БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования

СМОЛЕНСКИЙ ЗАХАР ВАСИЛЬЕВИЧ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Курсовая работа, 2 курс

Руководитель
доцент, кандидат физ.-мат. наук
ИГНАТЕНКО М.В.

Минск, 2020

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Пусть множество точек $\Delta_N = \left\{ a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_N = b \right\}$ – разбиение отрезка $\left[a,\ b \right] \subset R$. Функция $S_{m,\tilde{k}}\left(x \right)$ называется [1–4] *сплайном* степени m с *дефектом* $\tilde{k}$ и узлами Δ_N, если:

1) на каждом частичном отрезке $\left[\overline{x}_k,\ \overline{x}_{k+1} \right]$, $k = \overline{0, N-1}$, функция $S_{m,\tilde{k}}\left(x \right)$ является многочленом степени не выше m, и эта степень равна m хотя бы на одном из отрезков;

2) $S_{m,\tilde{k}}\left(x \right) \in C^{\left(m-\tilde{k} \right)}\left[a,\ b \right]$, при этом $S_{m,\tilde{k}}^{\left(m-\tilde{k}+1 \right)}\left(x \right)$ не является непрерывной функцией на отрезке $\left[a,\ b \right]$.

3) $S_{m,\tilde{k}}\left(x_k \right) = f\left(x_k \right)$, $x_k \in \left[\overline{x}_k,\ \overline{x}_{k+1} \right]$, $k = \overline{0, N-1}$, то такой *сплайн* называется *интерполяционным* для функции $f\left(x \right)$.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ СПЛАЙНЫ ДЕФЕКТА 2

(ЭРМИТОВЫ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ)

Кубическим интерполяционным сплайном дефекта 2 (*эрмитовым кубическим сплайном*) будем называть функцию $S_{3,2}(f,x)=S_{3,2}(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $S_{3,2}(x)=a_{i0}+a_{i1}(x-x_i)+a_{i2}(x-x_i)^2+a_{i3}(x-x_i)^3,\ \forall x\in[x_i;\,x_{i+1}]$;

2) $S_{3,2}(x_i)=f_i;\ S'_{3,2}(x_i)=f'_i,\ i=\overline{0,N}$;

3) $S_{3,2}(x)\in C^1[a;\,b]$.

Далее имеем: $S_{3,2}(x_i)=f_i;\ S'_{32}(x_i)=f'_i;\ S_{3,2}(x_{i+1})=f_{i+1};\ S'_{3,2}(x_{i+1})=f'_{i+1}$.

Откуда следует, что $S_{3,2}(x)=\varphi_1(t)f_i+\varphi_2(t)f_{i+1}+\varphi_3(t)h_if_i'+\varphi_4(t)h_if_{i+1}'$, где

$$h_i=x_{i+1}-x_i,\ t=\frac{x-x_i}{h_i},$$

$$\varphi_1(t)=(1-t)^2(1+2t);\ \ \varphi_2(t)=t^2(3-2t);$$

$$\varphi_3(t)=t(1-t)^2;\ \ \varphi_4(t)=-t^2(1-t).$$

Данная формула удобна для теоретических исследований. Для практического вычисления сплайна в $\forall x\in\left[x_i;\,x_{i+1}\right]$ более выгодны: $S_{3,2}(x)=f_i+(x-x_i)\left[f_i'+t(B+tA)\right]$, где

$$A=-2(f_{i+1}-f_i)/h_i+(f_i'+f_{i+1}'),\ \ B=-A+(f_{i+1}-f_i)/h_i-f_i'.$$

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ ПЕРВОГО ДЕФЕКТА (СПЛАЙНЫ ШЕНБЕРГА)

Интерполяционным кубическим сплайном $S_{3,1}(f, x)$ называется сплайн, удовлетворяющий условиям

$$S_{3,1}(f, x_i) = f_i, \; i = \overline{0, N}. \qquad (1.1)$$

Краевые условия для данного сплайна:

