w = subprograma$, entonces $x = sub$ es un prefijo de w ($y = programa$)
- Si $y = \varepsilon$, entonces para $w = xy$ se tiene que $w = x$ (toda cadena puede considerarse prefijo de sí misma)
- La cadena vacía ε es un prefijo de cualquier cadena

Definición

Los **prefijos propios** *son aquellos que no son iguales a la cadena.*

Subcadenas

Sean $x, y, z, w \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que w es subcadena de z si existen las cadenas x e y para las cuales $z = xwy$

Subcadenas

Sean $x, y, z, w \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que w es subcadena de z si existen las cadenas x e y para las cuales $z = xwy$

Ejemplo

Sea $z = abc$ Subcadenas de z son:

Subcadenas

Sean $x, y, z, w \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que w es subcadena de z si existen las cadenas x e y para las cuales $z = xwy$

Ejemplo

Sea $z = abc$ Subcadenas de z son:

- ε
- a
- b
- c
- ab
- bc
- abc

Subsecuencias

Sean $x, y \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que y es una subsecuencia de x si y tiene símbolos de x respetando su orden, pero no necesariamente contiguos:

$$x = x_1 x_2 \dots x_N$$
$$y = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}$$
$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots i_k \leq i_m$$

Subsecuencias

Sean $x, y \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que y es una subsecuencia de x si y tiene símbolos de x respetando su orden, pero no necesariamente contiguos:

$$x = x_1 x_2 \ldots x_N$$
$$y = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$
$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots i_k \leq i_m$$

Ejemplo

Sea $w = 123456789$. Algunas subsecuencias de w son: 1457, 23479, 1236789, ...

Subsecuencias

Sean $x, y \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que y es una subsecuencia de x si y tiene símbolos de x respetando su orden, pero no necesariamente contiguos:

$$x = x_1 x_2 \ldots x_N$$
$$y = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$
$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots i_k \leq i_m$$

Ejemplo

Sea $w = 123456789$. Algunas subsecuencias de w son: 1457, 23479, 1236789, ...

- ε es subsecuencia de toda cadena.
- Toda subcadena es subsecuencia, pero el recíproco no es cierto.

Subsecuencias

Sean $x, y \in \Sigma^*$

Definición

Se dice que y es una subsecuencia de x si y tiene símbolos de x respetando su orden, pero no necesariamente contiguos:

$$x = x_1 x_2 \ldots x_N$$
$$y = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$
$$1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots i_k \leq i_m$$

Ejercicio

¿Cuál es el número de subsecuencias de $x \in \Sigma^*$ si $|x| = n$?

Inversa

Definición

Dada una cadena $w \in \Sigma^*$, su inversa o traspuesta se define como:

$$w^I = \begin{cases} w & \text{si } w = \varepsilon \\ y^I a & \text{si } w = ay, \text{con } a \in \Sigma \wedge y \in \Sigma^* \end{cases}$$

Inversa

Definición

Dada una cadena $w \in \Sigma^*$, su inversa o traspuesta se define como:

$$w^I = \begin{cases} w & \text{si } w = \varepsilon \\ y^I a & \text{si } w = ay, \text{con } a \in \Sigma \wedge y \in \Sigma^* \end{cases}$$

Ejemplo

Sea $w = atar$, entonces la inversa de w es:

- $w^I = (atar)^I =$
- $= (tar)^I a =$
- $= (ar)^I ta =$
- $= (r)^I ata =$
- $= (\varepsilon)^I rata =$
- $= \varepsilon \cdot rata = rata$

Indice

Concatenación

Definición

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ, la concatenación o producto cartesiano se define como:

$$L_1 \cdot L_2 = L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$

Concatenación

Definición

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ, la concatenación o producto cartesiano se define como:

$$L_1 \cdot L_2 = L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$

Ejemplo

Si $L_1 = \{ojos\}$ y $L_2 = \{azules, negros\}$, entonces:

