Tema 10: Estimación Puntual

Profesora: Carmen Elvira Ramos Domínguez

Índice

- Estimación. Tipos de Estimaciones.
- Estimador Puntual. Estimación por Analogía.
- Función de Verosimilitud.
- Propiedades de los Estimadores.
  - ✓ Insesgado
  - ✓ Asintóticamente insesgado
  - ✓ De mínima varianza. Cota de Cramer-Rao
  - ✓ Eficiente. Error cuadrático medio
  - ✓ Consistente
- Estimadores Puntuales más comunes.
- Método de obtención de Estimadores.
  - ✓ Máxima Verosimilitud
  - ✓ Momentos.

Estimación

El objetivo de la Inferencia Estadística consiste en establecer conclusiones sobre una población basándonos en la información contenida en la muestra.

Por lo general, se considera conocida la forma de la distribución de probabilidad que sigue la característica en estudio, y ésta viene determinada por unas medidas numéricas que se denominan Parámetros.

¿Cómo estimar los parámetros a partir de los datos muestrales?

Ejemplos: 1.- Se quiere estimar la proporción de ordenadores que se estropean en el período de garantía.

2.- El tiempo medio de espera en una caja de un supermercado.

3.- La desviación típica del error de medición de un instrumento electrónico.

Tipos de Estimación

Se pueden presentar dos maneras de Estimación:

- Estimación Puntual. Nos proporciona un único valor como verdadero valor del parámetro.
- Estimación Por Intervalo. Nos proporciona dos valores que nos generan un intervalo en el que se supone incluirá el parámetro.

Estimador Puntual

El procedimiento de Estimación Puntual utiliza la información de la muestra para obtener un valor numérico que estime el parámetro objetivo.

Para ello se usan funciones medibles de la muestra denominadas Estimadores o Estadísticos.

Definición: Un Estimador Puntual de un parámetro θ es una función medible $T:(R^n, \beta^n) \to (R, \beta)$ que a cada realización de la muestra $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le hace corresponder una estimación del parámetro θ: $T(x) = T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$.

Si se aplica el estimador T a la muestra aleatoria simple $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $T(X)$ tendrá por distribución de probabilidad la de la muestra pero trasladada, P_θ^T, y por tanto, también dependerá de θ

Estimación por Analogía

Una vez se ha evaluado el estimador puntual, para una realización de la muestra en particular se obtiene un valor numérico como valor del parámetro, al que se denomina Estimación Puntual.

La Estimación por Analogía consiste en estimar cada característica poblacional por la correspondiente característica muestral. Se considera a la muestra como una subpoblación.

Así el estimador de la media μ sería:

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

y el de la varianza σ^2 : $\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

Función de Verosimilitud

Definición: Sea $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de la variable aleatoria X, cuya distribución F_θ depende de θ, se denomina Función de Verosimilitud a la función de densidad o función de probabilidad conjunta de las variables que forman la muestra.

$$L(\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \\ P_\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P_\theta(x_i) \end{cases}$$

NOTA: la $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ son n variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas que X.

Función de Verosimilitud

Distrib.	Densidad/Probabilidad	Función de Verosimilitud
Bi(m, p)	$\binom{m}{x} p^{x}(1-p)^{m-x} I_{[0..m]}(x)$	$\prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{nm-\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} I_{[0..m]}(x_i)$
Po(λ)	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x}}{x!}$	$e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$
U[a,b]	$\frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\left(\frac{1}{b-a}\right)^{n} I_{[-\infty,b]}(\max_i x_i)\ I_{[a,+\infty]}(\min_i x_i)$
N(μ, σ)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}}$	$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^{2}}$
Exp(θ)	$\theta e^{-\theta x} I_{[0,\infty]}(x)$	$\theta^{n} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} I_{[0,\infty]}(\min_i x_i)$
Γ(a,p)	$\frac{a^{p}}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax} I_{[0,\infty]}(x)$	$\left(\frac{a^{p}}{\Gamma(p)}\right)^{n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{p-1} e^{-a \sum_{i=1}^{n} x_i} I_{[0,\infty]}(\min x_i)$

Propiedades de los Estimadores

Es posible obtener diferentes estimadores para un mismo parámetro poblacional.

