

REŠITEV PREDOLOČENEGA SISTEMA PREK NORMALNEGA SISTEMA

Trditev 0.1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrika, ki zadošča $\text{rank } A = m$. Rešitev sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov je $x \in \mathbb{R}^m$, ki reši t.i. normalni sistem:

$$(0.1) \quad \underbrace{A^T A}_{m \times m} x = \underbrace{A^T b}_{m \times 1}.$$

Dokaz. Vektor x , ki minimizira $\|b - Ax\|_2$, je tisti, za katerega je $b - Ax$ pravokoten na vsak stolpični prostor oz. sliko matrike A . To pa pomeni, da mora biti skalarni produkt vsakega stolpca A z vektorjem $b - Ax$ enak 0. To lahko v kompaktni obliki zapišemo kar kot $A^T(b - Ax) = 0$. S preoblikovanjem tega pogoja dobimo (0.1). Iz predpostavke $\text{rank } A = m$ dobimo $\text{rank } A^T A = m$ in zato je sistem (0.1) rešljiv. \square