UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
LABORATORIJ ZA MATEMATIČNE METODE
V RAČUNALNIŠTVU IN INFORMATIKI

Aljaž Zalar

REŠENE NALOGE IZ OSNOV MATEMATIČNE ANALIZE

Študijsko gradivo

Ljubljana, 2021

Uvod

Naloge na naslednjih straneh so se pojavljale na teoretičnih izpitih pri predmetu Osnove matematične analize za študente univerzitetnega študija računalništva in informatike na FRI v študijskih letih 2018/19–2020/21. Avtorja nalog iz študijskega leta 2018/19 sta prof. dr. Neža Mramor Kosta in izr. prof. dr. Žiga Virk.

Naloge so urejene po poglavjih, ki se obravnavajo pri predmetu, tako da jih lahko poskušate rešiti že sproti, ko obdelate posamezno poglavje.

To študijsko gradivo ni recenzirano in gotovo se v rešitvah pojavi kakšna napaka. Če opazite kakšno napako, jo prosim sporočite na elektronski naslov aljaz.zalar@fri.uni-lj.si.

Za lažjo navigacijo po dokumentu so na voljo bližnjice. Če kliknete na simbol ⇩ ob nalogi, boste skočili do rešitve. Če kliknete na simbol ⇧ ob rešitvi, se boste vrnili k besedilu naloge.

Naloge računsko niso zahtevne, pomembno je predvsem razumevanje ideje v ozadju. Zato priporočam, da o nalogi nekaj časa razmišljate, pobrskate po zapiskih oz. literaturi, v kolikor ideje ne dobite, potem pa tudi v celoti napišete rešitev. Šele nato svojo rešitev primerjate z rešitvami v zbirki. Poleg razumevanja bistva nalog je namreč cilj predmeta tudi to, da se naučite svoje ideje pravilno matematično zapisati, pri čemer se osredotočite predvsem na bistven sklep in ne navajate več možnih sklepov, ki bi lahko vodili k pravi rešitvi.

Oznake

$\mathbb{N}$	...	naravna števila
$\mathbb{R}$	...	realna števila
$\mathbb{C}$	...	kompleksna števila
i	...	imaginarna enota $i = \sqrt{-1}$
$\mathrm{Re}(z)$	...	realni del kompleksnega števila z
$\mathrm{Im}(z)$	...	imaginarni del kompleksnega števila z
$\lvert z\rvert$	...	absolutna vrednost kompleksnega števila z
a_n	...	n-ti člen zaporedja
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	...	zaporedje
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	...	limita zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
$f(x)$	...	funkcija ene spremenljivke
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	...	limita funkcije, ko se x približuje $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
$f'(x)$	...	odvod funkcije ene spremenljivke
$f(x,y)$	...	funkcija dveh spremenljivk
$f_x(x,y)$	...	parcialni odvod funkcije dveh spremenljivk po spremenljivki x
$\mathrm{grad}\, f(x,y)$	...	gradient funkcije dveh spremenljivk
$f_{xy}(x,y)$	...	drugi parcialni odvod funkcije dveh spremenljivk
$\displaystyle\int f(x)$	...	nedoločeni integral funkcije f
$\displaystyle\int_a^b f(x)$	...	določeni integral funkcije f v mejah od a do b

Kazalo

Del 1

Naloge

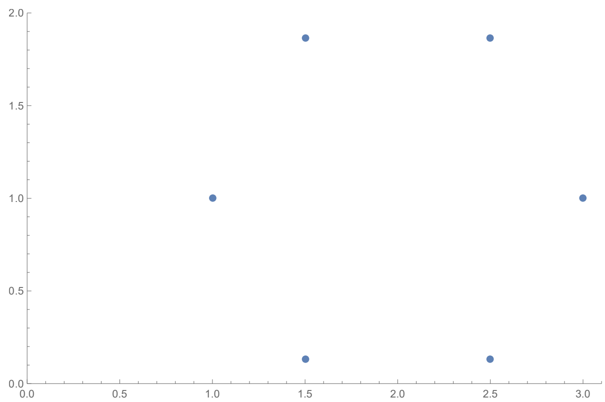
POGLAVJE 1

Kompleksna števila

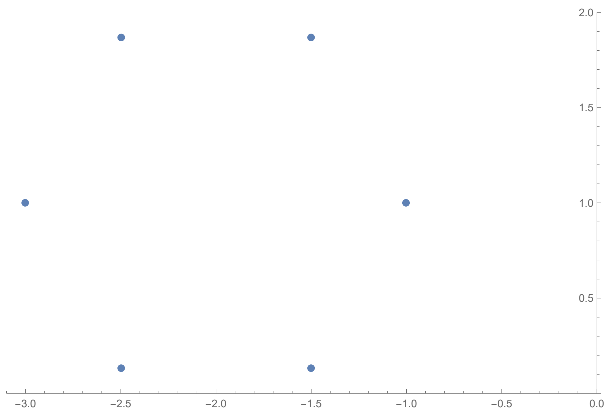
NALOGA 1.

a. Napišite predpis transformacije kompleksne ravnine v kartezičnem ali polarnem zapisu, ki množico
$$\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 1\}$$
preslika v množico
$$\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

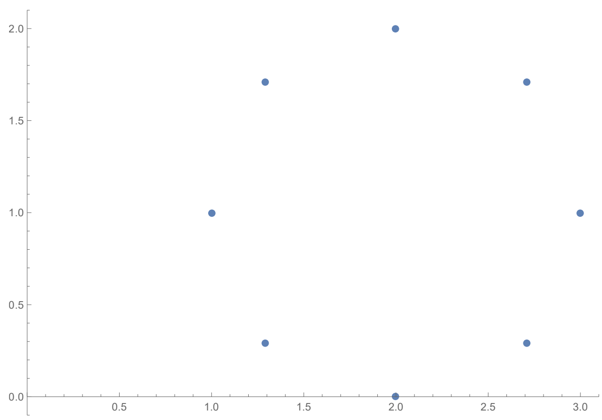
b. Katera od naslednjih slik predstavlja rešitve enačbe $(z - 2 - i)^6 = 1$? Odgovor utemeljite.



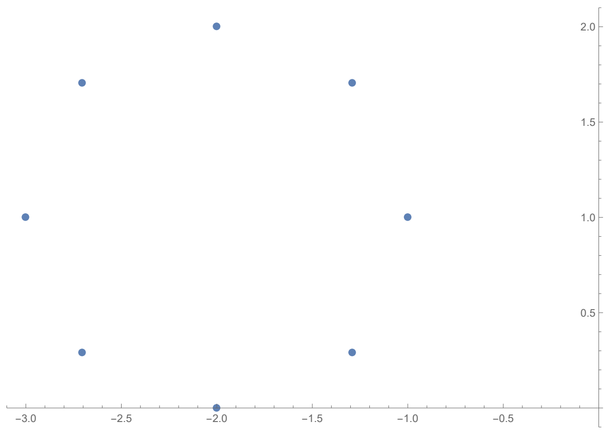
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

c. Množico rešitev enačbe iz (b) zavrtimo okrog izhodišča za kot $\frac{\pi}{3}$. Napišite enačbo, ki ji zadoščajo točke iz zavrtene množice.

