Tema 8: Distribuciones de Probabilidad Continuas

Profesora: Carmen Elvira Ramos Domínguez

Índice

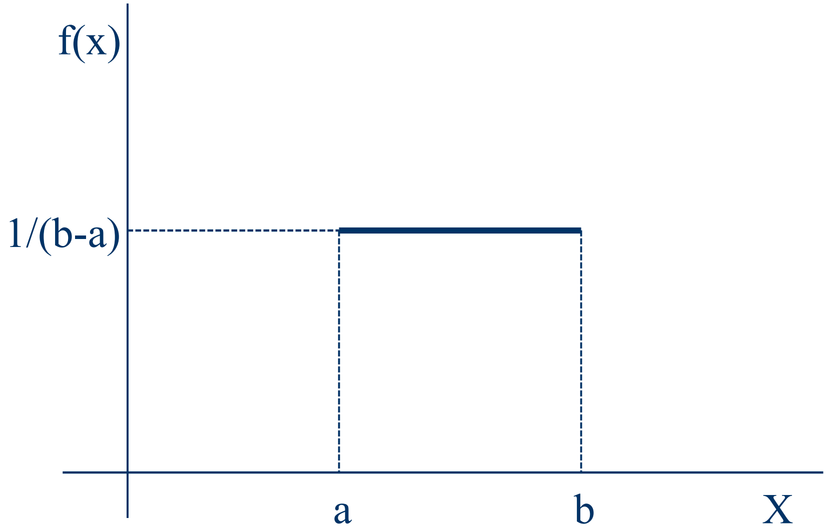
Distribución Uniforme Continua

Definición: Una variable aleatoria X con función de densidad: $f_X(x) = \frac{1}{(b-a)} \quad a \leq x \leq b$

se dice que sigue una Distribución Uniforme Continua.

Se denota $X \cong U[a,b]$.

Gráficamente $f_X(x)$ es:



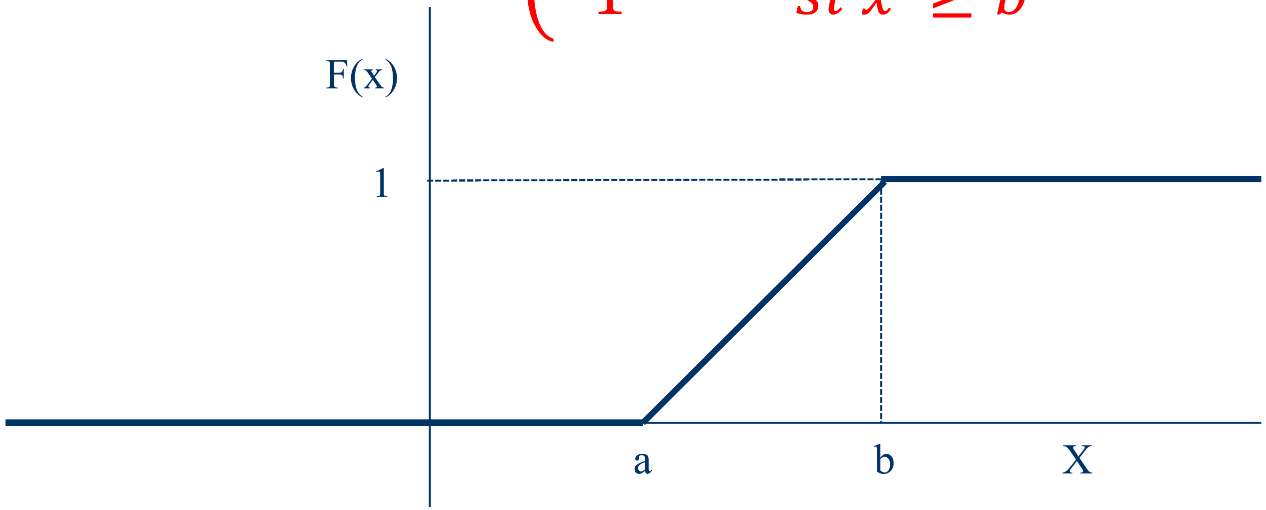
Nota: La probabilidad de que la variable tome valores en un intervalo dentro del intervalo [a,b], sólo depende de la amplitud del intervalo.

Si $X \cong U[a,b] \Rightarrow \frac{X-a}{b-a} \cong U[0,1]$

Distribución Uniforme Continua

La Función de Distribución de una variable X ≅ U[a,b]

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si\ a \le x < b \\ 1 & si\ x \ge b \end{cases}$$



La media y varianza de una X ≅ U[a,b] son:

$$\mu_X = E[X] = \frac{a+b}{2} \quad y \quad \sigma_X{}^2 = V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución Normal

Es la distribución más utilizada para modelizar experimentos aleatorios ya que aparece de forma natural

- Distribuciones de pesos, alturas.
- Errores de Medida.
- Puntuaciones de exámenes.
- Distancia de frenado, etc..

Definición: Una variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$ tiene una distribución normal con parámetros $-\infty < \mu < \infty$, y $\sigma > 0$.

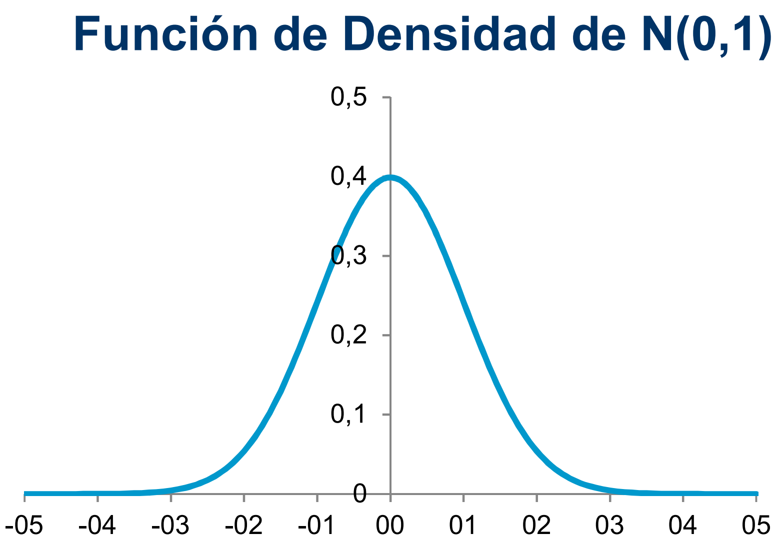
Se denota por $X \cong N(\mu,\sigma)$ y su media y varianza son:

$$E[X] = \mu \text{ y } V(X) = \sigma^2$$

Es simétrica, luego tiene igual media, mediana y moda.

