

Projet 1

Méthodes de calcul numérique

Groupe 4 - Equipe 2

Responsable : Kamgang Nintcheu David

Secrétaire : Langlais Hugo

Codeurs : Roger Gaetan, Medina Enzo

Résumé : Ce projet consiste à étudier les calculs numériques sur machine. La première partie se focalise sur l'erreur relative engendrée par les calculs machines. La seconde en revanche, étudie les algorithmes par des machines possédant des ressources limitées (mémoire, puissance de calcul).

Partie I - Représentation des nombres en machine

Les machines manipulent des bits. Lors de calculs, des erreurs sont donc engendrées. Nous commençons par étudier l'erreur relative ainsi créée.

Représentation décimale réduite

Dans un premier temps, on crée la fonction $rp(x, p)$ qui nous permet de récupérer la représentation décimale réduite d'un nombre en fonction d'une précision donnée.

Pour cela, nous récupérerons d'abord la notation scientifique du nombre x . Puis nous sélectionnons seulement les p premières décimales de ce nombre et enfin nous multiplions le résultat obtenu par la puissance de dix permettant un résultat du même ordre de grandeur que le x passé en paramètre.

Opérations usuelles en représentation décimale réduite

Pour simuler les opérations usuelles (addition ou multiplication) en représentation décimale réduite, on crée une fonction qui prend en argument les deux nombres et la précision demandée (On part du principe que la précision est commune aux deux nombres).

On commence par récupérer la représentation décimale réduite des deux nombres via la fonction précédente. Ensuite, on calcule la somme (respectivement la multiplication) et on en calcule la représentation décimale réduite. On est obligé de réutiliser la fonction car la somme (respectivement la multiplication) de deux nombres ne donnent pas nécessairement un nombre avec la bonne précision.

Exemple : Une précision de 3 sur les nombres 8.547 et 3.589 nous donne 8.54 et 3.59. En les sommant, on obtient 12.13 qui a une précision de 4. On est donc bien obligé d'appeler une seconde fois la fonction $rp()$ pour une obtenir une précision de 3.

Erreur relative

On calcule l'erreur relative de la somme et de la multiplication donnée par les formules :

Erreur relative sur la somme :

$$\delta_s(x, y) = \frac{|(x + y)_{reel} - (x + y)_{machine}|}{|(x + y)_{reel}|} \quad (1)$$

Erreur relative sur le produit :

$$\delta_p(x, y) = \frac{|(x * y)_{reel} - (x * y)_{machine}|}{|(x * y)_{reel}|} \quad (2)$$

Ici, on considère le résultat "réel" comme étant celui calculé par python. Le résultat machine correspond à notre calcul précédent. On arrive alors à obtenir une erreur relative qui nous permet d'examiner la précision de notre calcul. Sans surprise, plus la précision est forte, plus l'erreur relative est faible.

Graphes d'erreur relative

On pose une précision égale à 3 pour n'avoir ni une précision trop forte (impliquant une erreur relative trop faible) ni une précision trop faible (impliquant une erreur relative trop forte).

Les figures 1 et 2 ci-dessous représentent les erreurs relatives $x = 1$, soit une précision supérieure aux décimales du nombre, et $x = 5.7555$ soit une précision inférieure aux décimales du nombre. On remarque que l'erreur est maximale quand la somme à calculer est nulle. De plus cette erreur est bien plus grande dans le cas où $x = 5.7555$ que dans le cas où $x = 1$ cela peut s'expliquer par le fait que dans ce deuxième cas x possède plus de décimales que la précision choisie ainsi le nombre étant tronqué l'erreur relative en sera donc augmentée.

