OBčUTLJIVOST LINEARNIH SISTEMOV

Izrek 0.1. Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ obrnljiva matrika, $\Delta A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika, $b, \Delta b \in \mathbb{C}^n$ pa vektorja, da veljata enakosti

$$Ax = b, \tag{0.1}$$

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b. \tag{0.2}$$

Naj bo še $\|\cdot\|$ neka vektorska norma.

(1) Privzemimo, da je $\Delta A = 0$. Potem velja:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}. \tag{0.3}$$

(2) Naj bo $\Delta A \neq 0$, naj za identično matriko I velja $\|I\| = 1$ in naj bo še $\|A^{-1}\|\,\|\Delta A\| < 1$. Potem velja:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\Big(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\Big). \tag{0.4}$$

Dokaz. Dokažimo najprej (1). Preoblikujmo (0.2) v

$$A\Delta x = \Delta b.$$

Po predpostavki je A obrnljiva, zato velja:

$$\Delta x = A^{-1}\Delta b.$$

Torej velja ocena

$$\|\Delta x\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\Delta b\|. \tag{0.5}$$

Delimo (0.5) z $\|x\|$ in dobimo

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|}{\|x\|}. \tag{0.6}$$

Ker je $Ax = b$, sledi $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. Uporabimo to v (0.6) in dobimo

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|\Delta b\|}{|A\|\,\|x\|} = \kappa(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}, \tag{0.7}$$

kar je ravno (0.3).

Dokažimo še (2). Preoblikujmo (0.2) v

$$(A + \Delta A)\Delta x = \Delta b - \Delta A x. \tag{0.8}$$

Po predpostavki je A obrnljiva, zato lahko izpostavimo A:

$$A(I + A^{-1}\Delta A)\Delta x = \Delta b - \Delta A x. \tag{0.9}$$

Spomnimo se formule za vsoto geometrijske vrste:

$$(1 + q)^{-1} = \frac{1}{1 + q} = 1 - q + q^2 - q^3 + \ldots, \qquad |q| < 1. \tag{0.10}$$

Sedaj lahko oponašamo (0.10) za matrike in dobimo

$$(I + A^{-1}\Delta A)^{-1} = I - A^{-1}\Delta A + (A^{-1}\Delta A)^2 - (A^{-1}\Delta A)^3 + \dots \tag{0.11}$$

Iz (0.11) sledi (z nekaj utemeljevanja - mi lahko privzamemo)

$$\left\|(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|}. \tag{0.12}$$

Pomnožimo (0.9) z leve z A^{-1} in nato z $(I + A^{-1}\Delta A)^{-1}$

$$\Delta x = (I + A^{-1}\Delta A)^{-1}A^{-1}(\Delta b - \Delta A x), \tag{0.13}$$

Upoštevamo še (0.12) v (0.13) in dobimo

$$\|\Delta x\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left\|A^{-1}\right\| (\|\Delta b\| + \|\Delta A\| \, \|x\|). \tag{0.14}$$

Delimo (0.14) z $\|x\|$ in preoblikujemo:

$$\begin{aligned}
\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\Delta A\|} \left\|A^{-1}\right\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\|\right) \\
&= \frac{\|A^{-1}\| \, \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|\Delta A\|} \Big(\frac{\|\Delta b\|}{\|A\| \, \|x\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \Big) \\
&\leq \frac{\|A^{-1}\| \, \|A\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|A\| \, \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \Big(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \Big),
\end{aligned}$$

kar je ravno (0.4). $\square$