Distribución Normal

Su función de densidad es una curva simétrica en forma de campana llamada Campana de Gauss. Por eso se la llama también Distribución Gaussiana.

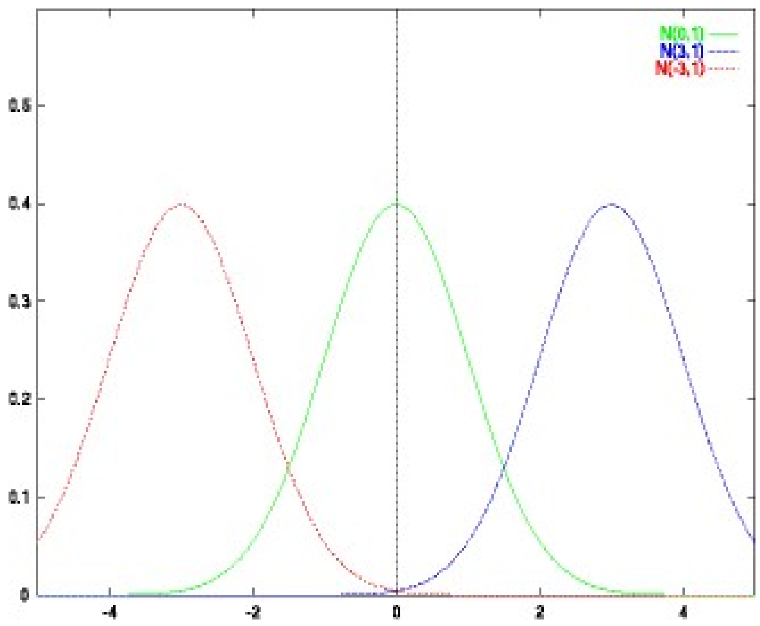


Los valores de μ y σ determinan la forma de la función de densidad. El valor de μ determina el centro y el de σ la dispersión. El máximo se alcanza en x= μ y vale $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

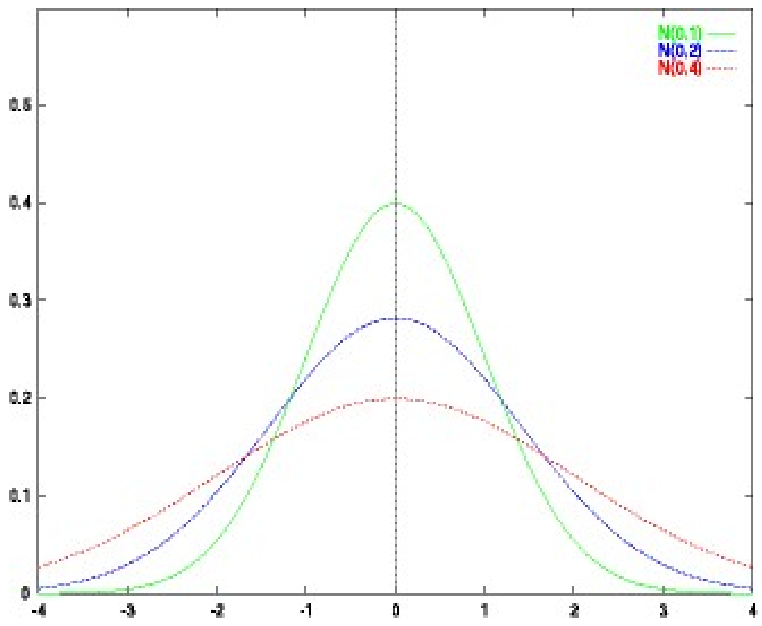
Distribución Normal

La función de densidad de una N(μ,σ) para distintos valores de μ y σ.

a) μ =-3; μ = 0; y μ =3

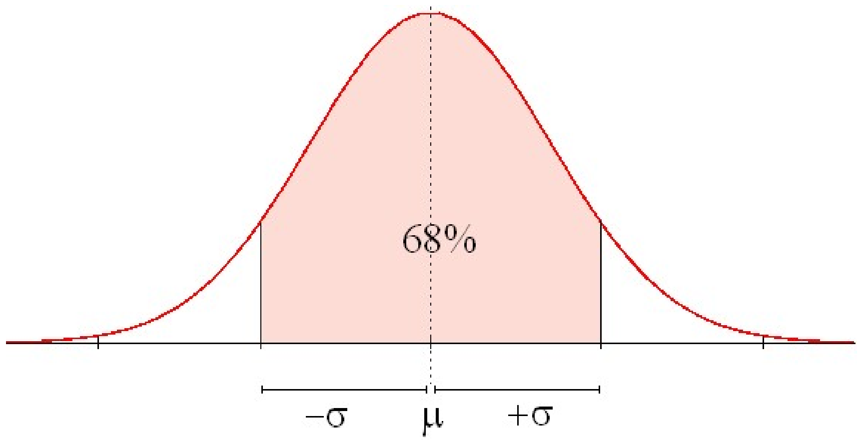


b) σ=1; σ=2; y σ= 4

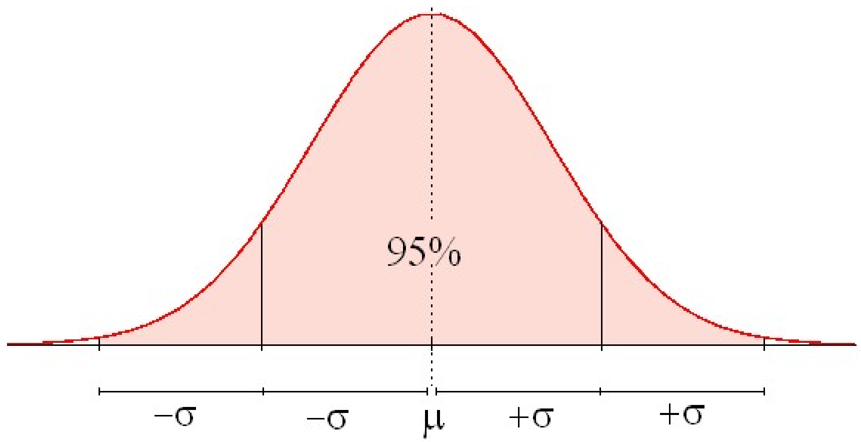


Distribución Normal

- Entre la media y una desviación típica tenemos siempre la misma probabilidad: aprox. 68%



- Entre la media y dos desviaciones típicas se tiene aprox. 95%



Distribución Normal

Definición: Una variable aleatoria normal con media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1$ recibe el nombre de variable aleatoria Normal Estándar y se denota por Z.

