Analyse numérique
Exercices corrigés

Interpolation polynômiale

Exercice 1

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange satisfaisant au tableau ci-dessous

x	0	2	3	5
$f(x)$	-1	2	9	87

Corrigé : Rappelons que le polynôme de Lagrange basé sur les points d'appui d'abscisses x_0, x_1, …, x_n est de degré n et s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) \qquad \text{avec} \qquad L_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

ici les points d'appui donnés par :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_0 & = & 0 & \quad & f(x_0) & = & -1 \\ x_1 & = & 2 & & f(x_1) & = & 2 \\ x_2 & = & 3 & & f(x_2) & = & 9 \\ x_3 & = & 5 & & f(x_3) & = & 87 \end{array}$$

déterminons donc un polynôme de Lagrange de degré 3, celui-ci s'écrit :

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f(x_k) L_k(x)$$

avec

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ &= \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} \\ &= -\frac{1}{30}(x-2)(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ &= \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} \\ &= \frac{1}{6}x(x-3)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ &= \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} \\ &= -\frac{1}{6}x(x-2)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \\ &= \frac{1}{30}x(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) \\ &= \frac{53}{30}x^3 - 7x^2 + \frac{253}{30}x - 1 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange pour les points d'appui d'abscisses : -2, -1, 0, 1, 2. Ensuite discuter l'erreur d'interpolation.

Corrigé : Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Les points d'appui sont :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_0 & = & -2 & \quad & f(x_0) & = & \frac{1}{5} \\ x_1 & = & -1 & & f(x_1) & = & \frac{1}{2} \\ x_2 & = & 0 & & f(x_2) & = & 1 \\ x_3 & = & 1 & & f(x_3) & = & \frac{1}{2} \\ x_4 & = & 2 & & f(x_4) & = & \frac{1}{5} \end{array}$$

Le polynôme de Lagrange est de degré 4. Il s'écrit

$$P_4(x) = \sum_{k=0}^{4} f(x_k) L_k(x)$$

avec

$$\begin{array}{rclrcl} L_0(x) &=& \frac{1}{24}x(x+1)(x-1)(x-2) & L_1(x) &=& -\frac{1}{8}x(x+2)(x-1)(x-2) \\ L_2(x) &=& \frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) & L_3(x) &=& -\frac{1}{6}x(x+2)(x+1)(x-2) \\ L_4(x) &=& \frac{1}{24}x(x+2)(x+1)(x-1) & & & \end{array}$$

Finalement,

$$\begin{array}{rcl} P_4(x) &=& f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x) + f(x_4)L_4(x) \\ &=& \frac{1}{120}x(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{1}{12}x(x+2)(x-1)(x-2) \\ &+& \frac{1}{4}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) - \frac{1}{12}x(x+2)(x+1)(x-2) \\ &+& \frac{1}{120}x(x+2)(x+1)(x-1) \\ &=& \frac{1}{10}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 1 \end{array}$$

Calculons l'erreur théorique sur cette interpolation. celle-ci est donnée ou point x par :

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \gamma_{n+1}(x) - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) \quad \text{où} \quad \xi \in I = (\min x_i, \max x_i)$$

Elle vérifie,

$$|E(x)| \leqslant |\gamma_{n+1}(x)| \frac{1}{(n+1)!} M_{n+1} \quad \text{où} \quad \gamma_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \quad M_{n+1} = \max_{t\in I} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$$

Comme ici on a 5 points d'appui, cette erreur est majorée par : $|E(x)| \leqslant |\gamma_5(x)| \frac{1}{5!} M_5$

On a clairement $\gamma_5(x) = \prod_{k=0} (x - x_k) = x(x^2-1)(x^2-4)$. Il reste à calculer $M_5 = \max_{t\in I} \left| f^{(5)}(t) \right|$. Un calcul assez long donne : $f^{(5)}(x) = \dfrac{-240x(3 - 10x^2 + 3x^4)}{(1+x^2)^6}$ de même, on trouve $f^{(6)}(x) = \dfrac{-240}{(1+x^2)^7} \left[-21x^6 + 105x^3 - 63x^2 + 3 \right]$.

Ainsi l'étude de $f^{(5)}$ donne $M_5 = 100$. Finalement,

$$|E(x)| \leqslant |\gamma_5(x)| \frac{1}{5!} M_5 = \left| x(x^2-1)(x^2-4) \right| \frac{100}{5!} = \left| x(x^2-1)(x^2-4) \right| \frac{5}{6}$$

Exercice 3

Avec quelle précision peut-on calculer $\sqrt{115}$ à l'aide de l'interpolation de Lagrange, si on prend les points : $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$.

