HITROST KONVERGENCE TANGENTNE METODE

Izrek 1 (Konvergenčni izrek za navadno iteracijo)**.** Naj bo g zvezno odvedljiva na intervalu $I = [a,b]$ in naj velja $g(I) \subseteq I$. Naj bo še $\sup\limits_{x\in I} |g'(x)| = m < 1$. Velja:

- $g(x) = x$ ima enolično rešitev ξ na I.
- Za vsak $x_0 \in I$ zaporedje $x_n = g(x_{n-1})$ konvergira proti ξ, pri čemer je

$$|x_{n+1} - \xi| \leq \min\left\{ m^{n+1}|x_0 - \xi|, \frac{m}{1-m}|x_{n+1} - x_n|, \frac{m^{n+1}}{1-m}|x_1 - x_0| \right\}.$$

Dokaz. Velja

$$|x_n - \xi| = |g(x_{n-1}) - g(\xi)| \underbrace{=}_{\zeta\in(\xi, x_{n-1})} |g'(\zeta)||x_{n-1} - \xi| \leq m|x_{n-1} - \xi|,$$

kjer smo v drugi enakosti uporabili Lagrangeov izrek. Nadaljujemo in dobimo:

$$|x_n - \xi| \leq m^n |x_0 - \xi|.$$

Torej zaporedje $\{x_n\}_n$ res konvergira za poljuben začetni približek x_0.

Velja

$$|x_{n+k+1} - x_{n+k}| = |g(x_{n+k}) - g(x_{n+k-1})| \leq m|x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq \ldots \leq m^k |x_{n+1} - x_n|.$$

Torej je

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi| &\leq |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+3} - x_{n+2}| + \ldots \leq (m + m^2 + \ldots)|x_{n+1} - x_n| \\ &= \frac{m}{1-m}|x_{n+1} - x_n| = \frac{m^{n+1}}{1-m}|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

□

Izrek 2 (Hitrost konvergence navadne iteracije)**.** Naj bo g v okolici negibne točke ξ p-krat zvezno odvedljiva in velja

$$g'(\xi) = g''(\xi) = \cdots = g^{(p-1)}(\xi) = 0 \qquad \text{in} \qquad g^{(p)}(\xi) \neq 0.$$

Potem je red konvergence zaporedja $x_{n+1} = g(x_n)$ enak p.

Dokaz. Razvijemo $g(x)$ v Taylorjevo vrsto okoli točke ξ:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \xi + \frac{1}{p!} g^{(p)}(\zeta)(x_n - \xi)^p,$$

kjer je ζ blizu ξ. Odtod sledi

$$\frac{|x_{n+1} - \xi|}{|x_n - \xi|^p} = \frac{1}{p!}|g^{(p)}(\zeta)|,$$

□