Proposición: Sea X una variable aleatoria normal con $E[x] = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$, entonces la variable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \cong N(0,1)$$

A este proceso se le denomina tipificar la variable.

Su función de densidad es:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \quad z \in R$$

que como vemos no depende de ningún parámetro.

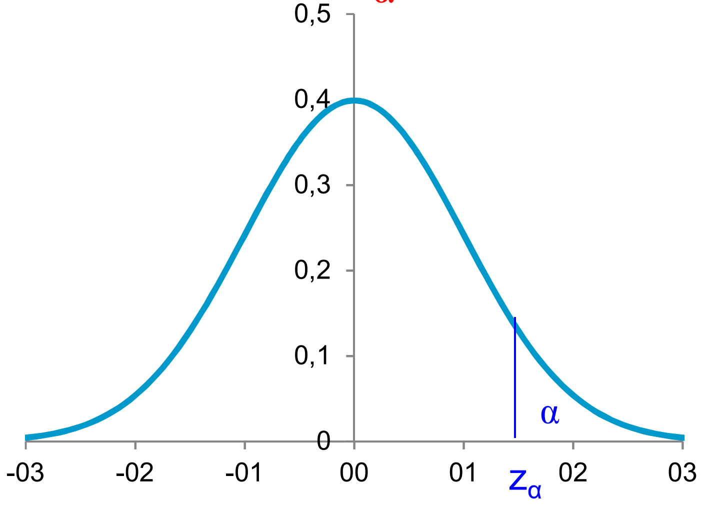
Distribución Normal

Uso de las Tablas de la Normal N(0,1): En la tabla aparecen las probabilidades de la cola superior. Esto es,

$$P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$$

Areas bajo la curva normal, N(0; 1)

z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314



Las abcisas z_α están en los ejes y las probabilidades en el interior de la tabla.

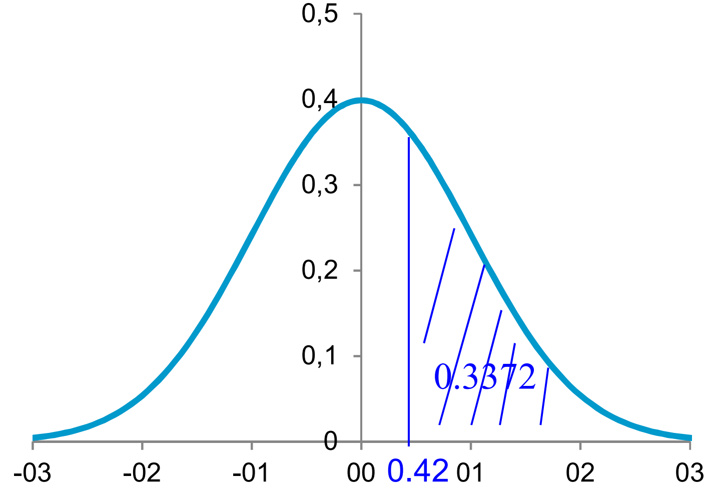
Distribución Normal

Sean los siguientes casos de probabilidades:

1. $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$. Ejemplo: $P(z \geq 0.42) = 0.3372$

N13

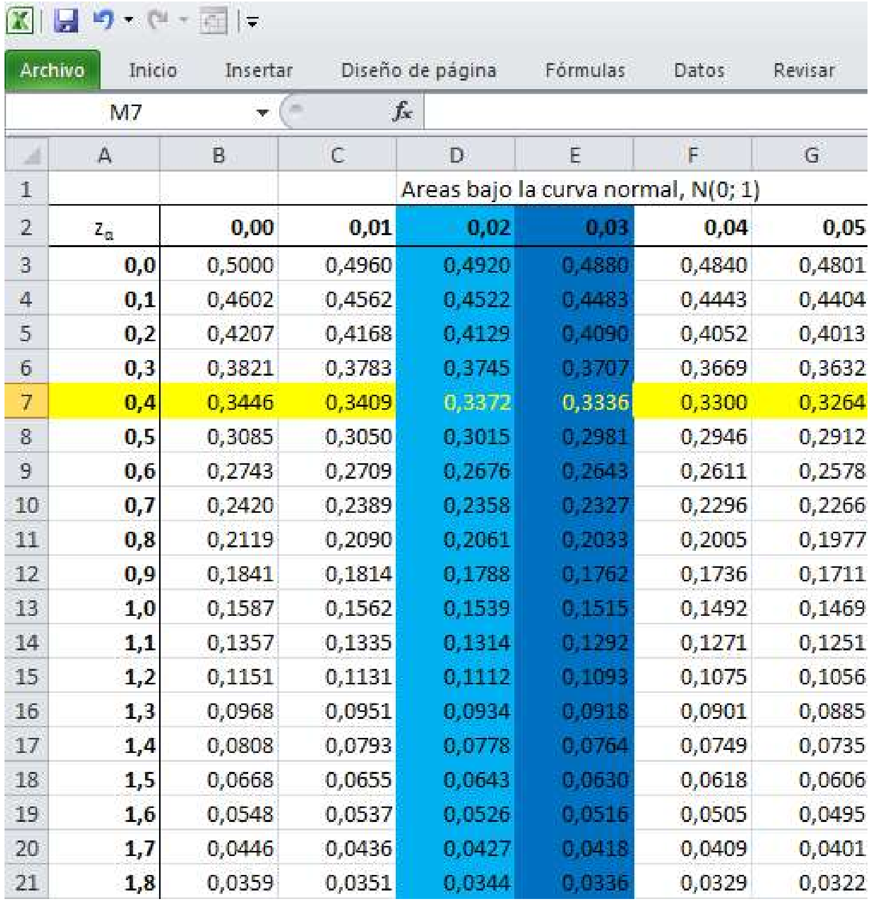
	A	B	C	D	E	F	G
1				Areas bajo la curva normal, N(0; 1)			
2	z_α	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**
3	**0,0**	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
4	**0,1**	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
5	**0,2**	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
6	**0,3**	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
7	**0,4**	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
8	**0,5**	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
9	**0,6**	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
10	**0,7**	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
11	**0,8**	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
12	**0,9**	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
13	**1,0**	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
14	**1,1**	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
15	**1,2**	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
16	**1,3**	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
17	**1,4**	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
18	**1,5**	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
19	**1,6**	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495
20	**1,7**	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401



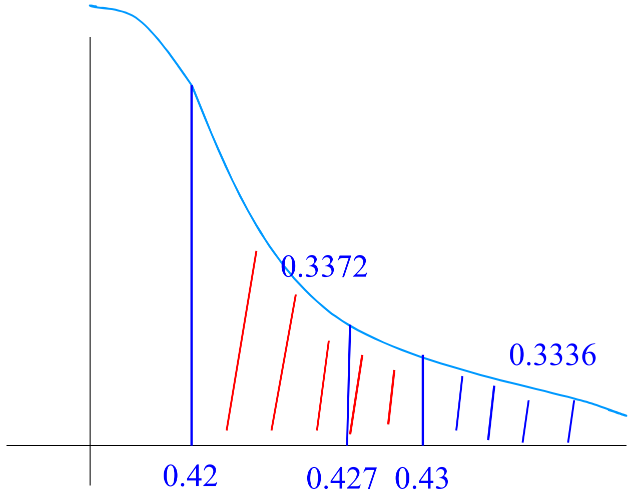
Tener en cuenta que : $P(Z > z_\alpha) = P(Z \geq z_\alpha)$ ya que la probabilidad de un punto es 0.

