1-NORMA MATRIKE

Trditev 0.1. Naj bo $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika. Velja

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \big).$$

Dokaz. Pišimo $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ in $A = \left[\begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n \end{array} \right] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, kjer so $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ stolpci matrike A. Za $\|x\|_1 = 1$ velja:

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \|\mathbf{a}_1 x_1 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n\|_1 \leq \|\mathbf{a}_1\|_1 |x_1| + \ldots + \|\mathbf{a}_n\|_1 |x_n| \\ &\leq \left(\max_{j=1,\ldots,n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \right) (|x_1| + \ldots + |x_n|) = \left(\max_{j=1,\ldots,n} \|\mathbf{a}_j\|_1 \right) \|x\|_1 \\ &= \max_{j=1,\ldots,n} \|\mathbf{a}_j\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \big(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \big), \end{aligned} \tag{0.1}$$

kjer smo v prvi neenakosti upoštevali trikotniško neenakost, v prvi enakosti zadnje vrstice $\|x\|_1 = 1$, v zadnji enakosti pa definicijo $\|\cdot\|_1$. Iz (0.1) sledi $\|A\|_1 \leq \max_{j=1,\ldots,n} \|\mathbf{a}_j\|_1$. Naj bo e_j standardni koordinatni vektor z 1 na j–tem mestu in 0 drugje. Ker je $Ae_j = \mathbf{a}_j$, je enakost dosežena. $\square$