Naloga 2.

a. Navedite eno operacijo na $\mathbb{C}$ in eno transformacijo kompleksne ravnine, za kateri je polarni zapis kompleksnega števila primernejši od kartezičnega. Za obe napišite tudi predpis v polarnem zapisu.

b. Izberite realne koeficiente $a_i \in \mathbb{R}$ v algebraični enačbi

$$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

tako, da vsaj ena rešitev te enačbe ne bo realna. Odgovor utemeljite.

c. Izberite realne koeficiente $a_i \in \mathbb{R}$ v algebraični enačbi

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

stopnje n tako, da se množica rešitev ne spremeni, če vsako rešitev zarotiramo za kot $\frac{2\pi}{n}$ v pozitivni smeri. Odgovor utemeljite.

Naloga 3.

a. Razložite pojem polarni zapis kompleksnega števila in v polarnem zapisu napišite formulo za potenciranje kompleksnega števila.

b. Naj bo dana kompleksna enačba

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0,$$

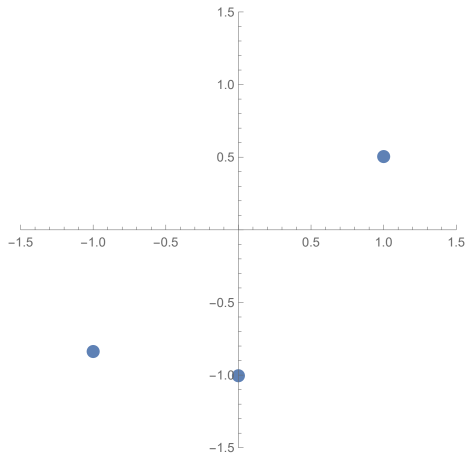
kjer so $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ realna števila, $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pa ena izmed njenih rešitev. Poiščite še eno rešitev te enačbe in dokažite, da gre res za rešitev.

c. Dana je enačba

$$z^6 - \frac{z^4}{18} - \frac{8z^3}{9} + \frac{17z^2}{16} - \frac{8z}{9} + \frac{305}{144} = 0.$$

Na spodnji sliki so narisane nekatere njene rešitve. Narišite še ostale.

Namig: Enačbe vam ni potrebno reševati.

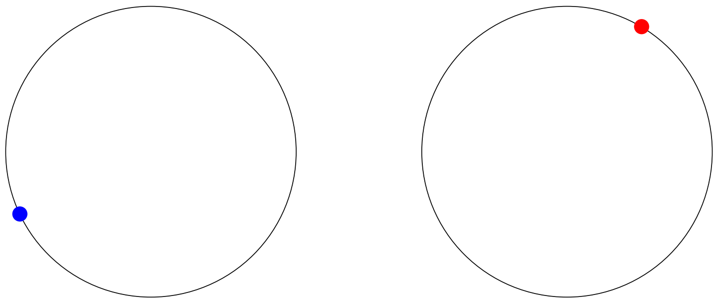


Naloga 4.

a. Naj bo $T(n)$ trditev o naravnem številu $n \in \mathbb{N}$. Vemo, da velja $T(3)$ in da iz resničnosti $T(n)$ sledi resničnost $T(n+4)$. Ali lahko sklepamo, da velja $T(2020)$? Odgovor dobro utemeljite.

b. Razložite pojem n-ti koren kompleksnega števila $a \in \mathbb{C}$. Navedite tudi eksplicitne formule za izračun vseh n-tih korenov števila $a \in \mathbb{C}$.

c. Naj bo $n_1 = 2$ in $n_2 = 6$. Na levi sliki je eden od n_1-tih, na desni pa eden od n_2-tih korenov nekega kompleksnega števila. Na skicah čim bolj natančno označite ostale korene, tj. n_1-te na levi in n_2-te na desni. Pri tem mora biti jasno razvidno, kako ste jih določili. Upoštevajte, da sta središči krožnic v točki $(0,0)$.



Naloga 5.

a. V polarnem zapisu zapišite vsaj tri kompleksna števila z z lastnostjo $|2 \cdot z| = 1$.

b. Koliko realnih in koliko kompleksnih rešitev ima enačba $(z^7 - 8)(z^3 + 8) = 0$?

c. Poiščite kakšno kompleksno funkcijo, ki slika $0 \mapsto 1$ ter $1 \mapsto 1 + i$.

Naloga 6.

a. Izračunajte $|3 - 4i|$ ter imaginarni del števila $\left((37+29i) \cdot \overline{(37+29i)}\right)^2$.

b. V kompleksni ravnini skicirajte območje

$$\mathcal{D} = \left\{ z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C};\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 1 < |z| \leq 9 \right\}.$$

c. Narišite sliko območja, v katerega se območje $\mathcal{D}$ preslika s preslikavo $z \mapsto z(1+i)+i$.

Naloga 7.

a. Kaj je polarni zapis kompleksnega števila $z = x + iy$? Narišite sliko in napišite, kako se polarni koordinati izražata s kartezičnima.

b. V kompleksni ravnini skicirajte območji:

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}; |z - i| = 1, \mathrm{Im}(z) > 1\},$$
$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbb{C}; |z - 1| = 1, \mathrm{Re}(z) > 1\}.$$

c. Poiščite kakšno kompleksno funkcijo, ki slika $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Zaporedja in vrste

NALOGA 8.

V tej nalogi naj bo S **četrta neničelna** cifra vaše vpisne številke, šteto od leve proti desni.

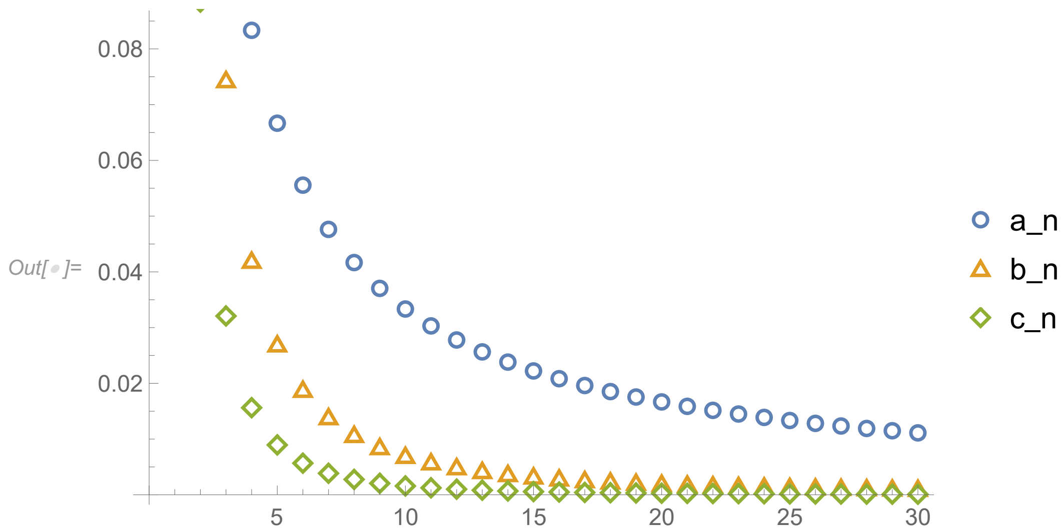
a. Napišite primer zaporedja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitivnih števil, tako da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{S+1}$ divergira, alternirajoča vrsta $\sum_{n=1\infty} (-1)^n a_n^{S+1}$ pa konvergira.

b. Naj bo $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ vrsta iz samih pozitivnih členov, tako da velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Ali je možno, da s spremembami členov a_{2n} (tj. členov s sodimi indeksi), vrsta postane konvergentna?

c. Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje realnih števil, ki zadošča $a_n \in [0,1]$ in $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2021}$.
   (a) Napišite ali narišite primer funkcije (ne nujno zvezne) $f : [0,S) \to \mathbb{R}$, za katero velja $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = S$ in $\lim_{x\uparrow S} f(x) = \infty$.
   (b) Ali obstaja zvezna funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, ki zadošča $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \infty$?