- $L_1 L_2 = \{ojosazules, ojosnegros\}$

Concatenación

Definición

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ, la concatenación o producto cartesiano se define como:

$$L_1 \cdot L_2 = L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$$

Ejemplo

Si $L_1 = \{ojos\}$ y $L_2 = \{azules, negros\}$, entonces:

- $L_1 L_2 = \{ojosazules, ojosnegros\}$

- Si L_1 es un lenguaje sobre Σ_1 y L_2 es un lenguaje sobre Σ_2, entonces $L_1 L_2$ es un lenguaje sobre $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- Para cualquier lenguaje L se cumple: $L \cdot \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} \cdot L = L$

Potencia

Sea $L \subseteq \Sigma^*$

Se define la n-ésima potencia del lenguaje como:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L \cdot L^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Potencia

Sea $L \subseteq \Sigma^*$

Se define la n-ésima potencia del lenguaje como:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L \cdot L^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Si $L = \{0, 1\}$

Potencia

Sea $L \subseteq \Sigma^*$

Se define la n-ésima potencia del lenguaje como:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L \cdot L^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Si $L = \{0, 1\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$

Potencia

Sea $L \subseteq \Sigma^*$

Se define la n-ésima potencia del lenguaje como:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L \cdot L^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Si $L = \{0, 1\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L = \{0, 1\}$

Potencia

Sea $L \subseteq \Sigma^*$

Se define la n-ésima potencia del lenguaje como:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L \cdot L^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Si $L = \{0, 1\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L = \{0, 1\}$
- $L^2 = L \cdot L = \{00, 01, 10, 11\}$

Potencia

Sea $L \subseteq \Sigma^*$

Se define la n-ésima potencia del lenguaje como:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L \cdot L^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Si $L = \{0, 1\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L = \{0, 1\}$
- $L^2 = L \cdot L = \{00, 01, 10, 11\}$
- $L^3 = L \cdot L^2 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- ...

Potencia

Sea $L \subseteq \Sigma^*$

Se define la n-ésima potencia del lenguaje como:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n = 0 \\ L \cdot L^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Ejemplo

Si $L = \{0, 1\}$

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L = \{0, 1\}$
- $L^2 = L \cdot L = \{00, 01, 10, 11\}$
- $L^3 = L \cdot L^2 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$
- ...

- $\emptyset^0 = \{\varepsilon\} \qquad \emptyset^n = \emptyset, \ \forall n \geq 1$

Unión e intersección

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ ($L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Sigma^*$)

Unión

$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \lor w \in L_2\}$

Unión e intersección

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ ($L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Sigma^*$)

Unión

$$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$$

Intersección

$$L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\}$$

Unión e intersección

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ ($L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Sigma^*$)

Unión

$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$

Intersección

$L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\}$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{0, 1\}$, $L_1 = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11\}$ y $L_2 = \{\varepsilon, 1, 0110, 11010\}$, entonces:

Unión e intersección

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ ($L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Sigma^*$)

Unión

$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$

Intersección

$L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\}$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{0, 1\}$, $L_1 = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11\}$ y $L_2 = \{\varepsilon, 1, 0110, 11010\}$, entonces:

- $L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11, 0110, 11010\}$

Unión e intersección

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ ($L_1 \subseteq \Sigma^*$, $L_2 \subseteq \Sigma^*$)

Unión

$L_1 \cup L_2 = \{w \mid w \in L_1 \vee w \in L_2\}$

Intersección

$L_1 \cap L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \in L_2\}$

Ejemplo

Si $\Sigma = \{0, 1\}$, $L_1 = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11\}$ y $L_2 = \{\varepsilon, 1, 0110, 11010\}$, entonces:

- $L_1 \cup L_2 = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 11, 0110, 11010\}$
- $L_1 \cap L_2 = \{\varepsilon, 1\}$

Teorema

Sean L_1, L_2 y L_3 lenguajes sobre un alfabeto Σ

- $L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3$
- $(L_2 \cup L_3)L_1 = L_2L_1 \cup L_3L_1$

