Tema 7: Distribuciones de Probabilidad Discretas

Profesora: Carmen Elvira Ramos Domínguez

Índice

- Distribución Uniforme Discreta.
- Distribución de Bernouilli.
- Distribución Binomial.
- Distribución de Poisson.
- Distribución Geométrica.
- Distribución Binomial Negativa.
- Distribución Hipergeométrica.

Distribución Uniforme Discreta

Definición: Una variable aleatoria X se dice que sigue una Distribución Uniforme Discreta si cada uno de los n valores que están en el rango de ésta, x_1, x_2,….,x_n tienen la misma probabilidad.

$$P(X = x_i) = f_X(x_i) = \frac{1}{n}$$

Ejemplo: Sea el terminal de un número de lotería. Este puede valer cualquier de los números del 0 al 9, y todos tienen igual probabilidad 0.1. Entonces:

X ≅ “Terminal de un número de lotería” es Uniforme Discreta

Supongamos que X es una v.a. uniforme discreta que toma los enteros consecutivos a, a+1, a+2,…., b-1, b, con a≤b entonces: $\mu_X = E[X] = \frac{(a+b)}{2}$ y $\sigma_X{}^2 = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

Distribución Bernouilli

Definición: Sea un experimento aleatorio con sólo dos resultados excluyentes:

- Suceso A ≅ denotado como éxito con P(A) = p
- Suceso A^c ≅ denotado como fracaso con P(A^c) = 1-p

A este tipo de experimento se le denomina Prueba de Bernouilli.

Definición: La variable aleatoria X que toma los valores:

- X=1 cuando ocurre A con P(X=1) =p
- X=0 cuando ocurre A^c con probabilidad P(X=0) = q = 1-p

Se dice que sigue una Distribución de Bernouilli X≅Be(p)

X	1	0
P(X=x)	p	1-p=q

Distribución Bernouilli

Ejemplo: Lanzar una moneda al aire. X= Salir cara

- p = ½

Ejemplo: Extraer una pieza de un lote de 100, donde hay 15 defectuosas. X= Salir defectuosa.

- p = 0.15

La media, varianza y desviación estándar de una v.a. Bernouilli es:

$$\mu_X = p,\quad \sigma_X^2 = pq,\quad \sigma_X = \sqrt{pq}$$

Como se puede apreciar en pruebas de Bernouilli, la variable queda completamente determinada conociendo el parámetro p.

Distribución Binomial

Definición: Llamamos Experimento Binomial a todo experimento aleatorio, que consiste en la repetición de n pruebas de Bernouilli tales que:

1. Las pruebas son independientes.
2. La probabilidad de éxito en cada prueba, p, permanece constante.

Ejemplo: Se lanza 10 veces una moneda. Los posibles resultados de cada lanzamiento son:

- cara ≅ que suponemos éxito con P(cara) = 1/2
- cruz ≅ que suponemos como fracaso con P(cruz) = ½

Cada lanzamiento es una Prueba de Bernouilli. Además, se puede apreciar:

1. Si sale cara en el 3º lanzamiento no influye en el 5º lanzamiento.
2. La probabilidad de obtener cara es la misma en todos los lanzamientos.

Distribución Binomial

Definición: La variable aleatoria X que cuenta el número de éxitos observados en un experimento Binomial (n pruebas de Bernouilli) se dice que sigue una Distribución Binomial de parámetros n y p.

X ≈ Bi(n,p) y su función de probabilidad es:

$$\boxed{f_X(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n}$$

Si n = 1 ⇒ X ≅ Be(p) es una Bernouilli.

X≅Bi(n,p) es la suma de n v.a. Bernouilli independientes

Sean:
$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si la k−ésima prueba es éxito} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$X_k \cong Be(p) \;\; \forall k = 1, \ldots, n$ y X_k son independientes entre sí. Entonces:

