

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Пакулина Антонида Николаевна

Практикум по методам вычислений

Часть 2

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2019

Рецензент:

докт. физ.-мат. наук, проф. Ю.К. Демьянович (С.-Петербургский гос. ун-т),

Рекомендовано к печати

Учебно-методической комиссией по УГСН 02.00.00 Компьютерные и информационные науки. Протокол 06/02-03-2 от 12.02.2019

Пакулина А.Н.

Практикум по методам вычислений. Часть 2. СПб., СПбГУ, 2019. – 113 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения практических занятий или лабораторных работ по курсу “Методов вычислений”, который читается на математико-механическом факультете СПбГУ на 3, 4 курсах обучения. В необходимом объеме рассмотрены теоретические вопросы учебного курса. Наличие ссылок делает удобной навигацию по всем рассматриваемым темам. В пособии размещены варианты заданий. Учебное пособие может быть использовано для дистанционного обучения. Оно может быть рекомендовано обучающимся других вузов, в учебные планы которых включено изучение соответствующих разделов вычислительной математики.

©А.Н. Пакулина

Содержание

Предисловие	6
1. Разностный метод решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Метод прогонки	7
1.1. Постановка задачи	7
1.2. Аппроксимация дифференциального уравнения разностным	7
1.3. Аппроксимация граничных условий	8
1.4. Метод прогонки для решения систем с трехдиагональной матрицей	9
1.5. Задание	10
1.6. Варианты граничных задач	11
2. Проекционные методы решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка	14
2.1. Постановка задачи. Общие сведения	14
2.2. Метод Рунге	14
2.3. Метод Галеркина	15
2.4. Метод моментов	16
2.5. Метод наименьших квадратов	16
2.6. Метод коллокации	17
2.7. Выбор координатной системы	17
2.8. Задание	19
2.9. Варианты заданий	20
3. Проблема собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля	25
3.1. Постановка задачи. Общие сведения	25
3.2. Оценка собственных чисел	25
3.3. Собственные числа и собственные функции оператора с постоянными коэффициентами	26
3.4. Метод Рунге	27
3.5. Обобщенная проблема собственных значений. Метод обратных итераций	27
3.6. Выбор координатной системы	28
3.7. Задание	29
3.8. Варианты заданий	31
4. Численное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода	34
4.1. Метод замены ядра на вырожденное	34
4.1.1. Построение решения и резольвенты	34
4.1.2. Оценка погрешности	35
4.1.3. Задание	36
4.2. Метод механических квадратур	37
4.2.1. Построение решения	37
4.2.2. Задание	38
4.3. Варианты заданий	39

5. Метод сеток для решения уравнения параболического типа	41
5.1. Постановка задачи	41
5.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора разностным	41
5.3. Явная разностная схема	42
5.4. Схема с весами	43
5.5. Задание	46
5.6. Варианты задач	48
6. Метод сеток для решения уравнения гиперболического типа	53
6.1. Постановка задачи	53
6.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора разностным	53
6.3. Явная разностная схема	54
6.4. Схема с весами	55
6.5. Задание	59
6.6. Варианты задач	60
7. Применение дискретного ряда Фурье для решения методом сеток однородного уравнения теплопроводности. Спектральный признак устойчивости	66
7.1. Постановка задачи	66
7.2. Построение точного решения с использованием ряда Фурье	66
7.3. Представление решения в виде дискретного ряда Фурье (ДРФ)	67
7.4. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора разностным	67
7.5. Построение сеточного решения по явной схеме с использованием ДРФ. Спектральный признак устойчивости	68
7.6. Построение сеточного решения по схеме с весами с использованием ДРФ. Спектральный признак устойчивости	70
7.7. Задание	71
7.8. Варианты задач	72
8. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа. Итерационные методы решений сеточных уравнений	74
8.1. Постановка задачи	74
8.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений	74
8.3. Разностная аппроксимация задачи Дирихле	75
8.4. Расчетные формулы методов	77
8.4.1. Метод простой итерации	77
8.4.2. Метод итерации с оптимальным параметром	78
8.4.3. Метод Зейделя (Некрасова)	78
8.5. Двухслойные итерационные схемы	78
8.5.1. Метод верхней релаксации	79
8.5.2. Метод с чебышевским набором параметров	80
8.5.3. Попеременно-треугольный итерационный метод	80
8.5.4. Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров	83
8.6. Выбор точности	83

8.7. Задание	84
8.8. Варианты заданий	87
9. Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона.	
Схема переменных направлений	94
9.1. Постановка задачи	94
9.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений.	
Аппроксимация дифференциального оператора разностным	94
9.3. Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона . . .	95
9.4. Двухслойная схема с весами	96
9.5. Схема переменных направлений	97
9.6. Выбор точности	99
9.7. Задание	100
Приложения	103
А. Функции для построения полиномов Якоби, координатных функций и их производных в MATLAB	103
Б. Построение составной формулы Гаусса	107
В. Указания к алгоритму программы по решению методом сеток уравнения параболического или гиперболического типов (Maple)	108
Г. Указания к алгоритму программы решения сеточных уравнений итерационными методами	109
Д. Указания к алгоритму программы решения задачи Дирихле методом переменных направлений	111
Список литературы	113

Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для проведения вычислительного практикума по курсу “Методов вычислений”, который читается на математико-механическом факультете СПбГУ на 3, 4 курсах и соответствует образовательным программам по соответствующим направлениям подготовки. В необходимом объеме рассмотрены теоретические вопросы по следующим разделам численных методов:

- 1) Метод сеток решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.
- 2) Проекционные методы решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.
- 3) Проблема собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля.
- 4) Приближённые методы решения интегральных уравнений.
- 5) Метод сеток для решения уравнения параболического типа.
- 6) Метод сеток для решения уравнения гиперболического типа.
- 7) Применение дискретного ряда Фурье для решения методом сеток однородного уравнения теплопроводности. Спектральный признак устойчивости.
- 8) Разностные схемы для уравнений эллиптического типа. Итерационные методы решений сеточных уравнений.
- 9) Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Схема переменных направлений.

Наличие ссылок делает удобной навигацию по всем рассматриваемым темам. В пособии размещены варианты заданий. Для решения задач приведены указания. Студенты должны освоить различные численные методы, программируя алгоритм решения задач на персональном компьютере.

Введена подробная нумерация формул для удобства ссылок на них во время презентации учебного материала на занятии в компьютерном классе.

Учебное пособие может быть использовано для дистанционного обучения.

Оно может быть рекомендовано обучающимся других вузов, в учебные планы которых включено изучение соответствующих разделов вычислительной математики.

1. Разностный метод решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Метод прогонки

1.1. Постановка задачи

Дано уравнение

$$Ly = f(x), \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

где Ly может иметь один из двух видов

$$Ly = -p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y \quad (2)$$

или

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y' + r(x)y. \quad (3)$$

Функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ предполагаются достаточно гладкими, кроме того

$$p(x) \geq p_0 > 0, \quad r(x) \geq 0 \quad \text{при } x \in [a, b]. \quad (4)$$

Требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = \alpha, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 \geq 0, \quad (5)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta, \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \quad \beta_1 \beta_2 \geq 0. \quad (6)$$

1.2. Аппроксимация дифференциального уравнения разностным

Разобьем промежутки $[a, b]$ на n равных частей. Пусть $h = (b - a)/n$ и построим с шагом h сетку узлов $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. Назовем эту сетку узлов основной (рис. 1).

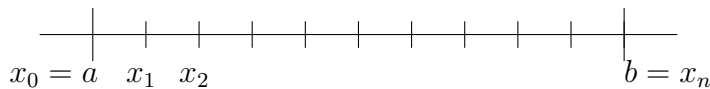


Рис. 1. Основная сетка

Решение исходной задачи будем отыскивать в виде таблицы значений $y_i \approx y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ в точках сетки.

Обозначим через p_i , q_i , r_i , f_i значения функций $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $f(x)$ в точках сетки x_i .

Заменяя производные в уравнении (1) конечно-разностными отношениями с порядком $O(h^2)$, получаем для случаев (2) и (3) соответственно

$$-p_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + r_i y_i = f_i \quad (7)$$

$$-\left(p_{i+\frac{1}{2}} \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i - y_{i-1}}{h^2} \right) + q_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + r_i y_i = f_i. \quad (8)$$

Здесь $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Перегруппируем коэффициенты при неизвестных y_0, y_1, \dots, y_n и запишем уравнения (7) и (8) в виде

$$A_i y_{i-1} - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9)$$

Отметим, что если решение исходной задачи четырежды непрерывно дифференцируемо при $x \in [a, b]$, то для внутренних точек сетки аппроксимация дифференциального уравнения разностным выполнена со вторым порядком относительно шага сетки $O(h^2)$.

1.3. Аппроксимация граничных условий

Недостающие два уравнения для достижения замкнутой системы относительно y_0, y_1, \dots, y_n получим, аппроксимируя граничные условия.

При $\alpha_2 = 0$ краевая задача на левом конце промежутка называется первой (I), при $\alpha_1 = 0$ — второй (II), если же оба коэффициента не равны нулю — третьей (III). Аналогично определяется краевая задача для правого конца промежутка.

Заметим, что в случае первой краевой задачи на обоих концах промежутка $[a, b]$, т.е. при $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0$, граничные условия записываются в виде $y_0 = \alpha, y_n = \beta$ и суммарный порядок аппроксимации дифференциальной задачи разностной — второй.

Рассмотрим различные способы аппроксимации производных в граничных условиях.

- 1) Аппроксимируя производные в (5), (6) соответственно разностями “вперед” и “назад”, получим

$$\alpha_1 y_0 - \alpha_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha, \quad (10)$$

$$\beta_1 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \beta. \quad (11)$$

Используемые конечно-разностные отношения для аппроксимации производных в (10) и (11) обеспечивают лишь первый порядок аппроксимации относительно шага сетки и соответственно суммарный порядок аппроксимации дифференциальной задачи разностной — первый $O(h)$.

Представим (10) и (11) соответственно в виде

$$-B_0 y_0 + C_0 y_1 = G_0, \quad (12)$$

$$A_n y_{n-1} - B_n y_n = G_n. \quad (13)$$

В итоге получим линейную замкнутую систему $(n+1)$ -ого порядка относительно y_0, y_1, \dots, y_n вида

$$\begin{cases} -B_0 y_0 + C_0 y_1 = G_0, \\ A_i y_{i-1} - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ A_n y_{n-1} - B_n y_n = G_n. \end{cases} \quad (14)$$

Матрица системы является трехдиагональной.

2) Приведем один из способов аппроксимации граничных условий с $O(h^2)$.

Пусть $h = (b - a)/n$. Вводится сетка (рис. 2) $x_i = a - h/2 + ih$, $i = 0, 1, \dots, n + 1$, так что $x_0 = a - h/2$, $x_{n+1} = b + h/2$.

Назовем эту сетку сдвинутой, в отличие от предыдущей — основной.

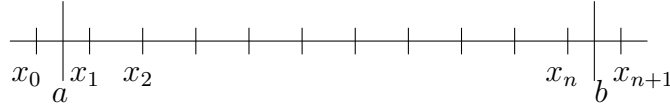


Рис. 2. Сдвинутая сетка

Граничные условия (5), (6) аппроксимируем следующим образом:

$$\alpha_1 \frac{y_0 + y_1}{2} - \alpha_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha, \quad (15)$$

$$\beta_1 \frac{y_{n+1} + y_n}{2} + \beta_2 \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \beta. \quad (16)$$

Для остальных точек x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ выписываются разностные уравнения, аппроксимирующие дифференциальное уравнение (1) в узлах сдвинутой сетки аналогично (7), (8). В результате приходим к системе $(n + 2)$ -ого порядка относительно y_0, y_1, \dots, y_{n+1} . Приводим её к виду, аналогичному (14):

$$\begin{cases} -B_0 y_0 + C_0 y_1 = G_0, \\ A_i y_{i-1} - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ A_{n+1} y_n - B_{n+1} y_{n+1} = G_{n+1}. \end{cases} \quad (17)$$

1.4. Метод прогонки для решения систем с трехдиагональной матрицей

Изложим метод на примере системы $(n + 1)$ -ого порядка вида (14).

Будем отыскивать решение системы в виде

$$y_i = s_i y_{i+1} + t_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (18)$$

Прогоночные коэффициенты s_i, t_i подлежат определению.

Из нулевого уравнения системы (14) находим

$$s_0 = \frac{C_0}{B_0}, \quad t_0 = \frac{-G_0}{B_0}.$$

Подставляя y_{i-1} в i -ое уравнение системы

$$A_i(s_{i-1} y_i + t_{i-1}) - B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i,$$

получим рекуррентные формулы

$$s_i = \frac{C_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad t_i = \frac{A_i t_{i-1} - G_i}{B_i - A_i s_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19)$$

В n -ом уравнении системы (14) $C_n = 0$, следовательно $s_n = 0$, значит из (18) имеем $y_n = t_n$. Затем по формулам (18) находим $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_0$.

Результаты вычислений рекомендуется представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

x_i	A_i	B_i	C_i	G_i	s_i	t_i	y_i
x_0	A_0	B_0	C_0	G_0	s_0	t_0	y_0
x_1	A_1	B_1	C_1	G_1	s_1	t_1	y_1
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
x_{n-1}	A_{n-1}	B_{n-1}	C_{n-1}	G_{n-1}	s_{n-1}	t_{n-1}	y_{n-1}
x_n	A_n	B_n	C_n	G_n	s_n	t_n	$y_n=t_n$

В этой таблице все столбцы, кроме последнего заполняются сверху вниз — прямая прогонка. Последний столбец, содержащий решение, заполняется снизу вверх — обратная прогонка.

Замечание 1. Метод прогонки относится к экономичным методам решения линейных систем, так как количество выполняемых действий линейно зависит от порядка системы и равно $8(n+1)$.

Замечание 2. При выполнении условий, предусмотренных в постановке задачи, при достаточно малом h , коэффициенты A_i , B_i , C_i , должны быть одного знака и $|A_i| + |C_i| \leq |B_i|$, $|s_i| \leq 1$, $i = 0, 1, \dots, n$, причём неравенство должно быть строгим хотя бы для одного уравнения. Эти условия обеспечивают реализуемость и устойчивость метода.

Замечание 3. Если разностная схема аппроксимирует исходную задачу и устойчива, то решение разностной схемы будет сходиться к решению исходной задачи при $h \rightarrow 0$ с тем же порядком, с которым выполнена аппроксимация.

1.5. Задание

- 1) Для реализации алгоритма метода прогонки следует создать модуль с процедурой, параметрами которой должны являться порядок системы, массивы коэффициентов A , B , C , G . Результатом должен быть массив решения Y в точках сетки.
- 2) Используя встроенные функции Maple или MATLAB, получить “точное” решение задачи в узлах основной сетки, обозначим его Y_{ex} .
- 3) Получить решение с порядком $O(h)$ при $n = 10$. Результаты оформить в виде таблицы 1.
- 4) Получить решение с порядком $O(h)$ при $n = 20$. Уточнить по Ричардсону. Обозначим его Y_{ut} . Сравнить с “точным” решением.
- 5) Получить решение с $O(h^2)$ при $n = 10$. Результаты оформить в виде таблицы 1. При построении решения на сдвинутой сетке следует получить решение в точках основной сетки.
- 6) Получить решение с $O(h^2)$ при $n = 20$. Уточнить по Ричардсону. Сравнить с “точным” решением.

Результаты в точках основной сетки следует представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

x	Y_{ex}	$O(h)$		$O(h^2)$	
		Y_{ut}	$Y_{ut} - Y_{ex}$	Y_{ut}	$Y_{ut} - Y_{ex}$
a					
$a + h$					
$a + 2h$					
\dots					
$a + nh = b$					

Здесь $n = 10$, $h = (b - a)/n$.

Сравнить решения на графиках.

Замечание 4. Как было сказано выше, если в обоих граничных условиях нет слагаемых с производными, т. е. $|\alpha_2| + |\beta_2| = 0$, то граничные уравнения при использовании основной сетки имеют вид $y_0 = \alpha$, $y_n = \beta$ и суммарный порядок аппроксимации дифференциальной задачи (1), (5), (6) разностной схемой (14) второй уже на основной сетке. Соответственно, в этом случае п. 3) и п. 4) задания опускаются, а п. 5) и п. 6) рациональнее реализовать на основной сетке.

1.6. Варианты граничных задач

Вариант 1

$$-\left(\frac{1}{2+x}u'\right)' + \cos(x)u = 1+x, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Вариант 2

$$-\left(\frac{2+x}{3+x}u'\right)' + (1+\sin(x))u = 1-x, \quad u'(-1) = u'(1) + u(1) = 0.$$

Вариант 3

$$-\frac{1}{x-3}u'' + \left(1 + \frac{x}{2}\right)u' + e^{x/2}u = 2-x, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Вариант 4

$$-\left(\frac{2}{2+x}u'\right)' + \frac{1+x}{2}u' + \cos\left(\frac{x}{2}\right)u = 1 + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) - u(-1) = u'(1) = 0.$$

с

Вариант 5

$$-\frac{1}{x+3}u'' - xu' + \ln(2+x)u = 1 - \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = u'(1) + 1/2 u(1) = 0.$$

Вариант 6

$$\frac{x-2}{x+2}u'' + xu' + (1 - \sin(x))u = x^2, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Вариант 7

$$-\frac{4+x}{5+2x}u'' + \left(\frac{x}{2} - 1\right)u' + (1 + e^{x/2})u = 2 + x, \quad u'(-1) = u'(1) + 2u(1) = 0.$$

Вариант 8

$$-\frac{4-x}{5-2x}u'' + \frac{1-x}{2}u' + \frac{1}{2}\ln(3+x)u = 1 + \frac{x}{3}, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Вариант 9

$$-\frac{6+x}{7+3x}u'' - \left(1 - \frac{x}{2}\right)u' + \left(1 + \frac{1}{2}\cos(x)\right)u = 1 - \frac{x}{3}, \quad u'(-1) - 2u(-1) = u'(1) = 0.$$

Вариант 10

$$-\frac{5-x}{7-3x}u'' - \frac{1-x}{2}u' + \left(1 + \frac{1}{2}\sin(x)\right)u = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = 2u'(1) + 3u(1) = 0.$$

Вариант 11

$$-\frac{7-x}{8+3x}u'' + \left(1 + \frac{x}{3}\right)u' + \left(1 - \frac{1}{2}e^{x/2}\right)u = \frac{1}{2} - \frac{x}{3}, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Вариант 12

$$-\frac{7+x}{8-3x}u'' + \left(1 - \frac{x}{3}\right)u' + \frac{1}{3}\ln(3+x)u = \frac{1+x}{2}, \quad u'(-1) - 3u(-1) = u'(1) = 0.$$

Вариант 13

$$-\left(\frac{1}{2x+3}u'\right)' + (1 + \cos(x))u = 1 + x, \quad u(-1) = u'(1) = 0.$$

Вариант 14

$$-\left(\frac{x+3}{2+x}u'\right)' + xu' + e^{x/3}u = 1 + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = u'(1) = 0.$$

Вариант 15

$$-\left(\frac{x+4}{x+5}u'\right)' + e^{x/4}u = 2 - x, \quad u'(-1) = u(1) = 0.$$

Вариант 16

$$u'' - \frac{\cos(x)}{1+x}u' - (2-x)u = x + 1, \quad 0.2u(0) - u'(0) = -0.8, \quad 0.9u(1) + u'(1) = -0.1.$$

Вариант 17

$$u'' - xe^xu = \sin(x), \quad 0.3u(0) - u'(0) = -0.9, \quad 0.5u(1) + u'(1) = -0.2.$$

Вариант 18

$$-((x \cos(x) + 1)u')' + e^{x+1}u = -(1+x)^2(1+x), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

Вариант 19

$$-\frac{1}{x-3}u'' + \left(1 + \frac{x}{2}\right)u' - e^{x/2}u = 2 - x, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

Вариант 20

$$-\frac{7+x}{8-3x}u'' + \left(1 - \frac{x}{3}\right)u' + \frac{1}{3}\ln(3+x)u = \frac{1+x}{2}, \quad u'(-1) - 3u(-1) = u'(1) = 0.$$

2. Проекционные методы решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

2.1. Постановка задачи. Общие сведения

Рассмотрим краевую задачу для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с однородными граничными условиями.

Требуется найти решение уравнения

$$Ly = f(x), \quad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\alpha_1 y(-1) - \alpha_2 y'(-1) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 \geq 0, \quad (2)$$

$$\beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \quad \beta_1 \beta_2 \geq 0. \quad (3)$$

Заметим, что при $\alpha_2 = 0$ краевая задача на левом конце промежутка $[-1, 1]$ называется первой (I), при $\alpha_1 = 0$ — второй (II), если же оба коэффициента не равны нулю — третьей (III). Аналогично определяется краевая задача для правого конца промежутка.

При применении любого из проекционных методов выбирается линейно независимая система функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$, называемая координатной, и приближенное решение ищется в виде линейной комбинации этих функций

$$y^n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \omega_i(x). \quad (4)$$

Коэффициенты разложения c_i являются решением линейной системы

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Конкретный вид оператора L , дополнительные условия на элементы координатной системы, способ построения элементов матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и вектора $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)'$ определяются используемым проекционным методом.

2.2. Метод Ритца

Рассматривается уравнение

$$Ly = -(p(x)y')' + r(x)y = f(x), \quad (6)$$

где $p(x)$ — непрерывно дифференцируема и $p(x) \geq p_0 > 0$, а $r(x)$ непрерывна и $r(x) > 0$ (в зависимости от краевой задачи допустимо нестрогое неравенство).

Дифференциальный оператор L мы считаем заданным на множестве $D(L)$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих соответствующим краевым условиям.

Заданная на $D(L)$ билинейная форма $[y, z] = (Ly, z)$ ((\cdot, \cdot) — скалярное произведение в пространстве $L_2(-1, 1)$), интегрированием по частям приводится к виду

$$[y, z] = \int_{-1}^1 (py'z' + ryz)dx + Q_l + Q_r, \quad (7)$$

где

$$Q_l = \begin{cases} 0, & \text{I, II,} \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(-1) y(-1) z(-1), & \text{III.} \end{cases} \quad (8)$$

$$Q_r = \begin{cases} 0, & \text{I, II,} \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} p(1) y(1) z(1), & \text{III.} \end{cases}$$

В Q_l, Q_r справа указан тип краевой задачи (I, II, III).

Билинейная форма $[y, z]$ обладает всеми свойствами скалярного произведения. Используя формулу (7), расширим область задания этого скалярного произведения, включив в нее все абсолютно непрерывные функции, производная которых принадлежит $L_2(-1, 1)$ и которые, кроме того, в случае первой краевой задачи (I) удовлетворяют этому условию. Пополнение новой области задания вместе со скалярным произведением $[y, z]$ называется энергетическим пространством оператора L и обозначается H_L .

Зададим на H_L функционал энергии $G(y) = [y, y] - 2(y, f)$. Пусть y^* — решение нашей задачи. Тогда для любой функции $y \in D(L)$ имеем $G(y) = [y, y] - 2[y, y^*] = G(y^*) + [y - y^*, y - y^*]$, откуда видно, что $G(y^*)$ есть минимальное значение функционала G на $D(L)$. Функционал G и на H_L достигает своего минимального значения при $y = y^*$. Это и используется для построения приближенного решения методом Ритца.

Выбирается линейно независимая система функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x) \in H_L$ и приближенное решение ищется в виде линейной комбинации (4) этих функций. Коэффициенты c_j находятся из условия минимума функционала энергии. Последнее требование приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно c_j :

$$\sum_{j=1}^n [\omega_j, \omega_i] c_j = (f, \omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Итак, приближенное решение по методу Ритца строится по формуле (4), где коэффициенты c_j находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{где} \quad a_{ij} = [\omega_i, \omega_j], \quad f_i = (f, \omega_i). \quad (10)$$

2.3. Метод Галеркина

В случае, когда координатные функции $\omega_i(x)$ выбраны из области определения оператора L ($\omega_i \in D(L)$), система уравнений (9) может быть переписана в виде

$$\sum_{j=1}^n (L\omega_j, \omega_i) c_j = (f, \omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Эту систему можно трактовать как условие ортогональности в L_2 невязки $Ly^n - f$ всем функциям координатной системы. Эти соображения применимы и в случае более общего уравнения, когда оператор L не является самосопряженным и положительно определенным, а имеет вид

$$Ly = p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x). \quad (12)$$

Итак, метод Галеркина решения уравнения (12) при однородных краевых условиях состоит в следующем. Выбирается координатная система функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x) \in D(L)$.

