KONVERGENCA POTENčNE METODE

Trditev 0.1. Naj ima matrika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ n lastnih vrednosti, pri čemer je ena dominantna. Zaporedje vektorjev $(x_i, \widetilde{\lambda}_i)$ iz potenčne metode konvergira proti lastnemu paru, ki pripada dominantni lastni vrednosti.

Če je λ_1 dominantna lastna vrednost, λ_2 pa po absolutni vrednosti druga največja lastna vrednost, potem je hitrost konvergence odvisna od razmerja $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$.

Dokaz. Zapišimo x_0 po bazi $\{v_1, \dots, v_n\}$ lastnih vektorjev: $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$. Potem je:

$$\begin{aligned} A^k x_0 &= A^k\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i\Big) = A^{k-1}\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i v_i\Big) = A^{k-2}(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i^2 v_i) \\ &= \cdots = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i^k v_i = \lambda_1^k\Big(\beta_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \Big(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\Big)^k \beta_i v_i\Big). \end{aligned}$$

Sledi

$$\frac{Ax_{k-1}}{\|Ax_{k-1}\|_2} = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|_2} = \frac{\Big(\beta_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \beta_i v_i\Big)}{\|\Big(\beta_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \beta_i v_i\Big)\|_2}$$

Ker je $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$, velja $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$. Zato potenčna metoda res konvergira proti lastnemu vektorju v_1, hitrost konvergence pa je odvisna od razmerja $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, kjer je $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. $\square$