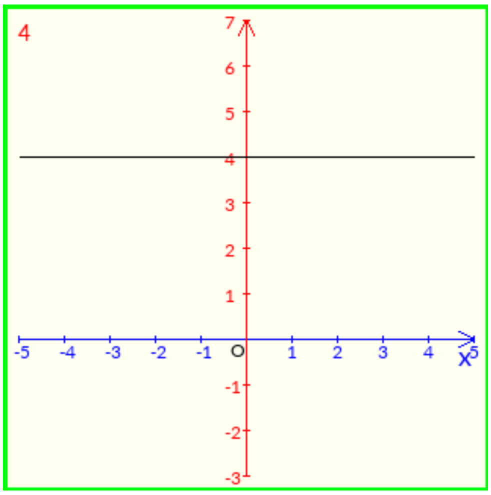
Nombres, fonctions, polynômes, équations

Voici une gymnastique un peu hors-programme, mais qui recoupe tellement de notions parfaitement aux programmes du collège et du lycée qu'elle mérite notre attention.
Par exemple, on va finir par diviser les polynômes entre eux ! Carrément. Ajouter, soustraire, multiplier les polynômes, pas de souci. Mais diviser ! Notez que c'est un peu comme chez les nombres usuels. La division, c'est toujours le plus difficile. En explorant les confins « interdits » puisque hors programme des mathématiques, on consolidera énormément de choses parfaitement au menu « légal ». En attendant, on va poser quelques bases.

Quelques petites notions.

Un polynôme est une somme de termes tous construits sur le même modèle : une puissance de la variable, (c'est souvent x), affectée d'un coefficient. Cette structure s'appelle un monôme. Un seul « nôme », c'est à dire un seul nom[1], et plusieurs dans un polynôme. Nous nous bornerons au cas réel : les coefficients aussi bien que la variable sont des nombres, entiers, rationnels, irrationnels, enfin bref, réels. Nous ne nous occuperons pas pour l'instant des nombres dits « complexes », qui n'arrivent qu'en terminale, et qu'au seizième siècle.

Voici par exemple un polynôme de degré 2 : $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$
« degré 2 », car la plus grande puissance de x est 2. Vous me direz, c'est la seule ! C'est donc forcément la plus grande ! Et la plus petite !? Vrai pour la première chose, faux pour la seconde. Car le x tout seul avec son 5, dans le 5x, il est à la puissance 1, en fait. Eh oui ! 10, par exemple, c'est 10 tout seul, c'est dix présent une seule fois dans le produit, et c'est donc 10 à la puissance 1.
Et c'est pas tout : y a encore une autre puissance de x ! Où ça ? Là. Où ? le +3 ! Il est égal à 3 fois x à la puissance zéro ! on pourrait écrire $3\ x^0$ à la place de 3. Car $x^0 = 1$.
En effet, x^0, c'est un produit qui contient combien de x ? ben 0. Or, un produit, quand on a tout retiré, ce qui reste, c'est pas 0, c'est 1 !

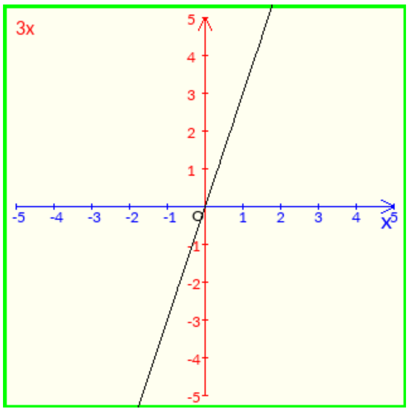


$Q(x)= 4$

La plus petite puissance possible pour un des monômes d'un polynôme, c'est zéro. Le monôme de degré zéro, on va l'appeler le monôme constant. Ou même la constante. Si un polynôme se réduit à un monôme de degré 0, ça nous donne un nombre constant, ça nous donne une fonction constante.
Le degré zéro, pour un polynôme, c'est la constance.

---

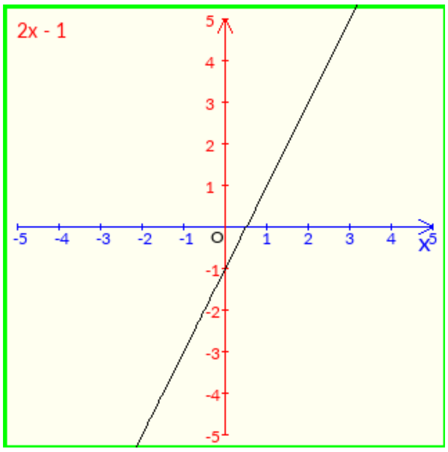
[1] Plus exactement « groupe nominal ». Cette idée est importante : $3x^2$, c'est comme 3 poires ! $2x + 3\ x^2$, c'est comme 2 pommes et 3 poires : on ne peut pas réduire. Par contre, $3x + 2x = 5x$; $3x^2 + 2x^2 = 5x^2$. Les maths servent entre autres choses à compter des objets de même nature.