NALOGA 9.

Na naslednji sliki je prvih 30 členov treh zaporedij.



Izgled zaporedij tudi v nadaljevanju sledi tej obliki, tj. zaporedje a_n je nad zaporedjem b_n, to nad c_n, vsa zaporedja so padajoča in nenegativna.

a. Naj velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Koliko je $\lim_{n\to\infty} b_n$? Ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n$ konvergentna?

b. Naj bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna. Kaj lahko o konvergenci/divergenci sklepaš o vrstah $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$?

c. Naj bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pa konvergentna. Tvorimo novo zaporedje d_n, ki je sestavljeno iz prvih 30 členov zaporedja c_n, sledi 30 členov zaporedja b_n, nato pa sledijo členi zaporedja a_n. Kaj lahko poveš o konvergenci/divergenci vrste $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$?

NALOGA 10.

a. Zapišite Leibnitzov kriterij o konvergenci alternirajočih vrst.

b. Naj bo dano zaporedje $\{a_n\}_n$, $n \geq 1$, s predpisom

$$a_n = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, & n \text{ je deljiv s } 3, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ima ostanek } 1 \text{ pri deljenju s } 3, \\ -\frac{1}{n}, & n \text{ ima ostanek } 2 \text{ pri deljenju s } 3. \end{cases}$$

(a) Zapišite prvih 6 členov zaporedja $\{a_n\}_n$.

(b) Poiščite neko konvergentno podzaporedje $\{b_n\}_n$ zaporedja $\{a_n\}_n$, ki ima pozitivno limito. Odgovor dobro utemeljite.

(c) Poiščite neko podzaporedje $\{c_n\}_n$ zaporedja $\{a_n\}_n$, tako da vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergira. Odgovor dobro utemeljite.

NALOGA 11.

a. Napišite definicijo limite zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

b. (a) Napišite izrek o sendviču za limite zaporedij.

(b) Naj bosta dani vrsti $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, kjer je $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$ in $b_n = \frac{1}{2^n}$. Koliko sta njuni vsoti A in B?

(c) Naj bo $C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, kjer je $c_n \in \{a_n, b_n\}$. Npr., $c_0 = b_0, c_1 = a_1, c_2 = b_2, c_3 = a_3, \ldots$ Navzgor in navzdol omejite vsoto vrste C s pomočjo A in B. Odgovor dobro utemeljite.

NALOGA 12.

a. Navedite definicijo supremuma (natančne zgornje meje) zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$.

b. Navedite izrek o konvergenci monotonih zaporedij.

c. Obravnavajte konvergenco naslednjih zaporedij. Odgovore dobro utemeljite.

(a) $b_0 = 0$, $b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n}$ za $n \geq 1$.

(b) $c_0 = 0$, $c_n = c_{n-1} + (-1)^n \Big(e - \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n\Big)$ za $n \geq 1$.

NALOGA 13.

a. Zapišite definicijo limite zaporedja.

b. Za vsako od naslednjih vrst utemeljite, ali je konvergenta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right).$$

NALOGA 14.

a. Kdaj vrsta konvergira?

b. Podajte primer kakšnega nekonstantnega konvergentnega zaporedja z limito 2.

c. Podajte primer kakšnega omejenega divergentnega zaporedja s spodnjo mejo 2.

NALOGA 15.

a. Na primeru razložite razliko med infimumom ter spodnjo mejo zaporedja.

b. Poiščite kakšno konvergentno vrsto z vsoto 2.

POGLAVJE 3

Funkcije in odvod

NALOGA 16.

a. Opišite, kako bi iskali kandidate za ekstreme neke zvezno odvedljive funkcije $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ z definicijskim območjem $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1\}$.

b. Vemo, da ima vsaka zvezna funkcija $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$, kjer je

$$\mathcal{D}_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\},$$

globalni minimum in globalni maksimum. Kako bi ju poiskali, če veste, da funkcija g na $\mathcal{D}_g$ nima stacionarnih točk?

c. Utemeljite, da ima vsaka zvezna funkcija $f : [0, 1] \to [0, 1]$ fiksno točko, tj. $\alpha \in [0, 1]$, ki zadošča $f(\alpha) = \alpha$.

Namig: Definirajte funkcijo $g : [0, 1] \to [0, 1]$ s predpisom $g(x) = f(x) - x$ in zanjo uporabite izrek o vmesni vrednosti.

NALOGA 17.
V tej nalogi naj bo T **tretja neničelna** cifra vaše vpisne številke, šteto od desne proti levi.

a. Napišite primer funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dveh spremenljivk, ki v točki $(1, T)$ najhitreje narašča v smeri $(2, 1)$.

b. Napišite primer funkcije $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dveh spremenljivk, ki ima v točki $(1, T)$ lokalni minimum.

Namig: Pomagate si lahko s Taylorjevim polinomom stopnje 2 funkcije g v točki (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + g_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} g_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2. \end{aligned}$$

c. Naj bo $\mathcal{C}$ krivulja, določena z enačbo $h(x, y) = 0$. Denimo, da je točka $(1, T)$ ekstrem vaše funkcije f iz (a) nad krivuljo $\mathcal{C}$. Določite smer tangente na $\mathcal{C}$ v točki $(1, T)$.

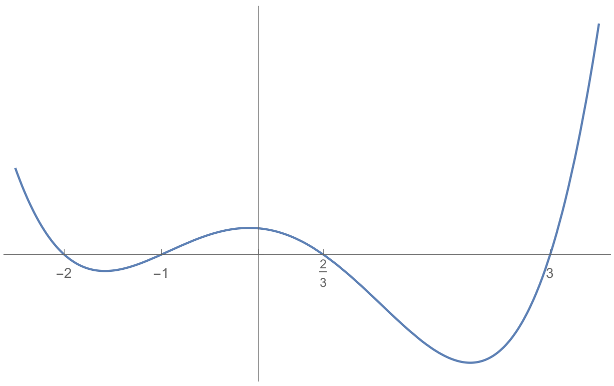
NALOGA 18.
Naj bo $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Tabeliranih imamo nekaj vrednosti funkcije g in njenih parcialnih odvodov:

(x,y)	$g(x,y)$	$g_x(x,y)$	$g_y(x,y)$	$g_{xx}(x,y)$	$g_{xy}(x,y)$	$g_{yy}(x,y)$
$(-2,0)$	3	0	1	2	1	1
$(-1,0)$	1	-1	0	-1	2	-1
$(\frac{2}{3},0)$	4	0	0	2	1	1
$(3,0)$	5	1	0	2	1	1
$(-2,1)$	2	0	0	-3	0	1
$(-1,1)$	-7	2	0	2	1	1
$(\frac{2}{3},1)$	-1	0	0	-1	1	-2
$(3,1)$	3	0	1	-1	-2	1

a. Izmed točk v zgornji tabeli navedite tiste, ki so stacionarne točke funkcije g.

b. Izmed točk v zgornji tabeli navedite tiste, ki so lokalni ekstremi funkcije g in jih klasificirajte.