Teorema

Sean L_1, L_2 y L_3 lenguajes sobre un alfabeto Σ

- $L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3$
- $(L_2 \cup L_3)L_1 = L_2L_1 \cup L_3L_1$

Ejemplo

Si $L_1 = \{a, b\}$, $L_2 = \{b\}$, y $L_3 = \{c\}$, entonces:

Teorema

Sean L_1, L_2 y L_3 lenguajes sobre un alfabeto Σ

- $L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3$
- $(L_2 \cup L_3)L_1 = L_2L_1 \cup L_3L_1$

Ejemplo

Si $L_1 = \{a, b\}$, $L_2 = \{b\}$, y $L_3 = \{c\}$, entonces:

- $L_1(L_2 \cup L_3) = \{a, b\} \cdot (\{b\} \cup \{c\}) = \{a, b\} \cdot \{b, c\} = \{ab, ac, bb, bc\}$

Teorema

Sean L_1, L_2 y L_3 lenguajes sobre un alfabeto Σ

- $L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3$
- $(L_2 \cup L_3)L_1 = L_2L_1 \cup L_3L_1$

Ejemplo

Si $L_1 = \{a, b\}$, $L_2 = \{b\}$, y $L_3 = \{c\}$, entonces:

- $L_1(L_2 \cup L_3) = \{a, b\} \cdot (\{b\} \cup \{c\}) = \{a, b\} \cdot \{b, c\} = \{ab, ac, bb, bc\}$
- $L_1L_2 \cup L_1L_3 = \{a, b\} \cdot \{b\} \cup \{a, b\} \cdot \{c\} = \{ab, bb\} \cup \{ac, bc\} = \{ab, bb, ac, bc\}$

Sublenguajes e igualdad de lenguajes

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ

Definición

Si todas las cadenas de L_1 son también cadenas de L_2 se dice que L_1 es un **sublenguaje** *de L_2 ($L_1 \subseteq L_2$).*

Sublenguajes e igualdad de lenguajes

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ

Definición

Si todas las cadenas de L_1 son también cadenas de L_2 se dice que L_1 es un **sublenguaje** *de L_2 ($L_1 \subseteq L_2$).*

Ejemplo

- Para los lenguajes $L_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa\}$ y $L_2 = \{a^n \mid n = 0, 1, 2, ...\}$, se tiene que $L_1 \subseteq L_2$
- Cualquier lenguaje L sobre el alfabeto Σ es un sublenguaje de Σ^*: $L \subseteq \Sigma^*$

Sublenguajes e igualdad de lenguajes

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ

Definición

Si todas las cadenas de L_1 son también cadenas de L_2 se dice que L_1 es un **sublenguaje** *de L_2 ($L_1 \subseteq L_2$).*

Ejemplo

- Para los lenguajes $L_1 = \{a, aa, aaa, aaaa, aaaaa\}$ y $L_2 = \{a^n \mid n = 0, 1, 2, ...\}$, se tiene que $L_1 \subseteq L_2$
- Cualquier lenguaje L sobre el alfabeto Σ es un sublenguaje de Σ^*: $L \subseteq \Sigma^*$

Definición

Se dice que dos lenguajes L_1 y L_2 son **iguales** *si contienen exactamente las mismas cadenas:*

$$L_1 = L_2 \text{ si y sólo si } L_1 \subseteq L_2 \text{ y } L_2 \subseteq L_1$$

Cierre de Kleene y cierre positivo

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ.
Dicho de otro modo, $L \subseteq \Sigma^*$

Cierre de Kleene (o cierre estrella) de L

$$L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$

Cierre de Kleene y cierre positivo

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ.
Dicho de otro modo, $L \subseteq \Sigma^*$

Cierre de Kleene (o cierre estrella) de L

$$L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$

Cierre positivo de L

$$L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$$

Cierre de Kleene y cierre positivo

Ejemplo

Consideremos $L = \{a\}$, entonces:

Cierre de Kleene y cierre positivo

Ejemplo

Consideremos $L = \{a\}$, entonces:

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = \{a\}$
- $L^2 = \{aa\}$
- ...

