LU RAZCEP Z DELNIM PIVOTIRANJEM

Trditev 0.1. Če izvedemo Gaussovo eliminacijo z delnim pivotiranjem matrike $A \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ do zgornje trikotne matrike U z zaporedjem transformacij:

$$A \quad \mapsto \quad P_1 A \quad \mapsto \quad L_1 P_1 A_1 \quad \mapsto \quad P_2 L_1 P_1 A_1 \quad \mapsto \quad \cdots \quad \mapsto \underbrace{L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A}_{U},$$

kjer so P_i permutacijske, L_i pa eliminacijske matrike uporabljene na i–tem koraku postopka, potem velja

$$\underbrace{\left(P_{n-1} P_{n-2} \cdots P_1\right)}_{P} A = \underbrace{\left(\widehat{L}_1^{-1} \widehat{L}_2^{-1} \cdots \widehat{L}_{n-1}^{-1}\right)}_{L} U, \tag{0.1}$$

kjer so

$$\widehat{L}_i^{-1} := \left(\underbrace{\left(P_{n-1} \cdots P_{i+1}\right)}_{P^{(i)}} L_i \underbrace{\left(P_{i+1} \cdots P_{n-1}\right)}_{(P^{(i)})^T} \right)^{-1} = P^{(i)} L_i^{-1} (P^{(i)})^T.$$

Opomba 1.
- Opazimo, da so matrike $\widehat{L}_i$ spodnje trikotne matrike. Množenje z leve P_j namreč zamenja vrstico j in k, kjer je $j \geq k$ (če je $j = k$, potem je P_j identična permutacija in nismo menjali vrstic), množenje z desne pa zamenja stolpca j in k. Ker je bila matrika pred menjavo spodnje trikotna, je tudi po množenju s P_j z leve in desne spodnje trikotna. V zgornjem trikotniku se ni nič spremenilo.
- Matriko $\widehat{L}_i$ dobimo tako, da v matriki L_i samo menjamo vrstice v strogem spodnjem trikotniknem delu v skladu z uporabljenimi permutacijami v nadaljnjem postopku eliminacije s pivotiranjem.

Dokaz trditve 0.1. Z indukcijo dokažimo, da velja

$$U = L_{n-1} P_{n-1} \cdots L_1 P_1 A = \widehat{L}_{n-1} \widehat{L}_{n-2} \cdots \widehat{L}_1 P_{n-1} \cdots P_1 A. \tag{0.2}$$

za vse $n \times n$ matrike A. Od tod bo sledilo (0.1). V primeru $n = 2$ moramo pokazati $L_1 P_1 A = \widehat{L}_1 P_1 A$. Ker je $\widehat{L}_1 = L_1$, enakost (0.2) velja. Privzemimo veljavnost (0.2) za vse matrike velikosti $(n-1) \times (n-1)$ in pokažimo veljavnost za vse $n \times n$ matrike. Naj bo dana matrika

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & u^T \\ v & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

kjer so $\alpha \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathbb{R}^{n-1}$ in $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Na prvem koraku eliminacije A pomnožimo z leve s permutacijsko matriko P_1, nato pa eliminacijsko matriko L_1, da dobimo matriko

$$A^{(1)} = L_1 P_1 A = \begin{pmatrix} \beta & u_1^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

kjer so $\beta \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ in $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$. Nadaljujemo postopek eliminacije in za $j = 2, \ldots, n-1$ dobimo matrike

$$P_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_j' \end{pmatrix}, \qquad L_j := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L_j' \end{pmatrix},$$

---

da velja

$$L_{n-1}P_{n-1}\cdots L_2P_2A^{(1)} = \begin{pmatrix} \beta & u_1^T \\ 0 & L'_{n-1}P'_{n-1}\cdots L'_2P'_2A_1 \end{pmatrix}.$$

Po indukcijski predpostavki uporabljeni za matriko A_1 velja

$$L'_{n-1}P'_{n-1}\cdots L'_2P'_2A_1 = \widehat{L}'_{n-1}\cdots\widehat{L}'_2P'_{n-1}\cdots P'_2A_1.$$

Ker je $\widehat{L}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widehat{L}'_j \end{pmatrix}$ in $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'_2 \end{pmatrix}$, od tod sledi

$$\begin{aligned} L_{n-1}P_{n-1}\cdots L_2P_2A^{(1)} &= \widehat{L}_{n-1}\cdots\widehat{L}_2P_{n-1}\cdots P_2\begin{pmatrix} \beta & u_1^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \\ &= \widehat{L}_{n-1}\cdots\widehat{L}_2P_{n-1}\cdots P_2L_1P_1A. \end{aligned}$$

Da dokažemo (0.2) moramo preveriti samo še

$$P_{n-1}\cdots P_2L_1P_1A = \widehat{L}_1P_{n-1}\cdots P_1A.$$

To pa res velja:

$$\begin{aligned} \widehat{L}_1P_{n-1}\cdots P_1A &= (P_{n-1}\cdots P_2L_1P_2\cdots P_{n-1})\,P_{n-1}\cdots P_1A \\ &= P_{n-1}\cdots P_2L_1P_1A, \end{aligned}$$

kjer smo v drugi enakosti uporabljali $P_j^2 = I_n$. $\square$