Corrigé :

Exercice 4

1. Utiliser la formule d'interpolation de Lagrange pour trouver la cubique passant par 0.4, 0.5, 0.7, 0.8 pour $f(x) = \sin(x)$
2. Même question pour $f(x) = \dfrac{1}{\tan x}$

Corrigé :

Exercice 5

Soit $f(x) = \sqrt{2+x}$

1. Determiner le polynôme $P(x)$ Lagrange basé sur les points d'abscisses 0, 1 et 2.
2. Calculer $P(0.1)$ et $P(0.9)$, et comparer aux valeurs exactes. Évaluer l'erreur d'interpolation en ces deux points.

Intégration numérique

Exercice 6

Déterminer par la méthode des trapèzes puis par celle de Simpson $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ sur la base du tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	0.382683	0.707107	0.923880	1

Ces points d'appui sont ceux donnant $\sin x$, comparer alors les résultats obtenus avec la valeur exacte.

Corrigé :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

1. Soit T l'approximation de I par la méthode des trapèzes, le pas h donné par $h = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_4) + 2\sum_{i=1}^{3} f(x_i)\right) \\ &= \frac{\pi}{16}(0 + 1 + 2(0.382683 + 0.707107 + 0.92388)) \\ &= 0.987116 \end{aligned}$$

2. Soit S l'approximation de I par la méthode de Simpson. Celle-ci s'écrit,

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) \\ &= \frac{\pi}{8}\frac{1}{3}[(0 + 1 + 4(0.38... + 0.92...) + 2 \times 0.707...)] \\ &= 1.000135 \end{aligned}$$

Les points d'appui donnés dans cet execice correspondent à la fonction $\sin x$. Et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$. On constate donc que l'approximation de I donnée par la méthode de Simpson est meilleure que celle par les trapèzes, puisque $|S - I| = 0.000135$ et $|T - I| = 0.012884$.

Exercice 7

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accéleration γ :

t *(en s)*	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ *(en m/s^2)*	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calcule la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80\ s$, par la méthode des trapèzes puis par Simpson.

Corrigé : On sait que l'acceleration γ est la dérivée de la vitesse V, donc,

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \gamma(s)ds \qquad \Rightarrow \qquad V(80) = 0 + \underbrace{\int_0^{80} \gamma(s)ds}_{I}$$

1. Calculons I par la méthode des trapèzes. Ici, d'après le tableau des valeurs, $h = 10$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{2}\left(\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \gamma(x_i)\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 10(30 + 50,67 + 2(31,63 + \cdots + 46,70)) \\ &= 3089\ m/s \end{aligned}$$

2. Calculons I par la méthode de Simpson

$$\begin{aligned} V(80) &= \frac{h}{3}(\gamma(x_0) + \gamma(x_n) + 4(\gamma(_1) + \gamma(x_3) + \cdots) + 2(\gamma(_2) + \gamma(x_4) + \cdots)) \\ &= \frac{10}{3}(30 + 50,67 + 4(31,63 + 35,47 + \cdots) + 2(33,44 + 37,75 + \cdots)) \\ &= 3087\ m/s \end{aligned}$$

Exercice 8
Calculer à l'aide de la méthode des trapèzes l'intégrale $I = \int_0^{\pi} \sin\ x^2\ dx$ avec le nombre de points d'appui $n = 5$ puis $n = 10$.

Corrigé : Soit $I = \int_0^{\pi} \sin x^2\ dx$

1. $n = 5$ donc le pas d'intégration est $h = \frac{\pi}{5}$. Calculons I par la méthode des trapèzes.

$$\begin{array}{rcl} I & = & \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right) \\ & = & \frac{\pi}{10}(0 + 1 + 2(\sin(\pi)^2 + \sin(0) + 2(\sin(\frac{\pi}{5})^2 + \sin(\frac{2\pi}{5})^2 + \sin(\frac{3\pi}{5})^2 + \sin(\frac{4\pi}{5})^2)) \\ & = & 0.504431 \end{array}$$

2. $n = 10$ donc le pas d'intégration est $h = \frac{\pi}{10}$.

$$\begin{array}{rcl} I & = & \frac{\pi}{20}(0 + 1 + 2(\sin(\pi)^2 + \sin(0) + 2(\sin(\frac{\pi}{10})^2 + \sin(\frac{2\pi}{10})^2 + \sin(\frac{3\pi}{10})^2 + \sin(\frac{4\pi}{10})^2)) \\ & = & 0.722338 \end{array}$$

alors que la valeur 'exacte' est approximativement $0,772651$. Avec ce pas plus petit l'approximation numérique est meilleure.

