NAPAKA POLINOMSKE APROKSIMACIJE

Izrek 1. Naj bo dana funkcija f in točke $x_0, \dots, x_n, t \in [a, b]$. Potem velja

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{za nek } \xi \in [a, b].$$

Dokaz. Naj bo p_n interpolacijski polinom za funkcijo f na točkah $x_0, \dots, x_n$. Definirajmo funkcijo

$$g(x) := \underbrace{p_n(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] \underbrace{(x - x_0) \cdots (x - x_n)}_{w(x)}}_{p_{n+1}(x)} - f(x).$$

Ker je p_{n+1} interpolacijski polinom za funkcijo f na točkah $x_0, \dots, x_n, t$, ima funkcija g $n+2$ ničel $x_0, \dots, x_n, t$ na intervalu $[a, b]$. Po Rolleovem izreku velja:

- $g'(x)$: vsaj $n + 1$ ničel na intervalu $[a, b]$,
- $g''(x)$: vsaj n ničel na intervalu $[a, b]$,
- $g^{(3)}(x)$: vsaj $n - 1$ ničel na intervalu $[a, b]$,

  $\vdots$
- $g^{(n+1)}(x)$: vsaj 1 ničlo ξ na na intervalu $[a, b]$.

Velja

$$\begin{aligned} 0 = g^{(n+1)}(\xi) &= p^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(\xi) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t] w^{(n+1)}(\xi) \\ &= -f^{(n+1)}(\xi) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, t](n+1)!. \end{aligned}$$

Iz zadnjega sledi trditev izreka. $\square$