Приближенное решение строится по формуле (4), в которой коэффициенты c_j находятся из системы уравнений (11).

Отметим одну особенность метода Галеркина. Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y' + r(x)y = f(x), \quad p(x) > 0 \quad (13)$$

и краевая задача не является первой, то координатные функции могут не удовлетворять соответствующему краевому условию. При этом необходимо заменить в системе (11) коэффициенты $(L\omega_j, \omega_i)$ на

$$[\omega_j, \omega_i] + (q\omega_j' + r\omega_j, \omega_i), \quad (14)$$

где

$$[\omega_j, \omega_i] = \int_{-1}^1 p\omega_j' \omega_i' dx + Q_l + Q_r. \quad (15)$$

Здесь Q_l, Q_r имеют прежний смысл и вычисляются по формуле (8).

2.4. Метод моментов

Отличие этого метода решения краевой задачи для уравнения (12) от метода Галеркина состоит в том, что требуется ортогональность невязки приближенного решения не функциям координатной системы, а некоторым другим выбранным функциям.

Итак, метод моментов краевой задачи для уравнения (12) состоит в следующем. Выбирается координатная система функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x) \in D(L)$ и другая система функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$, называемая проекционной системой. Приближенное решение строится по формуле (4), причем коэффициенты c_j находятся из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n (L\omega_j, \psi_i) c_j = (f, \psi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

2.5. Метод наименьших квадратов

Очевидно, что решение y^* краевой задачи для уравнения (12) доставляет минимум функционалу $G(y) = (Ly - f, Ly - f)$, заданному на множестве $D(L)$. В методе наименьших квадратов приближенное решение в виде (4) строится из условия минимизации функционала G , что легко приводит к системе линейных уравнений относительно c_j :

$$\sum_{j=1}^n (L\omega_j, L\omega_i) c_j = (f, L\omega_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Итак, в методе наименьших квадратов выбирается координатная система, удовлетворяющая краевым условиям, приближенное решение строится по формуле (4), где c_j находятся из системы уравнений (17). Заметим, что этот метод можно рассматривать как частный случай метода моментов при специальном выборе проекционной системы $\psi_j = L\omega_j$.

2.6. Метод коллокации

Отличие этого метода от метода моментов состоит в том, что мы требуем не ортогональности невязки приближенного решения функциям некоторой системы, а обращения ее в нуль в некоторых точках промежутка $[-1, 1]$.

Итак, в методе коллокации выбирается координатная система, удовлетворяющая краевым условиям, выбирается некоторая система точек $-1 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n \leq 1$, называемых узлами коллокации, и приближенное решение строится по формуле (4), где c_j находятся из системы уравнений $\sum_{j=1}^n (L\omega_j |_{x=t_i}) c_j = f(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$

В качестве узлов коллокации рекомендуется брать узлы многочлена Чебышева первого рода.

2.7. Выбор координатной системы

В качестве координатной системы часто используются системы ортогональных многочленов Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Приведем необходимые сведения об этих многочленах. Нам потребуется частный случай многочленов, когда $\alpha = \beta = k$ — целое неотрицательное число.

$$P_n^{(k, k)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x^2)^{-k} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+k}. \quad (18)$$

Свойства многочленов Якоби

1) $P_n^{(k, k)}$ есть многочлен степени n , четный при четном n и нечетный при нечетном n .

2) Многочлены $P_n^{(k, k)}(x)$ обладают следующим свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^k P_n^{(k, k)}(x) P_m^{(k, k)}(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2^{2k+1} ((n+k)!)^2}{((2n+2k+1)n!(n+2k)!)}, & n = m. \end{cases}$$

3) $P_0^{(k, k)}(x) = 1, \quad P_1^{(k, k)}(x) = (k+1)x.$

4) Три последовательных многочлена Якоби связаны рекуррентной формулой

$$P_{n+2}^{(k, k)}(x) = \frac{(n+k+2)(2n+2k+3)x \cdot P_{n+1}^{(k, k)}(x) - (n+k+2)(n+k+1)P_n^{(k, k)}(x)}{(n+2k+2)(n+2)}, \quad (19)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

5) Правила дифференцирования полиномов Якоби:

$$[P_n^{(k, k)}(x)]' = \frac{n+2k+1}{2} P_{n-1}^{(k+1, k+1)}(x), \quad n \geq 1, \quad (20)$$

$$\left[(1-x^2)^k P_n^{(k, k)}(x) \right]' = -2(n+1) (1-x^2)^{k-1} P_{n+1}^{(k-1, k-1)}(x), \quad k \geq 1. \quad (21)$$

Для вычисления значения многочлена и его производной в точке предпочтительнее использовать вышеприведенную рекуррентную формулу, так как счет многочлена через его коэффициенты неустойчив при больших значениях n .

В связи с этим для реализации метода потребуется создать подпрограмму с параметрами

- k — верхний индекс у многочлена Якоби;
- n — степень многочлена;
- x — точка, в которой вычисляется значение многочлена.

Для ускорения работы программы надо учесть следующее:

- 1) Построить массив многочленов Якоби $P_i^{(k,k)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$
- 2) Построить массивы координатных функций и их производных $\varphi_i(x)$, $\varphi'_i(x)$, $\varphi''_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$.
- 3) Построить матрицы и правые части линейных систем максимального размера — 7 (кроме метода коллокаций). В тех методах, где матрицы симметрические, учесть это для уменьшения количества выполняемых операций.
- 4) В цикле по количеству координатных функций извлечь матрицы необходимого размера, решить систему и вычислить решение. В методе коллокаций матрицы и правые части для каждого n вычисляются заново.
- 5) При вычислении интегралов по формуле Гаусса следует учитывать достаточное количество узлов. Требуемое время для вычисления интегралов в этом случае существенно меньше, чем при вычислении интеграла от аналитической функции некоторыми встроенными функциями. Для этого надо предварительно построить массивы координатных функций и их производных в узлах формулы Гаусса.

Замечание 1. При выполнении задания на Maple можно использовать встроенные полиномы Якоби $P(n, \alpha, \beta, x)$ из пакета *orthopoly*.

При выполнении задания на MATLAB можно воспользоваться функциями, приведенными в приложении А. При использовании других языков программирования потребуются лишь небольшие изменения.

Замечание 2. При решении задачи с неоднородными граничными условиями решение следует представить в виде $y(x) = u(x) + z(x)$, где $u(x)$ должно удовлетворять однородным граничным условиям, а $z(x)$ — неоднородным и может иметь, например, вид $z(x) = d_1x + d_2$. d_1, d_2 определяются из граничных условий. Тогда $u(x)$ является решением задачи

$$\begin{cases} Lu = f(x) - Lz, \\ \alpha_1 u(-1) - \alpha_2 u'(-1) = 0, \\ \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0. \end{cases}$$

Замечание 3. Координатную систему, удовлетворяющую граничным условиям, можно строить следующим образом: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, например, в виде

$W_1(x) = x^2 + c_1x + d_1$, $W_2(x) = x^3 + c_2x + d_2$, где c_1, d_1, c_2, d_2 находятся из граничных условий, а для $i = 3, 4, \dots$ $W_i(x) = (1 - x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$.

Замечание 4. Для решения задачи на промежутке $[a, b] \neq [-1, 1]$ часто бывает удобнее свести задачу к задаче на промежутке $[-1, 1]$ или сделать соответствующую замену переменной в многочленах Якоби, т. е. взять многочлены $P_i((2x - b - a)/(b - a))$.

2.8. Задание

Написать программу, решающую задачу указанным проекционным методом и методом коллокации.

Число n координатных функций должно являться параметром программы.

Программа должна выдавать на печать

- расширенную матрицу системы;
- число обусловленности матрицы $\mu_\infty(A)$;
- коэффициенты разложения приближенного решения по координатным функциям;
- значения приближенного решения в точках $-0.5, 0, 0.5$.

Сравнить значения решения для различных n с точным решением y^* , полученным обращением к встроенной функции Maple или MATLAB. Построить графики решений в одних осях координат. Результаты представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

n	$\mu(A)$	$y^n(x)$			$y^*(x) - y^n(x)$		
		$x = -0.5$	$x = 0$	$x = 0.5$	$x = -0.5$	$x = 0$	$x = 0.5$
3							
4							
5							
6							
7							

Рассмотреть другие варианты координатных функций. Проанализировать результаты.

2.9. Варианты заданий

Вариант 1

- 1) Граничная задача

$$-\left(\frac{1}{2+x} u'\right)' + \cos(x) u = 1+x, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

- 2) Метод Рунге.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 2

- 1) Граничная задача

$$-\left(\frac{2+x}{3+x} u'\right)' + (1+\sin(x)) u = 1-x, \quad u'(-1) = u'(1) + u(1) = 0.$$

- 2) Метод Рунге.

Координатная система: $1, x, (1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 3

- 1) Граничная задача

$$-\frac{1}{x-3} u'' + \left(1 + \frac{x}{2}\right) u' + e^{x/2} u = 2-x, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

- 2) Метод Галеркина.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 4

- 1) Граничная задача

$$-\left(\frac{2}{2+x} u'\right)' + \frac{1+x}{2} u' + \cos\left(\frac{x}{2}\right) u = 1 + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) - u(-1) = u'(1) = 0.$$

- 2) Метод Галеркина.

Координатная система: $1, x, (1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 5

- 1) Граничная задача

$$-\frac{1}{x+3} u'' - x u' + \ln(2+x) u = 1 - \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = u'(1) + \frac{1}{2} u(1) = 0.$$

- 2) Метод Галеркина.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 6

- 1) Граничная задача

$$\frac{x-2}{x+2} u'' + x u' + (1 - \sin(x)) u = x^2, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

- 2) Метод моментов.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

Проекционная система: $P_i^{(0,0)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 7

- 1) Граничная задача

$$-\frac{4+x}{5+2x} u'' + \left(\frac{x}{2} - 1\right) u' + (1 + e^{x/2}) u = 2 + x, \quad u'(-1) = u(1) + 2 u'(1) = 0.$$

- 2) Метод моментов.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

Проекционная система: $P_i^{(0,0)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

- 3) Метод коллокации.

Вариант 8

- 1) Граничная задача

$$-\frac{4-x}{5-2x} u'' + \frac{1-x}{2} u' + \frac{1}{2} \ln(3+x) u = 1 + \frac{x}{3}, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

- 2) Метод Галеркина.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 9

1) Граничная задача

$$-\frac{6+x}{7+3x} u'' - \left(1 - \frac{x}{2}\right) u' + \left(1 + \frac{1}{2} \cos(x)\right) u = 1 - \frac{x}{3}, \quad u'(-1) - 2u(-1) = u'(1) = 0.$$

2) Метод наименьших квадратов.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 10

1) Граничная задача

$$-\frac{5-x}{7-3x} u'' - \frac{1-x}{2} u' + \left(1 + \frac{1}{2} \sin(x)\right) u = \frac{1}{2} + \frac{x}{2}, \quad u'(-1) = 2u'(1) + 3u(1) = 0.$$

2) Метод Галеркина.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 11

1) Граничная задача

$$-\frac{7-x}{8+3x} u'' + \left(1 + \frac{x}{3}\right) u' + \left(1 - \frac{1}{2} e^{x/2}\right) u = \frac{1}{2} - \frac{x}{3}, \quad u(-1) = u(1) = 0.$$

2) Метод наименьших квадратов.

Координатная система: $(1-x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 12

1) Граничная задача

$$-\frac{7+x}{8-3x} u'' + \left(1 - \frac{x}{3}\right) u' + \frac{1}{3} \ln(3+x) u = \frac{1+x}{2}, \quad u'(-1) - 3u(-1) = u'(1) = 0.$$

2) Метод наименьших квадратов.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1 - x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 13

1) Граничная задача

$$-\left(\frac{1}{2x+3}u'\right)' + (1 + \cos(x))u = 1 + x, \quad u(-1) = u'(1) = 0.$$

2) Метод Рунге.

Координатная система: $W_1(x) = 1 + x$, $W_i(x) = (1 - x^2) P_{i-2}^{(1,1)}(x)$, $i = 2, 3, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 14

1) Граничная задача

$$-\left(\frac{x+3}{2+x}u'\right)' + xu' + e^{x/3}u = 1 + \frac{x}{2}, \quad u(-1) = u'(1) = 0.$$

2) Метод Галеркина.

Координатная система: $1 + x$, $(1 - x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 15

1) Граничная задача

$$-\left(\frac{x+4}{x+5}u'\right)' + e^{x/4}u = 2 - x, \quad u'(-1) = u(1) = 0.$$

2) Метод Рунге.

Координатная система: $(1 - x)$, $(1 - x^2) P_i^{(1,1)}(x)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 16

1) Граничная задача

$$u'' - \frac{\cos(x)}{1+x}u' - (2-x)u = x+1, \quad 0.2u(0) - u'(0) = -0.8, \quad 0.9u(1) + u'(1) = -0.1.$$

2) Метод моментов.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = x^2(1-x)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(2x-1)$, $i = 3, 4, \dots$

Проекционная система: $P_i^{(0,0)}(2x-1)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 17

1) Граничная задача

$$u'' - xe^xu = \sin(x), \quad 0.3u(0) - u'(0) = -0.9, \quad 0.5u(1) + u'(1) = -0.2.$$

2) Метод Рунге.

Координатная система: $1, x, x(1-x)P_i^{(1,1)}(2x-1)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 18

1) Граничная задача

$$-((x \cos(x) + 1)u')' + e^{x+1}u = (1+x)^3, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0.$$

2) Метод Галеркина.

Координатная система: $1, x, x(1-x)P_i^{(1,1)}(2x-1)$, $i = 0, 1, \dots$

3) Метод коллокации.

Вариант 19

1) Граничная задача

$$-\frac{5+x}{9-3x}u'' + \left(1 - \frac{x}{2}\right)u' + \frac{1}{3}\ln(3+x)u = \frac{1+x}{3}, \quad u'(-1) - 3u(-1) = u'(1) = 0.$$

2) Метод наименьших квадратов.

Координатная система: W_1, W_2 — полиномы не выше третьей степени, удовлетворяющие граничным условиям, $W_i(x) = (1-x^2)^2 P_{i-3}^{(2,2)}(x)$, $i = 3, 4, \dots$

3) Метод коллокации.

3. Проблема собственных значений в задаче Штурма-Лиувилля

3.1. Постановка задачи. Общие сведения

Рассматривается краевая задача

$$Ly = -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, \quad (1)$$

где при $x \in (a, b)$ $p(x)$ — непрерывно дифференцируема и $p(x) \geq p_0 > 0$, а $q(x)$ непрерывна и $q(x) \geq q_0 > 0$ с граничными условиями вида

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 \geq 0, \quad (2)$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0, \quad \beta_1 \beta_2 \geq 0. \quad (3)$$

Напомним, что при $\alpha_2 = 0$ краевая задача на левом конце промежутка $[a, b]$ называется первой (I), при $\alpha_1 = 0$ — второй (II), если же оба коэффициента не равны нулю — третьей (III). Аналогично определяется краевая задача для правого конца промежутка.

Оператор задачи самосопряженный, положительно-определенный. Пусть H_L ¹ — энергетическое пространство оператора. Известно, что все собственные числа рассматриваемой задачи имеют кратность равную единице и могут быть перенумерованы в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$, причём $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Скалярное произведение в пространстве $L_2(a, b)$ имеет вид $(y, z) = \int_a^b yz \, dx$. Введем энергетическое скалярное произведение, связанное с дифференциальным оператором

$$[y, z] = \int_a^b (py'z' + qyz) \, dx + Q_l + Q_r, \quad (4)$$

где

$$Q_l = \begin{cases} 0, & \text{I, II,} \\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} p(a) y(a) z(a), & \text{III.} \end{cases} \quad (5)$$
$$Q_r = \begin{cases} 0, & \text{I, II,} \\ \frac{\beta_1}{\beta_2} p(b) y(b) z(b), & \text{III.} \end{cases}$$

В Q_l, Q_r справа указан тип краевой задачи (I, II, III).

3.2. Оценка собственных чисел

Из формулы $(Ly, y) = [y, y]$ при $y = y_i$ имеем $\lambda_i(y_i, y_i) = [y_i, y_i]$, следовательно

$$\lambda_i = \frac{[y_i, y_i]}{(y_i, y_i)} > q_0, \quad (6)$$

¹ Абсолютно непрерывные функции, производная которых принадлежит $L_2(a, b)$ и которые, кроме того, в случае первой краевой задачи (I) удовлетворяют этому условию.

где λ_i , y_i — любое собственное число и соответствующая ему собственная функция оператора L .

Известен также вариационный принцип Куранта для этих значений:

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{[y, y]}{(y, y)} \mid y \in H_L, (y, y) \neq 0 \right\}, \quad (7)$$

$$\lambda_m = \max \{ M(z_1, \dots, z_{m-1}) \mid z_j \in H_L, j = 1, \dots, m-1 \}, \quad (8)$$

$$\text{где } m > 1, M(z_1, \dots, z_{m-1}) = \min \left\{ \frac{[y, y]}{(y, y)} \mid y \in H_L, (y, z_j) = 0, j = 1, \dots, m-1 \right\}. \quad (9)$$

Этот максимум минимума достигается, когда y есть собственная функция, соответствующая собственному числу λ_m , а z_j — собственные функции, соответствующие λ_j .

Из принципа Куранта вытекает простой способ получения верхних и нижних границ для всех собственных чисел задачи.

Действительно, если положим $p_{\min} = \min p(x)$, $q_{\min} = \min q(x)$, заменим в дифференциальном уравнении $p(x)$ и $q(x)$ на p_{\min} , q_{\min} , то собственные числа вновь полученной задачи будут служить нижними оценками для собственных чисел исходной задачи. Если заменить коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ их верхними оценками, то получим задачу на верхние оценки собственных чисел.

3.3. Собственные числа и собственные функции оператора с постоянными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$-\bar{p}y'' + \bar{q}y = \lambda y \quad (10)$$

и граничными условиями (2), (3).

Его решение ищем в виде $y(x) = e^{\mu x}$, так что характеристическое уравнение имеет вид

$$-\bar{p}\mu^2 + \bar{q} - \lambda = 0 \quad \text{или} \quad -\bar{p}\mu^2 = \lambda - \bar{q}. \quad (11)$$

Так как согласно (6) $\lambda > \bar{q}$, то корни этого уравнения чисто мнимые. Обозначим их через $\mu_1 = i\nu$ и $\mu_2 = -i\nu$, где $\nu = \sqrt{\frac{\lambda - \bar{q}}{\bar{p}}}$.

Собственные функции имеют следующий вид:

$$y(x) = C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x, \quad (12)$$

где C_1 , C_2 , ν определяются граничными условиями (2), (3)², а собственные числа затем находятся по формуле $\lambda = \nu^2 \bar{p} + \bar{q}$.

Известно, что имеет место ортогональность

$$(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x) y_j(x) dx = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

²Следует подставить собственные функции в виде (12) в граничные условия и определитель однородной системы относительно C_1 , C_2 приравнять нулю. Корнями этого уравнения будут ν_1, ν_2, \dots . Далее при выбранном ν собственная функция в зависимости от краевой задачи, например, в виде $y_i(x) = \cos \nu_i x + C \sin \nu_i x$ или в виде $y_i(x) = C \cos \nu_i x + \sin \nu_i x$ подставляется в одно из граничных условий, определяется C , а окончательно собственные функции находятся из условия нормировки $\|y_i\|_{L_2} = 1$.

3.4. Метод Ритца

Выбирается линейно независимая координатная система функций $\omega_1, \dots, \omega_n$ из H_L и в принципе Куранта минимум по функциям y из H_L заменяется на минимум лишь по тем функциям, которые имеют представление $y^n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \omega_i(x)$.

Задача на минимум (7) сводится к алгебраической обобщенной задаче на собственные числа

$$\Gamma_L c - \lambda \Gamma c = 0, \quad (13)$$

где $\Gamma = \{(\omega_k, \omega_j)\}$ и $\Gamma_L = \{[\omega_k, \omega_j]\}$ — матрицы Грама координатной системы в пространствах L_2 и H_L .

Пусть $\lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \dots < \lambda_n^{(n)}$ — собственные числа этой алгебраической задачи и $c^{(k)} = (c_1^{(k)}, \dots, c_n^{(k)})$, $k = 1, \dots, n$ — соответствующие им собственные векторы. Тогда $\lambda_k^{(n)}$ принимаются за приближения к собственным числам λ_k и функции $y_k^n = \sum_{j=1}^n c_j^{(k)} \omega_j(x)$ за приближения к соответствующим λ_k собственным функциям.

Из принципа Куранта следует, что метод Ритца дает приближения к собственным числам сверху.

Если координатная система выбрана ортогональной и нормированной $(\omega_k, \omega_j) = \delta_k^j$ (δ_k^j — символ Кронекера), то $\lambda_k^{(n)}$ — собственные числа матрицы Γ_L , а $c^{(k)}$ — ее собственные векторы.

3.5. Обобщенная проблема собственных значений. Метод обратных итераций

Метод Ритца с координатными функциями, не удовлетворяющими условию ортогональности, приводит задачу к решению алгебраической обобщенной проблемы на собственные значения (13), где Γ_L и Γ — симметрические матрицы.

Пусть ставится задача найти только минимальное собственное число λ_{min} . Это будет минимальное собственное число матрицы $\Gamma^{-1}\Gamma_L$. Кроме того, справедливо

$$\lambda_{min}(\Gamma^{-1}\Gamma_L) = \frac{1}{\lambda_{max}(\Gamma_L^{-1}\Gamma)}. \quad (14)$$

Для нахождения λ_{max} можно применить степенной метод или метод скалярных произведений, для чего строится по вектору $z^{(0)}$ последовательность $z^{(l)} = (\Gamma_L^{-1}\Gamma) z^{(l-1)}$. Вектор $z^{(l)}$ можно определять из системы

$$\Gamma_L z^{(l)} = \Gamma z^{(l-1)}. \quad (15)$$

Здесь важно нормировать $z^{(l)}$, так как его компоненты будут расти с ростом l .

В силу хорошей разделённости собственных чисел достаточно 5-10 итераций (15), чтобы получить хорошее приближение к $\lambda_{min} = \lambda_1$. Последнюю итерацию $z^{(l)} = (z_1^{(l)}, z_2^{(l)}, \dots, z_n^{(l)})$ можно взять за вектор коэффициентов для построения приближения к собственной функции

$$y_1^n = \sum_{j=1}^n z_j^{(l)} \omega_j(x). \quad (16)$$

3.6. Выбор координатной системы

- 1) В качестве ортогональной и нормированной координатной системы в случае краевых задач II или III на обоих концах для $[a, b] = [-1, 1]$ следует взять нормированные многочлены Лежандра

$$\omega_k(x) = \hat{P}_{k-1}(x) = \sqrt{\frac{2k-1}{2}} P_{k-1}^{(0,0)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

- 2) В случае первой краевой задачи для $[a, b] = [-1, 1]$ рекомендуется взять многочлены

$$\omega_k(x) = (1-x^2) \hat{P}_{k-1}^{(2,2)}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \text{где} \quad (18)$$

$$\hat{P}_i^{(2,2)}(x) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(i+3)(i+4)(2i+5)}{2(i+1)(i+2)}} P_i^{(2,2)}(x). \quad (19)$$

Здесь $\hat{P}_i^{(2,2)}(x)$ — ортогональные с весом $(1-x)^2(1+x)^2$ и нормированные многочлены Якоби, удовлетворяющие следующему условию ортогональности:

$$\int_a^b (1-x)^2(1+x)^2 \hat{P}_i^{(2,2)}(x) \hat{P}_j^{(2,2)}(x) dx = \delta_i^j \quad (\delta_i^j \text{ — символ Кронекера}).$$

Необходимые сведения о многочленах Якоби можно посмотреть в п. 2.7.