I. $S'_{3,1}(f, a) = f'(a); \; S'_{3,1}(f, b) = f'(b);$

II. $S''_{3,1}(f, a) = f''(a); \; S''_{3,1}(f, b) = f''(b);$

III. $S^{(r)}_{3,1}(f, a) = S^{(r)}_{3,1}(f, b), \; r = 1, \; 2;$

IV. $S_{3,1}'''(f, x_p + 0) = S_{3,1}'''(f, x_p - 0)$, $p = \overline{1, N-1}$.

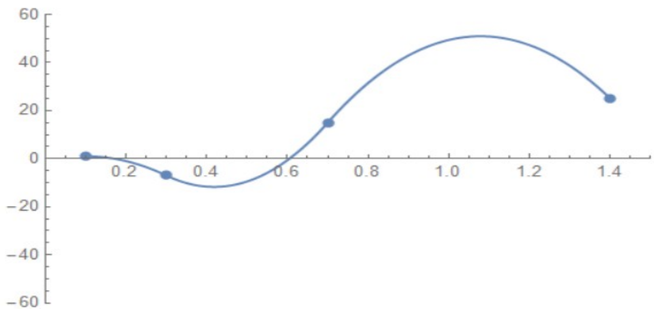
Выбор краевых условий осуществляется в зависимости от того, какими данными мы располагаем об интерполируемой функции $f(x)$.

Интерполяционный кубический сплайн $S_{3,1}(f, x)$, удовлетворяющий условиям (1.1) и одному из типов краевых условий I–IV, существует и единствен.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

```
Приложение-Б.nb * - Wolfram Mathematica 11.1
File  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

In[1]:= Needs["Splines`"];
        необходимо

In[2]:= (*Введём начальные значения, по которым будем строить сплайн*)

In[3]:= n = 3;

In[4]:= Uzl = {0.1, 0.3, 0.7, 1.4};

In[5]:= Znach = {1, -7, 15, 25};

In[6]:= Do[{x_i = Uzl[[i + 1]], f_i = Znach[[i + 1]]}, {i, 0, n}]
        оператор цикла

In[7]:= Gr1 = ListPlot[Table[{x_i, f_i}, {i, 0, n}], PlotStyle → {PointSize[0.02]},
                диаграм···  таблица значений              стиль графика  размер точки
          PlotRange → {{0, 1.5}, {-60, 60}}];
          отображаемый диапазон графика

In[8]:= (*Построим сплайн второй степени с дефектом 1 - S_{2,1}(x)*)

In[9]:= P_k_[X_] = f_k + (X - x_k) * (A_k * X + B_k);

In[10]:= eq1 = Table[P_k[x_{k+1}] == P_{k+1}[x_{k+1}], {k, 0, n - 2}];
                таблица значений

In[11]:= eq2 = {P_{n-1}[x_n] == f_n};

In[12]:= eq3 = Table[P_k'[x_{k+1}] == P_{k+1}'[x_{k+1}], {k, 0, n - 2}];
                таблица значений

In[13]:= eq4 = {P_0'[x_0] == 0};
```

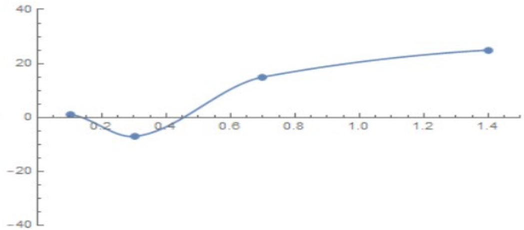
```
In[14]:= eq = Join[eq1, eq2, eq3, eq4];
              соединить

In[15]:= koef = Solve[eq, {}] // Flatten
                решить уравнения   уплостить

Out[15]= {A0 → -200., A1 → 337.5, A2 → -251.02, B0 → 20., B1 → -181.25, B2 → 365.714}

In[16]:= Spl[X_] = Table[Pk[X] /. koef, {k, 0, n - 1}] // Expand
                   таблица значений                     раскрыт

Out[16]= {-1. + 40. X - 200. X^2, 47.375 - 282.5 X + 337.5 X^2, -241. + 541.429 X - 251.02 X^2}

In[17]:= Gr3 = Table[Plot[Spl[X][[k]], {X, x_{k-1}, x_k}, PlotRange → All], {k, 1, n}];
               табл··· график функции                 отображае···  всё

In[18]:= Show[Gr1, Gr3]
         показать

Out[18]=
```



