IZREK O DELJENIH DIFERENCAH

Izrek 1 (O koeficientih Newtonovega interpolacijskega polinoma)**.** Naj bo f dana funkcija in $x_0, \ldots, x_n$ točke. Veljata naslednji trditvi:

(1) Koeficienti Newtononovega interpolacijskega polinom p_n stopnje največ n, ki se z f ujema v točkah $x_0, \ldots, x_n$, so enaki
$$c_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i], \quad i = 0, \ldots, n.$$

(2) Deljene diference povezuje formula
$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Dokaz. (1) dokazujemo z indukcijo. Za $n = 0$ velja $p(x) = f(x_0) = f[x_0]$, in trditev velja. Preverimo, da iz veljavnosti za $n-1$ sledi veljavnost za n. Po definiciji je

$$p_n(x) = f[x_0, \ldots, x_n]x^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i. \tag{1}$$

V Newtonovi obliki pa velja

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(c_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right) \tag{2}$$

Ker se polinom
$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(c_i \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$
ujema z f v $x_0, \ldots, x_{n-1}$, velja
$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + c_n \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j).$$
Po indukcijski predpostavki za $n-1$ velja
$$c_i = f[x_0, \ldots, x_i], \quad i = 1, \ldots, n-1.$$
Ker je vodilni koeficient v (1) enak kot v (2), velja še
$$c_n = f[x_0, \ldots, x_i].$$
To dokaže (1).

Ostane dokaz (2). Naj bosta p, q interpolacijska polinoma, ki se z f ujemata v točkah $x_1, \ldots, x_n$ oz. $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Potem je f enak
$$f(x) = \frac{(x - x_0)p(x) - (x - x_n)q(x)}{x_n - x_0}.$$
Od tod z uporabo (2) za polinoma p in q sledi formula v (2). $\square$