

RAČUNSKA ZAHTEVNOST GAUSSOVE ELIMINACIJE

Izrek 0.1. Število računskih operacij $(+, -, \cdot, :)$ za prevedbo matrike A in razširjene matrike $[A|b]$ v zgornjetrikotno obliko med postopkom Gaussove eliminacije je

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2).$$

Dokaz. V algoritmu Gaussove eliminacije vse *for* nadomestimo z vsotami, znotraj vsakega *for* pa preštejemo število računskih operacij, ki jih izvedemo. Za preoblikovanje matrike A v zgornjetrikotno je število operacij enako:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n (1 + \sum_{j=k+1}^n 2) &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n (1 + 2(n-k)) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(1 + 2(n-k)) \\ &= \underbrace{\sum_{\ell=n-k}^n \ell(1 + 2\ell)}_{\ell=1} = \sum_{\ell=1}^n \ell + 2\ell^2 \underbrace{=}_{(*)} \frac{n(n+1)}{2} + 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2). \end{aligned}$$

kjer smo v $(*)$ uporabili enakosti $\sum_{j=1}^p j = \frac{p(p+1)}{2}$ in $\sum_{j=1}^p j^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

V primeru razširjenega sistema imamo še dodatnih $\mathcal{O}(n^2)$ operacij za preoblikovanje vektorja b . □