- 3) В случае первой краевой задачи только на левом конце промежутка $[-1, 1]$ в качестве координатных функций можно взять полиномы Лежандра, умноженные на сомножитель, обеспечивающий выполнение граничного условия, т. е. $\omega_k(x) = (1+x)P_{k-1}^{(0,0)}(x)$. Но следует учитывать, что ортогональными и нормированными такие координатные функции уже не будут.

Ортогональными и нормированными в данном случае будут следующие координатные функции: $\omega_k(x) = (1+x) \hat{P}_{k-1}^{(0,2)}(x)$.

Многочлены $P_i^{(0,2)}(x)$ обладают следующим свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^1 (1+x)^2 P_i^{(0,2)}(x) P_j^{(0,2)}(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \frac{8}{2i+3}, & j = i. \end{cases} \quad (20)$$

Многочлены $P_i^{(0,2)}(x)$ для $i > 1$ можно вычислять, используя следующее рекуррентное соотношение:

$$P_i^{(0,2)}(x) = \frac{(2i+1)(-1+i(i+1)x)P_{i-1}^{(0,2)}(x) - (i^2-1)(i+1)P_{i-2}^{(0,2)}(x)}{i^2(i+2)}, \quad (21)$$

где

$$P_0^{(0,2)}(x) = 1, \quad P_1^{(0,2)}(x) = -1 + 2x.$$

После построения нормируем $P_i^{(0,2)}(x)$ по формуле

$$\hat{P}_i^{(0,2)}(x) = \sqrt{\frac{2i+3}{8}} P_i^{(0,2)}(x). \quad (22)$$

- 4) В случае первой краевой задачи только на правом конце промежутка $[-1, 1]$ аналогично в качестве координатных функций можно взять полиномы Лежандра, умноженные на сомножитель, обеспечивающий выполнение граничного условия, т.е. $\omega_k(x) = (1-x)P_{k-1}^{(0,0)}(x)$. Но следует учитывать, что ортогональными и нормированными такие координатные функции не будут.

Ортогональными и нормированными в данном случае будут следующие координатные функции: $\omega_k(x) = (1-x)\hat{P}_{k-1}^{(2,0)}(x)$.

Многочлены $P_i^{(2,0)}(x)$ обладают следующим свойством ортогональности:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^2 P_i^{(2,0)}(x) P_j^{(2,0)}(x) dx = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ \frac{8}{2i+3}, & j = i. \end{cases} \quad (23)$$

Многочлены $P_n^{(2,0)}(x)$ для $n > 1$ можно вычислять, используя следующее рекуррентное соотношение:

$$P_i^{(2,0)}(x) = \frac{(2i+1)(1+i(i+1)x)P_{i-1}^{(2,0)}(x) - (i^2-1)(i+1)P_{i-2}^{(2,0)}(x)}{i^2(i+2)}, \quad (24)$$

где

$$P_0^{(2,0)}(x) = 1, \quad P_1^{(2,0)}(x) = 1 + 2x.$$

После построения нормируем $P_i^{(2,0)}(x)$ по формуле

$$\hat{P}_i^{(2,0)}(x) = \sqrt{\frac{2i+3}{8}} P_i^{(2,0)}(x). \quad (25)$$

- 5) Для решения задачи на промежутке $[a, b] \neq [-1, 1]$ часто бывает удобнее свести задачу к задаче на промежутке $[-1, 1]$ или сделать соответствующую замену переменной в многочленах Лежандра или Якоби, т.е. взять многочлены $P_i((2x-b-a)/(b-a))$. Очевидно, что в связи с заменой переменной изменится и нормирующий множитель.

Замечание 1. Если оператор L самосопряженный, но не положительно определенный, а ограниченный снизу, то метод Ритца состоит в минимизации функционала $[y, y]/(y, y)$ на множестве функций, которые имеют представление $y^n(x) = \sum_{i=1}^n c_i w_i(x)$, и приводит к такой же задаче (13), только выражение $[y, z]$ не будет иметь смысла скалярного произведения.

3.7. Задание

Требуется

- 1) Получить верхние и нижние оценки для первых двух собственных чисел и соответствующие им собственные функции оператора Штурма-Лиувилля “точно”. Собственные функции выбрать удовлетворяющими условию нормировки $\|y_i\|_{L_2} = 1$. Проверить удовлетворение краевой задаче. Результаты представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

	λ_1		λ_2	
	Оценки	Невязки	Оценки	Невязки
min				
max				

- 2) Получить приближения для первых двух собственных чисел по формуле

$$\lambda_i = \frac{[y_i, y_i]}{(y_i, y_i)},$$

используя в качестве функций y_i собственные функции, найденные в предыдущем пункте.

- 3) Построить матрицы Ритца Γ_L и Γ для $n = 7$, где n — число координатных функций. Используя встроенные функции математического пакета (Maple, Matlab), получить два первых собственных числа. Будем считать их “точными”. Обозначим λ_1^* , λ_2^* . При построении матриц учесть их симметричность.

Сравнить с результатами, полученными в п. 1, п. 2.

- 4) Извлекая подматрицы из матриц Ритца, построенных в предыдущем пункте, получить первое собственное число и соответствующую ему собственную функцию для различных значений n методом обратных итераций. Собственную функцию выбрать удовлетворяющей условию нормировки $\|y_1^n\|_{L_2} = 1$.

Использовать методы (указывается преподавателем)

- а) степенной метод;
- б) метод скалярных произведений.

Точность получения собственных чисел должна быть параметром подпрограммы.

Результаты представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

Метод обратных итераций			
n	$\lambda_1^{(n)}$	$\lambda_1^{(n)} - \lambda_1^*$	$(Ly_1^n - \lambda_1^{(n)} y_1^n)$ при $x = (a + b)/2$
3			
4			
5			
6			
7			

- 5) Сравнить полученные результаты, построить графики собственных функций.

3.8. Варианты заданий

Вариант 1

$$\begin{aligned} -\left(\left(1+\frac{x}{4}\right)u'\right)' + \left(1+\sin\frac{x}{2}\right)u &= \lambda u, \\ 2u(0) - u'(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned} -\left(\frac{1}{2+x/3}u'\right)' + \left(\exp\left(\frac{x}{5}\right)\right)u &= \lambda u, \\ u'(-1) - 0.6u(-1) &= u'(1) + 0.65u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 3

$$\begin{aligned} -\left((kx+l)u'\right)' + \left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u &= \lambda u, \quad k = 1.59194, \quad l = 5.42365, \\ u(-1) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 4

$$\begin{aligned} -\left((kx+l)u'\right)' + \left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u &= \lambda u, \quad k = 15.7503, \quad l = 19.58201, \\ u(-1) &= u(-0.7978525) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 5

$$\begin{aligned} -\left((1+\sin(x/2))u'\right)' + (2+3x)u &= \lambda u, \\ u(0) &= u(1) + 3u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 6

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2+x/3} u' \right)' + (\exp(x/5)) u = \lambda u, \\ & u'(-1) - 0.7u(-1) = u'(1) + 0.75u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 7

$$\begin{aligned} & - \left((kx+l) u' \right)' + \left(k^2 \left(\frac{1}{kx+l} - kx \right) \right) u = \lambda u, \quad k = 1.57894, \quad l = 8.59453, \\ & u(-1) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 8

$$\begin{aligned} & - \left((kx+l) u' \right)' + \left(k^2 \left(\frac{1}{kx+l} - kx \right) \right) u = \lambda u, \quad k = 15.7503, \quad l = 19.58201, \\ & u(-0.7978525) = u(-0.5973559) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 9

$$\begin{aligned} & - \left(\left(1 + \cos \frac{x}{2} \right) u' \right)' + \left(2 + \sin \frac{x}{2} \right) u = \lambda u, \\ & u(0) - 1/2u'(0) = u'(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 10

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{2+x/3} u' \right)' + (\exp(x/5)) u = \lambda u, \\ & u'(-1) - 0.8u(-1) = u'(1) + 0.85u(1) = 0. \end{aligned}$$

Вариант 11

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=1.57495, \quad l=11.74842, \\ u(-1)=u(1)=0.$$

Вариант 12

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=15.7503, \quad l=19.58201, \\ u(0.2017789)=u(0.4013681)=0.$$

Вариант 13

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=1.57495, \quad l=11.74842, \\ u(-1)=u(1)=0.$$

Вариант 14

$$-\left(\left(1+\cos\frac{x}{2}\right)u'\right)'+\left(2+\sin\frac{x}{2}\right)u=\lambda u, \\ u(0)-1/2u'(0)=u'(1)=0.$$

Вариант 15

$$-\left((kx+l)u'\right)'+\left(k^2\left(\frac{1}{kx+l}-kx\right)\right)u=\lambda u, \quad k=1.57262, \quad l=18.04324, \\ u(-1)=u(1)=0.$$

4. Численное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

Пусть требуется решить уравнение

$$u(x) - \int_a^b H(x, y)u(y)dy = f(x), \quad f(x) \in C_{[a,b]}, \quad (1)$$

где ядро $H(x, y)$ — достаточное количество раз непрерывно дифференцируемо.

4.1. Метод замены ядра на вырожденное

4.1.1. Построение решения и резольвенты

Вырожденным называется ядро, представимое в виде

$$\tilde{H}(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\beta_i(y). \quad (2)$$

Пусть $H(x, y) \approx \tilde{H}(x, y)$ и будем решать уравнение

$$\tilde{u}^n(x) - \int_a^b \tilde{H}(x, y)\tilde{u}^n(y)dy = f(x). \quad (3)$$

Если уравнение (3) имеет решение, то оно представимо в виде

$$\tilde{u}^n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} c_i &= \int_a^b \beta_i(y)\tilde{u}^n(y)dy = \int_a^b \beta_i(y)(f(y) + \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j(y))dy = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_a^b \beta_i(y)\alpha_j(y)dy c_j + \int_a^b \beta_i(y)f(y)dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим

$$\gamma_{ij} = \int_a^b \beta_i(y)\alpha_j(y)dy, \quad b_i = \int_a^b \beta_i(y)f(y)dy, \quad a_{ij} = \delta_{ij} - \gamma_{ij}, \quad (6)$$

(δ_{ij} — символ Кронекера), тогда c_i являются решением системы линейных алгебраических уравнений $AC = B$.

Здесь $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — матрица коэффициентов, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ — вектор правых частей, $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ — искомый вектор.

Если определитель матрицы A не равен нулю, то нетрудно построить резольвенту ядра \tilde{H} , то есть такую функцию $\tilde{G}(x, y)$, что

$$\tilde{u}^n(x) = f(x) + \int_a^b \tilde{G}(x, y) f(y) dy. \quad (7)$$

Обозначим $D = (d_{ij})_{i,j=1}^n$ матрицу, обратную матрице A ($D = A^{-1}$). Тогда коэффициенты c_i вычисляются по формулам

$$c_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} b_j \quad (8)$$

и потому

$$\begin{aligned} \tilde{u}^n(x) &= f(x) + \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \int_a^b \beta_j(y) f(y) dy \alpha_i(x) = \\ &= f(x) + \int_a^b \tilde{G}(x, y) f(y) dy, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\tilde{G}(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \alpha_i(x) \beta_j(y) \quad (10)$$

— резольвента ядра \tilde{H} .

4.1.2. Оценка погрешности

Теорема 1 (об оценке погрешности). Пусть интегральное уравнение (3) однозначно разрешимо, его решение есть $\tilde{u}^n(x)$ и для резольвенты \tilde{G} ядра \tilde{H} выполнена оценка

$$\int_a^b |\tilde{G}(x, y)| dy \leq \tilde{B} \quad (x \in [a, b]). \quad (11)$$

Пусть ядра H и \tilde{H} связаны неравенством

$$\int_a^b |H(x, y) - \tilde{H}(x, y)| dy \leq \eta \quad (x \in [a, b]), \quad (12)$$

причем $(1 + \tilde{B})\eta < 1$.

Тогда уравнение (1) также однозначно разрешимо и для его решения $u^*(x)$ выполняется оценка

$$|u^*(x) - \tilde{u}^n(x)| \leq \frac{(1 + \tilde{B})\eta}{1 - (1 + \tilde{B})\eta} \|\tilde{u}^n(x)\|_C. \quad (13)$$

4.1.3. Задание

- 1) Подобрать вырожденное ядро ранга 3 и найти $\tilde{u}^3(x)$.
- 2) Вычислить значения $\tilde{u}^3(x)$ в точках a , $(a+b)/2$, b .
- 3) Подобрать вырожденное ядро ранга 4 и найти $\tilde{u}^4(x)$.
- 4) Вычислить значения $\tilde{u}^4(x)$ в точках a , $(a+b)/2$, b .
- 5) Вычислить $\tilde{\Delta} = \max_{i=1,2,3} |\tilde{u}^4(x_i) - \tilde{u}^3(x_i)|$, $x_1 = a$, $x_2 = (a+b)/2$, $x_3 = b$.

При использовании математического пакета вычислить $\tilde{\Delta} = \|\tilde{u}^4(x) - \tilde{u}^3(x)\|_C$.

- 6) Оценить погрешность приближенного решения $\tilde{u}^3(x)$. Сравнить с $\tilde{\Delta}$.
- 7) Построить график разности решений $\tilde{u}^3(x)$ и $\tilde{u}^4(x)$.

Результаты представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

x	a	$(a+b)/2$	b
$\tilde{u}^3(x)$			
$\tilde{u}^4(x)$			
Оценка $\tilde{\Delta}$			

Указание

При выполнении задания на Maple можно использовать функции

- $Hn := mtaylor(H(x, y), [x, y], n)$ — разложение функции $H(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $(x = 0, y = 0)$. Параметр n определяет порядок удерживаемых в разложении функции членов;
- $plot3d(H_Hn, x = a..b, y = a..b, axes = BOXED)$ — построение поверхности, задаваемой выражением H_Hn , в трехмерном пространстве. Поверхность заключена в охватывающий параллелепипед с нанесенными шкалами по трем граням. Эта функция может быть применена для получения оценок, используемых в теореме о погрешности.

Аналогичные функции присутствуют и в MATLAB, например,

$$Hn = taylor(H, [x, y], [0, 0], 'Order', n).$$

Перечислим основные пункты решения задачи для ранга ядра n .

- 1) Построение вырожденного ядра, то есть определение функций $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, таких, что $\tilde{H}(x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(y) \approx H(x, y)$.
- 2) Построение матрицы A и столбца правых частей B .
- 3) Решение системы $AC = B$.
- 4) Получение решения в точках $x = a$, $(a+b)/2$, b .
- 5) Вычисление апостериорной оценки.

4.2. Метод механических квадратур

4.2.1. Построение решения

Выберем какую-нибудь квадратурную формулу

$$\int_a^b v(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k v(x_k), \quad (14)$$

где узлы $x_k \in [a, b]$, $x_k \neq x_j$ при $k \neq j$.

Заменив интеграл в уравнении (1) приближенно на квадратурную сумму, получим новое уравнение относительно новой неизвестной функции $u^n(x)$

$$u^n(x) - \sum_{k=1}^n A_k H(x, x_k) u^n(x_k) = f(x). \quad (15)$$

Если квадратурная сумма достаточно хорошо приближает интеграл, то есть основания надеяться, что решение $u^n(x)$ уравнения (15) близко к решению $u(x)$ уравнения (1).

Для решения уравнения (15) будем полагать x поочередно равным x_1, x_2, \dots, x_n .

Обозначим $\varsigma_j = u^n(x_j)$, тогда ς_j обязаны удовлетворять системе уравнений

$$\varsigma_j - \sum_{k=1}^n A_k H(x_j, x_k) \varsigma_k = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

или, в матричной записи, $Dz = g$, где

$$D = (d_{jk})_{j,k=1}^n, \quad d_{jk} = \delta_{jk} - A_k H(x_j, x_k), \quad g = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)), \quad (17)$$

$z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n)$ — искомый вектор.

После вычисления решения системы (16) $z = (\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n)$ решение уравнения (15) может быть получено по формуле

$$u^n(x) = \sum_{k=1}^n A_k H(x, x_k) \varsigma_k + f(x). \quad (18)$$

Теорема 2 (о сходимости метода механических квадратур). Пусть выполнены условия

- 1) Ядро $H(x, y)$ и правая часть $f(x)$ интегрального уравнения (1) непрерывны.
- 2) Интегральное уравнение (1) однозначно разрешимо.
- 3) Квадратурный процесс сходится.

Тогда

- а) при достаточно больших n системы линейных алгебраических уравнений (16), к которым приводит метод механических квадратур, однозначно разрешимы;
- б) числа обусловленности $\mu_\infty(D)$ матриц этих систем равномерно ограничены;
- в) приближенные решения $u^n(x)$, построенные по формуле (18), равномерно сходятся к точному решению $u(x)$.

4.2.2. Задание

Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$u(x) - \int_a^b H(x, y)u(y)dy = f(x), \quad (19)$$

используя одну из квадратурных формул

- 1) Составная формула трапеций.
- 2) Составная формула средних прямоугольников.
- 3) Составная формула Симпсона.
- 4) Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т. д. узлами.
- 5) Составная формула Гаусса с двумя узлами.
- 6) Составная формула Гаусса с тремя узлами.

Количество разбиений в составных формулах рекомендуется удваивать до тех пор, пока значения приближенных решений в точках a , $(a+b)/2$, b не будут совпадать с точностью ε . В формулах Гаусса (не составных) до достижения требуемой точности рекомендуется увеличивать количество узлов на единицу.

Результаты представить в виде таблицы 2.

Таблица 2

x	a	$(a+b)/2$	b
$u^n(x)$			
$u^{2n}(x)$			
$u^{4n}(x)$			
\dots			
$u^{mn}(x)$			
$u^{2mn}(x)$			
$u^{2mn}(x) - u^{mn}(x)$			
Решение, полученное в 1-ом методе			
Оценка, полученная в 1-ом методе			

Здесь n — начальное количество разбиений в составной формуле, а m такое, что

$$\max_{i=1,2,3} |u^{2mn}(x_i) - u^{mn}(x_i)| < \varepsilon, \quad x_1 = a, \quad x_2 = (a+b)/2, \quad x_3 = b.$$

Еще раз заметим, что при использовании формул Гаусса (не составных) количество узлов не следует удваивать, а достаточно увеличивать на единицу. Соответственно последнее условие примет вид

$$\max_{i=1,2,3} |u^{n+m+1}(x_i) - u^{n+m}(x_i)| < \varepsilon, \quad x_1 = a, \quad x_2 = (a+b)/2, \quad x_3 = b.$$

Квадратурные формулы первых четырех методов хорошо известны, указания по построению составных квадратурных формул Гаусса приведены в приложении Б.

Для реализации метода составить программу, содержащую подпрограмму, вычисляющую решение в заданных точках методом механических квадратур с n узлами, где n — параметр. Промежуточные результаты должны содержать

- количество узлов квадратурной формулы;
- узлы квадратурной формулы;
- коэффициенты квадратурной формулы;
- матрицу системы относительно значений приближенного решения в узлах и вектор правых частей (только при небольшом числе узлов 2 или 3);
- решение системы — значения приближенного решения в узлах квадратурной формулы;
- значения решения в точках a , $(a + b)/2$, b ;
- $\max_{i=1,2,3} |u^{2mn}(x_i) - u^{mn}(x_i)|$;
или
 $\max_{i=1,2,3} |u^{n+m+1}(x_i) - u^{n+m}(x_i)| < \varepsilon$, $x_1 = a$, $x_2 = (a + b)/2$, $x_3 = b$.

4.3. Варианты заданий

1. $u(x) - 0.8 \int_0^1 \sin(xy) u(y) dy = x - 0.8$. Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т. д. узлами.
2. $u(x) + 0.1 \int_0^1 \operatorname{sh}(xy^2) u(y) dy = x + 0.1$. Составная формула трапеций.
3. $u(x) - 0.6 \int_0^1 \operatorname{ch}(xy) u(y) dy = x - 0.6$. Составная формула средних прямоугольников.
4. $u(x) + 0.5 \int_0^1 \operatorname{sh}(xy) u(y) dy = x + 0.5$. Составная формула Симпсона.
5. $u(x) - 0.6 \int_0^1 \frac{1}{3+xy^2} u(y) dy = x - 0.6$. Составная формула Гаусса с двумя узлами.
6. $u(x) + 0.5 \int_0^1 \ln(1 + \frac{xy}{3}) u(y) dy = x + 0.5$. Составная формула Гаусса с тремя узлами.
7. $u(x) - 0.5 \int_0^1 \operatorname{th}(xy) u(y) dy = x - 0.5$. Составная формула Симпсона.
8. $u(x) + 0.5 \int_0^1 e^{(x-0.5)y^2} u(y) dy = x + 0.5$. Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т. д. узлами.
9. $u(x) + 0.1 \int_0^1 \sin(x(0.5 + y^2)) u(y) dy = x + 0.1$. Составная формула трапеций.

10. $u(x) - 0.6 \int_0^1 \cos(xy^2) u(y) dy = x - 0.6$. Составная формула средних прямоугольников.
11. $u(x) - 5 \int_0^1 \frac{y \cos(x)}{xy - 2} u(y) dy = 2 + \frac{e^{5x} - 1}{2x}$. Формула Гаусса.
12. $u(x) - 0.7 \int_0^1 \cos(x^2 y) u(y) dy = x - 0.7$. Составная формула Гаусса с двумя узлами.
13. $u(x) - 0.4 \int_0^1 \operatorname{ch}(xy^2) u(y) dy = x - 0.4$. Составная формула трапеций.
14. $u(x) + 0.5 \int_0^1 e^{xy} u(y) dy = x + 0.5$. Составная формула средних прямоугольников.
15. $u(x) - 0.4 \int_0^1 e^{(x-0.5)y} u(y) dy = x - 0.4$. Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т. д. узлами.
16. $u(x) - 0.5 \int_0^1 \frac{1}{3+xy} u(y) dy = x - 0.5$. Составная формула Симпсона.
17. $u(x) - 0.5 \int_0^1 \frac{y}{3 - x * y} u(y) dy = \cos(x) + \frac{\sin(2x)}{x}$. Формулы Гаусса с 2, 3, 4 и т. д. узлами.

5. Метод сеток для решения уравнения параболического типа

5.1. Постановка задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad f(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (2)$$

$$\alpha_1(t)u(0, t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha(t), \quad (3)$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geq 0, \quad |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\beta_1(t)u(1, t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta(t), \quad (4)$$

$$\beta_1(t)\beta_2(t) \geq 0, \quad |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где Lu может иметь один из двух видов

$$Lu = \begin{cases} \text{а) } a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & a(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \\ \text{б) } \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & p(x) \in C_{[0,1]}^1, \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ & b(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \leq 0. \end{cases}$$

Требуется найти в $\bar{D} = [0, 1] \times [0, T]$ решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и граничным условиям (3), (4).

5.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора разностным

Разобьём отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N$, $x_i = i h$, $i = \overline{0, N}$.
Разобьём отрезок $[0, T]$ на M равных частей. Обозначим $\tau = T/M$, $t_k = k \tau$, $k = \overline{0, M}$.
Построим сетку узлов (рис. 1) $\overline{\omega_{h\tau}} = \{(x_i, t_k), i = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}$.

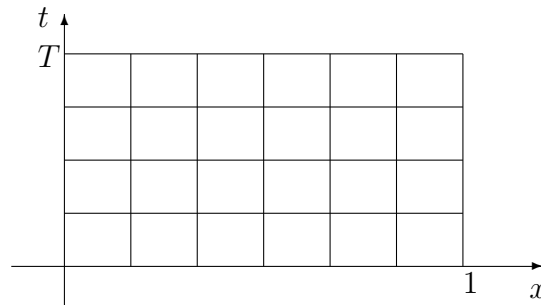


Рис. 1

Приближенное решение поставленной задачи ищется в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h\tau}}$. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k) сеточной функции $u^k = \{u_i^k\}$, определенной на слое k сеточной области $\overline{\omega_{h\tau}}$.