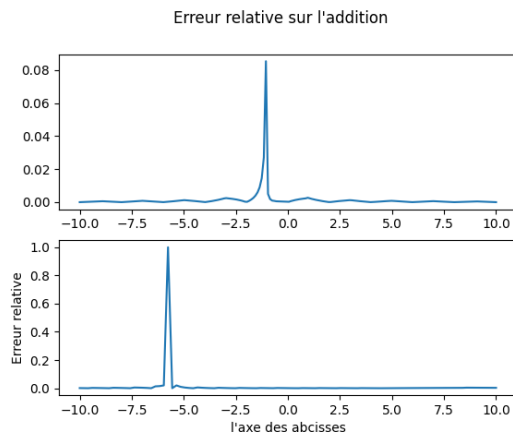


FIGURE 1 – Erreur relative sur la somme

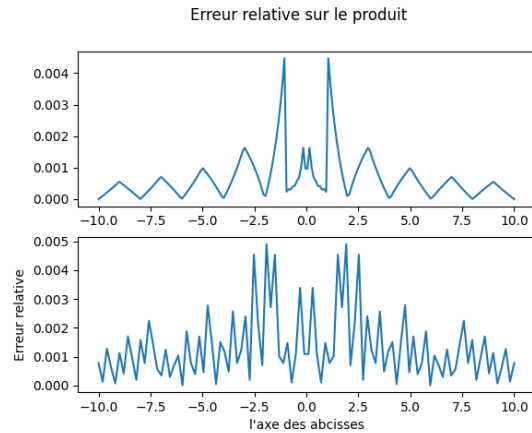


FIGURE 2 – Erreur relative sur le produit

Nous avons conservé les mêmes valeurs de x pour l'erreur relative sur le produit. On peut remarquer que les résultats sont bien moins prévisibles et que surtout l'erreur relative atteinte est beaucoup plus faible.

Logarithme

On commence par simplifier $\log(2)$ avec l'équation 3 afin d'éviter les soustractions et donc pour limiter les erreurs :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow \log(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k-1)} \quad (3)$$

En utilisant le critère spécial des séries alternées, on peut majorer l'erreur absolue ϵ de la somme des N premiers termes de la série. Obtient donc l'équation 4 :

$$\epsilon \leq \frac{1}{2N+1} \quad (4)$$

Par conséquent, pour obtenir une précision sur p décimales, on a besoin d'aller à un N égal à 10^p .

Dès lors que l'on arrive à calculer un logarithme approché (en fonction de la précision), on peut en déduire l'erreur relative en fonction de la précision. On affiche sur un graphe l'erreur relative jusqu'à la précision 6 (On ne voit plus de différence avec une précision 7 ou au-dessus, l'erreur relative étant inférieure à 1.10^{-6}). Nous obtenons donc les figures suivantes 3 et 4.

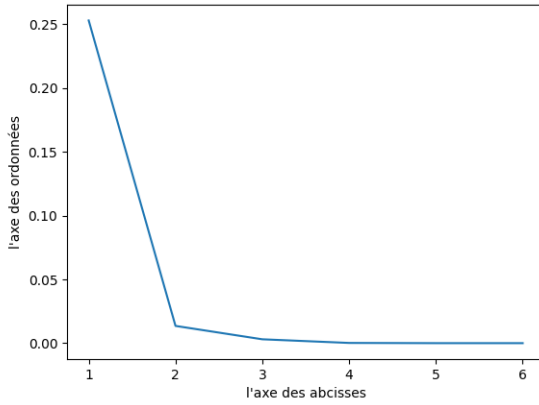


FIGURE 3 – Erreur relative du log en fonction de la précision

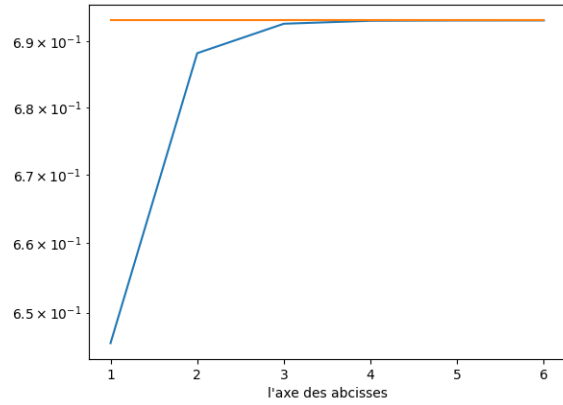


FIGURE 4 – Les deux log calculés, valeur réelle et valeur approchée en fonction de la précision

Partie II - Algorithmes CORDIC

Nous allons maintenant étudier les algorithmes de calcul CORDIC utilisées par les calculatrices, machines avec peu de ressources. Ces derniers doivent rester précis malgré leur grande optimisation.