Distribución Normal

2. P(Z ≥ z_α) = α, pero z_α no viene en la tabla. Ejemplo: P(Z ≥ 0.427)
   Se debe interpolar: P(Z ≥ 0.42) = 0.3372 y P(Z ≥ 0.43) = 0.3336



	A	B	C	D	E	F	G
1				Areas bajo la curva normal, N(0; 1)			
2	z_α	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**
3	**0,0**	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
4	**0,1**	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
5	**0,2**	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
6	**0,3**	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
7	**0,4**	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
8	**0,5**	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
9	**0,6**	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
10	**0,7**	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
11	**0,8**	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
12	**0,9**	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
13	**1,0**	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
14	**1,1**	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
15	**1,2**	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
16	**1,3**	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
17	**1,4**	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
18	**1,5**	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
19	**1,6**	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495
20	**1,7**	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401
21	**1,8**	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322



$$\frac{0.43-0.42}{0.3372-0.3336} = \frac{0.43-0.427}{y}$$

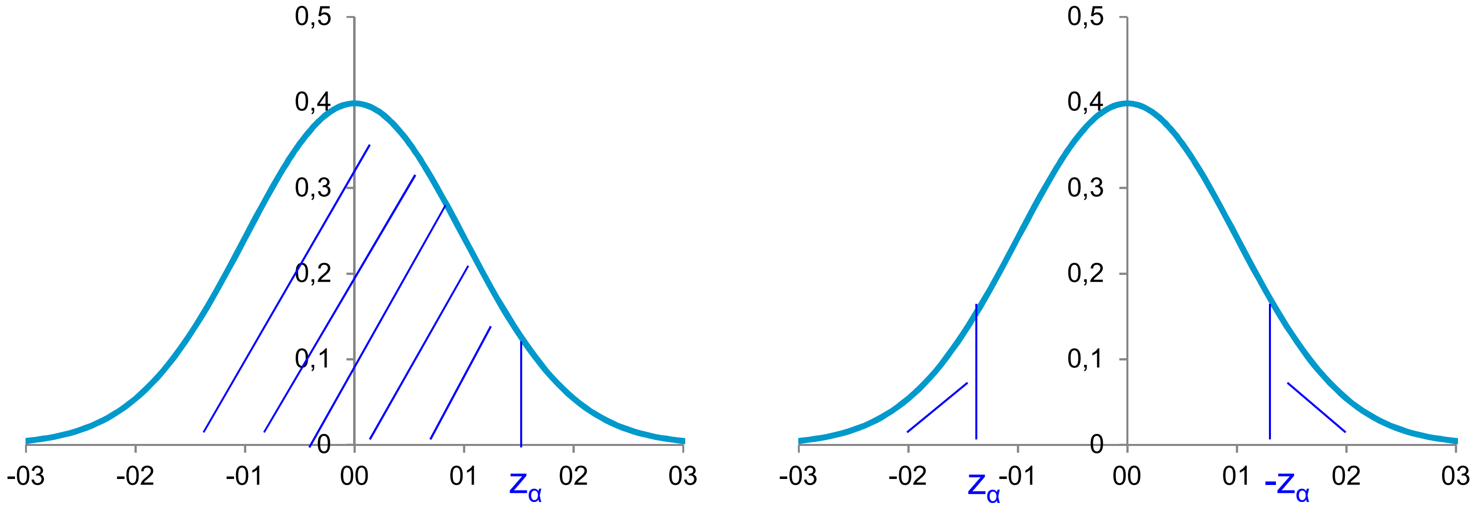
$$y = \frac{0.003 \; x \; 0.0036}{0.01} = 0.00108$$

Solución: P(Z ≥ 0.427) = 0.3336+0.00108= 0.33468

Distribución Normal

3. $P(Z \leq z_\alpha)$ con $z_\alpha > 0$, entonces $P(Z \leq z_\alpha) = 1 - P(Z > z_\alpha)$.

   Ejemplo: $P(Z \leq 2.12) = 1 - P(Z > 2.12) = 1 - 0.0170 = 0.983$



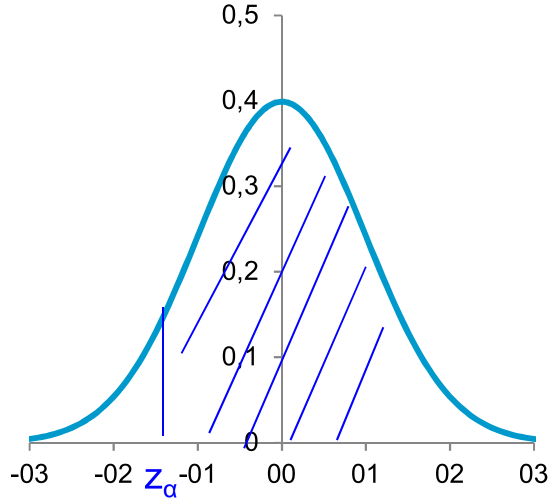
4. $P(Z \leq z_\alpha)$ con $z_\alpha < 0$, entonces debido a que la función es simétrica $P(Z \leq z_\alpha) = P(Z \geq -z_\alpha)$.

   Ejemplo: $P(Z \leq -0.71) = P(Z \geq 0.71) = 0.2389$

Distribución Normal

5. $P(Z \geq z_\alpha)$ con $z_\alpha < 0$, entonces mediante el complementario $P(Z \geq z_\alpha) = 1- P(Z < z_\alpha) = 1- P(Z > - z_\alpha)$.