Используя аппроксимации дифференциальных выражений разностными, заменяем оператор L разностным оператором

$$L_h u_i^k = \begin{cases} \text{а) } a(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k, \\ \text{б) } p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k. \end{cases}$$

Здесь $L_h u_i^k$ — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный Lu в точке (x_i, t_k) со вторым порядком аппроксимации, $i = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1, M}$. Предполагается, что точное решение задачи и коэффициенты в операторе L достаточно гладкие, чтобы делать выводы о порядке аппроксимации.

5.3. Явная разностная схема

Аппроксимируем уравнение (1) в узле (x_i, t_{k-1})

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (5)$$

Каждое уравнение в (5) содержит решения лишь в четырех точках u_{i-1}^{k-1} , u_i^{k-1} , u_{i+1}^{k-1} , u_i^k , причем в конфигурации, изображенной на рис. 2.

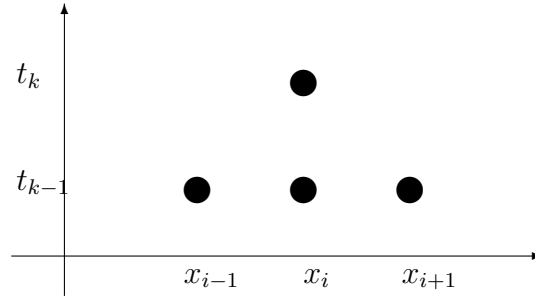


Рис. 2

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (6)$$

Граничные условия (3), (4) аппроксимируем с порядком $O(h^2)$

$$\alpha_1(t_k) u_0^k - \alpha_2(t_k) \frac{-3u_0^k + 4u_1^k - u_2^k}{2h} = \alpha(t_k), \quad (7)$$

$$\beta_1(t_k) u_N^k + \beta_2(t_k) \frac{3u_N^k - 4u_{N-1}^k + u_{N-2}^k}{2h} = \beta(t_k), \quad (8)$$

$k = \overline{1, M}$.

Схема (5)-(8) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$.

Окончательно решение исходной задачи свелось к решению системы (5)-(8), причём, вычислив решение при $k=0$ из (6), далее решение определяется последовательно по слоям во внутренних точках из (5), в граничных из (7), (8).

Очевидна простота реализации явной разностной схемы, но следует иметь в виду её условную устойчивость.

Обозначим

$$A = \begin{cases} \max\{a(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\} & \text{в случае а),} \\ \max\{p(x) \mid 0 \leq x \leq 1\} & \text{в случае б).} \end{cases}$$

Пусть $\nu = \frac{\tau}{h^2}$, тогда условие устойчивости примет вид $A\nu \leq \frac{1}{2}$.

Следует заметить, что данное условие устойчивости справедливо только для уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (9)$$

но оно может быть использовано и при $b(x, t) \neq 0$, $c(x, t) \neq 0$, принимающих “небольшие” значения.

Порядок вычисления решения

- 1) Из (6) находим u_i^0 , $i = \overline{0, N}$.
- 2) Из (5) находим $u_i^k = u_i^{k-1} + \tau(L_h u_i^{k-1} + f(x_i, t_{k-1}))$, $i = \overline{1, N-1}$ при $k = 1$.
- 3) Из (7) находим u_0^k при $k = 1$.
- 4) Из (8) находим u_N^k при $k = 1$.

Тем самым, решение при $k = 1$ найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока $k \leq M$.

5.4. Схема с весами

Пусть σ — вещественный параметр.

Рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h(\sigma u_i^k + (1 - \sigma)u_i^{k-1}) + f(x_i, t_k), \quad i = \overline{1, N-1} \quad k = \overline{1, M}. \quad (10)$$

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (11)$$

Для упрощения алгоритма производные в краевых условиях (3), (4) аппроксимируем с первым порядком

$$\alpha_1(t_k)u_0^k - \alpha_2(t_k)\frac{u_1^k - u_0^k}{h} = \alpha(t_k), \quad (12)$$

$$\beta_1(t_k)u_N^k + \beta_2(t_k)\frac{u_N^k - u_{N-1}^k}{h} = \beta(t_k). \quad (13)$$

Рассмотрим различные значения параметра σ .

1) $\sigma = 0, \bar{t}_k = t_{k-1}$.

В этом случае разностная схема явная, условно устойчивая и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$. Порядок действий указан выше в п. 5.3.

2) Если $\sigma \neq 0$, то схема (10)-(13) называется неявной двуслойной схемой. Если $\sigma \neq 1$, то каждое уравнение в (10) содержит значения решения в шести точках $u_{i-1}^{k-1}, u_i^{k-1}, u_{i+1}^{k-1}, u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k$, причем в следующей конфигурации:

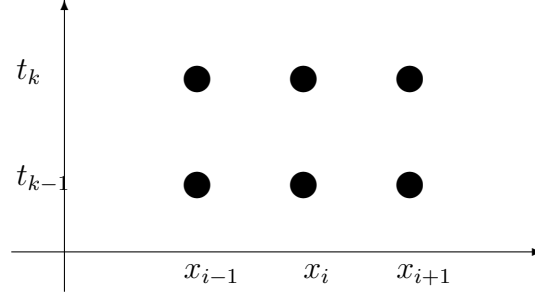


Рис. 3

Так как к моменту определения решения на k -ом слое решение на предыдущем $(k-1)$ -ом слое уже известно, систему (10) перепишем следующим образом:

$$\sigma L_h u_i^k - \frac{1}{\tau} u_i^k = G_i^k, \quad (14)$$

где

$$G_i^k = -\frac{1}{\tau} u_i^{k-1} - (1 - \sigma) L_h u_i^{k-1} - f(x_i, \bar{t}_k), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M}. \quad (15)$$

Граничные условия (12), (13) приводим к виду

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^k + C_0 u_1^k &= G_0^k, \\ A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k &= G_N^k. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом k -ом слое в данном случае приходится решать систему $(N+1)$ порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида¹

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^k + C_0 u_1^k &= G_0^k, \\ A_i u_{i-1}^k - B_i u_i^k + C_i u_{i+1}^k &= G_i^k, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ A_N u_{N-1}^k - B_N u_N^k &= G_N^k, \end{aligned} \quad (16)$$

$k = \overline{1, M}$.

Для решения системы используется метод прогонки, рассмотренный в 1.4.

Порядок вычисления решения

1) Из (11) находим $u_i^0, i = \overline{0, N}$.

¹Коэффициенты A, B, C в линейной системе (16) могут зависеть от номера слоя k , но для краткости верхний индекс k здесь и далее опущен.

2) Из (16) находим u_i^k , $i = \overline{0, N}$ при $k = 1$.

Тем самым, решение при $k = 1$ найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока $k \leq M$.

Рекомендуемые значения $\sigma = 1$, $\sigma = 1/2$.

При $\sigma = 1$, $\bar{t}_k = t_k$ получаем разностную схему с опережением или чисто неявную схему с четырехточечным шаблоном (рис. 4).

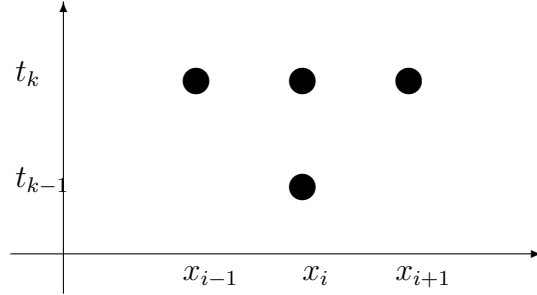


Рис. 4

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации — $O(\tau + h)$.

При $\sigma = 1/2$, $\bar{t}_k = t_k - \tau/2$ получаем разностную схему Кранка-Никольсона с шести-точечным шаблоном (рис. 5).

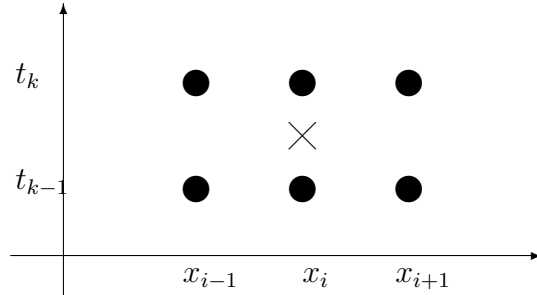


Рис. 5

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau^2 + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau^2 + h)$.

Второй порядок аппроксимации по времени достигается за счет того, что аппроксимация уравнения (1) выполняется в точке $(x_i, t_k - \tau/2)$, отмеченной на рисунке крестиком.

Замечание. Пусть в уравнении (1)

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

а граничные условия (3), (4) имеют вид

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t).$$

Рассмотрим разностную схему

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h(\sigma u_i^k + (1 - \sigma)u_i^{k-1}) + \Phi(x_i, t_{k-\frac{1}{2}}), \quad i = \overline{1, N-1} \quad k = \overline{1, M}, \quad (17)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}, \quad (18)$$

$$u_0^k = \alpha(t_k), \quad u_N^k = \beta(t_k), \quad k = \overline{1, M}, \quad (19)$$

где свободный член

$$\Phi(x_i, t_{k-\frac{1}{2}}) = f_i^{k-\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{12} L_h f_i^{k-\frac{1}{2}} = \frac{5}{6} f_i^{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} (f_{i-1}^{k-\frac{1}{2}} + f_{i+1}^{k-\frac{1}{2}}), \quad t_{k-\frac{1}{2}} = t_k - \frac{\tau}{2}. \quad (20)$$

Пусть $C_n^m(\overline{D})$ — класс функций, имеющих n производных по x и m производных по t , непрерывных в $\overline{D} = [0, 1] \times [0, T]$.

Тогда, если $u \in C_6^3$, разностная схема (17)-(19) при $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(h^4 + \tau^2)$ ([7, гл. V, §1. п. 3]) и называется схемой повышенного порядка точности.

Упражнение. Какие предположения необходимо сделать о гладкости точного решения $u(x, t)$ и функции $p(x)$ для обеспечения объявленных порядков аппроксимации в рассматриваемых разностных схемах?

5.5. Задание

Найти решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0.1, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left(\alpha_1(t)u - \alpha_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1, \\ \left(\beta_1(t)u + \beta_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=1} &= \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1, \end{aligned}$$

используя различные разностные схемы

- явную схему порядка $O(h^2 + \tau)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- схему с весами при $\sigma = 0$, $\sigma = 1$, $\sigma = 1/2$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h)$.

По решению задачи должен быть представлен отчет, содержащий:

- 1) Алгоритм решения задачи.

- 2) Тестирование алгоритма на решениях, для которых разностная схема точно аппроксимирует дифференциальную задачу.
- 3) Тестирование алгоритма, например, на решениях $u(x, t) = x^3 + t^3$, $u(x, t) = x^3 * t^3$, $\sin(2t + 1) * \cos(2x)$, $\sin(2t + 1) + \cos(2x)$, на которых разностная схема неточно аппроксимирует дифференциальную задачу.
- 4) Таблицы решения на “крупной” сетке независимо от шагов по t и x , с которыми строится решение, следующего вида ($N = 5, 10, 20$)²:

Таблица 1

x/t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.02						
0.04						
0.06						
0.08						
0.1						

- 5) Таблицы, характеризующие точность решения и внутреннюю сходимость, следующего вида:

Явная схема

Таблица 2

h	τ	$\ J_{ex} - u^{(h, \tau)}\ $	$\ u^{(h, \tau)} - u^{(2h, \tau_1)}\ $
0.2			_____
0.1			
0.05			

Здесь τ , τ_1 выбираются из условия устойчивости явной схемы.

J_{ex} — точное решение.

$$\|V\| = \max |V_{ik}|, \quad i = \overline{0, 5}, \quad k = \overline{0, 5}.$$

Неявная схема

Таблица 3

h	τ	$\ J_{ex} - u^{(h, \tau)}\ $	$\ u^{(h, \tau)} - u^{(2h, \tau)}\ $
0.2			_____
0.1			
0.05			

Здесь $\tau = 0.1/M$, $M = 10, 100$ (предусмотреть возможность менять M).

Проанализировать результаты.

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть в приложении В.

²В качестве M следует брать наименьшее из чисел 5, 10, 20, 40, 80 и т. д., удовлетворяющее условию устойчивости при данном N .

5.6. Варианты задач

Свободные члены в уравнении, начальных и граничных условиях следует получать, подставляя точное решение, на котором тестируется задача.

Вариант 1

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - xu + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 3

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 4

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 5

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 6

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 7

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 8

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 9

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(0, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 10

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 11

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \cos(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 12

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 13

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 14

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 15

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) + 2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 16

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cos x u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 17

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

Вариант 18

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 0.1.\end{aligned}$$

6. Метод сеток для решения уравнения гиперболического типа

6.1. Постановка задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad f(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \psi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (3)$$

$$\alpha_1(t)u(0, t) - \alpha_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha(t), \quad (4)$$

$$\alpha_1(t)\alpha_2(t) \geq 0, \quad |\alpha_1(t)| + |\alpha_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\beta_1(t)u(1, t) + \beta_2(t)\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta(t), \quad (5)$$

$$\beta_1(t)\beta_2(t) \geq 0, \quad |\beta_1(t)| + |\beta_2(t)| > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где Lu может иметь один из двух видов

$$Lu = \begin{cases} \text{а) } a(x, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & a(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad a(x, t) \geq a_0 > 0, \\ \text{б) } \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u, & p(x) \in C_{[0,1]}^1, \quad p(x) \geq p_0 > 0, \quad 0 < x < 1, \\ b(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \in C_{[0,1] \times [0,T]}, \quad c(x, t) \leq 0. \end{cases}$$

Требуется найти в $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2), (3) и граничным условиям (4), (5).

6.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора разностным

Разобьём отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N$, $x_i = ih$, $i = \overline{0, N}$.
Разобьём отрезок $[0, T]$ на M равных частей. Обозначим $\tau = T/M$, $t_k = k\tau$, $k = \overline{0, M}$.
Построим сетку узлов (рис. 1) $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i, t_k), i = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}$.

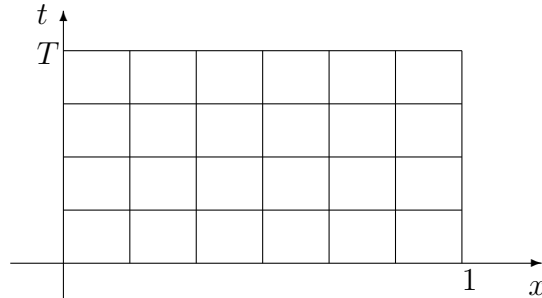


Рис. 1

Приближенное решение поставленной задачи ищется в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h\tau}}$. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k) сеточной функции $u^k = \{u_i^k\}$, определенной на слое k сеточной области $\overline{\omega_{h\tau}}$.

Используя аппроксимации дифференциальных выражений разностными, заменяем оператор L разностным оператором

$$L_h u_i^k = \begin{cases} \text{а) } a(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k, \\ \text{б) } p_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h^2} - p_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h^2} + b(x_i, t_k) \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} + c(x_i, t_k) u_i^k. \end{cases}$$

Здесь $L_h u_i^k$ — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный Lu в точке (x_i, t_k) со вторым порядком аппроксимации, $i = \overline{1, N-1}$, $k = \overline{1, M}$. Предполагается, что точное решение задачи и коэффициенты в операторе L достаточно гладкие, чтобы делать выводы о порядке аппроксимации.

6.3. Явная разностная схема

Аппроксимируем уравнение (1) в узле (x_i, t_k)

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = L_h u_i^k + f(x_i, t_k), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}. \quad (6)$$

Каждое уравнение в (6) содержит значения решения лишь в пяти точках u_i^{k-1} , u_{i-1}^k , u_i^k , u_{i+1}^k , u_i^{k+1} , причем в конфигурации, изображенной на рис. 2.

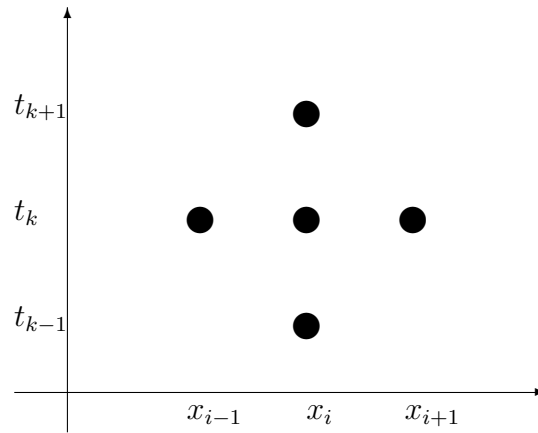


Рис. 2

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (7)$$

Начальное условие (3) аппроксимируем вначале с порядком $O(\tau)$ следующим образом:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (8)$$

Граничные условия (4), (5) аппроксимируем с порядком $O(h^2)$

$$\alpha_1(t_{k+1})u_0^{k+1} - \alpha_2(t_{k+1})\frac{-3u_0^{k+1} + 4u_1^{k+1} - u_2^{k+1}}{2h} = \alpha(t_{k+1}), \quad (9)$$

$$\beta_1(t_{k+1})u_N^{k+1} + \beta_2(t_{k+1})\frac{3u_N^{k+1} - 4u_{N-1}^{k+1} + u_{N-2}^{k+1}}{2h} = \beta(t_{k+1}), \quad (10)$$

$k = \overline{1, M-1}$.

Схема (6)-(10) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$.

Окончательно решение исходной задачи свелось к решению системы (6)-(10), причем, вычислив решение при $k = 0$ из (7), при $k = 1$ из (8), далее решение определяется последовательно по слоям во внутренних точках из (6), в граничных из (9), (10).

При очевидной простоте реализации явная разностная схема условно устойчива.

Обозначим

$$A = \begin{cases} \max\{a(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\} & \text{в случае а),} \\ \max\{p(x) \mid 0 \leq x \leq 1\} & \text{в случае б).} \end{cases}$$

Пусть $\nu = \frac{\tau}{h}$, тогда условие устойчивости имеет вид $\sqrt{A} \cdot \nu \leq 1$.

Следует заметить, что данное условие устойчивости справедливо только для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (11)$$

но оно может быть использовано и при $b(x, t) \neq 0$, $c(x, t) \neq 0$, принимающих “небольшие” значения.

Порядок вычисления решения

- 1) Из (7) находим u_i^0 , $i = \overline{0, N}$.
- 2) Из (8) находим u_i^1 , $i = \overline{0, N}$.
- 3) Из (6) находим $u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} + \tau^2(L_h u_i^k + f(x_i, t_k))$, $i = \overline{1, N-1}$ при $k = 1$.
- 4) Из (9) находим u_0^{k+1} при $k = 1$.
- 5) Из (10) находим u_N^{k+1} при $k = 1$.

Тем самым, решение при $k = 1$ найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 2 до тех пор, пока $k \leq M - 1$.

6.4. Схема с весами

Пусть σ — вещественный параметр.

Рассмотрим однопараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} = L_h(\sigma u_i^{k+1} + (1 - 2\sigma)u_i^k + \sigma u_i^{k-1}) + f(x_i, t_k), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (12)$$

Из начального условия (2) имеем

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (13)$$

Начальное условие (3) аппроксимируем вначале с порядком $O(\tau)$ следующим образом:

$$\frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = \psi(x_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (14)$$

Для упрощения алгоритма производные в краевых условиях (4), (5) аппроксимируем с первым порядком

$$\alpha_1(t_k)u_0^{k+1} - \alpha_2(t_{k+1})\frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h} = \alpha(t_{k+1}), \quad (15)$$

$$\beta_1(t_{k+1})u_N^{k+1} + \beta_2(t_{k+1})\frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h} = \beta(t_{k+1}). \quad (16)$$

Рассмотрим различные значения параметра σ .

1) $\sigma = 0$.

В этом случае разностная схема явная, условно устойчивая и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях (4), (5) не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$. Шаблон разностной схемы приведен на рис. 2. Порядок действий указан выше в п. 6.3.

2) Если $\sigma \neq 0$, то схема (12)-(16) называется неявной трехслойной схемой. Если $\sigma \neq 1/2$, то каждое уравнение в (12) содержит значения решения в девяти точках $u_{i-1}^{k-1}, u_i^{k-1}, u_{i+1}^{k-1}, u_{i-1}^k, u_i^k, u_{i+1}^k, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, u_{i+1}^{k+1}$, причем в конфигурации, изображенной на рис. 3.

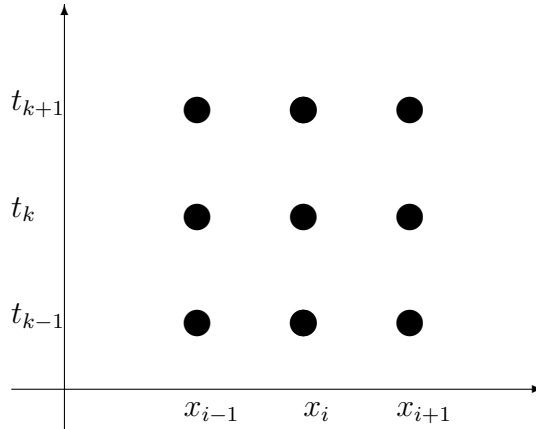


Рис. 3

Так как к моменту определения решения на $(k + 1)$ -ом слое решение на предыдущих слоях $(k - 1)$ и k уже известно, систему (12) перепишем следующим образом:

$$\sigma L_h u_i^{k+1} - \frac{1}{\tau^2} u_i^{k+1} = G_i^{k+1}, \quad (17)$$

где

$$G_i^{k+1} = \frac{-2u_i^k + u_i^{k-1}}{\tau^2} - (1 - 2\sigma)L_h u_i^k - \sigma L_h u_i^{k-1} - f(x_i, t_k), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (18)$$

$$k = \overline{1, M-1}.$$

Граничные условия (15), (16) приводим к виду

$$\begin{aligned} -B_0 u_0^{k+1} + C_0 u_1^{k+1} &= G_0^{k+1}, \\ A_N u_{N-1}^{k+1} - B_N u_N^{k+1} &= G_N^{k+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом $(k+1)$ -ом слое в данном случае приходится решать систему $(N+1)$ порядка с трехдиагональной матрицей следующего вида¹:

$$\begin{array}{ccc} -B_0 u_0^{k+1} & +C_0 u_1^{k+1} & = G_0^{k+1}, \\ A_i u_{i-1}^{k+1} & -B_i u_i^{k+1} & +C_i u_{i+1}^{k+1} = G_i^{k+1}, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ A_N u_{N-1}^{k+1} & -B_N u_N^{k+1} & = G_N^{k+1}, \end{array} \quad (19)$$

$$k = \overline{1, M-1}.$$

Для решения системы (19) следует использовать метод прогонки, рассмотренный в 1.4.

Порядок вычисления решения

- 1) Из (13) находим u_i^0 , $i = \overline{0, N}$.
- 2) Из (14) находим u_i^1 , $i = \overline{0, N}$.
- 3) Из (19) находим u_i^{k+1} , $i = \overline{0, N}$ при $k = 1$.

Тем самым, решение на втором слое найдено, увеличиваем k на единицу и переходим к пункту 3 до тех пор, пока $k \leq M-1$.

Рекомендуемые значения $\sigma = 1/2$, $\sigma = 1/4$.

При $\sigma = 1/2$ получаем неявную разностную схему с семиточечным шаблоном, изображенным на рис. 4.

