

DOKAZI NEKATERIH TRDITEV IN IZREKOV

Trditev 0.1. Če izvedemo Gaussovo eliminacijo z delnim pivotiranjem matrice $A \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ do zgornje trikotne matrice U z zaporedjem transformacij:

$$A \mapsto P_1 A \mapsto L_1 P_1 A \mapsto P_2 L_1 P_1 A \mapsto \cdots \mapsto \underbrace{L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A}_U,$$

kjer so P_i permutacijske, L_i pa eliminacijske matrice uporabljene na i -tem koraku postopka, potem velja

$$(0.1) \quad \underbrace{(P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1)}_P A = \underbrace{(\hat{L}_1^{-1} \hat{L}_2^{-1} \cdots \hat{L}_{n-1}^{-1})}_L U,$$

kjer so

$$\hat{L}_i^{-1} := \left(\underbrace{(P_{n-1} \cdots P_{i+1})}_{P^{(i)}} L_i \underbrace{(P_{i+1} \cdots P_{n-1})}_{(P^{(i)})^T} \right)^{-1} = P^{(i)} L_i^{-1} (P^{(i)})^T.$$

Opomba 1. • Opazimo, da so matrice \hat{L}_i spodnje trikotne matrice. Množenje z leve P_j namreč zamenja vrstico j in k , kjer je $j \geq k$ (če je $j = k$, potem je P_j identična permutacija in nismo menjali vrstic), množenje z desne pa zamenja stolpca j in k . Ker je bila matrika pred menjavo spodnje trikotna, je tudi po množenju s P_j z leve in desne spodnje trikotna. V zgornjem trikotniku se ni nič spremenilo.

- Matriko \hat{L}_i dobimo tako, da v matriki L_i samo menjamo vrstice v strogem spodnjem trikotniknem delu v skladu z uporabljenimi permutacijami v nadaljnjem postopku eliminacije s pivotiranjem.

Dokaz trditve 0.1. Z indukcijo dokažimo, da velja

$$(0.2) \quad U = L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A = \hat{L}_{n-1} \hat{L}_{n-2} \cdots \hat{L}_1 P_{n-1} \cdots P_1 A.$$

za vse $n \times n$ matrice A . Od tod bo sledilo (0.1). V primeru $n = 2$ moramo pokazati $L_1 P_1 A = \hat{L}_1 P_1 A$. Ker je $\hat{L}_1 = L_1$, enakost (0.2) velja. Privzemimo veljavnost (0.2) za vse matrice velikosti $(n-1) \times (n-1)$ in pokažimo veljavnost za vse $n \times n$ matrice. Naj bo dana matrika

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ v & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

kjer so $\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^{n-1}$ in $B \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Na prvem koraku eliminacije A pomnožimo z leve s permutacijsko matriko P_1 , nato pa eliminacijsko matriko L_1 , da dobimo matriko

$$A^{(1)} = L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} \beta & u_1^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

kjer so $\beta \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ in $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$. Nadaljujemo postopek eliminacije in za $j = 2, \dots, n-1$ dobimo matrice

$$P_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'_j \end{pmatrix}, \quad L_j := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L'_j \end{pmatrix},$$

da velja

$$L_{n-1}P_{n-1} \cdots L_2P_2A^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta & u_1^T \\ 0 & L'_{n-1}P'_{n-1} \cdots L'_2P'_2A_1 \end{pmatrix}.$$

Po indukcijski predpostavki uporabljeni za matriko A_1 velja

$$L'_{n-1}P'_{n-1} \cdots L'_2P'_2A_1 = \widehat{L}'_{n-1} \cdots \widehat{L}'_2P'_{n-1} \cdots P'_2A_1.$$

Ker je $\widehat{L}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{L}'_j \end{pmatrix}$ in $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'_2 \end{pmatrix}$, od tod sledi

$$\begin{aligned} L_{n-1}P_{n-1} \cdots L_2P_2A^{(1)} &= \widehat{L}_{n-1} \cdots \widehat{L}_2P_{n-1} \cdots P_2 \begin{pmatrix} \beta & u_1^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \\ &= \widehat{L}_{n-1} \cdots \widehat{L}_2P_{n-1} \cdots P_2L_1P_1A. \end{aligned}$$

Da dokažemo (0.2) moramo preveriti samo še

$$P_{n-1} \cdots P_2L_1P_1A = \widehat{L}_1P_{n-1} \cdots P_1A.$$

To pa res velja:

$$\begin{aligned} \widehat{L}_1P_{n-1} \cdots P_1A &= (P_{n-1} \cdots P_2L_1P_2 \cdots P_{n-1})P_{n-1} \cdots P_1A \\ &= P_{n-1} \cdots P_2L_1P_1A, \end{aligned}$$

kjer smo v drugi enakosti uporabljali $P_j^2 = I_n$. □