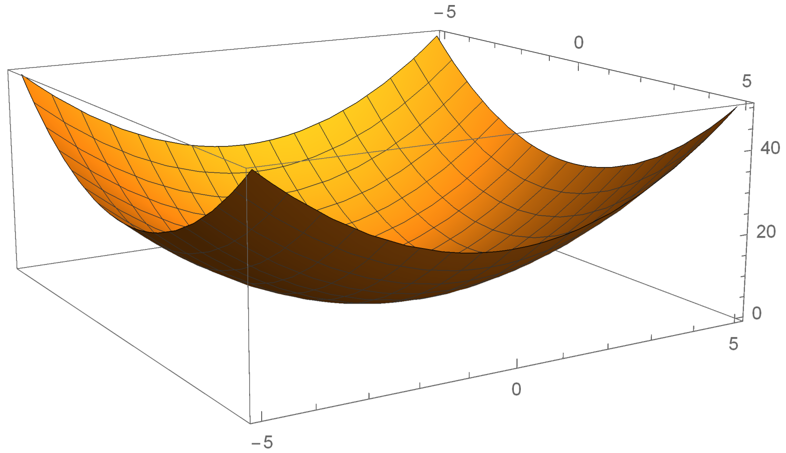
c. Na naslednji sliki je graf funkcije $f : [-2.5, 3.5] \to \mathbb{R}$.



Določite vezane ekstreme funkcije g na pasu $[-2.5, 3.5] \times \mathbb{R}$ pri vezi $h(x,y) = 0$, kjer je $h(x,y) = (f(x))^2 + (y-1)^2$.

Nasvet: Premislite, katere točke zadoščajo vezi $h(x,y) = 0$.

Naloga 19.
Na naslednji sliki je graf zvezno odvedljive funkcije $f : (-5,5) \times (-5,5) \to \mathbb{R}$.



Opazimo, da ima funkcija f v definicijskem območju **natanko en** lokalni ekstrem (x_0, y_0).

a. Kaj velja za odvoda $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$?

b. Napišite primer matrike, ki bi glede na podatke lahko bila Hessejeva matrika funkcije f v točki (x_0, y_0). Odgovor utemeljite.

c. Naj bo $g : (-5, 5) \times (-5, 5) \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija. Razložite, kako bi iskali kandidate za maksimalne in minimalne vrednosti funkcije f nad krivuljo, določeno z enačbo $g(x, y) = 6$.

d. Ali obstaja funkcija g v prejšnji točki, za katero bo kandidatov neskončno mnogo? Odgovor utemeljite.

Naloga 20.

Naj bosta dani funkciji

$$f(x, y) = \tan\left(\log\left(\sqrt{2 - x^2 - y^2}\right)\right) \quad \text{in} \quad g(x, y) = 5 + x^2 + 2y^2.$$

a. Zapišite definicijo nivojske krivulje funkcije dveh spremenljivk.

b. Določite nivojsko krivuljo funkcije f skozi točko $(1, 0)$ in jo narišite.

c. Zapišite definicijo vezanega ekstrema funkcije g pri pogoju $f(x, y) = 0$.

d. Določite vezane ekstreme funkcije g pri pogoju $f(x, y) = 0$.

Nasvet: Vpeljite novi spremenljivki $a := x^2$, $b := y^2$. Pogoj $f(x, y) = 0$ in definicijo funkcije $g(x, y)$ zapišite s spremenljivkama a in b. S tem se iskanje vezanih ekstremov zelo poenostavi.

Naloga 21.

a. Napišite definicijo leve limite funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

b. Napišite primer funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z levo in desno limito v točki $x = 0$, ki se med seboj razlikujeta.

c. Poiščite primere funkcij $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki zadoščajo:

(a) g ni zvezna v neki točki $a \in \mathbb{R}$, $f \circ g$ pa je zvezna v točki a.

(b) $\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x)$ obstaja, $\lim_{x \to 0} f(x)$ pa ne.

(c) $\lim_{x \to 0} g(x)$ obstaja, $\lim_{x \to 0} (f \circ g)(x)$ pa ne.

Naloga 22.

a. Napišite definicijo nivojnice funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

b. Napišite definicijo vezanega ekstrema funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pri pogoju $g(x, y) = 0$, kjer je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka funkcija.

c. Naj bo dana funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x, y) = x - 3xy + 3y^2.$$

Za vsakega od naslednjih pogojev $g(x, y) = 0$ ugotovite, ali vezani ekstremi za f obstajajo ali ne. Odgovore dobro utemeljite, ekstremov pa ni potrebno natančno izračunati.

(a) $g(x, y) = f(x, y) - 10$.

(b) $g(x, y) = y - x$.

(c) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Naloga 23.

a. Navedite $\epsilon - \delta$ definicijo zveznosti funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ene spremenljivke v točki $x_0 \in \mathbb{R}$.

b. Naj bosta dani *zvezna* funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, ki zadošča

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x \nearrow \frac{1}{4}} f(x) = -1, \quad \lim_{x \searrow \frac{1}{2}} f(x) = 4, \quad \lim_{x \to \frac{3}{5}} f(x) = 5, \quad f(1) = -2,$$

in linearna funkcija $g : [-2, 5] \to [0, 14]$, podana s predpisom $g(x) = 2(x + 2)$. Spodaj je nekaj trditev o funkcijah f, g. Obkrožite P, če je trditev pravilna in N, če je napačna.

(a) f je lahko surjektivna. P / N

(b) Velja $\lim_{x \searrow \frac{1}{4}} f(x) = -1$. P / N

(c) f ima vsaj 3 ničle. P / N

(d) Velja $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (g \circ f)(x) = 12$. P / N

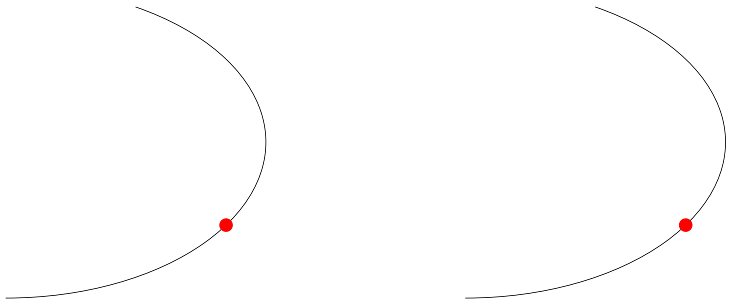
(e) Kompozitum $g \circ f$ je surjektiven. P / N

(f) Inverz funkcije g je dobro definiran in enak $g^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 2$. P / N

NALOGA 24.

a. Zapišite definicijo smernega odvoda odvedljive funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$ v smeri vektorja $\vec{e} = (e_1, e_2)$ v točki (x_0, y_0).

b. Naslednji skici predstavljata del nivojnice neke funkcije dveh spremenljivk. Na **levi** skici v označeni točki narišite smerna vektorja, v katerih funkcija najhitreje spreminja svojo vrednost, na **desni** skici pa smerna vektorja, v katerih se funkcijska vrednost ne spreminja.



c. Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva funkcija dveh spremenljivk. Za vsako od točk $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ **utemeljite**, ali je lokalni ekstremi. Vsak lokalni ekstrem tudi klasificirajte.

(a) $f_x(P) = f_y(P) = 0,\ f_{xx}(P) = 3, f_{xy}(P) = -1, f_{yy}(P) = 1$.

(b) $f_x(R) = 0,\ f_y(R) = -1,\ f_{xx}(R) = 3, f_{xy}(R) = 0, f_{yy}(R) = 2$.

(c) $f_x(Q) = f_y(Q) = 0,\ f_{xx}(Q) = 3, f_{xy}(Q) = 2, f_{yy}(Q) = 1$.

NALOGA 25.

a. Definirajte limito funkcije dveh spremenljivk v točki (a, b).

b. Za funkcijo $g(x) = x^4 + 5x + 1$ poiščite kak interval dolžine $\frac{1}{2}$, na katerem ima funkcija ničlo.

c. Utemeljite, katere izmed naslednjih trditev so pravilne.

