Konvergenca ortogonalne iteracije

Trditev 1. Naj bodo lastne vrednost matrike $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ enake

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_p| > |\lambda_{p+1}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

in $v_1, \ldots, v_n$ pripadajoči lastni vektorji. Naj bo Z_i i–ta matrika iz QR iteracije. Potem velja

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{C}(Z_i) = \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_p\}. \tag{1}$$

Dokaz. Naj bo $A = SDS^{-1}$ diagonalizacija matrike A, kjer je $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ diagonalna matrika, S pa obrnljiva matrika s stolpci, katere stolpci so lastni vektorj $v_1, \ldots, v_n$. Velja

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(Z_{i+1}) &= \mathcal{C}(AZ_i) = \mathcal{C}(A^2 Z_{i-1}) = \ldots = \mathcal{C}(A^i Z_0) = \mathcal{C}(SD^i S^{-1} Z_0)\\ &= \mathcal{C}\Big(\lambda_p^i S \cdot \mathrm{diag}\left(\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\Big)^p, \ldots, \Big(\frac{\lambda_{p-1}}{\lambda_p}\Big)^i, 1, \Big(\frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}\Big)^i, \ldots, \Big(\frac{\lambda_n}{\lambda_p}\Big)^i\right) S^{-1} Z_0\Big)\end{aligned}$$

Pišimo $S^{-1}Z_0 = [V^T, W^T]^T$, kjer je $V \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $W \in \mathbb{R}^{(n-p)\times p}$, in $S = [S_1, S_2]$, kjer je $S_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $S_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-p)}$. Velja

$$\mathcal{C}(Z_{i+1}) = \mathcal{C}(\lambda_p^i(S_1 V + \widetilde{S}_2 W)) \to \mathcal{C}(\lambda_p^i S_1 V) = \mathcal{C}(S_1),$$

kjer smo za $\to$ upoštevali, da gredo število $\left(\frac{\lambda_{p+k}}{\lambda_p}\right)^i \to 0$. To dokaže (1). □

Trditev 2. Naj ima A same realne lastne vrednosti in naj velja

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|.$$

1. Če za Z_0 vzamemo I_n, potem zaporedje $Z_i^T A Z_i$ konvergira proti Schurovi formi matrike A, kjer so na diagonali lastne vrednosti v padajočem vrstnem redu.

2. Hitrost konvergence j–tega diagonalnega vhoda matrike A je odvisna od

$$\min\Big(\frac{|\lambda_j|}{|\lambda_{j-1}|}, \frac{|\lambda_{j+1}|}{|\lambda_j|}\Big).$$

Dokaz. Za $j = 1, \ldots, n-1$ pišimo $Z_i := [Z_{i1}^{(j)}, Z_{i2}^{(j)}]$, kjer ima $Z_{i1}^{(j)}$ j, $Z_{i2}^{(j)}$ pa $n-j$ stolpcev. Velja

$$Z_i^T A Z_i = \begin{pmatrix} \big(Z_{i1}^{(j)}\big)^T A Z_{i1}^{(j)} & \big(Z_{i1}^{(j)}\big)^T A Z_{i2}^{(j)} \\ \big(Z_{i2}^{(j)}\big)^T A Z_{i1}^{(j)} & \big(Z_{i2}^{(j)}\big)^T A Z_{i2}^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Ker po prejšnji trditvi velja, da $\mathcal{C}(Z_{i1}^{(j)})$ konvergira proti invariantnemu prostoru matrike A, sledi $\big(Z_{i2}^{(j)}\big)^T A Z_{i1}^{(j)} \to 0$. Ker to velja za vsak j, $Z_i^T A Z_i$ res konvergira proti zgornje trikotni matriki.

Trditev o hitrosti konvergence se da razbrati iz dokaza prejšnje trditve. □