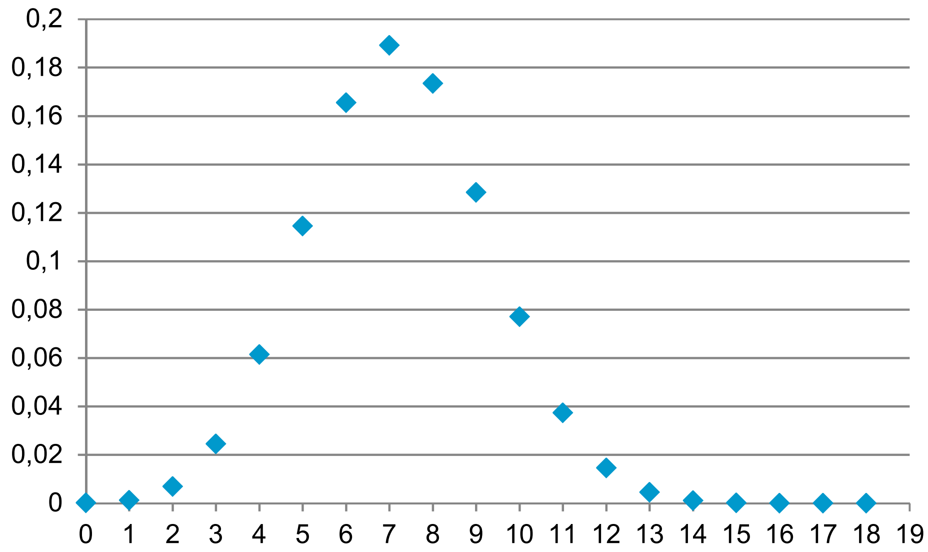
$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Distribución Binomial

La media y varianza de una variable aleatoria Binomial X ≅ Bi(n,p) es: $\mu_X = E[X] = np$ y $\sigma_X{}^2 = V(X) = npq$

Ejemplo: Sea una Binominal Bi(18,0.4).

0	0,00010156
1	0,00121872
2	0,00690608
3	0,02455494
4	0,06138735
5	0,11458972
6	0,16551849
7	0,18916399
8	0,17340032
9	0,12844468
10	0,07706681
11	0,03736573
12	0,01453112
13	0,00447111
14	0,00106455
15	0,00018925
16	2,3657E-05
17	1,8554E-06
18	6,8719E-08



La Binomial es reproductiva respecto del parámetro n.

Distribución Binomial

Utilización de la Tabla de la Binomial: $X \cong Bi(n,p)$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

n	k	p	0,01	0,05	……	0,5
2	0		0,9801	0,9026	……	0,2500
	1		0,0198	0,0950	……	0,5000
	2		0,0001	0,0025	……	0,2500
3	0		0,9703	0,8574	……	0,1250
	1		0,0294	0,1354	……	0,3750
	2		0,0003	0,0071	……	0,3750
	3		0,0000	0,0001	……	0,1250
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮

Distribución Binomial

Ejemplos: Buscar las siguientes probabilidades en la tabla:

- P(Bi(5,0.1) = 1) = 0.3280
- P(Bi(7,0.5) = 3) = 0.2734

➢ ¿Qué ocurre si p > 0.5? En la tabla no están las probabilidades para p>0.5.

P(Bi(n,p) = k) = P(Bi(n,1-p)=n-k)

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{n-k} (1-p)^{n-k} p^{n-(n-k)}$$

Ejemplo: Buscar la siguiente probabilidad en la tabla:

- P(Bi(10,0.8)=7) = P(Bi(10,0.2) = 3) = 0.2013

Distribución de Poisson

Ejemplo: Supongamos la variable aleatoria:

X ≅ nº de llamadas que se reciben en una centralita en un intervalo de tiempo (1 hora).

Veamos ¿cómo obtener su distribución de probabilidad?

1. Dividimos el intervalo de tiempo en subintervalos de amplitud muy pequeña, tal que la probabilidad de recibir más de una llamada sea prácticamente nula.
2. Supongamos la hipótesis de las llamadas se reciben de forma aleatoria. Todos los subintervalos tienen igual probabilidad de recibir una llamada, "p".
3. Por último, el hecho de recibir una llamada en un subintervalo es independiente de recibirla en otro distinto.

Según lo anterior, entonces: X ≅ Bi(n,p) con:

n grande y p pequeño, ya que $p = \lambda/n$ y λ = nº medio de llamadas

Distribución de Poisson

Definición: Dado un intervalo de números reales, donde el conteo de ocurrencias es aleatorio. Si dicho intervalo se puede dividir en subintervalos suficientemente pequeños tales que:

1. La probabilidad de más de una ocurrencia en un subintervalo es cero.
2. La probabilidad de una ocurrencia en un subintervalo es la misma para todos, y proporcional a su longitud.
3. El conteo de ocurrencias es independiente del subintervalo.

A dicho experimento se le denomina Proceso de Poisson

Definición: Si el nº medio de ocurrencias en un intervalo de un Proceso de Poisson es $\lambda > 0$, la variable aleatoria que cuenta el nº de ocurrencias en dicho intervalo se dice que sigue una Distribución de Poisson de parámetro λ.

Distribución de Poisson

La Distribución de Probabilidad de una Poisson Po(λ) es:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, 2, \dots \dots$$

Ejemplos:

1. Nº de emisiones de partículas radioactivas durante un intervalo de tiempo de un material radioactivo
2. Nº de errores de una secretaria al mecanografiar una página.