¿Cómo establecer un criterio de bondad para comparar un estimador con otro?

Veamos una serie de propiedades que serían deseables que tuvieran los estimadores.

Insegado

El proceso de estimación puntual es similar a disparar con una pistola a un blanco.

El estimador $\rightarrow$ La pistola

Una estimación particular $\rightarrow$ Una bala

El parámetro poblacional $\rightarrow$ el blanco u objetivo

Propiedades de los Estimadores

Seleccionar una muestra y estimar el valor del parámetro equivale a disparar un solo tiro al blanco.

Si una persona dispara un único tiro y da en el blanco, no tiene porque ser un tirador experto, pero si realiza 1000 disparos y todos dan en el blanco, entonces si.

De forma análoga, si repetimos el proceso de estimación y analizamos la distribución de frecuencias de las estimaciones obtenidas, y vemos que están cerca del parámetro de interés, sería un buen estimador.

Definición: Un estimador $\hat{\theta} = T(X)$ de θ se dice Centrado o Insesgado si $E_\theta[T(X)] = \theta \quad \forall \theta \in \Theta$

En otro caso, se dice que es Sesgado y se denomina Sesgo del estimador a $b(T(X)) = E_\theta[T(X)] - \theta$

Propiedades de los Estimadores

La media muestral es un estimador insesgado de la media poblacional, mientras que la varianza muestral no lo es de la varianza poblacional.

Se define la Cuasi-varianza muestral por:

$$S_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

Definición: Un estimador es Asintóticamente Insesgado sii: $\lim_{n\to\infty} E(T[X]) = \theta$

Propiedades de los Estimadores

De Mínima Varianza

Dentro del conjunto de estimadores insesgados, nos interesa aquel que en el muestreo repetitivo mayor fracción de estimaciones quedan cerca de θ.

Definición: El estimador insesdado T(X) es un estimador **Insesgado de Mínima Varianza** para $\theta \in \Theta$, si dado cualquier otro estimador insesgado S(X) se verifica:

$$V_\theta(T(X)) \le V_\theta(S(X)) \quad \forall \theta \in \Theta$$

Eficiente

Otra forma de medir la bondad de un estimador es por medio del error que comete en sus estimaciones.

Definición: El **Error Cuadrático Medio** de un estimador es $ECM_\theta(T(X)) = E_\theta[(T(X)-\theta)^2] = V_\theta(T(X)) + b(T(X))^2$

Propiedades de los Estimadores

Eficiente

Definición: Se dice que el estimador T(X) es más Eficiente que el estimador S(X) si T(X) tiene menor error cuadrático medio. $ECM_\theta(T(X)) \leq ECM_\theta(S(X)) \quad \forall\theta \in \Theta$

Si los dos son insesgados sería más eficiente aquel con menor varianza.

Cota de Cramer-Rao:

Existe una cota para la varianza de cualquier estimador, y se denomina la Cota de Cramer-Rao, cuya expresión es:

$$V_\theta(T(X)) \geq \frac{(1+b(T(X)))^2}{E\left[\left(\frac{\partial \log L(\theta \circ X)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

Propiedades de los Estimadores

Eficiente

Definición: Un estimador insesgado T(X) se dice Eficiente si la varianza del estimador alcanza la cota de Cramer-Rao.

$$V_\theta(T(X)) = \frac{1}{E\left[\left(\frac{\partial \log L(\theta o X)}{\partial \theta}\right)^2\right]}$$

Consistente

Definición: Un estimador es Consistente si se aproxima asintóticamente al verdadero valor del parámetro.

Definición: T(X) es Consistente en media cuadrática sii

$$\lim_{n\to\infty} ECM_\theta(T(X)) = 0 \quad \forall\theta \in \Theta$$

Estimadores Puntuales Más Comunes

Proporción Muestral: Sea una característica dicotómica, es decir, el individuo de la población la presenta o no.

Sea "p" la proporción de individuos de la población que presentan tal característica.

Sea X la variable ligada a este experimento $X \cong Bi(1,p)$.

Seleccionamos una m.a.s. de la población $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces el estimador puntual más común para p es:

$$\hat{p} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de individuos en la muestra con la característica}}{n}$$

Propiedades:

1.- Es Insesgado $E[\hat{p}] = p$

2.- Es de Mínima varianza y su varianza es: $\frac{p(1-p)}{n}$

3.- Para n grande se distribuye $N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$

Estimadores Puntuales Más Comunes

Media Muestral: Dada X la característica en estudio, con media μ y varianza σ^2.