(a) Obstaja liha injektivna funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Obstaja soda injektivna funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

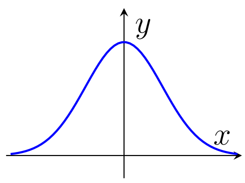
(c) Vsaka liha funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je injektivna.

(d) Vsaka soda funkcija $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je injektivna.

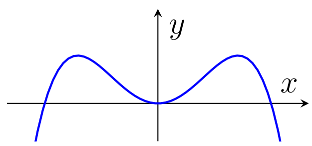
NALOGA 26.

a. Razložite linearno aproksimacijo funkcije v dani točki. Približno izračunajte $\sqrt{1.1}$.

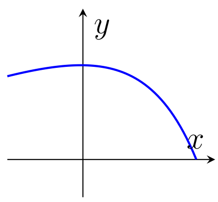
b. Za funkcije $g, h, k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ imamo podane njihove grafe na intervalu $[-3, 3]$.



graf g



graf h



graf k

Skrivnostna funkcija f je enaka eni izmed omenjenih treh funkcij. Vemo, da je $f'(-2) = -f'(2)$ in $f''(0) > 0$. Katera slika predstavlja graf funkcije f? Odgovor utemeljite.

c. Kateri graf v točki (b) predstavlja funkcijo, katere drugi odvod je monotona funkcija? Odgovor utemeljite.

NALOGA 27.

a. Zapišite definicijo parcialnega odvoda funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$ po spremenljivki x.

b. Poiščite kakšno funkcijo dveh spremenljivk, katere parcialna odvoda v točki $(1, 1)$ sta -2 in 1.

c. Naj bosta f in g odvedljivi funkciji dveh spremenljivk, katerih nivojnice so krivulje. Podajte potreben pogoj za obstoj vezanega ekstrema funkcije f pri konstantni vrednosti g.

NALOGA 28.

a. Zapišite definicijo gradienta funkcije dveh spremenljivk.

b. Poiščite kakšno funkcijo dveh spremenljivk, katere gradient v točki $(1,1)$ je $(\pi,-2)$.

c. Kako sta povezana gradient funkcije f ter nivojnice funkcije f?

d. Zapišite definicijo Taylorjeve vrste funkcije ene spremenljivke v točki a.

e. Zapišite Taylorjevo vrsto funkcije $(x-1)e^x$ okoli $a=0$.

f. Skicirajte graf kakšne dvakrat zvezno odvedljive funkcije f, za katero velja

$$f(0)>0, \quad f'(1)=f'(-2)=0, \quad f''(2)<0, \quad f(3)<0, \quad f'(4)>0.$$

Kolikšno je najmanjše možno število prevojev take funkcije?

NALOGA 29.

a. Skicirajte graf poljubne funkcije definirane na $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, za katero velja

$$\lim_{x\nearrow 1} f(x)=-1, \quad \lim_{x\searrow 1} f(x)=-2, \quad \lim_{x\nearrow -1} f(x)=1, \quad \lim_{x\searrow -1} f(x)=2, \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=0.$$

b. Za zvezno funkcijo $f\colon [-1,1]\to\mathbb{R}$ naj velja $f(-1)=3$ in $f(1)=-1$. Če sta -1 ter 1 začetna približka iskanja ničle funkcije f na $[-1,1]$ po sekantni metodi, kateri bo naslednji približek?

c. Poiščite kakšno elementarno funkcijo dveh spremenjivk, katere definicijsko območje je $[1,\infty)\times[0,\infty)$.

NALOGA 30.

a. Za zvezno funkcijo $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ naj velja

$$h(0)=h(1)=-3, \quad h(-2)=h(-1)=h(3)=1, \quad h(2)=\sqrt{2}.$$

Kolikšno je najmanjše število ničel take funkcije?

b. Definirajte kakšno funkcijo, za katero obstaja leva limita v 0, desna pa ne.

c. Definirajte nivojske krivulje funkcije dveh spremenljivk ter podajte kak primer.

NALOGA 31.

a. Zapišite definicijo smernega odvoda funkcije dveh spremenljivk.

b. Poiščite kakšno funkcijo dveh spremenljivk, katere smerni odvod v točki $(1,1)$ v smeri $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ je enak 1.

c. Zapišite definicijo Hessejeve matrike funkcije dveh spremenljivk.

d. Kakšna je povezava med Hessejevo matriko funkcije f dveh spremenljivk ter lokalnimi ekstremi funkcije f?

e. Za zvezno odvedljivo funkcijo $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naj velja

$$g(-1) = 0, \quad g'(1) = g(1) = g(2) = g(3) = g'(3) = g(4) = 2, \quad g(5) = 3.$$

Kolikšno je najmanjše število stacionarnih točk take funkcije?

f. Kaj je vezani ekstrem funkcije f pri pogoju $g(x, y) = 0$?

POGLAVJE 4

Integral

Naloga 32.

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija, ki je integrabilna na vsakem intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$.

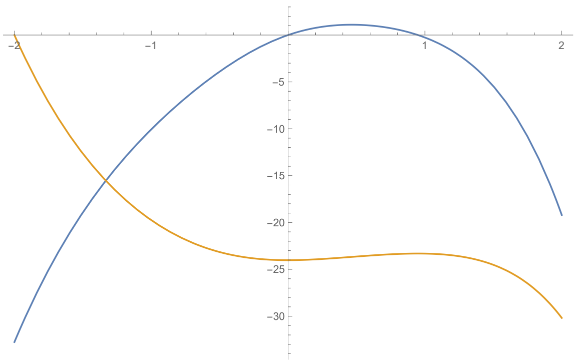
a. Določite definicijsko območje funkcije $F(x, y) = \displaystyle\int_y^x f(t)\, dt$.

b. Naj bo f strogo pozitivna funkcija. Določite množico ničel funkcije F, definirane kot v (a).

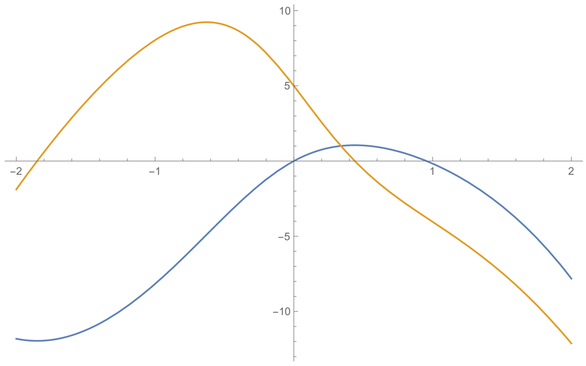
c. Naj bo $f(t) = t$. Določite nivojnico funkcije F, na kateri leži točka $(2, 0)$.

d. Izračunajte oba parcialna odvoda $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ in $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

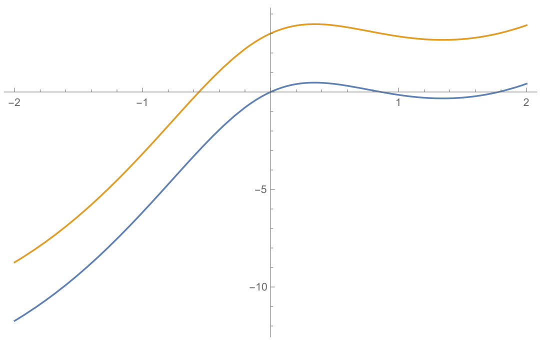
Naloga 33.