   Ejemplo: $P(Z \geq -1.5) = 1 – P(Z < -1.5) = 1- P(Z > 1.5) = 1-0.0668$
   $= 0.9332$



6. $P(a \leq Z \leq b) = P(Z \geq a) – P(Z >b)$ y para el cálculo de estas dos últimas probabilidades se usan los apartados anteriores.
7. $P(|Z - a| \leq b) = P(-b \leq Z – a \leq b) = P(a-b \leq Z \leq a+b)$.
8. $P(|Z - a| \geq b) = P(Z – a \leq -b) + P(Z – a \geq b) =$
   $= P(Z \leq a-b) + P(Z \geq a+b)$

Distribución Normal

Búsqueda del punto z_α dado α.

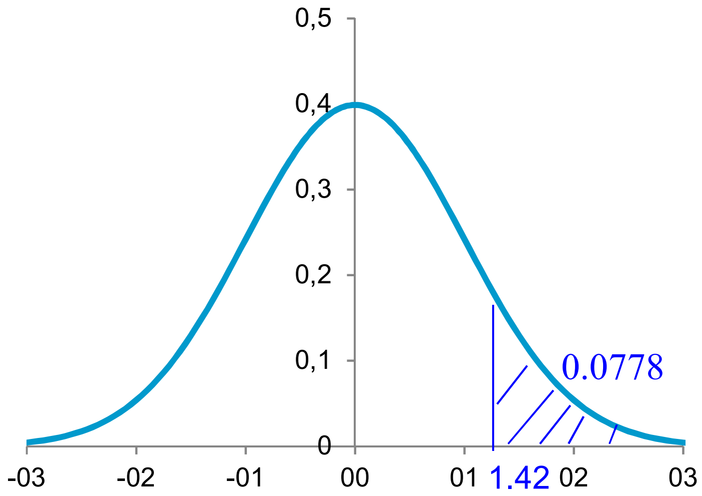
1. $P(Z \geq a) = \alpha$ con $\alpha < 0.5$.

   Ejemplo: $P(z \geq a) = 0.0778$ entonces $a = 1.42$

Archivo | Inicio | Insertar | Diseño de página | Fórmulas | Datos | Revisar

D17 f_x =1-DISTR.NORM.ESTAND.N($A17+D$2;VE

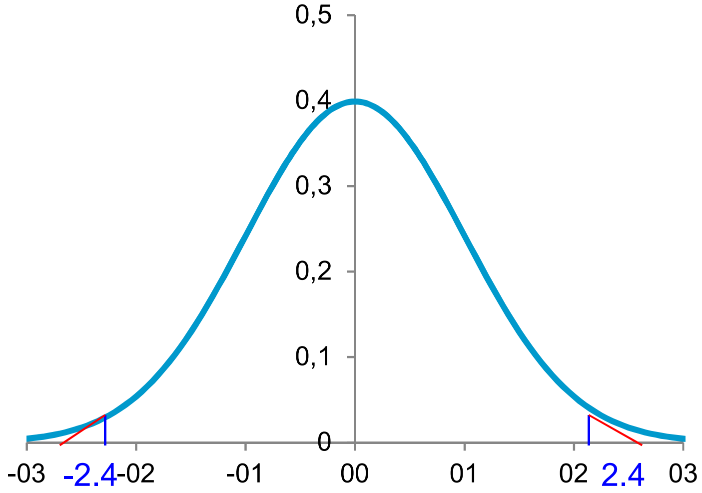
	A	B	C	D	E	F	G
1				Areas bajo la curva normal, N(0; 1)			
2	z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
3	0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
4	0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
5	0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
6	0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
7	0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
8	0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
9	0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
10	0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
11	0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
12	0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
13	1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
14	1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
15	1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
16	1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
17	1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
18	1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
19	1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495
20	1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401



Distribución Normal

2. $P(Z \leq a) = \alpha$ con $\alpha < 0.5$. Al ser la gráfica simétrica entonces $P(Z \leq a) = P(Z \geq -a) = \alpha$ con $\alpha < 0.5$, y sería como en el apartado anterior pero buscando $-a$.

   Ejemplo: $P(Z \leq a) = 0.00820 = P(Z \geq -a)$ entonces $-a=2.4 \rightarrow a=-2.4$



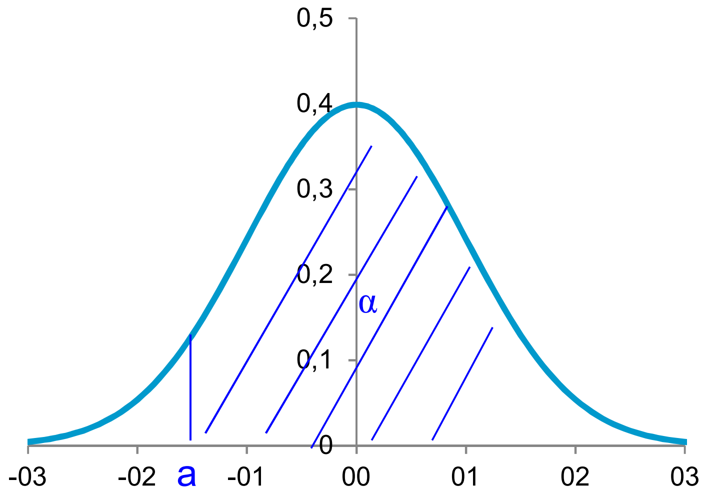
3. $P(Z \leq a) = \alpha$ con $\alpha > 0.5$. Entonces como la gráfica es simétrica, entonces $P(Z > a) = 1-\alpha$ y además $1-\alpha < 0.5$, lo que nos conduce al apartado anterior.

   Ejemplo: $P(Z \leq a) = 0.6554 \Rightarrow P(Z>a) = 1- 0.6554 = 0.3446$ y $a= 0.4$

Distribución Normal

4. $P(Z \geq a) = \alpha$ con $\alpha \geq 0.5$ entonces aplicamos igual que antes $P(Z < a) = 1 - \alpha$ y vamos al caso 2.

   Ejemplo: $P(Z \geq a) = 0.7054 \Rightarrow P(Z < a) = 1\text{-}0.7054 = 0.2946 \Rightarrow$
   $P(Z > -a) = 0.2946 \Rightarrow -a = 0.54 \Rightarrow a = -0.54$



5. $P(Z \geq a) = \alpha$ pero α no está en las tablas. Se tiene que interpolar.