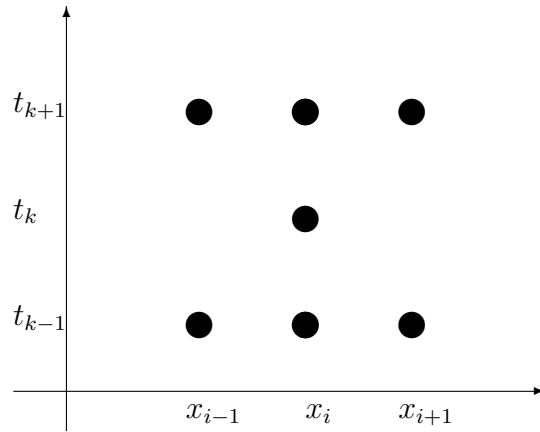


Рис. 4

¹Коэффициенты A , B , C в линейной системе (19) могут зависеть от номера слоя k , но для краткости верхний индекс $k+1$ здесь и далее опущен.

В этом случае разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h^2)$, если $\alpha_2(t) = 0$ и $\beta_2(t) = 0$. Если хотя бы один из коэффициентов при производных в граничных условиях (4), (5) не равен нулю, то порядок аппроксимации будет $O(\tau + h)$.

При $\sigma = 1/4$ получаем разностную схему с девятиточечным шаблоном, изображенным на рис. 3, устойчивую и имеющую тот же порядок аппроксимации.

Аппроксимация начального условия (3) с порядком $O(\tau^2)$

В рассмотренных выше схемах $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ в уравнении (1) аппроксимируется разностным выражением со вторым порядком по времени. В предыдущем рассмотрении начальное условие (3) аппроксимировалось лишь с первым порядком, т. е. итоговый порядок аппроксимации задачи (1)-(5) по времени был только первый.

Рассмотрим два варианта аппроксимации начального условия (3) со вторым порядком по времени. В обоих вариантах предполагаем, что решение может быть продолжено достаточно гладким образом за пределы области, указанной в (1) настолько, насколько это требуется используемым алгоритмом.

- 1) Используя разложение в ряд Тейлора, получим

$$u_i^1 = u_i^0 + \tau \psi(x_i) + \frac{\tau^2}{2} (L\varphi|_{x=x_i} + f(x_i, 0)). \quad (20)$$

Здесь

$$L\varphi = \begin{cases} \text{а) } a(x, 0) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + b(x, 0) \frac{d\varphi}{dx} + c(x, 0)\varphi, \\ \text{б) } \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) + b(x, 0) \frac{d\varphi}{dx} + c(x, 0)\varphi. \end{cases}$$

- 2) Второй способ связан со сдвигом сетки по переменной t . Он рассматривался при решении краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Упражнение. Какие предположения необходимо сделать о гладкости точного решения $u(x, t)$ и функции $p(x)$ для обеспечения объявленных порядков аппроксимации в рассматриваемых разностных схемах?

6.5. Задание

Найти решение задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 1,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\left(\alpha_1(t)u - \alpha_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x=0} = \alpha(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$\left(\beta_1(t)u + \beta_2(t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \bigg|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

используя различные разностные схемы

- явную схему порядка $O(h^2 + \tau)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- явную схему порядка $O(h^2 + \tau^2)$ с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h^2)$;
- схему с весами порядка $O(h + \tau)$ и $O(h + \tau^2)$ при $\sigma = 0$, $\sigma = 1/2$, $\sigma = 1/4$ (с аппроксимацией производных в граничных условиях с порядком $O(h)$).

По решению задачи должен быть представлен отчет, содержащий

- 1) Алгоритм решения задачи.
- 2) Тестирование алгоритма на решениях, для которых разностная схема точно аппроксимирует дифференциальную задачу.
- 3) Тестирование алгоритма, например, на решениях $u(x, t) = x^3 + t^3$, $u(x, t) = x^3 * t^3$, $\sin(2t + 1) * \cos(2x)$, $\sin(2t + 1) + \cos(2x)$, на которых разностная схема неточно аппроксимирует дифференциальную задачу.
- 4) Таблицы решения на «крупной» сетке независимо от шагов по t и x , с которыми строится решение, следующего вида $(N = 5, 10, 20)^2$:

Таблица 1

x/t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.2						
0.4						
0.6						
0.8						
1.0						

²В качестве M следует брать наименьшее из чисел 5, 10, 20, 40, 80 и т. д., удовлетворяющее условию устойчивости при данном N .

- 5) Таблицы, характеризующие точность решения и внутреннюю сходимость, следующего вида:

Явная схема

Таблица 2

h	τ	$\ J_{ex} - u^{(h,\tau)}\ $	$\ u^{(h,\tau)} - u^{(2h,\tau_1)}\ $
0.2			
0.1			
0.05			

Здесь τ, τ_1 выбираются из условия устойчивости явной схемы.

J_{ex} — точное решение.

$$\|V\| = \max |V_{ik}|, \quad i = \overline{0, 5}, k = \overline{0, 5}.$$

Неявная схема

Таблица 3

h	τ	$\ J_{ex} - u^{(h,\tau)}\ $	$\ u^{(h,\tau)} - u^{(2h,\tau)}\ $
0.2			
0.1			
0.05			

Здесь $\tau = 1/M, M = 10, 100$ (предусмотреть возможность менять M).

Проанализировать результаты.

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть в приложении В.

6.6. Варианты задач

Свободные члены в уравнении, начальных и граничных условиях следует получать, подставляя точное решение, на котором тестируется задача.

Вариант 1

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+3) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - xu + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Вариант 2

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 3

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 4

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 5

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 6

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 7

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 8

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 9

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(0, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 10

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 11

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \cos(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 12

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left((x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(1, t) + \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 13

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 14

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 15

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=1} = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

Вариант 16

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} &= \alpha(t), \quad u(1, t) = \beta(t), \quad 0 \leq t \leq 1.\end{aligned}$$

7. Применение дискретного ряда Фурье для решения методом сеток однородного уравнения теплопроводности. Спектральный признак устойчивости

7.1. Постановка задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (3)$$

Здесь для простоты

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Требуется найти в $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$ решение $u(x, t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (2) и граничным условиям (3).

7.2. Построение точного решения с использованием ряда Фурье

Ортонормированными собственными функциями задачи

$$v''(x) = \lambda v(x), \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0 \quad (5)$$

являются функции $\psi_p(x) = \sqrt{2} \sin(p\pi x)$. Собственные числа $\lambda_p = -p^2\pi^2$, $p \geq 1$.

Пусть $\varphi(x)$ представлена в виде ряда Фурье по функциям $\psi_p(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \psi_p(x), \quad \text{где} \quad c_p = \int_0^1 \varphi(x) \psi_p(x) dx. \quad (6)$$

Решение $u(x, t)$ задачи (1)-(3) находим также в виде ряда $u(x, t) = \sum_{p=1}^{\infty} T_p(t) \psi_p(x)$. После подстановки в уравнение теплопроводности получаем уравнения для $T_p(t)$

$$T'_p + \pi^2 p^2 T_p = 0, \quad T_p(0) = c_p. \quad (7)$$

Решение этой задачи Коши имеет вид

$$T_p(t) = c_p e^{-\pi^2 p^2 t}. \quad (8)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3) может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{\infty} c_p e^{-\pi^2 p^2 t} \sin(p\pi x). \quad (9)$$

Понятно, что, например, при $\varphi(x) = \sin(\pi x)$ лишь c_1 в разложении (9) будет отлично от нуля и $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

7.3. Представление решения в виде дискретного ряда Фурье (ДРФ)

Определим ряды Фурье для сеточных функций.

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N$ — длина частичного отрезка и точки разбиения $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Рассмотрим множество всех вещественных функций $v = \{v_i\}$, определенных в точках $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$; $Nh = 1$, обращающихся в нуль при $i = 0$ и $i = N$. Совокупность этих функций с обычными операциями сложения и умножения их на вещественные числа образует линейное пространство. Размерность этого пространства есть $N - 1$, поскольку система функций $\psi^{(p)} = \{\sqrt{2} \sin p\pi ih\}$, $p = 1, 2, \dots, N - 1$ образует ортонормальный базис в рассматриваемом пространстве, в котором скалярное произведение вводится следующим образом:

$$(v, \omega) = h \sum_{i=1}^{N-1} v_i \omega_i. \quad (10)$$

Множитель h здесь введен для согласования с непрерывным случаем. Если $v(x)$ и $\omega(x)$ — непрерывные функции на $[0, 1]$, то $(v, \omega) \rightarrow \int_0^1 v(x) \omega(x) dx$ при $N \rightarrow \infty$.

Любая сеточная функция $v = (v_0, v_1, \dots, v_N)$ разлагается по ортонормальному базису в сумму $v = \tilde{c}_1 \psi^{(1)} + \dots + \tilde{c}_{N-1} \psi^{(N-1)}$ или

$$v_i = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \sin p\pi ih, \quad (11)$$

где

$$\tilde{c}_p = (v, \psi^{(p)}) = \sqrt{2}h \sum_{i=1}^{N-1} v_i \sin p\pi ih. \quad (12)$$

Сумма (11) и есть разложение сеточной функции $v = \{v_i\}$ в дискретный ряд Фурье.

Итак, для построения решения в виде дискретного ряда Фурье надо вначале найти коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ в дискретный ряд Фурье по формулам

$$\tilde{c}_p = (\bar{\varphi}, \psi^{(p)}) = \sqrt{2}h \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\varphi}_i \sin p\pi ih. \quad (13)$$

Здесь $\bar{\varphi} = \{\bar{\varphi}_i\}$ — сеточная функция, где $\bar{\varphi}_i = \varphi(ih)$, $i = 0, \dots, N$.

Затем строится решение по формуле

$$u(x, t) \approx \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p e^{-\pi^2 p^2 t} \sin(p\pi x). \quad (14)$$

7.4. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений.

Аппроксимация дифференциального оператора разностным

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на N равных частей. Обозначим $h = 1/N$ — длина частичного разбиения и точки разбиения $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на M равных частей. Обозначим $\tau = \frac{T}{M}$, точки разбиения $t_k = k\tau$, $k = 0, \dots, M$.

Построим сетку узлов (рис. 1) $\overline{\omega_{h\tau}} = \{(x_i, t_k), i = \overline{0, N}; k = \overline{0, M}\}$.

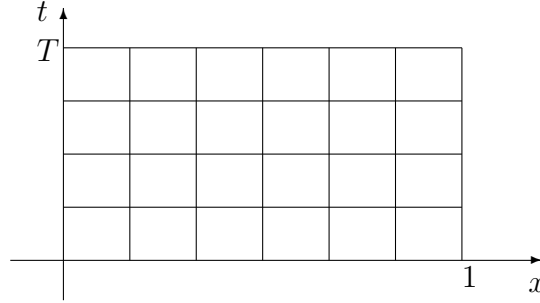


Рис. 1

Приближенное решение поставленной задачи (1)-(3) отыскивается в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h\tau}}$. Обозначим u_i^k — значение в узле (x_i, t_k) сеточной функции $u^k = \{u_i^k\}$, определенной на слое k сеточной области $\overline{\omega_{h\tau}}$.

Используя аппроксимацию дифференциального выражения разностным, заменяем оператор L разностным оператором

$$L_h u_i^k = \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, M. \quad (15)$$

Здесь $L_h u_i^k$ — разностный оператор, аппроксимирующий дифференциальный Lu в точке (x_i, t_k) со вторым порядком $(O(h^2))$ ¹.

В теории разностных схем установилась традиция, когда не делают различия между матрицей и порождаемым ею линейным оператором. Здесь через оператор L_h (матрицу) обозначен оператор, который функции v со значениями $v_0 = 0, v_1, \dots, v_{N-1}, v_N = 0$ в точках x_0, x_1, \dots, x_N ставит в соответствие функцию со значениями в тех же точках равными $0, L_h v_1, \dots, L_h v_{N-1}, 0$.

Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} L_h \sin p\pi i h &= \frac{1}{h^2} (\sin p\pi(i+1)h - 2\sin p\pi i h + \sin p\pi(i-1)h) = \\ &= \frac{2}{h^2} (\cos p\pi h - 1) \sin p\pi i h = \mu_p \sin p\pi i h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mu_p = -\frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}$.

Отсюда следует, что собственной функции оператора L_h $\psi^{(p)} = \{\sqrt{2} \sin p\pi i h\}$ соответствуют собственные значения μ_p .

7.5. Построение сеточного решения по явной схеме с использованием ДРФ. Спектральный признак устойчивости

Аппроксимируем уравнение (1) в точке (x_i, t_{k-1}) :

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h u_i^{k-1}, \quad i = 1, \dots, N-1; \quad k = 1, \dots, M. \quad (17)$$

¹Здесь и далее предполагается, что точное решение задачи достаточно гладкое, чтобы делать выводы о порядке аппроксимации.

Начальное и граничные условия выписываем следующим образом:

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, \dots, N. \quad (18)$$

$$u_0^k = u_N^k = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (19)$$

Схема (17)-(19) аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(h^2 + \tau)$.

Перепишем (17) следующим образом:

$$u_i^k = u_i^{k-1} + \tau L_h u_i^{k-1} = (E + \tau L_h) u_i^{k-1}. \quad (20)$$

Здесь E — тождественный оператор, так что $E u_i^{k-1} = u_i^{k-1}$.

Обозначим $S = (E + \tau L_h)$ — оператор (матрицу) перехода со слоя на слой, так что $u^k = S u^{k-1}$.

Относительно сеточных функций $u^k \equiv \{u_i^k\}$ аргумента i предполагается, что при каждом фиксированном k они принадлежат рассмотренному пространству, т. е. $u_0^k = u_N^k = 0$.

Матрица S — симметрическая и $\|S\|_2 = \max_p |\lambda_p|$, где

$$\lambda_p(S) = 1 + \tau \mu_p = 1 - 4 \frac{\tau}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}. \quad (21)$$

Выше было показано, что $u_i^0 = \varphi(ih)$ может быть представлена в виде дискретного ряда Фурье $u_i^0 = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \sin p\pi i h$, где $\tilde{c}_p = (\bar{\varphi}, \psi^{(p)}) = \sqrt{2} h \sum_{i=1}^{N-1} \bar{\varphi}_i \sin p\pi i h$. Здесь $\bar{\varphi} = \{\bar{\varphi}_i\}$ — сеточная функция, где $\bar{\varphi}_i = \varphi(ih)$, $i = 0, \dots, N$.

Поэтому $u_i^1 = S \left(\sum_{p=1}^{N-1} \sqrt{2} \tilde{c}_p \sin p\pi i h \right) = \sum_{p=1}^{N-1} \sqrt{2} \lambda_p(S) \tilde{c}_p \sin p\pi i h$.

Для выполнения условия устойчивости процесса построения сеточного решения требуется, чтобы

$$\max |\lambda_p| = \max \left| 1 - 4r \sin^2 \frac{p\pi h}{2} \right| \leq 1, \quad r = \frac{\tau}{h^2}. \quad (22)$$

Это неравенство выполнено в случае, если $r \leq \frac{1}{2}$.

Итак, приведем расчетные формулы для построения решения:

$$u_i^0 = \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \sqrt{2} \sin p\pi i h, \quad (23)$$

$$\tilde{c}_p = (\bar{\varphi}, \psi^{(p)}) = h \sum_{i=1}^{N-1} \varphi(ih) \sqrt{2} \sin p\pi i h, \quad (24)$$

$$u_i^k = \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \lambda_p^k \sqrt{2} \sin p\pi i h. \quad (25)$$

Решение (25) есть искомое представление решения задачи в виде дискретного ряда Фурье и будет удовлетворять заданному начальному условию $u_i^0 = \varphi(ih)$.

Заметим, что для дальнейших исследований требуется строить решение с помощью ДРФ лишь в точках крупной сетки. Для этой цели следует пользоваться формулой

$$u(x, t) = \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p \lambda_p^k \sqrt{2} \sin p\pi x. \quad (26)$$

Здесь k — номер слоя, соответствующего значению t , так что $t = k\tau$.

7.6. Построение сеточного решения по схеме с весами с использованием ДРФ. Спектральный признак устойчивости

Рассмотрим разностную схему более общего вида

$$\frac{u_i^k - u_i^{k-1}}{\tau} = L_h((1 - \sigma)u_i^{k-1} + \sigma u_i^k), \quad i = 1, \dots, N-1; \quad k = 1, \dots, M, \quad (27)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad i = 0, \dots, N, \quad (28)$$

$$u_0^k = u_N^k = 0, \quad k = 1, \dots, M. \quad (29)$$

для той же дифференциальной задачи (1)-(3). Здесь σ — параметр.

Схема (27)-(29) аппроксимирует исходную задачу с порядком

- $O(h^2 + \tau)$ при $\sigma = 0, 1$;
- $O(h^2 + \tau^2)$ при $\sigma = \frac{1}{2}$;
- $O(h^4 + \tau^2)$ при $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$ ².

Здесь матрица S^σ (оператор перехода со слоя на слой), очевидно, имеет вид

$$S^\sigma = (E - \sigma\tau L_h)^{-1}(E + (1 - \sigma)\tau L_h) \quad (30)$$

и собственные числа этой матрицы равны

$$\lambda_p^\sigma = \frac{1 + \tau(1 - \sigma)\mu_p}{1 - \tau\sigma\mu_p} \quad (31)$$

или

$$\lambda_p^\sigma = \frac{1 - \frac{4(1 - \sigma)\tau}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}}{1 + \frac{4\sigma\tau}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi h}{2}}, \quad p = 1, 2, \dots, N-1. \quad (32)$$

Решение в узле (x_i, t_k) следует строить по формуле

$$u_i^k = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p (\lambda_p^\sigma)^k \sin p\pi i h. \quad (33)$$

Формула (33) и есть искомое представление решения задачи в виде дискретного ряда Фурье.

Заметим еще раз, что для дальнейших исследований требуется строить решение с помощью ДРФ лишь в точках крупной сетки. Для этой цели следует пользоваться формулой

$$u(x, t) = \sqrt{2} \sum_{p=1}^{N-1} \tilde{c}_p (\lambda_p^\sigma)^k \sin p\pi x. \quad (34)$$

²При решении неоднородного уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t)$ свободный член в разностной схеме должен иметь вид $f_i^{k-1/2} + h^2 L_h f_i^{k-1/2} / 12$ ([7, гл. V, §1. п. 3]).

Здесь k — номер слоя, соответствующего значению t , так что $t = k\tau$.

Устойчивость процесса имеет место, если $\max |\lambda_p^\sigma| \leq 1$ или

$$|1 - 4(1 - \sigma)r \sin^2 \frac{p\pi h}{2}| \leq |1 + 4\sigma r \sin^2 \frac{p\pi h}{2}|, \quad r = \frac{\tau}{h^2}. \quad (35)$$

Очевидно, что при $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$ это неравенство выполняется, каково бы ни было h .

При $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ должно выполняться неравенство

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1 - 2\sigma)}. \quad (36)$$

Если $\sigma = 0$ ($\lambda_p^0 = \lambda_p$), то разностная схема превращается в уже рассмотренную выше явную разностную схему и для выполнения условия устойчивости при всех h нужно, чтобы $r \leq \frac{1}{2}$.

7.7. Задание

Для задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad T = 0.1, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \varphi(x) \in C_{[0,1]}, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T \end{aligned}$$

- 1) Построить аналитическое решение, используя ряд Фурье. Обозначим его uf . Количество слагаемых в ряде выбирается экспериментально, исходя из заданной точности. Решение при $t = 0$ строить из начального условия (2).
- 2) Построить аналитическое решение, используя дискретный ряд Фурье (ДРФ) при $N = 5, 10, 20$ ³. Обозначим его $uds f^{(N)}$.
- 3) Найти сеточное решение, используя ДРФ по схеме с весами при $N = 5, 10, 20$ для различных значений параметра σ .

Проанализировать результаты.

Программа должна содержать подпрограмму печати таблицы решения на “крупной” сетке независимо от шагов по t и x , с которыми строится решение, следующего вида:

Таблица 1

x/t	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
$T/5$						
$2T/5$						
$3T/5$						
$4T/5$						
T						

³Если решения должны различаться при разных N .

Представить следующие результаты:

- 1) Таблицу решения uf в точках “крупной” сетки в виде таблицы 1.
- 2) Привести $\|uf - udsf^{(N)}\| = \max |uf(x_i, t_k) - udsf^{(N)}(x_i, t_k)|$, $N = 5, 10, 20$.
Здесь \max выбирается по значениям модуля разности в точках “крупной” сетки, отмеченным в таблице 1.
- 3) Привести таблицу значений (Таблица 2) модуля разности uf^4 и приближенных сеточных решений $\|uf - \bar{u}\|$, где \bar{u} — приближенное решение, полученное указанным в первой графе методом.
 $\|uf - \bar{u}\| = \max |uf(x_i, t_k) - \bar{u}_i^k|$, здесь \max также выбирается по значениям модуля разности в точках “крупной” сетки.

Таблица 2

(h, τ)	(0.2, 0.02)	(0.1, 0.005)	(0.05, 0.00125)	(0.05, 0.005)
ДРФ $\sigma=0$				
ДРФ $\sigma=1$				
ДРФ $\sigma=1/2$				
ДРФ $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$				

Проанализировать результаты.

7.8. Варианты задач

- 1) $\varphi(x) = \sin(\pi x)$.
- 2) $\varphi(x) = \sin(2\pi x)$.
- 3) $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x(x-1)\right)$.
- 4) $\varphi(x) = x(1-x)$.
- 5) $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}x(x-1)\right)$.
- 6) $\varphi(x) = \sin(3\pi x)$.
- 7) $\varphi(x) = (x-1)\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)$.
- 8) $\varphi(x) = \sin(\pi x(x-1))$.
- 9) $\varphi(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)$.

⁴В качестве uf решения можно взять решение, полученное в п. 2 $udsf$ при $N = 20$.

$$10) \quad \varphi(x) = \sin(5\pi x) + x(x-1).$$

$$11) \quad \varphi(x) = 2 \sin(2\pi x) - \sin(3\pi x).$$

$$12) \quad \varphi(x) = \sin(4\pi x).$$

$$13) \quad \varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x(x-1)\right).$$

$$14) \quad \varphi(x) = x(1-x).$$

$$15) \quad \varphi(x) = \sin(3\pi x).$$

$$16) \quad \varphi(x) = (x-1) \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

$$17) \quad \varphi(x) = \sin(\pi x(x-1)).$$

$$18) \quad \varphi(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right).$$

$$19) \quad \varphi(x) = \sin(5\pi x) + x(x-1).$$

$$20) \quad \varphi(x) = 3 \sin(\pi x) - 0.5 \sin(2\pi x).$$

8. Разностные схемы для уравнений эллиптического типа. Итерационные методы решений сеточных уравнений

8.1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения

$$-Lu = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$u = \mu(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Пусть $\bar{G} = G \cup \Gamma = \{0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$ — прямоугольник, а

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Здесь $p(x, y)$, $q(x, y)$ — достаточно гладкие функции такие, что $0 < c_1 \leq p(x, y) \leq c_2$, $0 < d_1 \leq q(x, y) \leq d_2$, где c_1 , c_2 , d_1 , d_2 — постоянные.

8.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений

Разобьем отрезок $[0, l_x]$ на N равных частей. Обозначим $h_x = l_x/N$, $x_i = ih_x$, $0 \leq i \leq N$. Разобьем отрезок $[0, l_y]$ на M равных частей. Обозначим $h_y = l_y/M$, $y_j = jh_y$, $0 \leq j \leq M$. Построим сетку узлов (рис. 1)

$$\overline{\omega_{h_x h_y}} = \{(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M\}.$$

Узлы (x_i, y_j) , $1 \leq i \leq N-1$; $1 \leq j \leq M-1$ — внутренние, остальные, лежащие на границе прямоугольника, — граничные. Внутренний узел (x_i, y_j) будем называть приграничным, если хотя бы один из узлов (x_{i-1}, y_j) , (x_{i+1}, y_j) , (x_i, y_{j-1}) , (x_i, y_{j+1}) является граничным. Приграничные узлы отмечены на рисунке кружочками.