Exercice 9
Trouver le nombre n de subdivisions nécessaires de l'intervalle d'intégration $[-\pi, \pi]$, pour évaluer à $0.5\ 10^{-3}$ près, grâce à la méthode de Simpson, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} \cos\ x\ dx$

Corrigé : Soit

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\ x\ dx$$

Le pas d'intégration est $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2\pi}{n}$. D'autre part l'erreur théorique sur la méthode de Simpson est donnée par

$$\begin{array}{rcl} E(h) & = & \frac{-(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \\ & = & \frac{-2\pi}{180}(\frac{2\pi}{n})^4 \cos(\xi) \end{array}$$

où $\xi \in [a, b]$, par conséquent,

$$|E(h)| \leqslant \left|\frac{-2\pi}{180}(\frac{2\pi}{n})^4\right|$$

Ainsi pour que $|E(h)| \leqslant 0.5\ 10^{-3}$ il suffit que n vérifie $\left|\frac{\pi}{90}\frac{16\pi^4}{n^4}\right| \leqslant 0.5\ 10^{-3}$, donc, $n^4 \geqslant \frac{1}{0.5\ 10^{-3}}\frac{\pi}{90}16\pi^4$. Ainsi n vérifie $n \geqslant 18.6$ On prendra par exemple $n = 20$, car pour la méthode de Simpson, le nombre de subdivisions de l'intervalle $[a, b]$ doit toujours être pair.

Exercice 10
Soit $a \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < n_n \leqslant b$ une partition fixée de l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n)$ de nombres réels tels que

$$\int_a^b P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \mu_i P(x_i)$$

Pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n.

Corrigé : Le polynôme P s'écrit dans la base de Lagrange $P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, P(x_i)$ (1)
avec $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$, puis on intégre (1) sur $[a, b]$, on obtient :

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i(x) P(x_i)\, dx = \sum_{i=0}^{n} \left(\int_a^b L_i(x)dx \right) P(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \mu_i P(x_i)$$

Exercice 11
Calculer $\int_1^2 \sqrt{x}dx$ par la formule des rectangles en décomposant l'intervalle d'intégration en dix parties. Évaluer l'erreur commise.

Corrigé : On $a = 1$, $b = 2$ et $n = 10$. Le pas de discrétisation $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = 0.1$

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = \int_1^{1,1} \sqrt{x}dx + \int_{1,1}^{1,2} \sqrt{x}dx + \cdots + \int_{1,8}^{1,9} \sqrt{x}dx + \int_{1,9}^{2} \sqrt{x}dx$$

On applique la formule des rectangles sur chaque sous intervalle, on obtient

$$\int_1^2 \sqrt{x}dx = h \left(\sqrt{1} + \sqrt{1,1} + \sqrt{1,2} + \cdots + \sqrt{1,8} + \sqrt{1,9} \right) \approx 1,1981$$

L'estimation de l'erreur comise par la méthode des rectangles est $|E| \leqslant \frac{h^2(b-a)}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$
On a $f(x) = \sqrt{x}$ et $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$ donc $\max_{x\in[1,2]} |f''(x)| \leqslant \frac{1}{4}$ ce qui implique que $|E| \leqslant 2.10^{-4}$

Exercice 12

1. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange $P(x)$ d'une fonction f construite sur les points :

$$-1, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}, \quad 1$$

2. Par intégration du polynôme obtenu, déduire la formule d'intégration approchée suivante :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{4} f(-1) + \frac{3}{4} f\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4} f(1)$$

Corrigé :

1. On pose $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 1$. Les polynômes auxiliaires de Lagrange associés sont :

$$L_0(x) = -\tfrac{16}{9}(x^3 - x^2 - \tfrac{1}{9}x + \tfrac{1}{9}) \qquad L_1(x) = \tfrac{27}{16}(x^3 - \tfrac{1}{x}x^2 - x + \tfrac{1}{3})$$
$$L_2(x) = -\tfrac{27}{16}(x^3 + \tfrac{1}{x}x^2 - x - \tfrac{1}{3}) \qquad L_3(x) = \tfrac{16}{9}(x^3 + x^2 - \tfrac{1}{9}x - \tfrac{1}{9})$$

l'expression du polynôme d'interpolation de Lagrange est

$$f(x) \approx P(x) = L_0(x)f(-1) + L_1(x)f(-\frac{1}{3}) + L_2(x)f(\frac{1}{3}) + L_3(x)f(1)$$