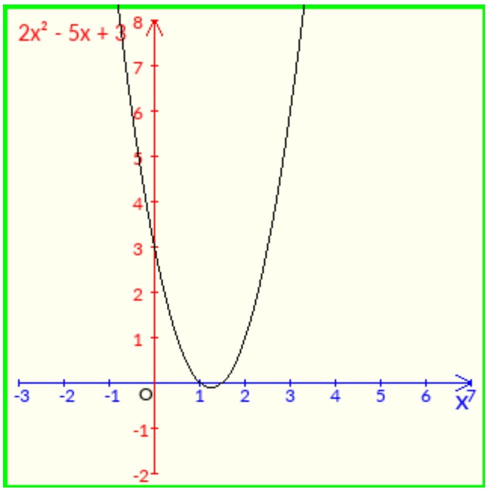
$R(x) = 3x$

Si un polynôme se réduit à un monôme de degré 1, par exemple $P(x) = 3x$, ça donne une fonction linéaire. Par une telle fonction, l'image de 0 est forcément 0 : le point O, origine du repère, de coordonnées (0, 0), appartient donc à la courbe de la fonction. Il en ira de même de tout polynôme dont le monôme de puissance 0, le monôme constant, est nul.

$S(x)= 2x - 1$



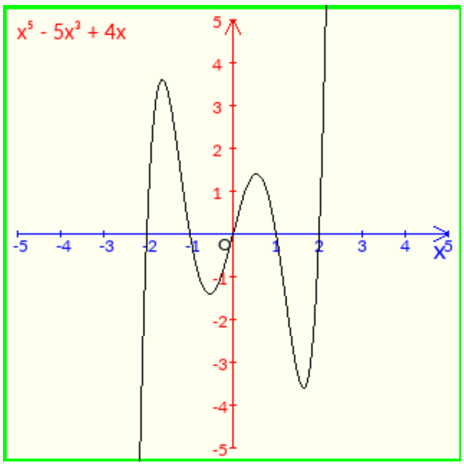
Pour une fonction affine, c'est à dire une fonction qui à x associe un polynôme en x de degré 1, donc ayant un monôme de degré 1, et éventuellement un de degré 0, donc constant, cette constante s'appelle ordonnée à l'origine. [2]



$P(x) = 2x^2 - 5x + 3$

Et maintenant, on sort des fonctions affines, c'est à dire en ce qui concerne la représentation graphique, on sort de la droite. La courbe d'une fonction polynôme de degré supérieur à 1, donc au moins égal à 2, est une vraie courbe, pas une droite (en maths, il y a des courbes qui sont droites !)
Par exemple P(x) mentionné plus haut. Ou encore A(x), mentionné plus bas.

$T(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$



Et voilà un polynôme rigolo qui s'annule 5 fois, ce qui est le max pour un polynôme de degré 5.

[2] On pourrait très bien garder le terme pour tout polynôme. Quelque soit son degré, il prendra toujours la valeur du coefficient de son monôme constant si on attribue la valeur zéro à la variable.
Par exemple, calculons $P(0) = 2 \times 0^2 - 5 \times 0 + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$. 3 est donc l'ordonnée du point de la courbe de P quand elle passe au dessus, ou au dessous, de l'origine.

Exercices (les 2 et 3 s'éclairent l'un l'autre)

1) Pour chacune de ces fonctions polynômiales, lire graphiquement le nombre et les valeurs éventuelles de leurs *racines* : solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Vérifier par le calcul que ces valeurs sont bel et bien solutions.

2) En déduire la factorisation de $P(x)$ et $T(x)$.
Vérifier en redéveloppant.

3) Soit $A(x) = (x + 3)(2x - 1)$
Résoudre immédiatement (je veux dire sans développer, en tout cas) l'équation $A(x) = 0$.
Quelle est la règle (ou théorème) mathématique qu'on a utilisée dans les exercices 2 et 3 ?
Tracer la courbe de A dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (petits carreaux, c'est mieux).
À titre d'exercice supplémentaire, donner la forme développée.

On va maintenant retrouver numériquement les solutions trouvées en 1 pour certains polynômes (ce qui tiendra lieu de vérification) :

4) Pour rigoler, en seconde, troisième, quatrième, et même en sixième et cinquième :
résoudre $S(x) = 0$
$R(x) = 0$

5) Résoudre $Q(x) = 0$

6) Développez $2((x - 5/4)^2 - 1/16)$; si vous avez bon, vous devez constater quelque chose de rigolo relativement à $P(x)$. Résoudre alors $P(x) = 0$, et faire le rapprochement avec la résolution graphique de la question 1. (Si vous êtes en première, bien sûr, vous avez pu résoudre sans cette forme canonique, en utilisant la méthode du discriminant).