ПРИЛОЖЕНИЕ В

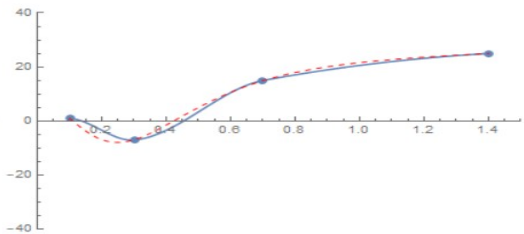
```
In[15]:= Show[Gr1, G32]
         показать
```

Out[15]=




```
In[16]:= (*Сравним построенный сплайн с результатом встроенной функции Spline(показан красной штриховкой)*)

In[17]:= Points = {{0.1, 1}, {0.3, -7}, {0.7, 15}, {1.4, 25}};

In[18]:= GrH1 = Graphics[{Red, Dashed, Spline[Points, Cubic]}];
                графика    кр···  штриховой пунктир

In[19]:= Show[Gr1, G32, GrH1]
         показать
```

Out[19]=



ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Приложение-Г.nb * - Wolfram Mathematica 11.1

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

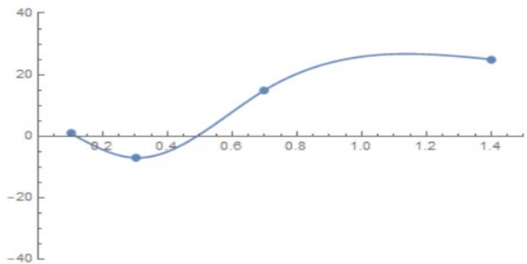
```
In[1]:= Needs["Splines`"];
        необходимо

In[2]:= (*Введём начальные значения, по которым будем строить сплайн*)

In[3]:= n = 3;

In[4]:= Uzl = {0.1, 0.3, 0.7, 1.4};

In[5]:= Znach = {1, -7, 15, 25};

In[6]:= dF = {-7, 10, 22, 7};

In[7]:= Do[{x_i = Uzl[[i + 1]], f_i = Znach[[i + 1]], df_i = dF[[i + 1]]}, {i, 0, n}]
        оператор цикла

In[8]:= Gr1 = ListPlot[Table[{x_i, f_i}, {i, 0, n}], PlotStyle → {PointSize[0.02]},
              диаграмм··· таблица значений          стиль графика   размер точки
          PlotRange → {{0, 1.5}, {-40, 40}}];
          отображаемый диапазон графика

In[9]:= (*Рассмотрим построение сплайна Шенберга - S_{3,1}(x)*)

In[10]:= P_k_[X_] := f_k + (X - x_k) * (A_k * X^2 + B_k X + C_k);

In[11]:= eq1 = Table[P_k[x_{k+1}] == P_{k+1}[x_{k+1}], {k, 0, n - 2}];
               таблица значений

In[12]:= eq2 = {P_{n-1}[x_n] == f_n};

In[13]:= eq3 = Table[P_k'[x_{k+1}] == P_{k+1}'[x_{k+1}], {k, 0, n - 2}];
               таблица значений

In[14]:= eq4 = {P_0''[x_0] == 0};

In[15]:= eq5 = Table[P_k''[x_{k+1}] == P_{k+1}''[x_{k+1}], {k, 0, n - 2}];
               таблица значений

In[16]:= eq6 = {P_{n-1}''[x_n] == 0};

In[17]:= eq = Join[eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6]
              соединить

Out[17]= {1 + 0.2 (0.09 A_0 + 0.3 B_0 + C_0) == -7., -7 + 0.4 (0.49 A_1 + 0.7 B_1 + C_1) == 15.,
  15 + 0.7 (1.96 A_2 + 1.4 B_2 + C_2) == 25, 0.09 A_0 + 0.3 B_0 + 0.2 (0.6 A_0 + B_0) + C_0 == 0. + 0.09 A_1 + 0.3 B_1 + C_1,
  0.49 A_1 + 0.7 B_1 + 0.4 (1.4 A_1 + B_1) + C_1 == 0. + 0.49 A_2 + 0.7 B_2 + C_2, 0. + 0.4 A_0 + 2 B_0 == 0,
  1.6 A_0 + 2 B_0 == 0. + 1.2 A_1 + 2 B_1, 3.6 A_1 + 2 B_1 == 0. + 2.8 A_2 + 2 B_2, 7. A_2 + 2 B_2 == 0}
```

```
In[18]:= koef = Solve[eq, {}] // Flatten
                решить уравнения    уплостит

Out[18]= {A0 → 454.205, A1 → -314.66, A2 → 50.0329, B0 → -90.841,
          B1 → 461.319, B2 → -175.115, C0 → -53.6262, C1 → -113.74, C2 → 161.382}

In[19]:= Spl[X_] = Table [Pk[X] /. koef, {k, 0, n - 1}] // Expand
                   таблица значений                       раскрыт
```