2. on intége le polynôme sur $[-1, 1]$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx &\approx \int_{-1}^{1} P(x)dx \\
&\approx \int_{-1}^{1} L_0(x)dx\ f(-1) + \int_{-1}^{1} L_1(x)dx\ f(-\frac{1}{3}) + \int_{-1}^{1} L_2(x)dx\ f(\frac{1}{3}) + \int_{-1}^{1} L_3(x)dx\ f(1) \\
&\approx \frac{1}{4}\ f(-1) + \frac{3}{4}\ f(-\frac{1}{3}) + \frac{3}{4}\ f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{4}\ f(1)
\end{aligned}$$

La résolution de l'équation F(x)=0

Exercice 13 Soit la fonction $F(x) = 2x^3 - x - 2$, on se propose de trouver les racines réelles de F par la méthode des approximations successives.

1. Montrer que F possède une seule racine réelle $\alpha \in [1,2]$
2. Etudier la convergence des trois méthodes itératives suivantes : $x_0 \in [1,2]$ donné et

$$(a) \quad x_{n+1} = 2x_n^3 - 2; \qquad\qquad (b) \quad x_{n+1} = \frac{2}{2x_n^2 - 1}$$

Corrigé : Soit l'équation $F(x) = 2x^3 - x - 2 = 0$. Il est clair que F est continue et déivable sur $\mathbb{R}$.
On a $F(1) = -1$, $F(2) = 12$, donc $F(1)\,F(2) < 0$. D'autre part, $F'(x) = 6x^2 \geqslant 0$ sur $[1,2]$. Donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe une seule solution $\alpha \in [1,2]$ telle que $F(\alpha) = 0$.

(a) Etudions la convergence de la suite $x_{n+1} = g_1(x_n) = 2x_n^3 - 2$. Tout d'abord, cette suite, si elle converge, conduit bien à une racine de $F(x) = 0$ car si α est la limite de la suite (x_n), alors

$$\alpha = 2\alpha^3 - 2 \qquad \text{donc} \qquad F(\alpha) = 2\alpha^3 - \alpha - 2$$

Par ailleurs, $g_1'(x) = 6x^2 \geqslant 6$ sur $[1,2]$. Par conséquent, grâce au théorème des accroissements finis, il existe ξ_n compris entre x_n et x_{n+1} tel que

$$|g_1(x_{n+1}) - g_1(x_n)| = g_1'(\xi_n)\,|x_{n+1} - x_n|$$

donc

$$\begin{aligned} |g_1(x_{n+1}) - g_1(x_n)| &\geqslant 6\,|x_{n+1} - x_n| \\ &\geqslant 6^2\,|x_n - x_{n-1}| \\ &\;\;\vdots \\ &\geqslant 6^n\,|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

Ainsi, cette suite diverge et la méthode est à rejeter.

(b) Étudions la convergence de $x_{n+1} = g_2(x_n) = \dfrac{2}{2x_n^2 - 1}$. Cette méthode, si elle converge conduit vers la racine α de $F(x)$ dans $[1,2]$, car si α est la limite de la suite (x_n), alors

$$\alpha = \frac{2}{2\alpha^2 - 1} \qquad \text{donc} \qquad F(\alpha) = 2\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 g_2'(x) = \frac{-8x}{(2x^2-1)^2} \quad \text{donc} \qquad -8 < g_2''(x) = \frac{8(6x^2+1)}{(2x^2-1)^3} < \frac{16}{49}$$

En conséquence, on ne peut conclure sur la monotonie de g_2

Exercice 14
On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x = g(x)$ où $g(x) = -\ln x$,

1. a) Montrer qu'elle admet une seule racine α, montrer que $\alpha \in I = [0,1]$.
   b) Montrer que la méthode itérative : $x_{n+1} = g(x_n)$ diverge.
   c) on considère alors $g^{-1}(x) = g^{-1}(g(x)) = x$, (remarquer que g^{-1} existe)
   montrer que la méthode itérative : $x_{n+1} = g^{-1}(x_n)$ converge. En posant $e_n = x_n - \alpha$ montrer que e_{n+1} est de signe opposé à e_n, que peut-on déduie ?
2. Retrouver α à l'aide de la méthode de Newton.

Corrigé :

Exercice 15
Soit l'équation

$$x\,(1 + e^x) = e^x \qquad\qquad (1)$$

1. Montrer que cette équation admet une racine unique s dans $[0, 1]$
2. Proposer une itération de point fixe pour l'équation (1).
3. Montrer, que cette itération converge vers la solution s.
4. Écrire la méthode de Newton pour cette équation en précisant un bon choix de l'initialisation x_0.