Cierre de Kleene y cierre positivo

Ejemplo

Consideremos $L = \{a\}$, entonces:

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = \{a\}$
- $L^2 = \{aa\}$
- ...

Y, por tanto:

- $L^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, ...\}$
- $L^+ = \{a, aa, aaa, ...\}$

Cierre de Kleene y cierre positivo

Ejemplo

Consideremos $L = \{a\}$, entonces:

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = \{a\}$
- $L^2 = \{aa\}$
- ...

Y, por tanto:

- $L^* = \{\varepsilon, a, aa, aaa, ...\}$
- $L^+ = \{a, aa, aaa, ...\}$

- Las cadenas de L^* se forman al realizar **cero o más** concatenaciones de las cadenas del lenguaje.
- Las cadenas de L^+ se forman realizando **una o más** concatenaciones.

Propiedades de las operaciones de cierre

Recordatorio

El lenguaje universal Σ^* está formado por todas las concatenaciones de cero o más símbolos de Σ.

Propiedades de las operaciones de cierre

Recordatorio

El lenguaje universal Σ^* está formado por todas las concatenaciones de cero o más símbolos de Σ.

Propiedades

- Si L es un lenguaje sobre Σ, $L \subseteq \Sigma^*$
- Si L es un lenguaje sobre Σ, $L^n \subseteq \Sigma^*, \forall n \in \mathbb{N}$
- $L^* \subseteq \Sigma^*$
- $L^+ \subseteq \Sigma^*$
- Puesto que $\emptyset^0 = \{\varepsilon\}$ y $\emptyset^n = \emptyset, \forall n \geq 1$, entonces:
  - $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$
  - $\emptyset^+ = \emptyset$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teoremas

- $(L^+)^+ = L^+$
- $(L^*)^* = L^*$
- $(L^+)^* = L^*$
- $(L^*)^+ = L^*$
- $L^+ = L^* \cdot L = L \cdot L^*$
- $L \subseteq L^+ \subseteq L^*$
- $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^n \subseteq L_2^n, \forall n \in \mathbb{N}$
- $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^* \subseteq L_2^* \;\; (L_1^+ \subseteq L_2^+)$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Demostración

- Sea $w \in L^+$, por la definición de cierre positivo se obtiene que $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Demostración

- Sea $w \in L^+$, por la definición de cierre positivo se obtiene que $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$
- Entonces, para algún $k \geq 1$, se tiene que $w \in L^k$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Demostración

- Sea $w \in L^+$, por la definición de cierre positivo se obtiene que $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$
- Entonces, para algún $k \geq 1$, se tiene que $w \in L^k$
- Puesto que $L^k = L \cdot L^{k-1}$, se obtiene que $w \in L \cdot L^{k-1}$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Demostración

- Sea $w \in L^+$, por la definición de cierre positivo se obtiene que $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$
- Entonces, para algún $k \geq 1$, se tiene que $w \in L^k$
- Puesto que $L^k = L \cdot L^{k-1}$, se obtiene que $w \in L \cdot L^{k-1}$
- Por tanto:

$$w \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (L \cdot L^n) = L \cdot \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = L \cdot L^*$$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Demostración

- Sea $w \in L^+$, por la definición de cierre positivo se obtiene que $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$
- Entonces, para algún $k \geq 1$, se tiene que $w \in L^k$
- Puesto que $L^k = L \cdot L^{k-1}$, se obtiene que $w \in L \cdot L^{k-1}$
- Por tanto:

$$w \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (L \cdot L^n) = L \cdot \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = L \cdot L^*$$

- Esto prueba que $L^+ \subseteq L \cdot L^*$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Demostración

- Sea $w \in L \cdot L^* = L \cdot \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (L \cdot L^n)$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Demostración

- Sea $w \in L \cdot L^* = L \cdot \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (L \cdot L^n)$
- Entonces, para algún $j \geq 0$, se deduce que:

$$w \in L \cdot L^j = L^{j+1} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k = L^+$$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Demostración