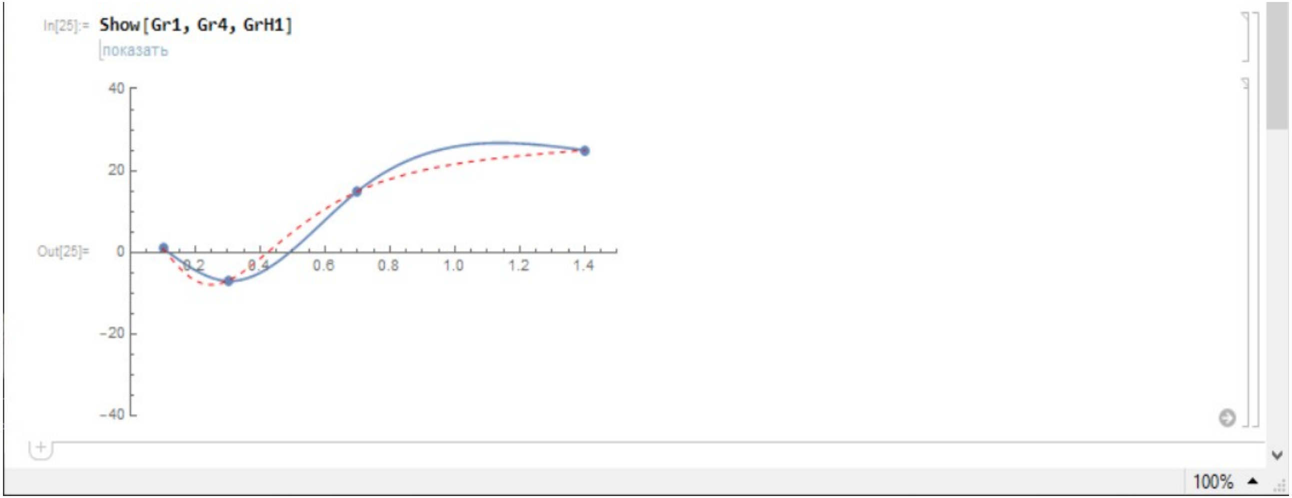
Out[19]= $\{6.36262 - 44.5421\,X - 136.262\,X^2 + 454.205\,X^3,$
$27.122 - 252.136\,X + 555.717\,X^2 - 314.66\,X^3,\ -97.9677 + 283.963\,X - 210.138\,X^2 + 50.0329\,X^3\}$

```
In[20]:= Gr4 = Table[Plot[Spl[X][[k]], {X, x(k-1), xk}], {k, 1, n}];
               табл···  график функции

In[21]:= Show[Gr1, Gr4]
         показать
```