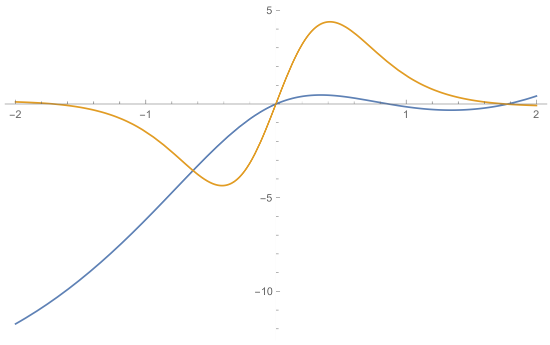
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

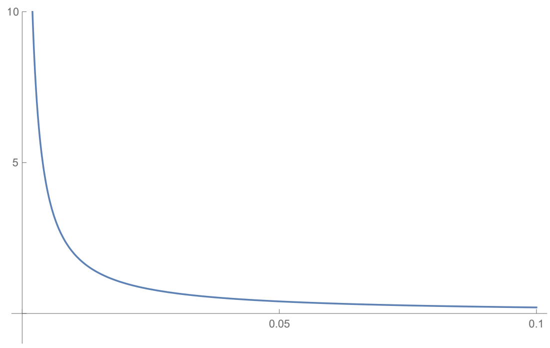
Za vsako od naslednjih trditev je ustrezna natanko ena od zgornjih slik (za vsako druga slika). Izberite ustrezno sliko in **utemeljite** svojo odločitev tako, da poiščete ustrezno lastnost, ki jo slika ima in jo ostale nimajo.

a. Na sliki sta grafa dveh nedoločenih integralov neke funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$.

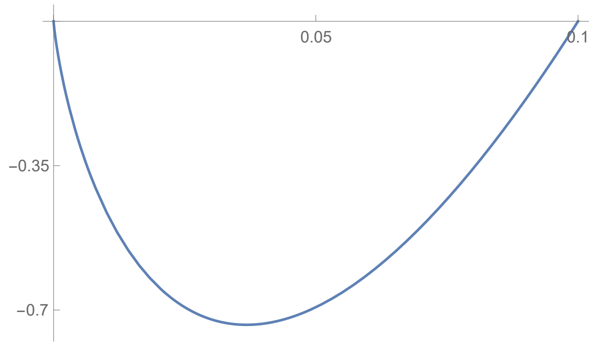
b. Na sliki sta grafa funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ in njenega določenega integrala $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\, dt$.

c. Na sliki je z **modro** barvo narisan graf funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, z oranžno pa njen odvod.

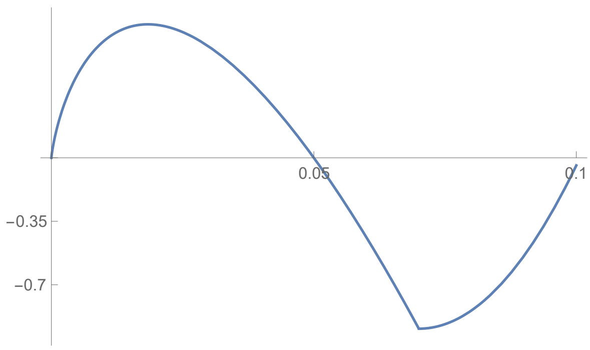
Naloga 34.



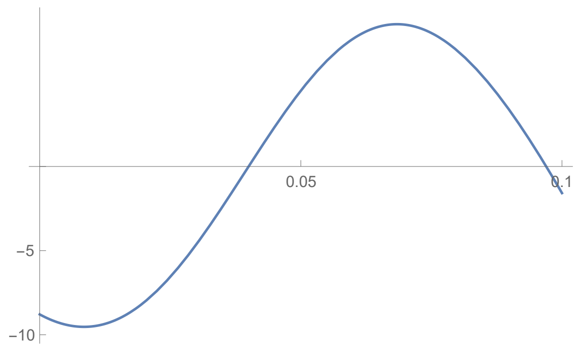
Slika 1



Slika 2



Slika 3



Slika 4

Na zgornjih slikah so narisani grafi nekaterih funkcij. Za vsako od naslednjih trditev je ustrezna vsaj ena od zgornjih slik. Izberite vse ustrezne slike, ki zadoščajo posamezni od naslednjih trditev in **utemeljite** svojo odločitev tako, da navedete lastnost, na podlagi katere ste se odločili.

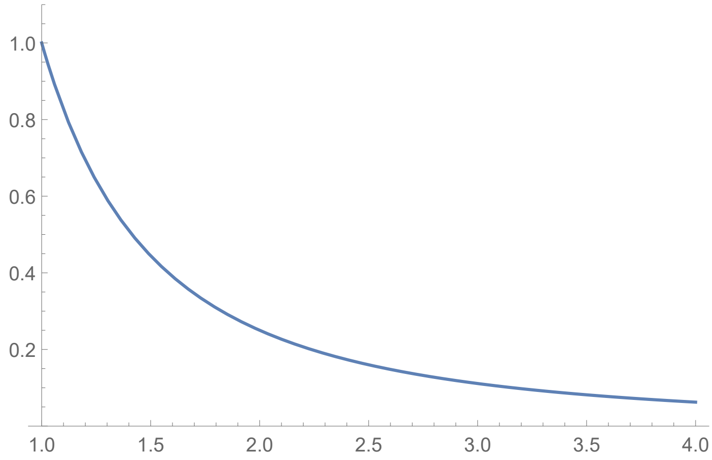
a. Določeni integral $\int_{0}^{0.1} f(x)\, dx$ funkcije z grafom, ki ga predstavlja slika, obstaja.

b. Drugi odvod funkcije z grafom, ki ga predstavlja slika, ima vsaj eno ničlo na intervalu $(0, 0.1)$.

c. Prvi odvod funkcije z grafom, ki ga predstavlja slika, ne obstaja na celem intervalu $(0, 0.1)$.

d. Prvi odvod funkcije z grafom, ki ga predstavlja slika, ni nikjer pozitiven na intervalu $(0, 0.1)$.

NALOGA 35.
Na naslednji sliki je graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$.



a. Izračunajte določeni integral $I_n := \int_1^n f(x)\, dx$ in $\lim_{n\to\infty} I_{kn}$.

b. Prerišite skico krivulje (skica ne rabi biti zelo natančna) in vrišite pravokotnike, ki ustrezajo Riemannovi vsoti funkcije $f(x)$ na intervalu $[1, 4]$ pri izbiri delilnih točk $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ in vmesnih točk $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$.

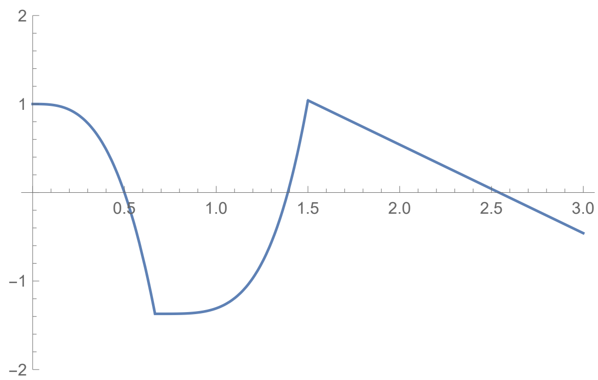
c. Napišite Riemannovo vsoto R_n funkcije $f(x)$ pri izbiri delilnih točk $x_0 = 1, x_1 = 2, \ldots, x_{n-1} = n$ intervala $[1, n]$ in vmesnih točk $c_1 = 2, c_2 = 3, \ldots, c_{n-1} = n$. Če sklepate iz točke (b), kaj lahko poveste o velikosti R_n v primerjavi z I_n?

d. Utemeljite, da je vrsta $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ konvergentna.