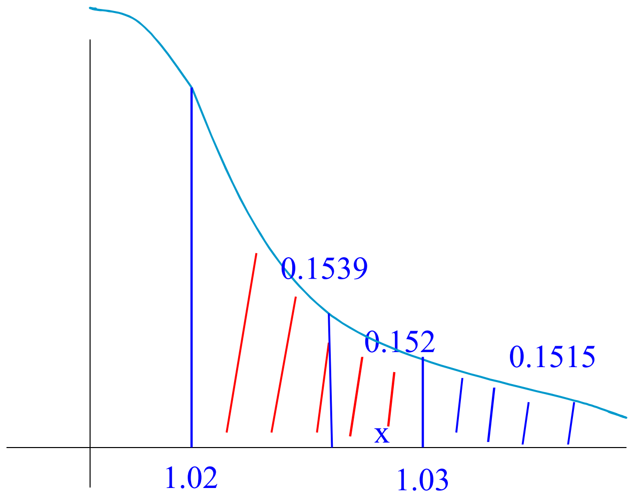
   Ejemplo: $P(Z \geq a) = 0.152$. Si se busca en la tabla se tiene:
   $P(Z \geq 1.03) = 0.1515$ y $P(Z \geq 1.02) = 0.1539$

Distribución Normal

Archivo | Inicio | Insertar | Diseño de página | Fórmulas | Datos | Revisar

D13 =1-DISTR.NORM.ESTAND.N($A13+D$2;VE

	A	B	C	D	E	F	G
1			Areas bajo la curva normal, N(0; 1)				
2	z_α	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**
3	**0,0**	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801
4	**0,1**	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404
5	**0,2**	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013
6	**0,3**	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632
7	**0,4**	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264
8	**0,5**	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912
9	**0,6**	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578
10	**0,7**	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266
11	**0,8**	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977
12	**0,9**	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711
13	**1,0**	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469
14	**1,1**	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251
15	**1,2**	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056
16	**1,3**	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885
17	**1,4**	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735
18	**1,5**	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606
19	**1,6**	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495
20	**1,7**	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401



$$\frac{1.03-1.02}{0.1539-0.1515} = \frac{x}{0.152-0.1515}$$

$$x = \frac{0.0005\ x\ 0.01}{0.0024} = 0.00208$$

Solución: a = 1.03-0.00208 = 1.02792

Relación Binomial-Normal

La distribución Normal es una buena aproximación de la Binomial bajo ciertas condiciones:

Proposición: Sea X una variable aleatoria Bi(n,p) con n lo suficientemente grande y p y q no son próximos a cero (esto es, np> 5 y nq>5) entonces $X \cong N(np, \sqrt{npq})$ o

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \cong N(0,1)$$

Nota: Téngase en cuenta que se debe considerar un factor de corrección:

X es un variable discreta	X es un variable continua
$P(X = k) \geq 0$	$P(X = k) = 0$

$$P(X = k) = P(k-0.5 \leq X \leq k+0.5)$$
$$P(a < X < b) = P(a-0.5 < X < b+0.5)$$

Relación Binomial-Normal

Ejemplo: Supóngase que en un canal de comunicación digital, el nº de bits que se reciben de forma errónea se distribuye como una Binomial, y que la probabilidad de recibir un bit de forma errónea es 0.1. Se transmiten n=50 bits.

- La probabilidad exacta de que se presenten dos o menos errores es: $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 2)=\binom{50}{0} 0.9^{50}+\binom{50}{1} 0.9^{49}\, 0.1+\binom{50}{2} 0.9^{48} 0.1^{2}=0.11$
- En base a la aproximación Normal sería:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 2)=\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}-5}{2.12} \leq \frac{2-5}{2.12}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq -1.415)=0.08$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 2.5)=\mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X}-5}{2.12} \leq \frac{2.5-5}{2.12}\right)=\mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq -1.179)=\mathrm{P}(\mathrm{Z} \geq 1.179)$$

$$=\mathrm{P}(\mathrm{Z} \geq 1.18)=0.1190$$

Relación Poisson-Normal

Proposición: Sea X una variable aleatoria Poisson con E[X]=λ y V(X) = λ entonces si λ > 5 se puede aproximar a

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \cong N(0,1).$$

Ejemplo: Supóngase que el nº de partículas de asbesto en un centímetro cuadrado de polvo tiene un distribución Po(1000). Si se analiza un cm^2 de polvo ¿Cuál es la probabilidad de encontrar menos de 950 partículas?.

- La probabilidad exacta sería:

$$P(X \leq 950) = \sum_{x=0}^{950} \frac{e^{-1000} 1000^{x}}{x!}$$

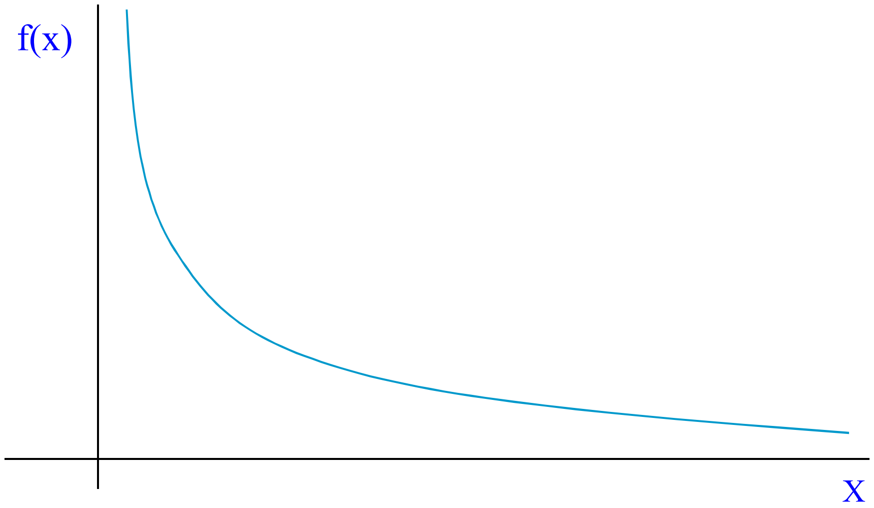
- En base a la aproximación Normal sería:

$$P(X \leq 950.5) = P\left(Z \leq \frac{950.5 - 1000}{\sqrt{1000}}\right) = P(Z \leq -1.565)$$
$$= P(Z \geq 1.565) = 0.0588$$

Distribución Exponencial

Definición: La variable aleatoria X que mide el tiempo entre dos ocurrencias sucesivas de un proceso de Poisson de media $\theta>0$, se dice que sigue una distribución Exponencial con parámetro θ. Se denota por $X \cong Exp(\theta)$.

Su función de densidad es: $f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \quad x > 0$



Distribución Exponencial

La media y varianza de una variable $X \cong Exp(\theta)$ son:

$$E[X] = \frac{1}{\theta} \quad y \quad V(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

Se suele usar en modelos de duración de componentes electrónicas.