- Sea $w \in L \cdot L^* = L \cdot \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (L \cdot L^n)$
- Entonces, para algún $j \geq 0$, se deduce que:

$$w \in L \cdot L^j = L^{j+1} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k = L^+$$

- Por lo tanto $L \cdot L^* \subseteq L^+$

Propiedades de las operaciones de cierre

Teorema

$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$$

Demostración

- Sea $w \in L \cdot L^* = L \cdot \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (L \cdot L^n)$
- Entonces, para algún $j \geq 0$, se deduce que:

$$w \in L \cdot L^j = L^{j+1} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k = L^+$$

- Por lo tanto $L \cdot L^* \subseteq L^+$

La demostración de $L^+ = L^* \cdot L$ es similar.

Diferencia

Definición

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ, definimos la diferencia como:

$$L_1 - L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \notin L_2\}$$

Diferencia

Definición

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ, definimos la diferencia como:

$$L_1 - L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \notin L_2\}$$

Ejemplo

- Consideremos $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Definamos L_1 como el lenguaje formado por las cadenas que no contienen ninguno de los dígitos $2, 3, ..., 9$.
- Definamos L_2 como el lenguaje formado por las cadenas de ceros.

Diferencia

Definición

Sean L_1 y L_2 lenguajes sobre un alfabeto Σ, definimos la diferencia como:

$$L_1 - L_2 = \{w \mid w \in L_1 \wedge w \notin L_2\}$$

Ejemplo

- Consideremos $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Definamos L_1 como el lenguaje formado por las cadenas que no contienen ninguno de los dígitos $2, 3, ..., 9$.
- Definamos L_2 como el lenguaje formado por las cadenas de ceros.
- Entonces $L_1 - L_2$ es el lenguaje formado por las cadenas de ceros y unos que tienen al menos un uno.

Complemento o complementario

Definición

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ, definimos el complementario o complemento del lenguaje sobre el alfabeto como:

$$\overline{L} = \Sigma^* - L$$

Complemento o complementario

Definición

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ, definimos el complementario o complemento del lenguaje sobre el alfabeto como:

$$\overline{L} = \Sigma^* - L$$

Ejemplo

- Consideremos $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Definamos L como el lenguaje formado por las cadenas que no contienen ninguno de los dígitos $2, 3, ..., 9$

Complemento o complementario

Definición

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ, definimos el complementario o complemento del lenguaje sobre el alfabeto como:

$$\overline{L} = \Sigma^* - L$$

Ejemplo

- Consideremos $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Definamos L como el lenguaje formado por las cadenas que no contienen ninguno de los dígitos $2, 3, ..., 9$
- Entonces $\overline{L}$ es el lenguaje formado por todas las cadenas que contienen al menos uno de los dígitos $2, 3, ..., 9$

Inversa

Definición

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ, definimos la inversa del lenguaje como:

$$L^I = L^{-1} = \{w^I \mid w \in L\}$$

Inversa

Definición

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ, definimos la inversa del lenguaje como:

$$L^I = L^{-1} = \{w^I \mid w \in L\}$$

Ejemplo

- Si $L = \{sala, eva\}$ entonces:
- $L^I = L^{-1} = \{alas, ave\}$

Inversa

Definición

Sea L un lenguaje sobre un alfabeto Σ, definimos la inversa del lenguaje como:

$$L^I = L^{-1} = \{w^I \mid w \in L\}$$

Ejemplo

- Si $L = \{sala, eva\}$ entonces:
- $L^I = L^{-1} = \{alas, ave\}$

Obsérvese que:

- $(L^I)^I = L$
- $(L_1 \cdot L_2)^I = {L_2}^I \cdot {L_1}^I$

IMPORTANTE

Estas transparencias se utilizan ÚNICAMENTE como guía para el profesorado durante las clases.

Estas transparencias NO son un material completo y autocontenido para el uso del alumnado.