Corrigé : On pose $f(x) = x\,(1 + e^x) - e^x$

1. On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 1 \Rightarrow f(0)\,f(1) \leqslant 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires la fonction f admet au moins une racine sur $[0, 1]$ et puisque f est monotone, cette racine est unique.
2. On considère l'itéation du point fixe suivante : $x_{n+1} = g(x_n) = \dfrac{e^{x_n}}{1 + e^{x_n}}$
3. g est contractante car $g'(x) = \dfrac{e^x}{(1 + e^x)^2}$ et $|g'(x)| < 1 \quad \forall x \in [0, 1]$

   puisque g est croissante, on a $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{2} = g(0) \leqslant g(x) \leqslant g(1) = \dfrac{e}{1 + e} < 1$ alors on a $g([0, 1]) \subset [0, 1]$. D'après le théoème de convergence du point fixe, notre itéation proposée converge vers la solution de l'équation (1).
4. La méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n(1+e^{x_n})-e^{x_n}}{1+x_n e^{x_n}}$

   Choix de l'initialisation x_0, il doit vérifier la condition $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$. On a $f(x) = x(1 + e^x) - e^x$ et $f''(x) = (1 + x)e^x$, on prend par exemple $x_0 = 1$

Exercice 16 Soit l'équation $\ln(x) = 2 - x$

1. Montrer que cette équation admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, 2]$
2. Étudier l'itération
$$\begin{array}{l} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = 2 - \ln(x_n) \end{array}$$
   et montrer que cette itération converge vers α.
3. Montrer que l'équation proposée est équivalente à l'équation $x = e^{2-x}$, et étudier l'itération
$$\begin{array}{l} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = e^{2-x_n} \end{array}$$
   Qu'en déduisez-vous ?
4. Écrire la méthode de Newton pour l'équation proposée et proposer un bon choix d'initialisation x_0 de cette méthode.

Corrigé : Soit la fonction $f(x) = \ln(x) + x - 2$, on considère l'équation '$f(x) = 0$'

1. On a $f(2) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins une racine α de l'équation '$f(x) = 0$' et puisque f est strictement monotone (coissante) sur $]0, 2[$, alors la racine α est unique.
2. posons $g(x) = 2 - \ln(x)$, on a $g'(x) = -\frac{1}{x}$ et $\left|g'(\frac{1}{2})\right| = 2$ donc g n'est pas contractante.
3. On a $x = 2 - \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{2-x}$, donc pour x_0 donné, l'itération $x_{n+1} = 2 - \ln(x_n)$ est équivalente à l'itération $x_{n+1} = e^{2-x_n}$.

   posons $h(x) = e^{2-x}$ et étudions la fomulation $x_{n+1} = h(x_n)$.

Résolution des équations différentielles

Exercice 17 Soit le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y' = y - 2x & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calculer la solution exacte.
2. Calculer les valeurs approchées y_1 et y_2 par la méthode d'Euler pour $h = 0.1$ et $n = 10$.

Exercice 18 Soit l'équation différentielle à condition initiale $y'(t) = y(t) + t$ et $y(0) = 1$. Approcher la solution de cette équation en $t = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler en subdivisant l'intervalle de travail en 10 parties égales. Comparer à la solution exacte.

Coorigé :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) + t = f(t, y) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

L'intervalle d'intégration est $[0, 1]$. Remarquons tout d'abord que f étant continue et lipschitzienne par rapport à y le problème de Cauchy (1) admet une solution unique.
Méthode d'Euler Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \\ &= y_n + h(t_n + y - n) \\ &= (1 + h)y_n + ht_n \end{aligned}$$

On a aussi $y(0) = y_0 = 1$, $h\dfrac{1-0}{10} = 0.1 \quad t_0 = 0$ et $t_n = t_0 + nh = \dfrac{n}{10}$. D'où l'approximation en t de $y(t)$, est $y_{10} = 3.1874$.
Solution exacte de cette équation en appliquant la méthode de la variation de la constante est donnée par : $y(t) = -1 - t + 2e^t$ ce qui implique $y(1) = -1 - 1 + 2e = 3.4366$
Estimation de l'erreur : l'erreur effectivement commise lors de l'application de la méthode d'Euler est $|E| = |3.4366 - 3.1874| = 0.25$

Exercice 19 Soit l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) = -2xy^2, \qquad x \in [0, 5] \qquad y(0) = 1$$

1. Calculer la solution exacte
2. En appliquant la méthode de Range Kutta d'ordre 2, calculer les valeurs approchées y_0 et y_1, avec un pas $h = 0.5$