Out[21]=




```
In[22]:= (*Сравним построенный сплайн с результатом встроенной функции Spline(показан красной штриховкой)*)

In[23]:= Points = {{0.1, 1}, {0.3, -7}, {0.7, 15}, {1.4, 25}};

In[24]:= GrH1 = Graphics[{Red, Dashed, Spline[Points, Cubic]}];
                графика   кр···  штриховой пунктир
```


In[25]:= Show[Gr1, Gr4, GrH1]
показать
Out[25]=
40
20
0
-20
-40
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
100%

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Приложение-Д.nb * - Wolfram Mathematica 11.1

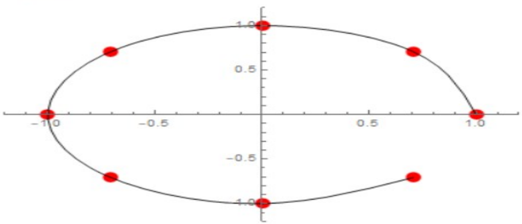
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
In[2]:= (*Применение встроенной функции Spline*)

In[3]:= arr = Table[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi - Pi / 4, Pi / 4}]
```

$$\text{Out[3]=}\ \left\{\{1, 0\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \{0, 1\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \{-1, 0\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \{0, -1\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

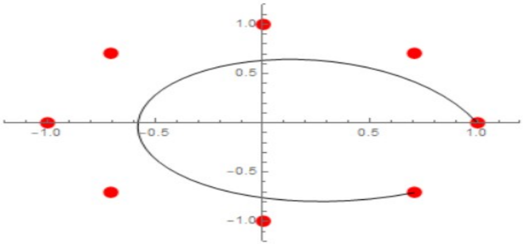
```
In[4]:= points = ListPlot[arr, PlotRange → {{-1.2, 1.2}, {-1.2, 1.2}}];

In[5]:= cubic = Graphics[Spline[arr, Cubic, SplineDots → Automatic], PlotRange → Automatic];

In[6]:= bezier = Graphics[Spline[arr, Bezier, SplineDots → Automatic], PlotRange → Automatic];

In[7]:= compositeBezier = Graphics[Spline[arr, CompositeBezier, SplineDots → Automatic],
          PlotRange → Automatic];

In[8]:= (*Пример кубического сплайна*)

In[9]:= Show[points, cubic]
```

Out[9]=



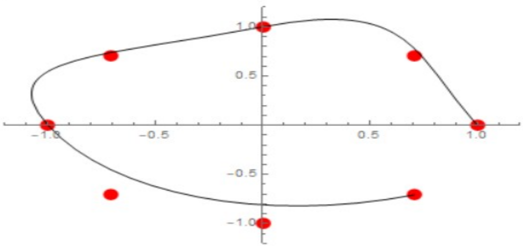
```
In[10]:= (*Пример сплайна Безье*)

In[11]:= Show[points, bezier]
         показать
```

Out[11]=




```
In[12]:= (*Пример составного сплайна Безье*)

In[13]:= Show[points, compositeBezier]
         показать
```

Out[13]=



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе самостоятельных исследований по теме курсовой работы получены следующие результаты.

Изучен и изложен теоретический материал [3, с. 48–52], [4, с. 27–36], касающийся задачи алгебраического интерполирования сплайнами: сформулирована интерполяционная задача, рассмотрены ее частные случаи, кратко описан механизм работы встроенной функции *Spline* компьютерной алгебры *Mathematica* (Глава 1) и приведены примеры ее работы в Приложении Д.

Построены различные интерполяционные сплайны для конкретных функций как аналитически (Глава 2), так и программным путем в среде *Mathematica* (Приложения А–Г).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