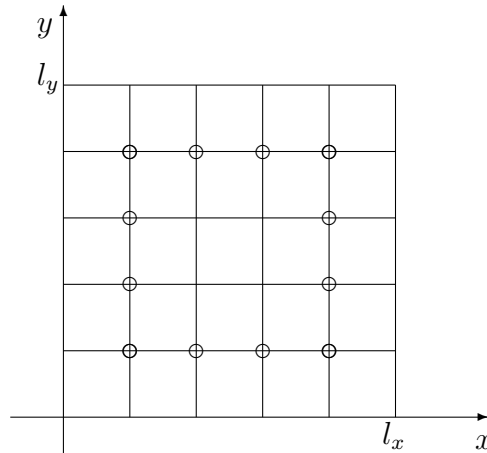


Рис. 1

8.3. Разностная аппроксимация задачи Дирихле

Обозначим $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$. Заменяем оператор L во всех внутренних узлах разностным оператором

$$L_h u_{ij} = p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_x^2} + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_y^2}, \quad (4)$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

Здесь использованы обозначения

$$p_{i+\frac{1}{2}j} = p(x_i + h_x/2, y_j), \quad p_{i-\frac{1}{2}j} = p(x_i - h_x/2, y_j), \\ q_{ij+\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j + h_y/2), \quad q_{ij-\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j - h_y/2).$$

Если $u(x, y)$ имеет не менее четырех непрерывных ограниченных в рассматриваемой области производных по x и по y , а $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — не менее трех, то разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный L со вторым порядком, т. е.

$$Lu - L_h u = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_x^2 + h_y^2.$$

Задаче (1), (2) ставим в соответствие разностную задачу: найти сеточную функцию, удовлетворяющую во внутренних узлах уравнениям

$$-L_h u_{ij} = f_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1, \quad f_{ij} = f(x_i, y_j) \quad (5)$$

и принимающую в граничных узлах заданные значения

$$\begin{cases} u_{i0} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{iM} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{0j} = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq M-1; \\ u_{Nj} = \mu(l_x, y_j), & 1 \leq j \leq M-1. \end{cases} \quad (6)$$

При достаточной гладкости функций $u(x, y)$, $p(x, y)$, $q(x, y)$ разностная схема (5), (6) имеет второй порядок точности. Для исследования разностного оператора этой задачи следует в приграничных уравнениях исключить неизвестные u_{0j} , u_{Nxj} , $1 \leq j \leq M-1$ и u_{i0} , u_{iN} , $1 \leq i \leq N-1$. Итак, решение задачи (1), (2) свелось к решению линейной системы порядка $(N-1) \cdot (M-1)$. Линейную систему запишем в виде

$$AU = F, \quad (7)$$

где $U = (u_{1,1}, \dots, u_{1,M-1}, \dots, u_{N-1,1}, \dots, u_{N-1,M-1})^T$, а вектор F отличается от вектора f в (5) лишь в приграничных узлах.

Отметим следующие особенности матрицы системы A :

- собственные числа матрицы находятся в диапазоне $[\delta, \Delta]$, где

$$\delta = c_1 \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2l_x} + d_1 \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}, \quad \Delta = c_2 \frac{4}{h_x^2} \cos^2 \frac{\pi h_x}{2l_x} + d_2 \frac{4}{h_y^2} \cos^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}. \quad (8)$$

Заметим, что при $p(x, y) \equiv 1$, $q(x, y) \equiv 1$, $l_x = l_y = 1$, $h_x = h_y = h$ (такую задачу в дальнейшем будем называть простейшей)

$$\delta = \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2};$$

- положительную определенность;
- плохую обусловленность, т. е. отношение максимального собственного числа матрицы к минимальному очень велико и является величиной $O(1/h^2)$;
- большой порядок;
- большое количество нулевых элементов;
- специфическую ленточную структуру — блочный трехдиагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} C & I & O & \dots & O \\ I & C & I & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & \dots & I & C & I \\ O & \dots & O & I & C \end{pmatrix},$$

где матрица C является трехдиагональной, I — диагональной, O имеет лишь нулевые элементы.

Пусть $p(x, y) \equiv 1$, $q(x, y) \equiv 1$, $h_x = h_y = h$, тогда

$$C = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad I = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы могут быть использованы, например, следующие методы:

- 1) Метод простой итерации.
- 2) Метод итерации с оптимальным параметром.
- 3) Метод Зейделя.
- 4) Метод верхней релаксации.
- 5) Итерационный метод с чебышевским набором параметров.
- 6) Попеременно треугольный итерационный метод.
- 7) Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров.
- 8) Итерационный метод переменных направлений.
- 9) Метод покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.
- 10) Метод расщепления предиктор-корректор.
- 11) Метод переменных направлений Дугласа-Рэкфорда.

8.4. Расчетные формулы методов

Заметим, что, как видно будет ниже, в расчетных формулах методов нигде не используются элементы матрицы A , поэтому при численной реализации алгоритма строить матрицу A , хранить её в памяти как двумерный массив большого порядка было бы крайне нецелесообразно.

8.4.1. Метод простой итерации

Систему $AU = F$ сводим к системе вида $U = HU + g$ так, чтобы $\rho(H) < 1$, где $\rho(H)$ — максимальное по модулю собственное число матрицы H (спектральный радиус матрицы). Пусть $H = E - D^{-1}A$, $g = D^{-1}F$, где D — диагональная часть матрицы A . В простейшем случае система примет следующий вид:

$$u_{ij} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (9)$$

Расчетная формула метода итерации $U^k = HU^{k-1} + g$ или в простейшем случае покомпонентно имеет следующий вид:

$$u_{ij}^k = \frac{u_{i-1j}^{k-1} + u_{i+1j}^{k-1} + u_{ij-1}^{k-1} + u_{ij+1}^{k-1} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (10)$$

Расчетная формула метода простой итерации в общем случае имеет вид

$$u_{ij}^k = \frac{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j} u_{i-1j}^{k-1}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j} u_{i+1j}^{k-1}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}} u_{ij-1}^{k-1}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}} u_{ij+1}^{k-1}}{h_y^2} + f_{ij}}{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}}}{h_y^2}}, \quad (11)$$

где $1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1$.

Необходимое и достаточное условие сходимости метода $\rho(H) < 1$ выполнено. Это легко показать в простейшем случае, т. е. при

$$\begin{aligned} p(x, y) &\equiv 1, \quad q(x, y) \equiv 1, \quad l_x = l_y = 1, \quad h_x = h_y = h \\ \lambda_{\max}(H) &= 1 - \frac{h^2}{4} \lambda_{\min}(A) = 1 - \frac{h^2}{4} \frac{8}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi h}{2} = \cos \pi h, \\ \lambda_{\min}(H) &= 1 - \frac{h^2}{4} \lambda_{\max}(A) = 1 - \frac{h^2}{4} \frac{8}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi h}{2} = -\cos \pi h. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что в простейшем случае $\lambda_{\max}(H) = -\lambda_{\min}(H)$.

Скорость сходимости метода определяется спектральным радиусом $\rho(H)$.

Ввиду того, что $\rho(H) = 1 - O(h^2)$, при уменьшении шага сетки h сходимость замедляется, и близость двух соседних приближений (характеристика 5.6 в п. 8.7), часто ошибочно воспринимаемая за признак хорошей точности, говорит лишь о медленной сходимости метода.

В качестве апостериорной оценки погрешности здесь часто допустимо использовать следующую:

$$\|U^k - u^*\| \leq \frac{\rho(H)}{1 - \rho(H)} \|U^k - U^{k-1}\|. \quad (12)$$

В общем случае в методе с оптимальным параметром $\rho(H) = \frac{\Delta - \delta}{\Delta + \delta}$ или $\rho(H) = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$, где $\xi = \frac{\delta}{\Delta}$.

8.4.2. Метод итерации с оптимальным параметром

Как известно, указанному условию сходимости ($\rho(H) < 1$) будет удовлетворять система вида $U = U + \tau(F - AU)$, где $\tau = 2/(\Delta + \delta)$, т. е. при $H = E - \tau A$, $g = \tau F$, τ — оптимальный параметр. Для простейшего случая $\tau = h^2/4$ и система будет иметь следующий вид:

$$u_{ij} = \frac{u_{i-1j} + u_{i+1j} + u_{ij-1} + u_{ij+1} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (13)$$

В простейшем случае метод итерации с оптимальным параметром совпадает с методом простой итерации.

В общем случае расчетная формула метода итерации с оптимальным параметром имеет вид

$$u_{ij}^k = u_{ij}^{k-1} + \tau \left(p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{i-1j}^{k-1}}{h_x^2} + \right. \\ \left. + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{ij-1}^{k-1}}{h_y^2} + f_{ij} \right). \quad (14)$$

8.4.3. Метод Зейделя (Некрасова)

Известно, что если матрица A положительно определена, то метод Некрасова для системы $AU = F$ сходится (см. [8], гл. III, §33), причем в простейшем случае вдвое быстрее, чем метод простой итерации (см. [8], гл. III, §36), т. е. характеристика 5.8 в п. 8.7 сходится к $\rho^2(H)$.

Расчетная формула метода Зейделя в простейшем случае имеет вид

$$u_{ij}^k = \frac{u_{i-1j}^{k-1} + u_{i+1j}^{k-1} + u_{ij-1}^{k-1} + u_{ij+1}^{k-1} + h^2 f_{ij}}{4}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (15)$$

В общем случае расчетная формула примет вид

$$u_{ij}^k = \frac{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j} u_{i-1j}^{k-1}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j} u_{i+1j}^{k-1}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}} u_{ij-1}^{k-1}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}} u_{ij+1}^{k-1}}{h_y^2} + f_{ij}}{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}}}{h_y^2}}, \quad (16)$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

8.5. Двухслойные итерационные схемы

Рассмотрим каноническую форму двухслойной итерационной схемы

$$B_k \frac{U^k - U^{k-1}}{\tau_k} + AU^{k-1} = F, \quad (17)$$

откуда

$$U^k = U^{k-1} - \tau_k B_k^{-1} (AU^{k-1} - F)$$

или

$$U^k = U^{k-1} - \tau_k B_k^{-1} r^{k-1}, \quad (18)$$

где $r^{k-1} = AU^{k-1} - F$ — невязка U^{k-1} .

Расчетные формулы метода простой итерации, метода итерации с оптимальным параметром и метода Зейделя, рассмотренные выше, а также метода верхней релаксации, метода с оптимальным чебышевским набором параметров, попеременно треугольного итерационного метода могут быть получены как частные случаи из (18).

Метод простой итерации

Полагаем в (18) $B_k = D$, где D диагональная часть матрицы A , $\tau_k = 1$. После приведения подобных членов получим (11).

Метод итерации с оптимальным параметром

Полагаем в (18) $B_k = E$, $\tau_k = \tau_{opt} = \frac{2}{\Delta + \delta}$ и получаем расчетную формулу метода (14).

Метод Зейделя

Полагаем в (18) $B = L + D$, где L и D нижняя треугольная и диагональная части матрицы A , $\tau_k = 1$. После приведения подобных членов получим (16).

8.5.1. Метод верхней релаксации

Полагаем в (18) $B = \omega L + D$, где L и D нижняя треугольная и диагональная части матрицы A , $\tau_k = \omega$. В общем случае расчетная формула примет вид

$$u_{ij}^k = u_{ij}^{k-1} + \omega \frac{f_{ij} + p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{i-1j}^{k-1}}{h_x^2} + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{ij-1}^{k-1}}{h_y^2}}{\frac{p_{i-\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}j}}{h_x^2} + \frac{q_{ij-\frac{1}{2}}}{h_y^2} + \frac{q_{ij+\frac{1}{2}}}{h_y^2}}, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1. \quad (19)$$

В простейшем случае

$$u_{ij}^k = u_{ij}^{k-1} + \omega \frac{h^2 f_{ij} + u_{i-1j}^k + u_{i+1j}^{k-1} + u_{ij-1}^k + u_{ij+1}^{k-1} - 4u_{ij}^{k-1}}{4}, \quad (20)$$

$$1 \leq i \leq N-1; \quad 1 \leq j \leq M-1.$$

Метод будет сходиться, если матрица A симметрическая, положительно определенная и кроме того $0 < \omega < 2$.

Быстрота сходимости релаксационного циклического процесса определяется наибольшим модулем собственных значений матрицы $S_\omega = (D + \omega L)^{-1}(D - \omega D - \omega R)$, где D , L и R диагональная, поддиагональная и наддиагональная части матрицы A . Оптимальным значением ω является

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(H)}}. \quad (21)$$

Тогда спектральный радиус матрицы $S_{\omega_{opt}}$ будет равен $\omega_{opt} - 1$ (см. [8], гл. III, §36). Если же $\rho(H)$ неизвестно, ω_{opt} определяют экспериментально. Определив ω_{opt} на крупной сетке, можно приближенно получить его значение на других сетках, используя тот

факт, что $\omega_{\text{опт}} \approx 2 - Ch$, где постоянная C не зависит от шага сетки. Затем уточнить. В численных результатах следует привести значение $\omega_{\text{опт}}$ и убедиться, что оно является оптимальным, т. е. реализовать алгоритм, например, с $\omega_1 = \omega_{\text{опт}} - 0.1$ и $\omega_2 = \omega_{\text{опт}} + 0.1$. Сравнить результаты. Для простейшей задачи

$$\omega_{\text{опт}} = \frac{2}{1 + \sin(\pi h)}, \quad \rho(S_{\omega_{\text{опт}}}) = \frac{1 - \sin(\pi h)}{1 + \sin(\pi h)} \approx 1 - 2\pi h.$$

8.5.2. Метод с чебышевским набором параметров

Этот метод (см. [7], гл. X, §2, п.3) может быть применен, если матрица A симметрическая и положительно определенная. Пусть $0 < \delta \leq \lambda(A) \leq \Delta$. Полагаем в (18) $B = E$,

$$\tau_k = \frac{2}{\Delta + \delta + (\Delta - \delta) \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

В общем случае расчетная формула метода с чебышевским набором параметров имеет вид

$$u_{ij}^k = u_{ij}^{k-1} + \tau_k \left(p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{i-1j}^{k-1}}{h_x^2} + \right. \\ \left. + q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1}^{k-1} - u_{ij}^{k-1}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij}^{k-1} - u_{ij-1}^{k-1}}{h_y^2} + f_{ij} \right). \quad (23)$$

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом. Для упорядочения итерационных параметров надо построить последовательность нечетных чисел $\Theta_n = \{\Theta_n(1), \Theta_n(2), \dots, \Theta_n(n)\}$, таких что $1 \leq \Theta_n(i) \leq 2n - 1$, и параметры τ_k вычислять по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{\Delta + \delta + (\Delta - \delta) \sigma_k}, \quad \sigma_k = \cos \frac{\theta_n k}{2n} \pi, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (24)$$

Рассмотрим способ упорядочения Θ_n для случая, когда n есть степень двойки $n = 2^p$, $p > 0$. Считая, что $\Theta_1 = \{1\}$, поэтапно вычисляются $\Theta_2, \Theta_4, \dots, \Theta_{2^p}$ следующим образом: $\Theta_{2m}(2i - 1) = \Theta_m(i)$, $\Theta_{2m}(2i) = 4m - \Theta_{2m}(2i - 1)$, $1 \leq i \leq m$; $1 \leq m \leq 2^p - 1$, так что $\Theta_2 = \{1, 3\}$, $\Theta_4 = \{1, 7, 3, 5\}$, $\Theta_8 = \{1, 15, 7, 9, 3, 13, 5, 11\}$, $\Theta_{16} = \{1, 31, 15, 17, 7, 25, 9, 23, 3, 29, 13, 19, 5, 27, 11, 21\}$ (см. [7], гл. X, §2, п.7).

8.5.3. Попеременно-треугольный итерационный метод

Представим ([7], гл. X, §3) матрицу A в виде суммы двух треугольных матриц R и R^T

$$R + R^T = A, \quad R^* = R^T. \quad (25)$$

Определим матрицу R по правилу

$$r_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i > j; \\ 0.5a_{ij}, & i = j; \\ 0, & i < j, \end{cases} \quad (26)$$

так что R, R^T — соответственно нижняя и верхняя треугольные матрицы, причем их диагонали совпадают.

Полагаем в (17) $B_k = B = (E + \omega R)(E + \omega R^T)$ (B — самосопряженная положительно-определенная матрица), $\tau_k = \tau$. Параметры ω , τ выбираются из условия наилучшей сходимости метода.

Пусть известны константы

$$\delta = c_1 \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2l_x} + d_1 \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}, \quad \Delta = c_2 \frac{4}{h_x^2} + d_2 \frac{4}{h_y^2}, \quad (27)$$

такие что

$$\delta E \leq A, \quad RR^T \leq \frac{\Delta}{4} A. \quad (28)$$

Обозначим $\eta = \delta/\Delta$.

Далее из оценки $\gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$ параметр ω выбирается так, чтобы $\xi = \gamma_1(\omega)/\gamma_2(\omega)$ имело наибольшее значение, так как скорость сходимости определяется величиной $\rho = (1 - \xi)/(1 + \xi)$.

Таким образом, получаем

$$\omega = 2/\sqrt{\delta\Delta}, \quad \gamma_1 = \frac{\delta}{(2 + 2\sqrt{\eta})}, \quad \gamma_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}, \quad \tau = 2/(\gamma_1 + \gamma_2). \quad (29)$$

В простейшей задаче

$$\delta = \frac{8}{h^2} \sin^2 \pi \frac{h}{2}, \quad \Delta = \frac{8}{h^2}, \quad \eta = \sin^2 \pi \frac{h}{2}, \quad \omega = \frac{h^2}{4 \sin \pi \frac{h}{2}}, \quad (30)$$

$$\gamma_1 = \frac{4 \sin^2 \pi \frac{h}{2}}{h^2 \left(1 + \sin \pi \frac{h}{2}\right)}, \quad \gamma_2 = \frac{2}{h^2} \sin \pi \frac{h}{2}, \quad \tau = \frac{h^2 \left(1 + \sin \pi \frac{h}{2}\right)}{\sin \pi \frac{h}{2} \left(1 + 3 \sin \pi \frac{h}{2}\right)}. \quad (31)$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи.

Из уравнения

$$(E + \omega R)(E + \omega R^T) \frac{U^k - U^{k-1}}{\tau} + AU^{k-1} = F, \quad k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

при заданном U^0 видно, что для определения U^k надо решить уравнение

$$(E + \omega R)(E + \omega R^T)U^k = F^{k-1}, \quad (33)$$

где

$$F^{k-1} = BU^{k-1} - \tau(AU^{k-1} - F) = BU^{k-1} + \tau(L_h u^{k-1} + f). \quad (34)$$

Здесь $U^k = U^{k-1} = 0$ в узлах сетки, лежащих на границе области (обозначим их $\gamma_{h_x h_y}^1$), а $u^{k-1} = U^{k-1}$ во внутренних точках сеточной области $\omega_{h_x h_y}$ и принимает заданные значения на $\gamma_{h_x h_y}$.

Решением задачи (33) является функция U^k , а далее строится u^k , определенная на $\overline{\omega_{h_x h_y}}$: $u^k = U^k$ на $\omega_{h_x h_y}$, $u^k = \mu$ на $\gamma_{h_x h_y}$.

¹ $\overline{\omega_{h_x h_y}} = \omega_{h_x h_y} \cup \gamma_{h_x h_y}$.

Вычисление U^k сводится к последовательному решению двух задач

$$(E + \omega R)\bar{U} = F^{k-1}, \quad (E + \omega R^T)U^k = \bar{U} \quad (35)$$

с нижней и верхней треугольными матрицами. Отсюда и следует название метода — попеременно-треугольный (ПТМ).

Приведем расчетные формулы метода для $p(x, y) \equiv 1$, $q(x, y) \equiv 1$. В этом случае

$$RU_{ij} = \frac{U_{ij} - U_{i-1j}}{h_x^2} + \frac{U_{ij} - U_{ij-1}}{h_y^2} = \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) U_{ij} - \left(\frac{1}{h_x^2} U_{i-1j} + \frac{1}{h_y^2} U_{ij-1} \right), \quad (36)$$

$$R^T U_{ij} = -\frac{U_{i+1j} - U_{ij}}{h_x^2} - \frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{h_y^2} = \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) U_{ij} - \left(\frac{1}{h_x^2} U_{i+1j} + \frac{1}{h_y^2} U_{ij+1} \right). \quad (37)$$

Обозначим $\kappa_1 = \omega/h_x^2$, $\kappa_2 = \omega/h_y^2$. Тогда, подставляя выражения для R , R^T в (35), получаем для определения значений \bar{U} , U^k в простейшем случае рекуррентные формулы

$$\bar{U}_{ij} = \frac{\kappa_1 \bar{U}_{i-1j} + \kappa_2 \bar{U}_{ij-1} + F_{ij}^{k-1}}{1 + \kappa_1 + \kappa_2}, \quad i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, M-1; \quad \bar{U}|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (38)$$

$$U_{ij}^k = \frac{\kappa_1 U_{i+1j}^k + \kappa_2 U_{ij+1}^k + \bar{U}_{ij}}{1 + \kappa_1 + \kappa_2}, \quad i = N-1, \dots, 1, j = M-1, \dots, 1; \quad U^k|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0. \quad (39)$$

В общем случае, исходя из аппроксимации (4), эти формулы будут выглядеть следующим образом:

$$\bar{U}_{ij} = \frac{\kappa_1 p_{i-\frac{1}{2}j} \bar{U}_{i-1j} + \kappa_2 q_{ij-\frac{1}{2}} \bar{U}_{ij-1} + F_{ij}^{k-1}}{1 + \kappa_1 p_{i-\frac{1}{2}j} + \kappa_2 q_{ij-\frac{1}{2}}}, \quad i = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, M-1; \quad \bar{U}|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (40)$$

$$U_{ij}^k = \frac{\kappa_1 p_{i+\frac{1}{2}j} U_{i+1j}^k + \kappa_2 q_{ij+\frac{1}{2}} U_{ij+1}^k + \bar{U}_{ij}}{1 + \kappa_1 p_{i+\frac{1}{2}j} + \kappa_2 q_{ij+\frac{1}{2}}}, \quad i = N-1, \dots, 1, j = M-1, \dots, 1; \quad U^k|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0. \quad (41)$$

Как было сказано выше, $u_{ij}^k = U_{ij}^k$ на $\omega_{h_x h_y}$, $u^k = \mu$ на границе области $\gamma_{h_x h_y}$

$$\begin{cases} u_{i0}^k = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{iM}^k = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N; \\ u_{0j}^k = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq M-1; \\ u_{Nj}^k = \mu(l_x, y_j), & 1 \leq j \leq M-1. \end{cases} \quad (42)$$

Метод устойчив.

Учитывая вид правой части (34), можно уменьшить количество операций, требуемых для вычисления решения U^k . Для этого используется алгоритм

$$(E + \omega R)\bar{w} = \Phi^{k-1}, \quad \bar{w}|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (43)$$

$$\Phi^{k-1} = L_h u^{k-1} + f, \quad u^{k-1}|_{\gamma_{h_x h_y}} = \mu, \quad (44)$$

$$(E + \omega R^T)w^k = \bar{w}, \quad w^k|_{\gamma_{h_x h_y}} = 0, \quad (45)$$

$$U^k = U^{k-1} + \tau w^k. \quad (46)$$

Для вычисления \bar{w} , w^k естественно использовать формулы, аналогичные (38), (39) в простейшем случае или, в общем случае, (40), (41).

Далее, как было уже сказано, находим $u_{ij}^k = U_{ij}^k$ на $\omega_{h_x h_y}$, $u^k = \mu$ на $\gamma_{h_x h_y}$.

Заметим, что при реализации этого алгоритма используется еще один массив w^k .

Для числа итераций имеем оценку

$$m \geq \frac{\ln \varepsilon^{-1}}{\ln \rho^{-1}}. \quad (47)$$

В простейшем случае $m \geq \frac{\ln \varepsilon^{-1}}{2\pi h}$ при малых $h \ll 1$.

8.5.4. Попеременно-треугольный итерационный метод с чебышевским набором параметров

В этом методе мы также как и в предыдущем, полагаем в (17)

$$B_k = B = (E + \omega R)(E + \omega R^T), \quad (48)$$

но параметр τ_k — переменный и при заданном числе итераций n вычисляется по формуле

$$\tau_k = \frac{2}{\gamma_2 + \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (49)$$

Для устойчивости процесса итерационные параметры должны быть упорядочены специальным образом, как и в 8.5.2.