Propiedad de Amnesia: La probabilidad de que una componente funcione más de a+b unidades de tiempo sabiendo que lleva funcionando a unidades es igual a la probabilidad de que una nueva componente funciones más de b unidades de tiempo.

$$P(X \geq a+b \;\; / \, X \geq a) = P(X \geq b)$$

La exponencial de parámetro θ es igual a una $\Gamma(\theta,1)$.

Distribución Gamma

Definición: Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ax} x^{p-1} \quad x > 0$,

con a y p > 0 y $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$, entonces se dice que X sigue una distribución Gamma de parámetros a y p. Se denota por Γ(a,p). "1/a" llamado parámetro de escala y "p", parámetro de forma.

Se tiene:

- $\Gamma(p) = (p-1) \times \Gamma(p-1)$
- Si p es un entero $\Rightarrow \Gamma(p) = (p-1)!$
- Si $p=1/2 \Rightarrow \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Su media y varianza son:

$$E[X] = \frac{p}{a} \quad \text{y} \quad V(X) = \frac{p}{a^2}$$

Distribución Gamma

Proposición: Sean X_1, X_2, …, X_n, n variables aleatorias todas independientes entre sí e idénticamente distribuidas como una $\Gamma(a,1)$ entonces:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \cong \Gamma(a, n)$$

Proposición: Sea una variable aleatoria $X \cong \Gamma(a,p)$ y c una constante $\Rightarrow cX \cong \Gamma(a/c,p)$.

Distribución Beta

Definición: Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} \quad 0 < x < 1$$

con p y q > 0 y $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$, entonces se dice que X sigue una distribución Beta de parámetros p y q. Se denota por X $\cong$ β(p,q).

Se tiene que $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Su media y varianza son:

$$E[X] = \frac{p}{p+q} \quad y \quad V(X) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)^2}$$

Distribución Weibull

Definición: Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}} \quad x \geq 0$

con α y $\beta > 0$ entonces se dice que X sigue una distribución **Weibull de parámetros α y β**. Se denota por $X \cong W(\alpha, \beta)$.

Su media y varianza son:

$$E[X] = \beta\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$V(X) = \beta^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right)^2\right)$$

Distribución Chi-Cuadrado

Definición: Sea X una variable aleatoria Normal estándar, N(0,1), entonces se define $Y = X^2$, y se dice que sigue una distribución Chi-cuadrado de Pearson con 1 grado de libertad. Se denota por $\chi_1^{\,2}$.

Su función de densidad es: $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x} x^{-\frac{1}{2}} \quad x > 0,$

lo que equivale a una $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Definición: Sean X_1, X_2, …, X_n, n variables aleatorias independientes entre sí e idénticamente distribuidas según una N(0,1) se define

$$Y = X_1^{\,2} + X_2^{\,2} + \ldots + X_n^{\,2}$$

Y se dice que sigue una distribución Chi-cuadrado de Pearson con n grados de libertad. Se denota por $\chi_n^{\,2}$.

Distribución Chi-Cuadrado

Su función de densidad es:

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \quad x > 0$$

Y la función $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$

Es equivalente a una distribución $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

Su media y varianza son:

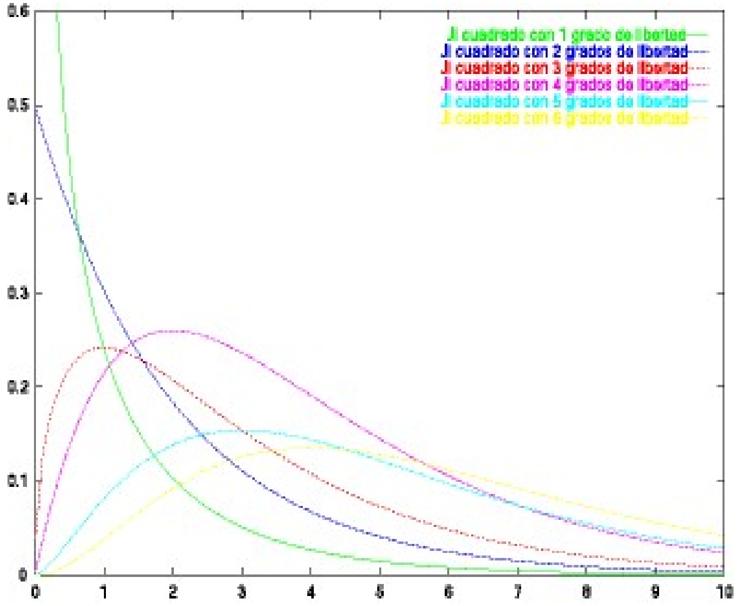
$$\mu = E[{\chi_n}^2] = n \quad y \quad \sigma^2 = V({\chi_n}^2) = 2n$$

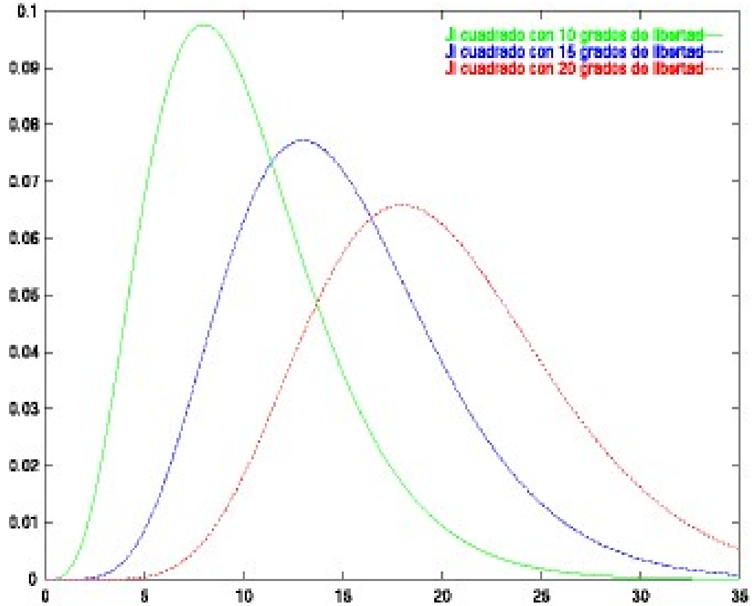
Aproximación a la Normal. Sea $X \cong {\chi_n}^2$ entonces se tiene:

1. Para $30 < n \leq 200$ que $\sqrt{2{\chi_n}^2} \cong N(\sqrt{2n-1}, 1)$.
2. Para $n > 200$ que ${\chi_n}^2 \cong N(n, \sqrt{2n})$

Distribución Chi-Cuadrado

- El campo de variabilidad es de $(0, +\infty)$
- La función de densidad es asimétrica positiva.
- Depende del parámetro n, por tanto, la curva no es única.
- La función de densidad se hace más simétrica, casi gaussiana cuando aumentan los grados de libertad.





