KONVERGENCA JACOBI IN GAUSS-SEIDEL

Trditev 0.1. Če je A kVDD, potem velja $\|R_{GS}\|_\infty \leq \|R_J\|_\infty < 1$. Zato Jacobijeva in GS–iteracija konvergirata.

Dokaz. Dokažimo najprej $\|R_J\|_\infty < 1$. Naj bo e vektor samih 1. Velja:

$$\|R_J\|_\infty = \||R_J|\|_\infty = \||R_J|e\|_\infty = \max_i \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1,$$

kjer smo v zadnji neenakosti upoštevali, da je A kVDD.

Dokažimo še $\|R_{GS}\|_\infty \leq \|R_J\|_\infty$. Velja $\||R_{GS}|e\|_\infty \leq \||R_J|e\|_\infty$. Zadošča dokazati, da velja $|R_{GS}|e \leq |R_J|e$, pri čemer

$$[u_1, \ldots, u_n] \ \leq \ [v_1, \ldots, v_n] \qquad \Leftrightarrow \qquad u_i \leq v_i \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Velja

$$|R_{GS}|e = |(I-L)^{-1}U|e \leq |(I-L)^{-1}||U|e = \Big| \sum_{i=0}^{n-1} L^i \Big| |U|e \leq \sum_{i=0}^{n-1} |L|^i |U|e = (I - |L|)^{-1} e,$$

kjer smo v obeh neenakostih upoštevali trikotniško neenakost, v drugi in tretji neenakosti pa

$$(I-L)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} L^i = \sum_{i=0}^{n-1} L^i \qquad (\text{saj je } L^n = 0),$$

$$(I-|L|)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} |L|^i = \sum_{i=0}^{n-1} |L|^i \qquad (\text{saj je } |L|^n = 0).$$

Zadošča dokazati

$$(I - |L|)^{-1}|U|e \leq |R_J|e.$$

Upoštevajmo še $|R_J|e = |L + U|e = (|L| + |U|e)$. Ker je $I - |L|$ matrika z nenegativnimi vhodi, je zadosti dokazati

$$|U|e \leq (I - |L|)(|L| + |U|)e.$$

Z odpravo oklepajev je to ekvivalentno

$$0 \leq |L|(I - |L| - |U|)e.$$

Torej zadošča dokazati samo še

$$0 \leq (I - |L| - |U|)e.$$

To pa je ravno ekvivalentno pogoju $\max_i \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$, ki drži. $\square$