

REŠITEV PREDOLOČENEGA SISTEMA PREK QR RAZCEPA

Trditev 0.1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ in $\text{rank } A = m$. Rešitev sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov je enaka rešitvi zgornjetrikotnega sistema

$$(0.1) \quad Rx = Q^T b,$$

kjer je $A = QR$ za ortogonalno matriko Q in zgornjetrikotno matriko R .

Dokaz. Vemo, da je rešitev sistema $Ax = b$ po metodi najmanjših kvadratov kar rešitev normalnega sistema. Velja:

$$\begin{aligned} A^T Ax &= (QR)^T (QR)x = (R^T Q^T)(QR)x = R^T (Q^T Q)Rx = R^T Rx, \\ A^T b &= (QR)^T b = R^T Q^T b. \end{aligned}$$

Normalni sistem je tako ekvivalenten sistemu $R^T Rx = R^T Q^T b$. Ker je po predpostavki $\text{rank } A = m$, je tudi $\text{rank } R = \text{rank } R^T = m$. Zato je $R^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ obrnljiva in z množenjem zadnje enačbe z leve z $(R^T)^{-1}$, dobimo (0.1). \square