Solutions

exercice 1

La « courbe » de Q, qui est une droite horizontale, ne coupe jamais l'axe des x : aucun de ses points n'a pour abscisse 0, aucune valeur de x telle que Q(x) = 0. L'équation Q(x) = 0 n'a pas de solution. S, l'ensemble des solutions, est vide.

La « courbe » de R coupe l'axe des x au point d'abscisse 0 (origne). On trouve donc une valeur, unique, à l'équation R(x) = 0 : c'est 0. L'ensembles des solutions de cette équation est donc {0}, constituée de la seule valeurs 0.

La « courbe » de S coupe l'axe des x au point d'abscisse 1/2 (0,5). S = {1/2}

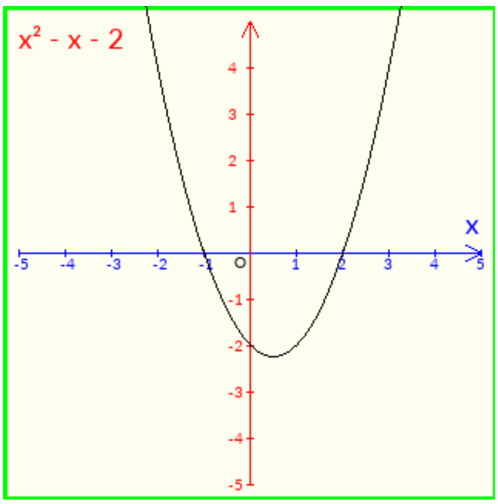
La courbe de P coupe 2 fois l'axe des x, aux points d'abscisses 1 et 1,5. S = {1, 3/2}
La courbe de T coupe 5 fois l'axe des x, aux points d'abscisses -2, -1, 0, 1, 2.
S = {-2, -1, 0, 1, 2}

exercice 2

On utilise le théorème du produit nul : un produit est égal à zéro si, et seulement si, l'un de ses facteurs au moins est nul. (On connaît ça depuis perpette, avec cette table de multiplication par zéro, si sympa : 1 fois zéro zéro, 2 fois zéro zéro, etc.)
Puisque P s'annule pour x = 1, c'est qu'un de ses facteurs s'annule pour x = 1 (le produit est nul seulement si un facteur est nul) :
ce sera (x - 1) ; puisque P s'annule en 3/2, un autre de ses facteurs s'annule pour x = 3/2. On peut prendre (x - 3/2), mais aussi (2x - 3). Nous avons donc les deux produits (x - 1) (x - 3/2) et (x - 1)(2x - 3). C'est le second qui est égal à P, car le coefficient dominant, celui de x^2, est 2. On confirme en développant : x * 2x = $2x^2$, x * -3 = -3x, -1 * 2x = -2x, -1 * -3 = +3. -3x et -2x se regroupent et font -5x. On a bien $2x^2 - 5x + 3$.

exercice 3

A(x) = (x - 2) (x + 1)
Toujours avec la même règle du produit nul, mais utilisé dans l'autre sens (le produit est nul si le facteur est nul), il faut que x - 2, ou x + 1, soit nul, donc x = 2 ou -1.
Pour s'entraîner on développe : x * x = x^2, x * 1 = x, -2 * x = -2x, -2 * 1 = -2 ; on regroupe x et -2x, ça fait -x : A(x) = x^2 - x - 2.



exercice 4

Résolutions numériques

$S(x) = 0$	$2x - 1 = 0$	
	$\Leftrightarrow 2x = 1$	
	$\Leftrightarrow x = 1/2$	$s = \{1/2\}$
$R(x) = 0$	$3x = 0$	
	$\Leftrightarrow x = 0$	$s = \{0\}$

exercice 5

$Q(x) = 0$ est impossible ! Puisque $Q(x) = 4$ pour toute valeur de x, comment voulez-vou ?
l'ensemble de solution, s, est vide

exercice 6

$2((x - 5/4)^2 - 1/16) = 2((x^2 + (5/4)^2 - 2 * x * 5/4) - 1/8)$
$= 2x^2 + 25/8 - 5 x- 1/18$
$= 2x^2 - 5x + 3 = P(x)$!

En fait, cette expression que nous venons de développer est la « forme canonique » de P(x), celle qui permet d'écrire le polynôme avec une seule occurrence de « x » (au lieu de 2 ,une dans $2x^2$, une autre dans 5x. Cette unique présence de x permet de l'isoler et de l'exprimer en fonction de constantes, donc de le calculer.

Faisons-le :

$2((x - 5/4)^2 - 1/16) = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5/4)^2 - 1/16 = 0/2 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 5/4)^2 = 1/16$
$\Leftrightarrow x - 5/4 = \sqrt{(1/16)}$ ou $x - 5/4 = - \sqrt{(1/16)}$
$\Leftrightarrow x = 1/4 + 5/4$ ou $x = 1/4 - 5/4$
$\Leftrightarrow x = 3/2$ ou $x = -1$

On a bien retrouvé les mêmes solutions qu'avec notre résolution graphique.