ORTOGONALNI POLINOMI

Izrek 1 (Ortogonalnost)**.** Naj bo $g_0, \ldots, g_n$ zaporedje ortogonalnih polinomov glede na $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potem je

$$\langle g_k, p \rangle = 0$$

za vsak polinom stopnje p največ $k-1$.

Dokaz. Ker lahko p zapišemo kot

$$p(x) = \sum_{i=0}^{k-1} c_i g_i(x),$$

kjer je $c_i \in \mathbb{R}$, velja

$$\langle g_k, p \rangle = \langle g_k, \sum_{i=0}^{k-1} c_i g_i(x) \rangle = \sum_{i=0}^{k-1} c_i \langle g_k, g_i(x) \rangle = 0.$$

□

Izrek 2 (Tričlenska rekurzivna zveza)**.** Zaporedje ortogonalnih polinomov glede na $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zadošča tričlenski rekurzivni relaciji

$$g_{i+1}(x) = (x - \alpha_{i+1}) g_i(x) - \beta_i g_{i-1}(x),$$

kjer so koeficienti α_i, β_i, $i \in \mathbb{N}$ določeni z enačbami

$$\alpha_{i+1} = \frac{\langle x g_i, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle}, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_i = \frac{\langle x g_i, g_{i-1} \rangle}{\langle g_{i-1}, g_{i-1} \rangle}.$$

Dokaz. Definirajmo polinom

$$g(x) = g_{i+1}(x) - x g_i(x).$$

Ker sta g_i in g_{i+1} enična, je g stopnje i. Razvijmo polinom g po bazi ZOP:

$$g(x) = \sum_{j=0}^{i} a_j g_j$$

in računajmo skalarne produkte $\langle g, g_j \rangle$ za $j = 0, \ldots, i$. Velja

$$a_i \langle g_i, g_i \rangle = \langle g, g_i \rangle = -\langle x g_i, g_i \rangle,$$

iz česar dobimo α_{i+1}. Velja

$$a_{i-1} \langle g_{i-1}, g_{i-1} \rangle = \langle g, g_{i-1} \rangle = -\langle x g_i, g_{i-1} \rangle,$$

iz česar dobimo β_i. Velja

$$a_j \langle g_j, g_j \rangle = \langle g, g_j \rangle = 0$$

za vsak $j < i-1$, saj je $\langle x g_i, g_j \rangle = \langle g_i, x g_j \rangle = 0$. To dokaže izrek. □

Izrek 3 (Ničle ortogonalnih polinomov)**.** Naj bo $g_0, \dots, g_n$ zaporedje ortogonalnih polinomov glede na

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b fgw dx,$$

kjer je w pozitivna utež. Potem ima g_i i različnih ničel na intervalu $[a, b]$.

Dokaz. Naj bodo $x_1, \dots, x_k$ ničle polinoma g_i na $[a, b]$. Če je $k < i$, potem pridemo v protislovje

$$0 = \langle \underbrace{(x - x_1) \dots (x - x_k)}_{q}, g_i \rangle = \int_a^b q g_i w dx > 0,$$

kjer smo v prvi enakosti uporabili dejstvo, da je g_i ortogonalen na polinome stopnje največ $i-1$. □

Izrek 4 (O vozlih in utežeh v GKF reda n)**.** Naj bo q_n n–ti ortogonalni polinom glede na $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potem so vozli $x_1, \dots, x_n$ Gaussove kvadraturne formule ničle q_n, uteži ρ_i pa so enake $\int_a^b \ell_i w \; dx$, kjer je ℓ_i i–ta Lagrangeova bazna funkcija na točkah $x_1, \dots, x_n$.

Dokaz. Naj bo f polinom stopnje največ $2n - 1$. Potem je

$$f = k g_n + r, \quad \text{kjer sta } \deg k, \deg r < n.$$

Interpolacijski polinoma za r na ničlah $x_1, \dots, x_n$ polinoma g_n je $\sum_{i=1}^n r(x_i)\ell_i(x)$. Velja

$$\int_a^b (k g_n + r) w \; dx = \langle k, q_n \rangle + \int_a^b r w \; dx = \int_a^b r \; dx = \sum_{i=1}^n r(x_i) \int_a^b \ell_i(x) w(x) \; dx.$$

Ker je $f(x_i) = r(x_i)$, to dokaže izrek. □