MATRIčNA NORMA, POROJENA IZ VEKTORSKE NORME

Trditev 0.1. Naj bo $\|\cdot\|_*$ vektorska norma na $\mathbb{C}^n$. Potem predpis

$$\|A\|_* := \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_* = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}. \tag{0.1}$$

določa matrično normo na $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Dokaz. Preverimo najprej drugo enakost v (0.1):

$$\max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = \max_{x\neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_*}\right)\right\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_*\,,$$

kjer smo v prvi enakosti upoštevali pozitivno homogenost vektorske norme $\|\cdot\|_*$.

Preveriti moramo vse štiri zahteve za matrične norme:

Pozitivna definitnost: Če je $A \neq 0$, potem obstaja $x' \in \mathbb{C}^n$, da velja $\|x'\| = 1$ in $Ax' \neq 0$. Zato je $\|A\|_* = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_* \geq \|Ax'\| > 0$. Če je $A = 0$, potem je očitno $\|A\|_* = 0$.

Homogenost: Velja

$$\|\alpha A\|_* = \max_{\|x\|=1} \|\alpha Ax\|_* = |\alpha| \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_* = |\alpha|\|A\|_*,$$

kjer smo v drugi enakosti upoštevali, da je $\|\cdot\|_*$ vektorska norma.

Trikotnišna neenakost: Velja

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_* &= \max_{\|x\|=1} \|(A+B)x\|_* = \max_{\|x\|=1} \|Ax+Bx\|_* \\
&\leq \max_{\|x\|=1} (\|Ax\|_* + \|Bx\|_*) \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\|_* + \max_{\|x\|=1} \|Bx\|_* \\
&= \|A\|_* + \|B\|_*,
\end{aligned}$$

kjer smo v prvi neenakosti upoštevali, da je $\|\cdot\|_*$ vektorska norma iz zato izpolnjuje trikotniško neenakost.

Submultiplikativnost: Velja

$$\begin{aligned}
\|AB\|_* &= \max_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|_*}{\|x\|_*} = \max_{x\neq 0, Bx\neq 0} \left(\frac{\|ABx\|_*}{\|Bx\|_*}\frac{\|Bx\|_*}{\|x\|_*}\right) \leq \max_{Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|_*}{\|Bx\|_*} \cdot \max_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_*}{\|x\|_*} \\
&\leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} \cdot \max_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_*}{\|x\|_*} = \|A\|_*\|B\|_*,
\end{aligned}$$

kjer smo v drugi enakosti upoštevali, da za $Bx = 0$ velja $\|ABx\|_* = 0$. $\square$