Représentation des nombres sur calculatrice

Dans une calculatrice, les nombres sont représentés en Binaire Code Decimal (ou BCD), une écriture binaire plus proche de notre représentation usuelle. Voici son principe : les nombres sont représentés par des nombres décimaux et chaque chiffre est codé sur 4 bits.

Voici un exemple d'écriture du nombre 12 :

Base 10	Binaire	Binaire Code Decimal	
12	1100	<u>0001</u>	<u>0010</u>
		1 en binaire	2 en binaire

Cette représentation présente certains avantages et inconvénients par rapport à l'écriture binaire dite classique, ils sont les suivants :

Avantages :

- La multiplication et la division par 10^n est plus rapide : shift left ou droit de $4n$ bits (avec n entier).
- Toutes les fonctions 'standards' peuvent se ramener aux quatre fonctions suivantes : \ln , \exp , \tan , \arctan
- Possibilité d'utiliser les algorithmes CORDIC qui permettent d'avoir une précision de plus de 12 chiffres avec seulement une quinzaine de valeurs précalculées.

Inconvénients :

- La multiplication et la division par 2^n est plus lente : le shift de 1 bit ne multiplie ou divise plus par 2 (avec n entier)
- Un même nombre x , prends plus de place en mémoire : on a besoin de $4n$ bits contre $\log_2(x) + 1$ (avec n le nombre de chiffres dans x en représentation décimale)
- L'algorithme CORDIC nécessite certaines valeurs précalculées, elles prennent donc un espace mémoire supplémentaire et il faut possiblement les calculer.
- La précision des calculs dépend de celle des valeurs précalculées.

Analyse des algorithmes CORDIC

L'algorithme CORDIC est basé sur 2 concepts importants :

- La recherche : On s'approche de la valeur cible en ajoutant des valeurs précalculées de plus en plus petites
- Le remplacement des multiplications coûteuses en temps par des shifts

Technique générale :

- Le nombre en entrée noté x peut se décomposer sous un produit partiel (pour \ln et \exp) ou une somme partielle (pour \tan et \arctan) des valeurs précalculés
- On se sert de ces produits ou sommes pour exploiter les développements limités à l'ordre 1 des fonctions considérées. Ainsi on approche x en sommant les puissances de 10 (pour une représentation BCD), pondérés par un terme dépendant de la fonction
- Pour chaque terme sommé, on ajoute un terme précalculé au résultat, pondéré par un terme dépendant de la fonction
- On retourne le résultat en ajoutant un terme d'erreur

Cette technique est efficace car les valeurs précalculées et l'approche du nombre utilisent des multiplications et des divisions par des puissances de 10. Grâce à l'écriture BCD, lors de l'exécution de l'algorithme, la calculatrice ne fait presque qu'exclusivement des shift très peu coûteux.

Implémentation des algorithmes sous Python

Nous implémentons les algorithmes dans le fichier `cordic.py`. Nous utilisons les pseudos algorithmes donnés dans les ressources du sujet afin d'implémenter nos algorithmes. Les valeurs précalculées sont générées grâce au module `numpy` avec une précision de 17 chiffres significatifs, ce qui est supérieur aux 12 chiffres de précision en sortie d'algorithme.

Nos algorithmes sont divisés en deux parties. La première ramène la valeur en entrée dans l'intervalle où la méthode est applicable. Nous utilisons les décompositions données dans les ressources du sujet, en vérifiant préalablement qu'elles sont bien équivalentes. La seconde partie calcule et retourne le résultat en utilisant l'algorithme CORDIC.