В остальном алгоритм остается прежним, расчетные формулы приведены в 8.5.3. Для числа итераций имеем оценку $m \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta}}$.

В простейшем случае $m \geq \frac{0.29}{\sqrt{h}} \ln \frac{2}{\varepsilon}$ при малых $h \ll 1$.

8.6. Выбор точности

Разностная схема (5), (6) аппроксимирует исходную задачу (1), (2) со вторым порядком относительно шага сетки. Заданная точность приближенного решения должна быть согласована с порядком аппроксимации. Обычно судят о точности решения по его относительной погрешности $\|U^k - u^*\|/\|U^0 - u^*\|$ или, так как точное решение u^* неизвестно, по величине относительной невязки $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданная относительная погрешность, с которой надо найти приближенное решение задачи (1), (2). Вычисления прекращают, если выполнено условие $\frac{\|U^m - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$ или $\frac{\|AU^m - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$. Можно получить, что

- для метода итераций $m \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{2\xi}$, в простейшем случае $m \geq 2 \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)^2}$;
- для метода Зейделя $m \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{4\xi}$, в простейшем случае $m \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)^2}$;
- для метода верхней релаксации $m \geq \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\sqrt{\xi}}$, в простейшем случае $m \geq 2 \frac{\ln(1/\varepsilon)}{(\pi h)}$;

- для метода с оптимальным чебышевским набором параметров, $m \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}}$ для простейшей задачи $m \geq \frac{\ln(2/\varepsilon)}{(\pi h)}$.

В качестве критерия конца вычислений может быть выбран один из следующих:

- а) $\|U^k - u^*\| < \varepsilon$. Если u^* неизвестно, но известно $\rho(H)$, часто допустимо использовать оценку

$$\|U^k - u^*\| \leq \frac{\rho(H)}{1 - \rho(H)} \|U^k - U^{k-1}\|. \quad (50)$$

б) $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$.

в) $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$.

- г) выполнить вычисленное заранее количество итераций m , требуемое для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз.

Замечание 1. Следует иметь в виду, что в методе с оптимальным чебышевским набором параметров количество выполняемых итераций должно быть кратно n , используемому в (22) для вычисления параметров.

8.7. Задание

Найти решение поставленной задачи

- методом простой итерации или методом итерации с оптимальным параметром (указывается преподавателем);
- методом Зейделя;
- одним из методов 4, 5 (указывается преподавателем);
- одним из методов 6, 7 (указывается преподавателем);
- одним из методов 8-11 (указывается преподавателем)².

Алгоритмы решения задачи численно реализовать по программе на алгоритмическом языке.

Желательно отлаживать программу на модельной задаче, т. е. такой, точное решение которой известно.

Требуется получить приближенное решение задачи на сгущающихся сетках при $N = 5, 10, 20$. Ввиду того, что в некоторых случаях может оказаться проблематичным получить решение с заданной точностью ε , независимо от используемого критерия конца вычислений, во избежание заикливания, следует поставить ограничение на количество выполняемых итераций. Обозначим его, например k_{\max} .

В отладочном варианте достаточно взять, например, $k_{\max} = 5$, далее $k_{\max} = m$, вычисленное в 8.6.

²Алгоритм метода переменных направлений рассматривается в теме 9. Разностные схемы других методов установления изложены в [6] и [9].

В качестве нулевого приближения U^0 можно взять, например, вектор с нулевыми компонентами значений решения во внутренних узлах сетки.

На печать должны выводиться следующие характеристики:

- 1) Мера аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой на точном решении³ $\|F - Au^*\|$. Здесь и в дальнейшем используется сеточный аналог нормы в C

$$\|V\|_C = \max_{\substack{1 \leq i \leq N-1, \\ 1 \leq j \leq M-1}} |v_{ij}|,$$

так что в данном случае

$$\|F - Au^*\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N-1, \\ 1 \leq j \leq M-1}} |L_h u_{ij}^* + f_{ij}|. \quad (51)$$

- 2) Норма невязки нулевого приближения $\|F - AU^0\|$.
- 3) Оценка количества итераций, требуемых для выполнения условия $\frac{\|U^m - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$ или $\frac{\|AU^m - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$ при заданном ε (0.05 - 0.001).
- 4) Спектральный радиус матрицы перехода или его оценка для задачи с переменными коэффициентами. Сравнить с экспериментальными данными (для методов 1-4).
- 5) Характеристики вычисленного в цикле с параметром k приближенного решения U^k (Таблица 1)

Таблица 1

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8
k	$\ F - AU^k\ $	rel.d.	$\ U^k - u^*\ $	rel.error	$\ U^k - U^{k-1}\ $	apost.est.	$\bar{\rho}_k$
1							—
2							
...							

Здесь

5.1 — номер итерации;

5.2 — норма невязки k -ого приближения;

5.3 — относительная невязка k -ого приближения $\frac{\|F - AU^k\|}{\|F - AU^0\|}$;

5.4 — норма абсолютной погрешности k -ого приближения;

5.5 — относительная погрешность k -ого приближения $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|}$;

5.6 — норма разности двух соседних приближений;

5.7 — оценка погрешности k -ого приближения $\frac{\rho(H)\|U^k - U^{k-1}\|}{1 - \rho(H)}$ (для методов 1-4);

5.8 — k -ое приближение к спектральному радиусу матрицы H (матрицы перехода от U^{k-1} к U^k , т. е. такой, что $U^k = HU^{k-1} + g$) (для методов 1-4).

³Если точное решение неизвестно, характеристики, зависящие от точного решения, опускаются.

Указание

Обозначим $\rho_k = \frac{\|U^k - U^{k-1}\|}{\|U^{k-1} - U^{k-2}\|}$, тогда

$$\overline{\rho_k} = \begin{cases} \sqrt{\rho_k \rho_{k-1}}, & \lambda_{\max}(H) = -\lambda_{\min}(H), \\ \rho_k, & \lambda_{\max}(H) \neq -\lambda_{\min}(H). \end{cases}$$

В отладочном варианте ($N = 5$, $M = 5$, $k_{\max} = 5$) информацию о решении следует печатать на каждой итерации. При больших значениях k_{\max} информацию следует печатать лишь при некоторых значениях k , например, при k кратных 10 (это значение удобнее задавать константой с именем, например pk , чтобы иметь возможность легко менять его по мере необходимости).

- 6) Решение U^m или $U^{k_{\max}}$ на “крупной” сетке. “Крупной” будем называть сетку при $N = 5$, $M = 5$ и, независимо от значений N и M , приближенное решение должно печататься только в точках этой сетки, например при $l_x = l_y = 1$ должна быть выведена таблица со значениями решения U^m или $U^{k_{\max}}$ следующего вида:

Таблица 2

$y \setminus x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.2						
0.4						
0.6						
0.8						
1						

- 7) Таблица точного решения на “крупной” сетке.

Проанализировать полученные результаты.

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть в приложении Г.

8.8. Варианты заданий

В некоторых вариантах не указаны конкретные выражения для правых частей уравнения и граничных условий. В этих случаях их рекомендуется получить, используя предлагаемое точное решение задачи, то есть $f(x, y) = -L(u^*(x, y))$, $\mu(x, y) = u^*(x, y)|_\Gamma$.

Вариант 1

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_\Gamma = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = x^3 y + x y^2$.

Вариант 2

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left((1+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_\Gamma = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;

- 4) Попеременно треугольным итерационным методом.
- 5) Методом покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = y^2 + y^3(1 + x)$.

Вариант 3

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом;
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: выполнить вычисленное заранее количество итераций m , требуемое для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = \sin x \cos y$.

Вариант 4

Найти решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом;

5) Методом переменных направлений Дугласа-Рекфорда.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|}$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = e^x \sin(y)$.

Вариант 5

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln(2+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln(2+y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$.

Вариант 6

Найти решение задачи

$$Lu == -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом.

5) Методом расщепления предиктор-корректор.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = 2x^3y^3$.

Вариант 7

Найти решение задачи

$$Lu = 0,$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \sin(\pi x)) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{1+y} \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, 0) = \tan \left(\frac{\pi}{4} x \right)$$

$$u(x, 1) = xe^{(x-1)}, \quad u(0, y) = y \cos \left(\frac{\pi}{2} y \right), \quad u(1, y) = \frac{1}{1 + y(1 - y)}$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$.

Вариант 8

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + 2x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;

- 3) Методом верхней релаксации.
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 5) Методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = x^2 y^2 (1 + y)$,

Вариант 9

Найти решение задачи

$$\Delta u = x^2 + y^2, \quad u(x, 0) = u(0, y) = 0, \quad u(x, 1) = x^2/2, \quad u(1, y) = y^2/2$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Методом переменных направлений Дугласа-Рекфорда.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\|U^k - u^*\| < \varepsilon$.

Вариант 10

Найти решение задачи

$$\Delta u = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации.
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 5) Методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^* = e^{2x} \sin(2y)$.

Вариант 11

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Методом покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\|U^k - u^*\| < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = \cos x \cos y$.

Вариант 12

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + x/2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом.
- 5) Методом покомпонентного расщепления на основе схемы Кранка-Никольсона.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\|U^k - u^*\| < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = x y^2 (1 + y)$,

Вариант 13

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln(2+x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln(2+y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом простой итерации;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации;
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров.
- 5) Итерационным методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|AU^k - F\|}{\|AU^0 - F\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$.

Вариант 14

Найти решение задачи

$$Lu = -f(x, y),$$

$$\text{где } Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left((3x+2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(x, y)|_{\Gamma} = \mu(x, y)$$

следующими методами:

- 1) Методом итерации с оптимальным параметром;
- 2) Методом Зейделя;
- 3) Методом верхней релаксации.
- 4) Попеременно-треугольным итерационным методом с чебышевским набором параметров;
- 5) Методом переменных направлений.

В качестве критерия конца вычислений использовать условие: $\frac{\|U^k - u^*\|}{\|U^0 - u^*\|} < \varepsilon$.

Отладить решение задачи на функции $u^*(x, y) = x^2 y^2 (1+y)$,

9. Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Схема переменных направлений

9.1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения

$$-Lu = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$u = \mu(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Пусть $\overline{G} = G + \Gamma = \{0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$ — прямоугольник, а

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Здесь $p(x, y)$, $q(x, y)$ — достаточно гладкие функции такие, что $0 < c_1 \leq p(x, y) \leq c_2$, $0 < d_1 \leq q(x, y) \leq d_2$, где c_1 , c_2 , d_1 , d_2 — постоянные.

Обозначим $A = \max(c_2, d_2)$.

9.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора разностным

Разобьем отрезок $[0, l_x]$ на N_x равных частей. Обозначим $h_x = l_x/N_x$, $x_i = ih_x$, $0 \leq i \leq N_x$. Разобьем отрезок $[0, l_y]$ на N_y равных частей. Обозначим $h_y = l_y/N_y$, $y_i = ih_y$, $0 \leq i \leq N_y$. Построим сетку узлов (рис. 1):

$$\overline{\omega_{h_x h_y}} = \{(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y\}.$$

Узлы (x_i, y_j) , $1 \leq i \leq N_x - 1$; $1 \leq j \leq N_y - 1$ — внутренние, остальные, лежащие на границе прямоугольника, — граничные.

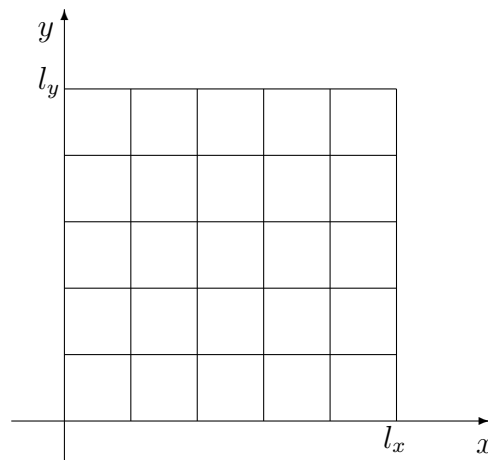


Рис. 1

Решение отыскивается в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h_x h_y}}$. Обозначим $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$.

Пусть

$$L_1 u = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad L_2 u = \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (4)$$

так что

$$Lu = L_1 u + L_2 u.$$

Операторы L_1 и L_2 заменим разностными операторами Λ_1 и Λ_2

$$\Lambda_1 u_{ij} = p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_x^2}, \quad (5)$$

$$\Lambda_2 u_{ij} = q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_y^2}. \quad (6)$$

Здесь

$$p_{i+\frac{1}{2}j} = p(x_i + h_x/2, y_j), \quad p_{i-\frac{1}{2}j} = p(x_i - h_x/2, y_j), \\ q_{ij+\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j + h_y/2), \quad q_{ij-\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j - h_y/2).$$

Обозначим

$$\Lambda u_{ij} = \Lambda_1 u_{ij} + \Lambda_2 u_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

Если $u(x, y)$ имеет не менее четырех непрерывных ограниченных в рассматриваемой области G производных по x и по y , а $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — не менее трех, то разностный оператор Λ аппроксимирует дифференциальный L со вторым порядком, т. е.

$$Lu - \Lambda u = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_x^2 + h_y^2.$$

Итак, решение задачи (1)-(2) свелось к решению разностной задачи Дирихле

$$-(\Lambda_1 u_{ij} + \Lambda_2 u_{ij}) = f_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (7)$$

при граничных условиях

$$\begin{cases} u_{i0} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{0j} = \mu(0, y_j), & 0 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{N_x j} = \mu(l_x, y_j), & 0 \leq j \leq N_y - 1. \end{cases} \quad (8)$$

9.3. Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Для вычисления решений многих стационарных задач математической физики, описывающих равновесные состояния, рассматриваются последние как результат установления развивающегося во времени процесса, расчет которого оказывается проще, чем прямой расчет равновесного состояния. Рассмотрим вспомогательную нестационарную задачу о распространении тепла

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u + L_2 u + f(x, y), \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, y), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \end{cases} \quad (9)$$

где $f(x, y)$ имеет прежний смысл, а $u_0(x, y)$ — произвольно. Поскольку источники тепла $f(x, y)$ и температура на границе $\mu(x, y)$ не зависят от времени, то естественно ожидать, что и решение $u(x, y, t)$ с течением времени будет меняться все медленнее, распределение температур в пределе при $t \rightarrow \infty$ превратится в равновесное распределение температуры $u(x, y)$, описываемое исходной задачей (1)-(2). Надо решать задачу до тех пор, пока ее решение не перестанет меняться в пределах интересующей нас точности.

Рассмотрим вначале разностную схему, с помощью которой могла бы решаться задача (7)-(8), но на практике ее не применяют по указанным в п. 9.4 причинам.

9.4. Двухслойная схема с весами

Аппроксимируем задачу (9) разностной схемой

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \Lambda(\sigma u_{ij}^{k+1} + (1 - \sigma)u_{ij}^k) + f(x_i, y_j),^1 \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+1} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y}^{k+1} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{0j}^{k+1} = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{N_x j}^{k+1} = \mu(l_x, y_j), & 1 \leq j \leq N_y - 1. \end{cases} \quad (11)$$

Решение при $k = 0$ находится из начального условия в (9)

$$u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

Рассмотрим два варианта значений параметра σ .

- а) При $\sigma = 0$ получаем явную схему и решение во внутренних узлах сетки вычисляется по формуле

$$u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k + \tau(\Lambda_1 u_{ij}^k + \Lambda_2 u_{ij}^k) + \tau f(x_i, y_j), \quad (12)$$

где $i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Схема (12) условно устойчива при $\tau \leq \frac{Ah^2}{4}$. Общее число действий при переходе со слоя на слой пропорционально числу узлов сетки, т. е. $O(N_x N_y)$ — схема экономичная.

- б) При $\sigma = 1$ получаем неявную схему. Она устойчива при любых h и τ . Для определения u_{ij}^{k+1} получаем на каждом слое линейную систему

$$u_{ij}^{k+1} - \tau(\Lambda_1 u_{ij}^{k+1} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1}) = u_{ij}^k + \tau f(x_i, y_j), \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Матрица этой системы пятидиагональная и решать систему можно методом матричной прогонки или методом исключения Гаусса, который при учете специального вида матрицы требует $O(N_x^2 N_y^2)$ действий, т. е. схема не является экономичной.

¹При решении стационарных задач методом установления k — номер итерации, а τ — итерационный параметр, который выбирается из соображений точности аппроксимации и быстроты сходимости.

9.5. Схема переменных направлений

Эта схема сочетает лучшие качества явной схемы — экономичность и неявной — устойчивость. Наряду с основными значениями u_{ij}^k и u_{ij}^{k+1} вводится промежуточное значение $u_{ij}^{k+1/2}$, которое формально можно рассматривать как значение при $t = t_{k+1/2} = t_k + \frac{\tau}{2}$. Решение задачи в этом случае сводится к решению двух систем вида (14), (15) с трехдиагональными матрицами.

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^k + f(x_i, y_j), \quad (14)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1} + f(x_i, y_j), \quad (15)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

$$k = 0, 1, \dots$$

В граничных узлах решение должно принимать заданные в (11) значения.

Схема (14) неявна по направлению x и явна по направлению y , а схема (15) явна по направлению x и неявна по направлению y , что позволяет использовать для нахождения решения одномерные прогонки.

Система (14) с учетом граничных условий (11) может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{0j}^{k+1/2} = \mu(0, y_j), \\ \overline{A}_{ij} u_{i-1j}^{k+1/2} - \overline{B}_{ij} u_{ij}^{k+1/2} + \overline{C}_{ij} u_{i+1j}^{k+1/2} = \overline{G}_{ij}^{k+1/2}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \\ u_{N_x j}^{k+1/2} = \mu(l_x, y_j) \end{array} \right. \quad (16)$$

где

$$\overline{G}_{ij}^{k+1/2} = -u_{ij}^k - \frac{\tau}{2}(\Lambda_2 u_{ij}^k + f(x_i, y_j)), \quad (17)$$

$$1 \leq j \leq N_y - 1.$$

В итоге при каждом $1 \leq j \leq N_y - 1$ получили линейную замкнутую систему $(N_x + 1)$ -ого порядка относительно $u_{0j}^{k+1/2}, u_{1j}^{k+1/2}, \dots, u_{N_x j}^{k+1/2}$.

Матрица системы трехдиагональная и решать систему следует методом прогонки, рассмотренным в п. 1.4.

Прогонки осуществляются вдоль строк (рис. 2).

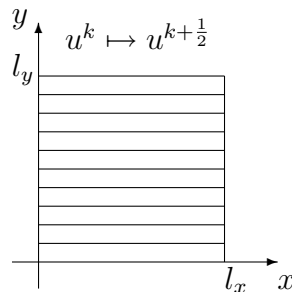


Рис. 2
97

При $j = 0$, $j = N_y$ решения находятся из (11):

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+\frac{1}{2}} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y}^{k+\frac{1}{2}} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N_x. \end{cases} \quad (18)$$

Система (15) с учетом граничных условий (11) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+1} = \mu(x_i, 0), \\ \bar{A}_{ij} u_{ij-1}^{k+1} - \bar{B}_{ij} u_{ij}^{k+1} + \bar{C}_{ij} u_{ij+1}^{k+1} = \bar{G}_{ij}^{k+1}, & 1 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{iN_y}^{k+1} = \mu(x_i, l_y), \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ij}^{k+1} &= -u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2}(\Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + f(x_i, y_j)), \\ 1 \leq i \leq N_x - 1, \end{aligned} \quad (20)$$

В итоге при каждом $1 \leq i \leq N_x - 1$ получили линейную замкнутую систему $(N_y + 1)$ -ого порядка относительно $u_{i0}^{k+1}, u_{i1}^{k+1}, \dots, u_{iN_y}^{k+1}$. Матрица системы трехдиагональная и решать систему следует методом прогонки.

Прогонки осуществляются вдоль столбцов (рис. 3).

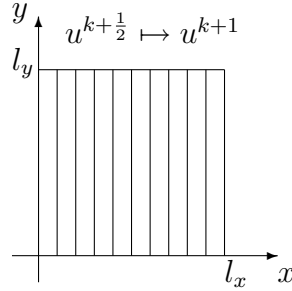


Рис. 3

При $i = 0$, $i = N_x$ решения находятся из (11):

$$\begin{cases} u_{0j}^{k+1} = \mu(0, y_j), & 0 \leq j \leq N_y, \\ u_{N_x j}^{k+1} = \mu(l_x, y_j), & 0 \leq j \leq N_y. \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно, что в простейшей задаче ($p(x, y) \equiv 1$, $q(x, y) \equiv 1$, $hx = hy = h$)

$$\bar{A}_{ij} = \bar{\bar{A}}_{ij} = \frac{\tau}{2h^2}, \quad \bar{B}_{ij} = \bar{\bar{B}}_{ij} = \frac{\tau}{h^2} + 1, \quad \bar{C}_{ij} = \bar{\bar{C}}_{ij} = \frac{\tau}{2h^2}. \quad (22)$$

Итак, рассмотрим алгоритм метода переменных направлений.

1) Из начального условия получаем решение при $k = 0$ во всех точках сетки

$$u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N_x, \quad 0 \leq j \leq N_y.$$

2) Полагая $k = 0$, решаем методом прогонки при каждом $1 \leq j \leq N_y - 1$ систему (16).

Решение при $j = 0$ и $j = N_y$ находится из (18). Тем самым, найдено решение $u_{ij}^{\frac{1}{2}}$ на промежуточном слое $\frac{1}{2}$ во всех точках сетки.

3) Полагая $k = 0$, решаем методом прогонки при каждом $1 \leq i \leq N_x - 1$ систему (19).

Решение при $i = 0$ и $i = N_x$ находится из (21). Таким образом, найдено решение u_{ij}^1 на слое $k = 1$ во всех точках сетки.

4) Вычислив характеристики полученного решения, увеличиваем номер слоя на единицу ($k = k + 1$) и повторяем пункты 2 и 3 пока не будет выполнен критерий окончания счета.

Указание к выбору параметра τ

В методе переменных направлений, если известны границы спектра разностных операторов $-\Lambda_1$, $-\Lambda_2$

$$\delta_1 = c_1 \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2l_x}, \quad \Delta_1 = c_2 \frac{4}{h_x^2} \cos^2 \frac{\pi h_x}{2l_x}, \quad \delta_2 = d_1 \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}, \quad \Delta_2 = d_2 \frac{4}{h_y^2} \cos^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}$$

и $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$, то в качестве оптимального τ берется $\tau_{\text{опт}} \approx \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$.

В модельной задаче $\tau_{\text{опт}} \approx \frac{h^2}{\sin(\pi h)}$. Количество итераций, необходимое для уменьше-

ния первоначальной нормы погрешности в ε раз $n \approx \frac{N}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

Эти рекомендации являются лишь ориентировочными и следует их испытать, т. е. проверить скорость сходимости при τ больших и меньших $\tau_{\text{опт}}$, указанного выше.

9.6. Выбор точности

Разностная схема (7)-(8) аппроксимирует исходную задачу (1)-(2) со вторым порядком относительно шага сетки.

Заданная точность приближенного решения должна быть согласована с порядком аппроксимации.

Часто отлаживают задачу на известном точном решении u^* , тогда судят о точности решения по его фактической абсолютной погрешности $\|u^k - u^*\|^2$ или по относительной погрешности $\|u^k - u^*\|/\|u^0 - u^*\|$. Если точное решение неизвестно и неизвестны оценки для погрешностей, то судят по величине невязки $\|\Lambda u^k + F\|$. Здесь F — вектор значений правой части системы (7) во внутренних точках сетки.

Для получения невязки подставляем значения u^k в точках сетки в разностное уравнение (7) и вычисляем

²Здесь и в дальнейшем используется сеточный аналог нормы в C

$$\|V\|_C = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1, \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |v_{ij}|.$$

$$\|\Lambda u^k + F\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1, \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |\Lambda u_{ij}^k + f_{ij}|.$$

Также можно судить по величине относительной невязки $\|\Lambda u^{(k)} + F\| / \|\Lambda u^0 + F\|$.

