OBSTOJ MATRIčNE NORME POLJUBNO BLIZU SPEKTRALNEGA RADIJA

Trditev 0.1. (1) Za vsako matrično normo $\|\cdot\|$ velja $\rho(R) \leq \|R\|$.
(2) Za vsak $\epsilon > 0$ obstaja matrična norma $\|\cdot\|_*$ za katero velja $\|R\|_* \leq \rho(R) + \epsilon$.

Dokaz. Dokažimo najprej (1). Naj bo v lastni vektor pripadajoč lastni vrednosti λ. Potem je $|\lambda| = \frac{\|Rv\|}{\|v\|} \leq \|R\|$. Torej je $\rho(R) \leq \|R\|$.

Dokažimo še (2). Naj bo $J = \bigoplus_{i=1}^{k} J_{n_i}(\lambda_i)$ Jordanova forma matrike A, kjer so $J_{n_i}(\lambda_i) = \lambda I_{n-1} + E_{n_i}$ Jordanove kletke matrike A, pri čemer je $E_{n_i} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ matrika z 1 na prvi naddiagonali in 0 drugod. Obstaja torej obrnljiva matrika S, da je $S^{-1}AS = J$. Naj bo $D_\epsilon = \operatorname{diag}(1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{n-1})$ diagonalna matrika. Krajši račun pokaže, da je $D_\epsilon^{-1} J D_\epsilon = \bigoplus_{i=1}^{k} J_{n_i}(\lambda_i, \epsilon)$, kjer je $J_{n_i}(\lambda_i) = \lambda I_{n-1} + \epsilon E_{n_i}$. Torej smo v vseh Jordanovih kletkah 1 na naddiagonali spremenili v ϵ. Zato je $\|D_\epsilon^{-1} J D_\epsilon\|_\infty = \rho(R) + \epsilon$. Definiramo vektorsko normo $\|x\|_* := \|(SD_\epsilon)^{-1} x\|_\infty$. Krajši račun pokaže, da porojena matrična norma zadošča $\|R\|_* \leq \|D_\epsilon^{-1} J D_\epsilon\|_\infty$. $\square$