Sea X $\cong$ Po(λ) entonces: $\mu_X = E[X] = \lambda$ y $\sigma_X{}^2 = \lambda$

Relación Binomial-Poisson: Sea una Binomial X$\cong$Bi(n,p)

con: $\left.\begin{matrix} \text{n grande } (n > 50) \\ \text{p pequeño } (p < 0.1) \end{matrix}\right\}$ o λ = np < 5

Entonces se puede aproximar X $\cong$ Po(λ)

Distribución Geométrica

Definición: Dada una serie de pruebas de Bernouilli:

1. Independientes.
2. Con la misma probabilidad de éxito, “p”.

Sea la variable aleatoria X ≅ nº de pruebas realizadas hasta la obtención del primer éxito, se dice que X sigue una Distribución Geométrica de parámetro p, Ge(p).

Su función de probabilidad es:

$$\boxed{f_X(x) = P(X = x) = (1-p)^{x-1}p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots}$$

Ejemplo: La probabilidad de recibir de forma errónea un bit enviado por un canal de transmisión digital es 0.1. Supuesto que las transmisiones son independientes.

Sea X ≅ nº de bits transmitidos hasta que se presenta el primero error

Distribución Geométrica

¿Cuál es la probabilidad de se transmitan 4 bits de forma correcta?

Solución: $P(X=5) = 0.9^4 \times 0.1 = 0.066$

Dada una variable aleatoria Geométrica de parámetro p entonces su media y varianza son:

$$\mu_x = E[X] = \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad \sigma_X{}^2 = V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Distribución Geométrica

Otra definición: Dada una serie de pruebas de Bernouilli:

1. Independientes.
2. Con la misma probabilidad de éxito, "p".

Sea la variable aleatoria $X \cong$ nº de fracasos obtenidos hasta la obtención del primer éxito, se dice que X sigue una Distribución Geométrica de parámetro p, Ge(p).

Su función de probabilidad es:

$$\boxed{f_X(x) = P(X = x) = (1-p)^x p \qquad x = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

Dada una variable aleatoria Geométrica de parámetro p entonces su media y varianza son:

$$\mu_x = E[X] = \frac{1-p}{p} \quad \text{y} \quad {\sigma_X}^2 = V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

Distribución Binomial Negativa

Definición: Sea un experimento consistente en la realización sucesiva de pruebas de Bernouilli:

1. Independientes.
2. Con la misma probabilidad de éxito, “p”.

A la variable aleatoria X≅nº de fracasos hasta la aparición del n-ésimo éxito, se dice que sigue una **Distribución Binomial Negativa de parámetros n y p**, BiN(n,p).

Su función de probabilidad es:

$$\boxed{f_X(k) = P(X = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k \quad k = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots}$$

$$\underbrace{A\,A\,\dots A}_{n-1}\ \underbrace{A^c A^c \dots A^c}_{k}\ A$$

Distribución Binomial Negativa

Dada una variable aleatoria Binomial Negativa de parámetros n y p entonces su media y varianza son:

$$\mu_x = E[X] = \frac{n(1-p)}{p} \quad \text{y} \quad \sigma_X{}^2 = V(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

Distribución Hipergeométrica

Definición: Dado un conjunto de N objetos que contiene:

- k objetos clasificados como éxitos, $k \leq N$
- N-k objetos clasificados como fracasos

Se toma una muestra de tamaño n ($n \leq N$), al azar y sin reemplazo de entre los N objetos, sea la variable aleatoria

$X \cong$ nº de éxitos en la muestra

se dice que sigue una Distribución Hipergeométrica de parámetros N, n y k, Hi(N,n,k).

Su función de probabilidad es:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0, 1, \ldots, \min(k,n)$$

Distribución Hipergeométrica

Dada una variable aleatoria Hipergeométrica de parámetros N, n y k entonces su media y varianza son:

$$\mu_x = E[X] = np \;\; y \;\; \sigma_X{}^2 = V(X) = np(1-p)\,\frac{(N-n)}{(N-1)}$$

donde $p = \frac{k}{N}$.

Ejemplo: Un lote de piezas contienen 100 de un proveedor local y 200 de un proveedor exterior. Si se eligen 4 piezas al azar y sin reemplazo. ¿Cuál es la probabilidad de que todas procedan del proveedor local?

Sea X ≅ “nº de piezas de las 4 elegidas que son del proveedor local”

$$P(X=4) = \frac{\binom{100}{4}\binom{200}{0}}{\binom{300}{4}} = 0.0119$$