Итак, в качестве критерия конца вычислений может быть выбран один из следующих:

- а) $\|u^k - u^*\| < \varepsilon$,
- б) $\|\Lambda u^k + F\| < \varepsilon$,
- в) $\frac{\|u^k - u^*\|}{\|u^0 - u^*\|} < \varepsilon$,
- г) $\frac{\|\Lambda u^k + F\|}{\|\Lambda u^0 + F\|} < \varepsilon$.
- д) выполнить вычисленное заранее количество итераций n , требуемое для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз.

9.7. Задание

Алгоритмы решения задачи³ численно реализовать по программе на алгоритмическом языке.

Желательно отлаживать программу на модельной задаче, т. е. такой, точное решение которой известно.

Требуется получить приближенное решение задачи на сгущающихся сетках при $N_x = 5, 10, 20$. Ввиду того, что в некоторых случаях может оказаться проблематичным получить решение с заданной точностью ε , независимо от используемого критерия конца вычислений, во избежание заикливания следует поставить ограничение на количество выполняемых итераций. Обозначим его, например, k_{\max} .

k_{\max} рекомендуется выбирать самостоятельно с учетом скорости сходимости метода.

В качестве нулевого приближения u^0 можно взять, например, вектор с нулевыми компонентами значений решения во внутренних узлах сетки и принимающий заданные значения в граничных.

На печать должны выводиться следующие характеристики:

- 1) Мера аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой на точном решении⁴. Для получения меры аппроксимации подставляем значения точного решения в разностное уравнение (7) и вычисляем

$$\gamma(u^*) = \|\Lambda u^* + F\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1, \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |\Lambda u_{ij}^* + f_{ij}|.$$

- 2) Норма невязки нулевого приближения $\|\Lambda u^0 + F\|$.
- 3) Характеристики вычисленного в цикле с параметром k приближенного решения u^k (Таблица 1)

³Варианты задач Дирихле приведены в п. 8.8.

⁴Если точное решение неизвестно, характеристики, зависящие от точного решения, опускаются.

Таблица 1

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
k	$\ \Lambda u^k + F\ $	rel.d.	$\ u^k - u^*\ $	rel.error	$\ u^k - u^{k-1}\ $
1					
2					
...					

Здесь

5.1 — номер итерации;

5.2 — норма невязки k -ого приближения;

5.3 — относительная невязка k -ого приближения $\frac{\|\Lambda u^k + F\|}{\|\Lambda u^0 + F\|}$;

5.4 — норма абсолютной погрешности k -ого приближения;

5.5 — относительная погрешность k -ого приближения $\frac{\|u^k - u^*\|}{\|u^0 - u^*\|}$;

5.6 — норма разности двух соседних приближений.

- 4) Решение, удовлетворяющее заданной точности ε , или $u^{k_{\max}}$ на “крупной” сетке. “Крупной” будем называть сетку при $N_x = 5$, $N_y = 5$ и, независимо от значений N_x и N_y , приближенное решение должно печататься только в точках этой сетки, например при $l_x = l_y = 1$ должна быть выведена таблица с значениями решения следующего вида:

Таблица 2

$y \setminus x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.2						
0.4						
0.6						
0.8						
1						

- 5) Таблица точного решения на “крупной” сетке.

Проанализировать полученные результаты.

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть в приложении Д.

Разностные схемы других методов установления изложены в [6] и [9].

На печать должны быть выведены следующие данные:

- 1) ФИО студента
- 2) Номер варианта.
- 3) Постановка задачи.
- 4) Критерий окончания вычислений.
- 5) Для каждого метода должны быть приведены результаты согласно п. 8.7 и п. 9.7.

- 6) Итоговая таблица 3 с указанием количества итераций, требуемых для достижения заданной точности в реализованных методах на различных сетках.

Таблица 3

Название метода	N	M	Количество итераций
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

Приложения

А. Функции для построения полиномов Якоби, координатных функций и их производных в MATLAB

Подпрограммы составлены на примере координатных функций $\varphi_i(x) = (1-x^2)P_{i-1}^{(k,k)}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые рекомендуются в некоторых вариантах задания при $k = 1$.

```
*****
function tmp=myjacobi(k,n)
    %функция возвращает массив полиномов Якоби p(i) в аналитическом виде,
    %i=0,1,...,n, i - степень полинома, k - верхний индекс.
    pj=sym(zeros(n+1,1));
    syms x;
    pj(1)=1;
    switch n
        case 0
            tmp=pj;
        case 1
            pj(2)=(k+1)*x;
            tmp=pj;
        otherwise
            pj(2)=(k+1)*x;
            for i=2:n
                pj(i+1)=((i+k)/(i+2*k))*(2+(2*k-1)/i)*x*pj(i)-...
                    ((i+k)/(i+2*k))*(1+(k-1)/i)*pj(i-1);
            end;
            tmp=pj;
    end
end
*****
function [phi dphi ddphi]=myphi_dphi_d2kk_good_anal(k,n)
%функция возвращает массивы координатных функций phi(i), i=1,...,n
%в аналитическом виде и массивы их производных.
phi=sym(zeros(n,1));
dphi=sym(zeros(n,1));
ddphi=sym(zeros(n,1));
syms x;
jac=myjacobi(k,n-1);%массив многочленов Якоби p(i), i=0,...,n-1
                    %в аналитическом виде, k - верхний индекс.
djac=myjacobi(k-1,n);
for i=1:n
    phi(i)=(1-x^2)*jac(i);
    phi(i)=collect(phi(i));%приведение многочлена к виду, содержащему степени
                            %с соответствующими коэффициентами.
    dphi(i)=-2*(i)*(1-x^2)^(k-1)*djac(i+1);
    dphi(i)=collect(dphi(i));
```

```

ddphi(i)=-2*(i)*((k-1)*(1-x^2)^(k-2)*(-2*x)*dJac(i+1)+...
              (1-x^2)^(k-1)*(i+2*(k-1)+1)/2)*Jac(i);
ddphi(i)=collect(ddphi(i));
end
end
*****
function tmp=jacobix(k,n,x)
    %Функция возвращает массив значений в точке x полиномов Якоби p(i),
    %i=0,1,...,n, i - степень полинома, k - верхний индекс.
    pj=zeros(n+1,1);
    pj(1)=1;
    switch n
        case 0
            tmp=pj;
        case 1
            pj(2)=(k+1)*x;
            tmp=pj;
        otherwise
            pj(2)=(k+1)*x;
            for i=2:n
                pj(i+1)=((i+k)/(i+2*k))*(2+(2*k-1)/i)*x*pj(i)-...
                    ((i+k)/(i+2*k))*(1+(k-1)/i)*pj(i-1);
            end;
            tmp=pj;
    end
end
*****
function [phi dphi ddphi]=myphi_dphi_d2kk_good_x(k,n,x)
%Функция возвращает массивы значений в точке x координатных функций phi(i),
%i=1,...,n и массивы значений их производных.
phi=zeros(n,1);
dphi=zeros(n,1);
ddphi=zeros(n,1);
Jac=jacobix(k,n-1,x);%Массив значений в точке x многочленов Якоби P(i),
%i=0,...,n-1, k - верхний индекс.
dJac=jacobix(k-1,n,x);
for i=1:n
    phi(i)=(1-x^2)*Jac(i);
    dphi(i)=-2*(i)*(1-x^2)^(k-1)*dJac(i+1);
    ddphi(i)=-2*(i)*((k-1)*(1-x^2)^(k-2)*(-2*x)*dJac(i+1)+...
                    (1-x^2)^(k-1)*(i+2*(k-1)+1)/2)*Jac(i);
end
end
*****
function [phi]=myphi_good_x(k,n,x)
%Функция возвращает массив значений в точке x координатных функций phi(i),
%i=1,...,n.
phi=zeros(n,1);
Jac=jacobix(k,n-1,x);

```



```

for i=1:n
    phi(i)=(1-x^2)*Jac(i);
end

```

Приведем функцию, которая возвращает узлы и коэффициенты формулы Гаусса. Узлы находятся встроенной функцией MATLAB как корни многочлена Лежандра $P_n(x)$. В этой функции как и в следующей для вычисления производной многочлена Лежандра в точке применяется формула (20).

```

function [xg Ag]=nodes_coeff_Gauss(n)
%n - количество узлов.
%Функция возвращает узлы и коэффициенты формулы Гаусса.
%Узлы находятся встроенной функцией MATLAB как корни многочлена Лежандра Pn(x).
syms x
format long
ar_P=mu_jacobi(0,n);% Массив многочленов Лежандра P0(x), P1(x),...,Pn(x)
xg = double((vpasolve(ar_P(n+1), x)))';%Все корни многочлена Лежандра Pn(x)
for i=1:n
    tmp=jacobix(1,n-1,xg(i));
    Ag(i)=double((2/((1-xg(i)^2)*((n+1)/2*tmp(n))^2)));
end
end

```

Узлы формулы Гаусса можно вычислить и не используя встроенную функцию MATLAB, а применяя метод Ньютона. При удачном нулевом приближении к корню

$$x_0(i) = -\cos\left(\frac{i-1/4}{n+1/2}\pi\right)$$

метод сходится очень быстро.

```

function [xg Ag]=nodes_coeff_Gauss_Newton(n,eps)
%Функция возвращает узлы и коэффициенты формулы Гаусса.
%n - количество узлов.
%eps - точность вычисления узлов.
%Узлы находятся по методу Ньютона.
format long
for i=1:n
    x0=-cos((i-0.25)/(n+0.5)*pi);
    dif=2*eps;
    k=0;
    while abs(dif)>eps
        ar_p=jacobix(0,n,x0);%Массив многочленов Лежандра P0(x0), P1(x0),...,Pn(x0)
        ar_dp=(n+1)/2*jacobix(1,n-1,x0);%Массив P0'(x0), P1(x0)',...,Pn'(x0)
        dif=ar_p(n+1)/ar_dp(n);
        x0=x0-dif;
        k=k+1;
    end
end

```

```

        xg(i)=x0;
    end
    for i=1:n
        tmp=jacobix(1,n-1,xg(i));
        Ag(i)=double((2/((1-xg(i)^2)*((n+1)/2*tmp(n))^2)));
    end
end

*****

function [z b]=nodes_coeff_Gauss10();
%Функция возвращает массивы узлов и коэффициентов формулы Гаусса для n=10.
z=zeros(10,1);b=zeros(10,1);
    z(10)=0.973906529;
    z(1)=-z(10);
    z(9) =0.865063367;
    z(2)=-z(9);
    z(8) =0.679409568;
    z(3)=-z(8);
    z(7) =0.433395394;
    z(4)=-z(7);
    z(6) =0.148874339;
    z(5)=-z(6);

    b(5) =0.295524225;
    b(6)=b(5);
    b(4) =0.269266719;
    b(7) =b(4);
    b(3) =0.219086363;
    b(8) =b(3);
    b(2) =0.149451349;
    b(9) =b(2);
    b(1) =0.066671344;
    b(10) =b(1);
end
*****

Для возврата 2.7.

```

Б. Построение составной формулы Гаусса

Пусть p — количество узлов в формуле Гаусса;

m — количество разбиений промежутка интегрирования $[a, b]$, $h = (b - a)/m$, точки разбиения $a_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, m$, так что $a_m = b$, $mp = n$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_i+h} f(x)dx = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{h}{2}t + a_i + \frac{h}{2}\right) dt \approx \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^p B_j f\left(\frac{h}{2}t_j + a_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^p B_j f\left(\frac{h}{2}t_j + a + (2i+1)\frac{h}{2}\right). \end{aligned}$$

Здесь B_j , t_j — коэффициенты и узлы квадратурной формулы Гаусса.

Для реализации алгоритма метода механических квадратур необходимо получить выражения для A_k , x_k в формуле

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Очевидно, что коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{h}{2} B_1, \quad A_2 = \frac{h}{2} B_2, \dots, \quad A_p = \frac{h}{2} B_p, \\ A_{p+1} &= \frac{h}{2} B_1, \quad A_{p+2} = \frac{h}{2} B_2, \dots, \quad A_{2p} = \frac{h}{2} B_p, \\ A_{(m-1)p+1} &= \frac{h}{2} B_1, \quad A_{(m-1)p+2} = \frac{h}{2} B_2, \dots, \quad A_{mp} = \frac{h}{2} B_p, \end{aligned}$$

то есть $A_{ip+j} = \frac{h}{2} B_j$, $i = 0, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, p$.

Узлы квадратурной формулы:

$$x_{ip+j} = \frac{h}{2} t_j + a + (2i+1)\frac{h}{2}, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad j = 1, \dots, p.$$

Напомним квадратурные формулы Гаусса для $p = 2$ и для $p = 3$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t)dt &\approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \int_{-1}^1 f(t)dt &\approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right). \end{aligned}$$

Для возврата к заданию [4.2.2](#).

В. Указания к алгоритму программы по решению методом сеток уравнения параболического или гиперболического типов (Maple)

Программа должна содержать:

- 1) Подпрограмму печати элементов массива `array(0..5,0..5)`, например следующего содержания:

```
>prt:=proc(u)
  local i,k;
  for k from 0 to 5 do
    printf("\n");
    for i from 0 to 5 do
      printf("%10.5f",u[i,k]);
    od;
  od;
end proc;
```

- 2) Подпрограмму с параметрами, например, u, v , вычисления нормы разности решений, заданных таблично: $u := \text{array}(0..5,0..5)$ и $v := \text{array}(0..5,0..5)$, по формуле

$$\|u - v\| = \max_{i,j=0..5} |u_{ij} - v_{ij}|$$

- 3) Подпрограмму построения сеточного решения по явной схеме с параметрами:

N — число разбиений по оси x ,

M — число разбиений по оси t .

Подпрограмма должна строить решение во всех точках сетки, например, массив u , а “возвращать” решение только в точках “крупной” сетки, например, массив us (таблица 1). Можно использовать следующий алгоритм заполнения массива us по элементам массива u :

```
> hx:=trunc(N/5);ht:=trunc(M/5);
  us:=array(0..5,0..5):
  for i from 0 to 5 do
    for k from 0 to 5 do
      us[i,k]:=u[i*hx,k*ht];
    od;
  od;

> prt(us); #печать решения на крупной сетке
```

- 4) Подпрограмму построения сеточного решения по неявной схеме с параметрами:

N — число разбиений по оси x ,

M — число разбиений по оси t .

σ — вес.

Подпрограмма должна строить решение во всех точках сетки (u), а “возвращать” решение только в точках “крупной” сетки (us) (таблица 1).

Далее, обращаясь к перечисленным выше подпрограммам, строятся таблицы вида 2 и 3.

Для возврата к заданию для уравнения параболического типа 5.5.

Для возврата к заданию для уравнения гиперболического типа 6.5.

Г. Указания к алгоритму программы решения сеточных уравнений итерационными методами

Заметим, что в итерационных методах не следует хранить решение на каждой итерации, достаточно использовать два массива, например, $U0$ — для решения на предыдущей $(k-1)$ -ой итерации, $U1$ — для решения на k -ой итерации, затем выполнять пересылку командой $U0 := \text{copy}(U1)$.

Таким образом, в данной задаче достаточно хранить 4 двумерных массива: два для решений на двух соседних итерациях, один для значений правой части и один для точного решения (если оно задано).

Примерный план программы

1) Комментарий

ФИО, группа, постановка задачи, метод.

2) Задание исходных данных

точность решения — ε ,

концы промежутков — l_x, l_y ,

число разбиений по оси x — N ,

число разбиений по оси y — M ,

$kmax$ — максимальное количество итераций. В отладочном варианте $kmax = 5$,

k — шаг печати характеристик в таблице 1. В отладочном варианте $k = 1$.

3) Объявление функций

Точное решение (если оно известно).

$f(x, y)$.

$p(x, y), q(x, y)$.

4) Вычисления

Шаг по оси — h_x .

Шаг по оси y — h_y ¹.

Точки разбиения по оси x — $x_i, i = \overline{0, N}$.

Точки разбиения по оси y — $y_i, i = \overline{0, M}$.

Массив значений точного решения в точках сетки (если оно известно).

Массив значений функции $f(x, y)$ в точках сетки.

5) Объявление процедур

5.1. Вычисление $\|u - v\|$ (параметры u, v).

5.2. Вычисление нормы невязки $\|L_h u + f\|$ (параметр u).

5.3. Печать решения на “крупной” сетке.

¹В случае области-квадрата взять $M = N, h_x = h_y = h$.

5.4. Печать “шапки” в таблице 1.

5.5. Вычисление U^k (массив $U1$) через $U^{(k-1)}$ (массив $U0$) методом простой итерации (опт. пар.).

5.6. Вычисление U^k (массив $U1$) через $U^{(k-1)}$ (массив $U0$) методом Зейделя.

5.7. Вычисление U^k (массив $U1$) через $U^{(k-1)}$ (массив $U0$) другими методами.

5.8. Процедуры вычисления решения заданным методом с заданной точностью, вычисление и печать заданных характеристик решения.

5.8.1. Печать названия метода.

5.8.2. Вычисление и печать требуемого теоретически количества итераций для достижения требуемой точности.

5.8.3. Печать “шапки” таблицы через обращение к процедуре.

5.8.4. Предварительное присвоение переменных для последующего вычисления приближенного спектрального радиуса.

5.8.5. $egui:=2*\epsilon$;

5.8.6. **Цикл: по k от 1 до k_{\max} пока $egui > \epsilon$ выполнить**

5.8.6.1. Обращение к процедуре вычисления решения на следующей итерации $U1$ заданным методом.

5.8.6.2. Вычисление $\|U^k - U^{k-1}\|$ через обращение к процедуре с параметрами $U1$, $U0$.

5.8.6.3. Вычисление приближения к спектральному радиусу.

5.8.6.4. Далее следует вставить проверку, требуется ли печатать характеристики решения на k -ой итерации, т.е. кратно ли k pk , например следующим способом:

if abs(round(k/pk)- k/pk)<0.0001 then ...

Если печатать надо, то следует вычислить и напечатать характеристики решения Ri , которые приведены в таблице 1, здесь i — номер столбца в таблице 1.

$R2=$ (обращение к процедуре вычисления невязки k -ого приближения к решению — $U1$).

$R3 = R1/\|AU^0 - F\|$ ($\|AU^0 - F\|$ вычислена ранее)

Далее вычисляются $R4, R5, R7, R8 = \sqrt{r_{k-1} \cdot r_k}$ согласно формулировке задачи (п. 6.5).

Печать $k, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8$ в столбцах, соответствующих “шапке” таблицы.

Конец условного оператора

$U0 = U1$ (поэлементно в цикле или с использованием функции **copy** для подготовки вычисления решения на следующей итерации).

Конец цикла по k .

5.8.7. Печать полученного приближенного решения на “крупной” сетке.

6) Главная программа

6.1. Построение массива значений правой части в узлах сетки².

²Все массивы перед использованием объявить.

6.2. Построение массива значений точного решения U^* в узлах сетки. Печать на “крупной” сетке точного решения.

6.3. Вычисление и печать нормы невязки точного решения (меры аппроксимации) $\|F - AU^*\|$.

6.4. Построение массива значений нулевого приближения $U0$, например, по следующему алгоритму: присваивание элементам массива для нулевого приближения значений точного решения, а затем “обнуление” значений во внутренних узлах сетки — тем самым будет обеспечено удовлетворение граничным условиям. Вычисление и печать $\|F - AU^0\|$.

Вычисление и печать $\|U^* - U^0\|$.

6.5. Построение массива значений для решения на следующей итерации $U1$, удовлетворяющего граничным условиям — например, командой $U1 := \text{copy}(U0)$.

6.6. Вычисление границ спектра δ, Δ матрицы A .

6.7. Вычисление спектрального радиуса $\rho(H) = (\Delta - \delta)/(\Delta + \delta)$.

6.8. Вычисление других необходимых параметров.

7) Обращение к процедурам вычисления решения заданным методом (п. 5.8).

Для возврата к заданию 8.7.

Д. Указания к алгоритму программы решения задачи Дирихле методом переменных направлений

Заметим, что в итерационных методах не следует хранить решение на всех слоях, в методах переменных направлений для двумерной задачи достаточно использовать три массива, например, $u0$ — для решения на предыдущем k -ом слое, $u1$ — для решения на $(k + 1)$ -ом слое, $u12$ — для решения на промежуточном $(k + 1/2)$ слое, затем выполнять пересылку, например, командой $u0 := \text{copy}(u1)$.

Таким образом, в данной задаче достаточно хранить 5 двумерных массивов: три для приближенных решений, один для значений правой части и один для точного решения (если оно задано).

Примерный план программы

1) Комментарий

ФИО, группа, постановка задачи, метод.

2) Задание исходных данных

точность решения — ε ,

концы промежутков — l_x, l_y ,

число разбиений по оси x — N_x ,

число разбиений по оси y — N_y ,

шаг по оси t — τ ,

максимальное количество слоев по t — k_{max} . В отладочном варианте $k_{max}=5$.

- 3) Объявление функций
 Точное решение (если оно известно).
 $f(x, y)$.
 $p(x, y)$, $q(x, y)$.
- 4) Вычисления
 Шаг по оси x — h_x .
 Шаг по оси y — h_y ¹.
 Точки разбиения по оси x — x_i , $i = \overline{0, N}$.
 Точки разбиения по оси y — y_i , $i = \overline{0, M}$.
 Массив значений точного решения в точках сетки (если оно известно).
 Массив значений функции $f(x, y)$ в точках сетки.
- 5) Объявление процедур
 - 5.1. Вычисление $\|u - v\|$ (параметры u, v).
 - 5.2. Вычисление нормы невязки $\|\Lambda u + F\|$ (параметр u).
 - 5.3. Печать решения u на “крупной” сетке (параметр u).
 - 5.4. Печать “шапки” в таблице 1.
 - 5.5. Вычисление $u^{k+1/2}$ (массив $u12$) через u^k (массив $u0$).
 Вычисление u^{k+1} (массив $u1$) через $u^{k+1/2}$ (массив $u12$).
 - 5.7. Печать полученного приближенного решения на “крупной” сетке (параметр u).
- 6) Главная программа
 - 6.1. Построение массива значений правой части в узлах сетки².
 - 6.2. Построение массива значений точного решения u^* в узлах сетки. Печать на “крупной” сетке точного решения.
 - 6.3. Вычисление и печать нормы невязки точного решения (меры аппроксимации) $\|\Lambda u^* + F\|$.
 - 6.4. Построение массива значений нулевого приближения u^0 , например, по следующему алгоритму: присваивание элементам массива для нулевого приближения значений точного решения, а затем “обнуление” значений во внутренних узлах сетки — тем самым будет обеспечено удовлетворение граничным условиям.
 Вычисление и печать $\|\Lambda u^0 + F\|$.
 Вычисление и печать $\|u^* - u^0\|$.
 - 6.5. Построение массивов значений для решения на следующей итерации $u12$, $u1$, удовлетворяющих граничным условиям — например, командами $u12 := \text{coru}(u0)$, $u1 := \text{coru}(u0)$.
- 7) Обращение к процедурам вычисления решения заданным методом, вычисление и печать заданных характеристик решения.

Для возврата к заданию 9.7.

¹В случае области-квадрата взять $M = N$, $h_x = h_y = h$.

²Все массивы перед использованием объявить.

Список литературы

- [1] Амосов, А.А. Вычислительные методы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2014. — 672 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/42190>.
- [2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — 6-е изд. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.
- [3] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М., 1977.
- [4] Даугавет И.К. Теория приближенных методов. Линейные уравнения. СПб., 2006.
- [5] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т. I, II. М., 1977.
- [6] Марчук Г.И. Методы расщепления. М., 1988.
- [7] Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1983.
- [8] Фаддеев, Д.К. Вычислительные методы линейной алгебры [Электронный ресурс] : учеб. / Д.К. Фаддеев, В.Н. Фаддеева. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 736 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/400>
- [9] Практикум по численным методам. Воронкова А.И., Даугавет И.К., Марданов А.А. и др. СПб., 2003.