NALOGA 36.

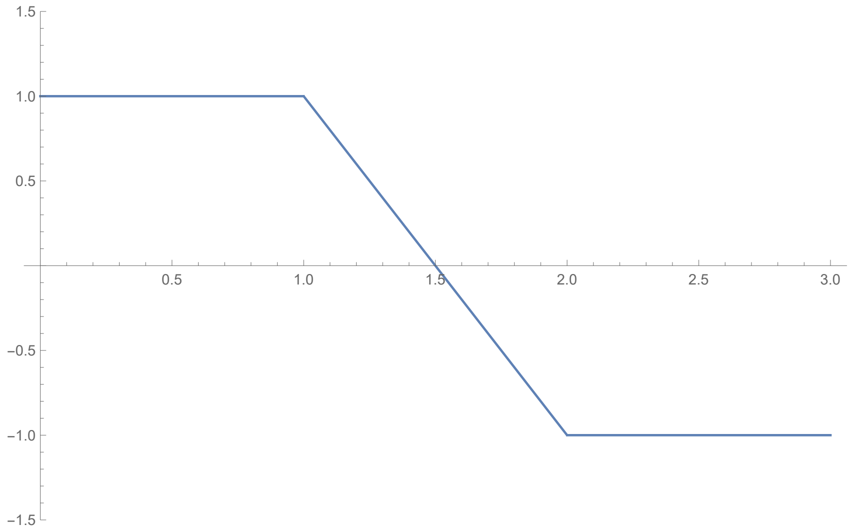
a. Zapišite definicijo globalnega maksimuma funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kjer je $a < b$.

b. Na naslednji skici je narisan graf odvoda neke odvedljive funkcije $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$. Označite x-koordinate točk, ki so kandidati za globalni **maksimum**.



c. Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, kjer je $a < b$.

d. Na naslednji skici je narisan graf neke funkcije $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$. Na skico narišite enega izmed njenih nedoločenih integralov.



e. Zapišite definicijo konveksnosti funkcije na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, kjer je $a < b$.

f. Narišite dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo $f : [0, 5) \to \mathbb{R}$, ki zadošča naslednjim pogojem:
- $f'(x) < 0$ za $x \in (0, 2)$.
- $f'(x) > 0$ za $x \in (2, 4) \cup (4, 5)$.
- $f''(x) < 0$ za $x \in (0, 1) \cup (3, 4)$.
- $f''(x) > 0$ za $x \in (1, 3) \cup (4, 5)$.

Naloga 37.

a. Napišite definicijo določenega integrala funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

b. Napišite definicijo posplošenega integrala $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ funkcije $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ in podajte primer funkcije, za katero obstaja.

c. Ali obstaja *zvezna* funkcija $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, za katero obstaja določeni integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, f pa nima pa primitivne funkcije na intervalu $(0, 1)$? Če je odgovor da, podajte primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

d. Ali obstaja zvezna funkcija $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, ki ima primitivno funkcijo, ne obstaja pa določeni integral $\displaystyle\int_0^1 \widetilde{f}(x)dx$ za nobeno razširitev $\widetilde{f} : [0, 1] \to \mathbb{R}$ funkcije f? Če je odgovor da, podajte primer, sicer pa utemeljite, zakaj je odgovor ne.

Naloga 38.

a. Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$.

b. Naj bosta F, G nedoločena integrala funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pri čemer je $F(1) = 0$, $G(1) = 2$ in $F(5) = 4$. Koliko je $G(5)$? Odgovor utemeljite.

c. Dana je funkcija $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Ena od lastnosti te funkcije je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Spodaj je navedenih nekaj trditev o funkciji f. Obkrožite P, če je trditev pravilna in N, če je napačna.

(a) f je liha. P / N

(b) f je naraščajoča. P / N

(c) Točka $x = 0$ je stacionarna točka funkcije f. P / N

(d) f ima natanko en prevoj. P / N

(e) f je konveksna na poltraku $[0, \infty)$. P / N

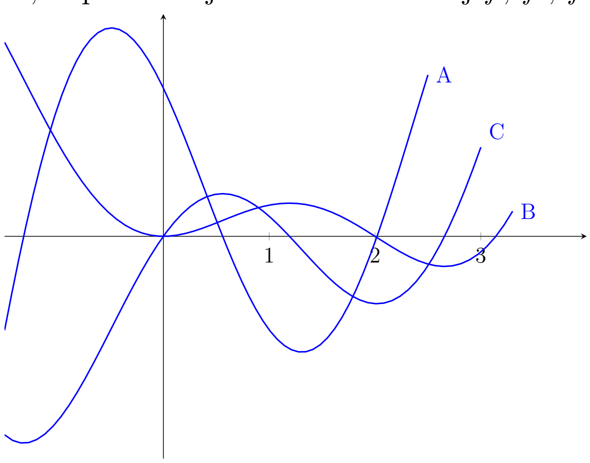
(f) f ima lokalne, nima pa globalnih ekstremov. P / N

Naloga 39.

a. Zapišite definicijo povprečne vrednosti funkcije f na intervalu $[a, b]$.

b. Naj bo $f(x) = \int_0^x (t^3 - t)dt$. Poiščite stacionarne točke funkcije f.

c. Na spodnji sliki so narisani grafi funkcij $y = f(x)$, $y = f'(x)$ in $y = f''(x)$. Zapišite, kateri od grafov A, B, C predstavlja katero od funkcij f, f', f'':



Graf funkcije $y = f(x)$ je graf __________.

Graf funkcije $y = f'(x)$ je graf __________.

Graf funkcije $y = f''(x)$ je graf __________.

d. Izmed omenjenih treh funkcij iz prejšnje točke poiščite poiščite tisto, za katero je njen določeni integral na intervalu $[1, 2]$ največji.

e. Naj bo f soda funkcija, za katero velja $\int_0^2 f(x)dx = 1$. Izračunajte

$$\int_{-2}^{2} (2f(x) + 1)dx.$$

f. Podajte kakšni funkciji f_1, f_2, za kateri velja

$$\int_0^\infty f_1(x)dx < \infty \quad \text{ter} \quad \int_0^\infty f_2(x)dx = \infty.$$

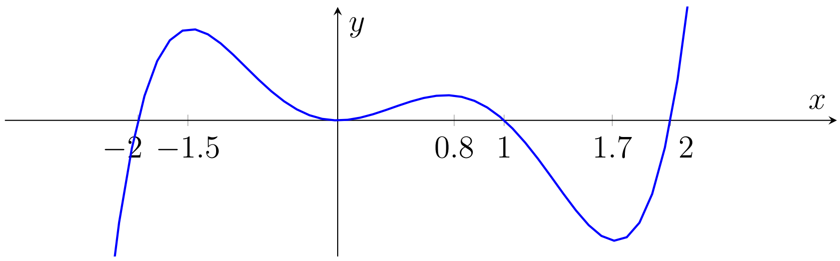
NALOGA 40.

a. Zapišite definicijo določenega integrala funkcije f na intervalu $[a, b]$.

b. Izmed naslednjih funkcij obkrožite tiste, ki spadajo med nedoločene integrale funkcije $(2x)^{-1}$:

$$\ln|2x| \qquad \frac{\ln|2x|}{2} \qquad \frac{\ln|x|}{2} \qquad \ln|x|$$

(c+d) Dobro si oglejte graf *odvoda* h' funkcije $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:



Določite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije h?

