Pravilnost QR iteracije

Trditev 1. Naj bo A_i zaporedje iz QR iteracije matrike A.

1. A_{i+1} je ortogonalno podobna A_i
2. A_i izračunan s QR iteracijo je enak $Z_i^T A Z_i$, kjer je Z_i matrika dobljena z ortogonalno iteracijo z $Z_0 = I_n$. Torej A_i konvergirajo proti Schurovi formi za A.

Dokaz. Ker velja $A_{i+1} = R_{i+1} Q_{i+1} = Q_{i+1}^T A_{i+1} Q_{i+1}$, prvi del trditev sledi.

Drugi del dokažimo z indukcijo. Za $i = 0$ trditev očitno velja. Predpostavimo, da velja za nek i, tj. $A_i = Z_i^T A Z_i$, in dokažimo veljavnost za $i + 1$. Iz ortogonalne iteracije velja $AZ_i = Z_{i+1} R_{i+1}$. Od tod sledi $Z_i^T A Z_i = Z_i^T Z_{i+1} R_{i+1}$. Torej je po indukcijski predpostavki $A_i = Z_i^T Z_{i+1} R_{i+1}$. Iz enoličnosti QR razcepa do množenja vrstic R in stolpcev Q z ± 1, velja, da je $\left(Z_i^T Z_{i+1}\right) R_{i+1}$ ravno QR razcep matrike A_i. Torej je

$$A_{i+1} = R_{i+1}\left(Z_i^T Z_{i+1}\right) = (Z_{i+1}^T Z_i Z_i^T A Z_i)\left(Z_i^T Z_{i+1}\right) = Z_{i+1}^T A Z_{i+1},$$

kar konča dokaz. $\square$