Seleccionamos una m.a.s. de la población $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces la media muestral es el estimador más usual de μ.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

Propiedades:

1.- Es Insesgado $E[\overline{X}] = \mu$

2.- Es de Mínima varianza y su varianza es: $\dfrac{\sigma^2}{n}$ Si la población es finita, de tamaño N, entonces la varianza es $\dfrac{\sigma^2}{n}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$

3.- Para n grande se distribuye $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ y para n pequeñas depende de la distribución de X.

4.- Si X es N(μ,σ) entonces la media muestral sigue una $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Estimadores Puntuales Más Comunes

Cuasi-Varianza Muestral: Dada $x_1, x_2, \ldots, x_n$, una m.a.s. procedente de una población con media μ y varianza σ^2. El estimador más usual de σ^2, es

$$S_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

Propiedades:

1.- Es Insesgado $E[S_{n-1}^2] = \sigma^2$

2.- Su varianza es: $\frac{2}{n-1}\sigma^4$

3.- Si X es N(μ,σ) entonces $\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} \cong \chi_{n-1}^2$

En el caso de dos poblaciones, el estimador de μ_1-μ_2 sería $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ y el estimador de p_1-p_2 sería $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

Métodos de Obtención de Estimadores

Método de Máxima Verosimilitud.

Ejemplo: Dada una urna con 6 bolas entre blancas y negras, no todas del mismo color, pero se ignora cuántas hay de cada uno.

Proporción de bolas blancas $p = \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}$ ó $\frac{5}{6}$

Se extraen dos bolas con reemplazo, para adivinar el valor de p. Se puede obtener T= 0, 1, ó 2 bolas blancas.

p	T=0	T=1	T=2
1/6	$0.7 = \left({}^5/_6\right)^2$	$2\left({}^1/_6\right)\left({}^5/_6\right)$	$0.02 = \left({}^1/_6\right)^2$
2/6	$0.4 = \left({}^4/_6\right)^2$	$2\left({}^2/_6\right)\left({}^4/_6\right)$	$0.1 = \left({}^2/_6\right)^2$
3/6	$0.25 = \left({}^3/_6\right)^2$	$2\left({}^3/_6\right)\left({}^3/_6\right)$	$0.25 = \left({}^3/_6\right)^2$
4/6	$0.1 = \left({}^2/_6\right)^2$	$2\left({}^4/_6\right)\left({}^2/_6\right)$	$0.4 = \left({}^4/_6\right)^2$
5/6	$0.02 = \left({}^1/_6\right)^2$	$2\left({}^5/_6\right)\left({}^1/_6\right)$	$0.7 = \left({}^5/_6\right)^2$

Métodos de Obtención de Estimadores

Lo razonable es usar como estimador

$$\hat{p} = \begin{cases} 1/6 & \text{si } T = 0 \\ 1/2 & \text{si } T = 1 \\ 5/6 & \text{si } T = 2 \end{cases}$$

El método de máxima verosimilitud consiste en elegir como estimación del parámetro a aquella que sea más probable dado el valor de la muestra.

Definición: El estadístico T(X) es el Estimador de Máxima Verosimilitud (E.M.V.) si y sólo si

$$L(T(X), X) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta, X)$$

En la mayoría de las veces se obtiene por simple derivación, pero como el logaritmo es monótona creciente es más cómodo derivar dicho logaritmo.

Métodos de Obtención de Estimadores

Método de los Momentos.

Sea la variable de interés en la población, X, cuya distribución depende de k-parámetros desconocidos, θ_1, θ_2,…, θ_k, en el caso de que existan los momentos poblacionales respecto del origen estarán en función de ellos:
$$E_\theta[X^r] = \alpha_r(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) \quad r = 1, 2, ..., k$$

La idea del método consiste en igualar tales momentos con los correspondiente muestrales.

$$a_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

Entonces despejamos θ_1, θ_2,…, θ_k, en función de los a_r y se obtienen así los estimadores $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, ..., \hat{\theta}_k$ por el Método de los Momentos.