La première partie est testée en comparant le résultat avec et sans réduction de l'intervalle (la seconde partie fonctionne en effet sur \mathbb{R}). Les résultats de la seconde partie sont comparés avec les valeurs obtenues avec WolframAlpha et l'implémentation des fonctions `ln`, `exp`, `tan` et `arctan` dans la librairie `numpy` de python. Les figures 5 et 4 représentent une partie des résultats des tests :

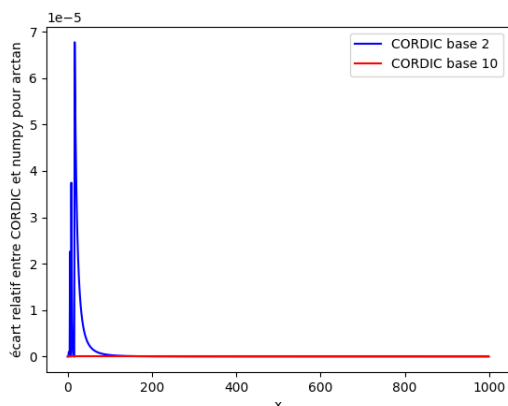


FIGURE 5 – Différence entre l'implémentation CORDIC de `arctan` et celle du module `numpy` de python pour les bases 2 et 10

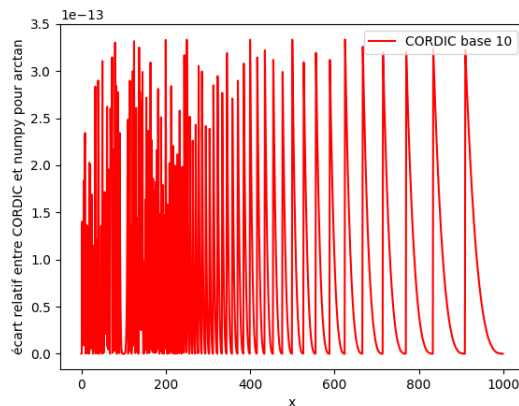


FIGURE 6 – Différence entre l'implémentation CORDIC de `arctan` et celle du module `numpy` de python pour la bases 10 uniquement

Nous remarquons que la précision des résultats diminue si nous utilisons la base 2, ce qui conduit à remplacer tous les 10^n par 2^n . La figure 5 montre la différence de précision par rapport à `numpy`. Pour la base 10, l'écart maximal avec `numpy` est de l'ordre de 10^{-13} , 10^{-5} pour la base 2. Les algorithmes ainsi modifiés se trouvent également dans le fichier `cordic.py`. De plus, avec un tableau plus grand, il est possible d'augmenter la précision du résultat (il faut également modifier les boucles `while`)

Problèmes lors de l'évaluation de fonctions usuelles en machine

(P.167) Certaines fonctions usuelles, comme le sinus, ont un développement en série entière qui converge lentement, ce qui rend le temps de calcul très long lors de l'évaluation informatique de la fonction à partir de sa série entière. Une façon de résoudre ce problème est de faire une transformation d'Euler de cette série entière, ainsi nous sommes sûrs que les nouveaux termes de la série obtenue

convergent rapidement vers 0.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} \quad (5)$$

ou

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \dots \quad (6)$$

(P.186) Cependant en supposant qu'on a réussi à avoir une implémentation efficace d'une fonction f , il reste à minimiser les erreurs liées à l'évaluation de ses dérivés. On a pour h proche de 0 :

$$f(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (7)$$

Cette expression, provenant de la définition de la dérivée, est source d'erreurs informatiquement.

La première erreur est de choisir un h fixé et d'abandonner les termes restants du développement de Taylor de la fonction en x :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f' + \frac{1}{2} h f'' + \dots \quad (8)$$

Pour pallier ce problème, il convient de choisir un h optimal de sorte à minimiser l'erreur dans notre expression approximative 7. En notant e_f la précision sur notre évaluation de f , le h optimal à choisir est $h = \sqrt{x e_f}$.

(P.186) La seconde erreur est due à l'encodage des nombres sur machine. Le h qu'on a choisi peut-être arrondi. Pour des fonctions comme \tan qui croît extrêmement vite au voisinage de $\frac{\pi}{2}$, ces arrondis peuvent donner des valeurs de dérivées fausses. Une solution est de choisir alors h de sorte que $x + h$ dans 7 soit représentable en mémoire de manière exacte.