Distribución Chi-Cuadrado

Proposición: Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes y cada una con una distribución Chi-Cuadrado con n_1 y n_2 grados de libertad, entonces X_1+X_2 también tiene una distribución Chi-cuadrado con n_1+n_2 grados de libertad.

Distribución t de Student

Definición: Sean Z e Y dos variables aleatorias independientes, Z una variable Normal estándar, N(0,1), e Y una Chi-Cuadrado con n grados de libertad $\chi_n{}^2$, se define la variable: $t_n = \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$

Y se dice que sigue una distribución t de Student con n grados de libertad.

Su función de densidad es:

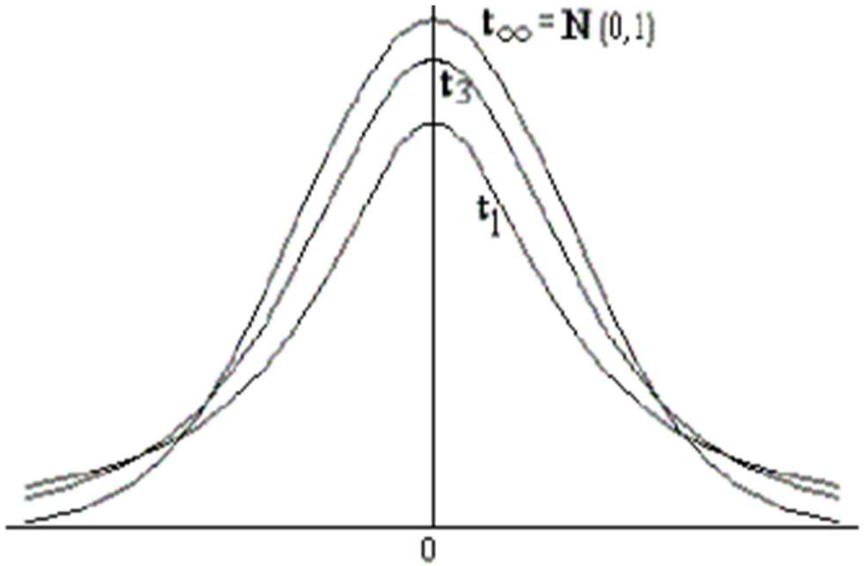
$$f(t_n) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(1+\frac{t^2}{n})^{\frac{(n+1)}{2}}} \qquad -\infty < t < \infty$$

Su media y varianza son:

$$E[X] = 0 \text{ y } V(X) = \frac{n}{n-2}$$

Distribución T de Student

- Su Campo de Variabilidad va de $(-\infty,\infty)$
- Es simétrica con respecto al eje de ordenadas. Las media, mediana y moda coinciden en 0.
- Depende del parámetro n. Cuando aumentan los grados de libertad (n>30), más se acerca a N(0,1).
- La curva tiene forma de campana uniforme centrada en el 0 y con colas más extensas que la N(0,1).



Distribución T de Student

Se cumplen las siguientes relaciones al ser simétrica:

- $P\left(t \leq -t_{\alpha,n}\right) = P\left(t \geq t_{\alpha,n}\right) = \alpha$
- $P\left(t \geq -t_{\alpha,n}\right) = 1 - P\left(t \leq -t_{\alpha,n}\right) = 1 - \alpha$
- $t_{1-\alpha,n} = -t_{\alpha,n}$

Distribución F de Fisher-Snedecor

Definición: Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes entre sí, X_1 una variable Chi-Cuadrado con n_1 grados de libertad $\chi_{n_1}{}^2$ y X_2 una variable Chi-Cuadrado con n_2 grados de libertad $\chi_{n_2}{}^2$ se define la variable:

$$F = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}$$

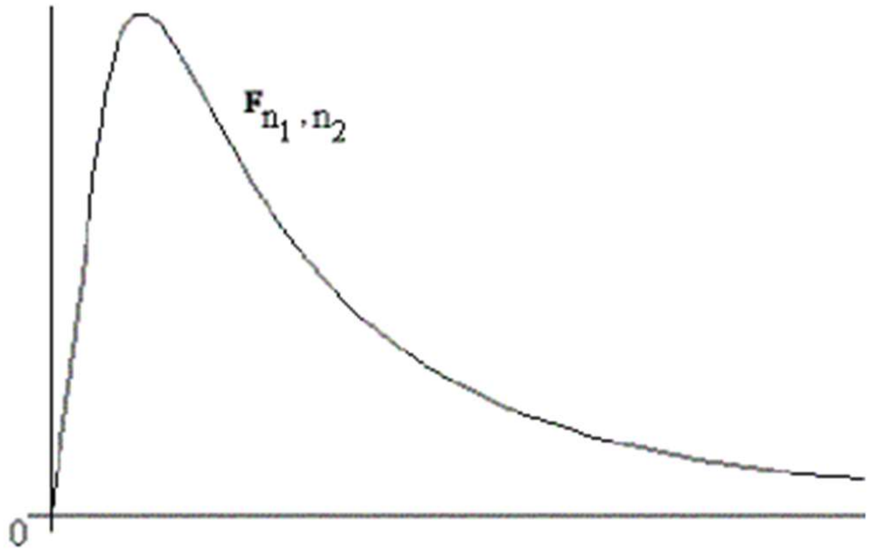
y se dice que sigue una distribución **F de Fisher Snedecor con n_1 y n_2 grados de libertad**.

Su función de densidad es:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{\frac{(n_1+n_2)}{2}}} \quad x > 0$$

Distribución F de Fisher-Snedecor

- Su campo de variabilidad va de $(0, \infty)$.
- La curva es asimétrica positiva, pero dicha asimetría va disminuyendo a medida que n_1 y n_2 toman valores cada vez más grandes.
- Depende de los parámetros n_1 y n_2, así que la curva no es única.



Distribución F de Fisher-Snedecor

Su media y varianza son:

$$E[X] = \frac{n_1}{n_1-2} \text{ y } V(X) = \frac{2{n_1}^2(n_2+n_1+2)}{n_2(n_1-2)^2(n_1-4)}$$

La tabla de la F de Snedecor sólo viene para α < 0.5 para los α > 0.5 se utiliza la expresión:

$$F_{\alpha,n_1,n_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha,n_2,n_1}}$$