Določite prevoje funkcije h in pri vsakem izmed njih zapišite, ali gre za prehod iz konveksnosti v konkavnost ali obratno?

c. Naj za funkcijo h iz točke (c+d) velja $h(-1) = 0$. Kakšna sta predznaka integralov $\int_{-2}^{-1} h(x)dx$ ter $\int_{-1}^{0} h(x)dx$?

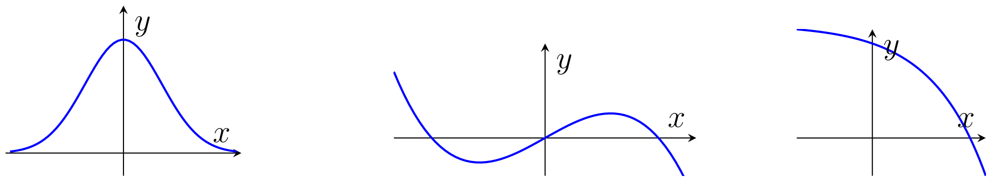
d. Zakaj pri izračunu nedoločenega integrala na koncu običajno dodamo konstanto?

NALOGA 41.

a. Zapišite definicijo nedoločenega integrala funkcije.

b. Naj bo f soda funkcija, za katero velja $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Izračunajte $\int_{-2}^{2} f(x/2)dx$.

c. Za funkcije $g, h, k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ imamo podane grafe njihovih **integralov** na intervalu $[-3, 3]$.



graf $\int g(x)dx$ graf $\int h(x)dx$ graf $\int k(x)dx$

Skrivnostna funkcija f je enaka eni izmed omenjenih treh funkcij. Vemo, da je $f(0) < 0$. Obkrožite graf funkcije f?

d. Naj bo f funkcija iz prejšnje točke. Za vsako izmed vrednosti $f'(-3)$, $f'(3)$ določite, ali je pozitivna, negativna, ali enaka 0.

e. Zapišite formulo za prostornino vrtenine, ki jo dobimo, če graf funkcije f zavrtimo okoli osi x na intervalu $[a, b]$.

f. Podajte kakšni funkciji f_1, f_2 s polom v 0, za kateri velja $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)dx < \infty$ ter $\displaystyle\int_0^1 f_2(x)dx = \infty$.

POGLAVJE 5

Diferencialne enačbe

NALOGA 42.

a. Napišite definicijo ortogonalnih trajektorij na dano družino krivulj.

b. Poiščite ortogonalne trajektorije na družino parabol $\dfrac{y^2}{x} = a$, kjer je parameter $a \in \mathbb{R}$ realen.

NALOGA 43.

a. Navedite definicijo diferencialne enačbe 1. reda z ločljivima spremenljivkama.

b. Rešite diferencialno enačbo $y'(x) + 2y(x) = 2$ z začetnim pogojem $y(0) = 2$.

Del 2

Rešitve

Kompleksna števila

Rešitev naloge 1.

a. Če A prezrcalimo čez y-os s preslikavo $x+iy \mapsto -x+iy$ in premaknemo navzdol za i s preslikavo $x+iy \mapsto x+i(y-1)$, dobimo B. Predpis je torej

$$x+iy \mapsto -x+i(y-1).$$

b. Prava slika je 1. Enačba ima 6 rešitev. Gre ravno za 6-te korene enice, premaknjene za vektor $2+i$.

c. Prava enačba je

$$\left(z-(2+i)e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6 = 1.$$

Pri vrtenju točke ostanejo v isti medsebojni legi. Torej bodo še vedno tvorile 6-te korene 1, premaknjene za nek vektor. Premik je ravno središče krožnice, na kateri ležijo, tj. $(2+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Rešitev naloge 2.

a. Operacija: potenciranje s predpisom

$$|z|\, e^{i\mathrm{Arg}(z)} \mapsto |z|^n\, e^{in\mathrm{Arg}(z)},$$

kjer je $n \in \mathbb{Z}$.
Transformacija: vrtež za kot φ s predpisom

$$z \mapsto ze^{i\varphi}.$$

b. Ena od ustreznih rešitev je

$$0 = (z-i)(z+i)z = (z^2+1)z = z^3+z.$$

Torej $a_3 = a_1 = 1, a_2 = a_0 = 0$. Iz razcepa z^3+z se vidi, da so rešitve enačbe i, $-i$ in 0.

c. Ena od usteznih rešitev je $z^n = a$, kjer je $a \in \mathbb{R}$. Torej $a_n = 1$, $a_{n-1} = \ldots = a_1 = 0$, a_0 karkoli. Vemo, da rešitve enačbe $z^n = a$ tvorijo oglišča pravilnega n-kotnika. Torej rotacija za kot $\frac{2\pi}{n}$ ne spremeni množice rešitev.

Rešitev naloge 3.

a. Kompleksno število $z = x+iy \in \mathbb{C}$ v polarnem zapisu podamo kot $z = |z|e^{i\varphi}$, kjer je $|z|$ absolutna vrednost, $\varphi \in [0, 2\pi)$ pa kot, ki ga z oklepa z x-osjo.

Formula za potenciranje: $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

b. Še ena rešitev enačbe je $\overline{w}$. Dokaz:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i w^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i w^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i w^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{w}^i = 0.$$

c. Po prejšnji točki je potrebno vse rešitve le zrcaliti čez x-os.

Rešitev naloge 4.

a. Iz veljavnosti trditve $T(3)$ in implikacije
$$T(n) \text{ velja.} \Rightarrow T(n+4) \text{ velja.}$$
sledi veljavnost trditve za vsa števila oblike $3+4k, k \in \mathbb{N}$. Ker število 2020 ni te oblike, o veljavnosti $T(2020)$ ne moremo sklepati.

b. n-ti koren kompleksnega števila $a \in \mathbb{C}$ je vsaka rešitev enačbe $z^n = a$. Eksplicitne formule za izračun so
$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

c. Na levi skici je potrebno modro točko prezrcaliti čez središče, da dobimo še drugo rešitev. Na desni skici moramo točko petkrat zavrteti za 60 stopinj, da dobimo še preostalih 5 rešitev. Rešitve na desni strani so oglišča pravilnega šestkotnika.

Rešitev naloge 5.

a. Veljati mora $|z| = \frac{1}{2}$. Temu zadošča vsak z iz kompleksne krožnice s središčem v izhodišču in polmerom $\frac{1}{2}$. Torej $z = \frac{1}{2}e^{i\varphi}$, kjer je $\varphi \in [0, 2\pi)$. Npr.
$$z_1 = \frac{1}{2}, \qquad z_2 = -\frac{1}{2}, \qquad z_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}2\right) = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

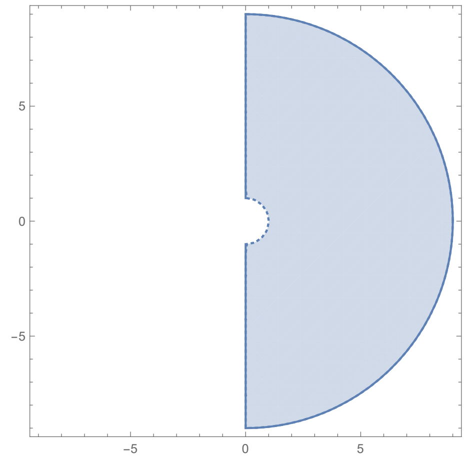
b.
- Enačba je stopnje 10, zato ima 10 kompleksnih rešitev.
- Rešitve enačbe $z^7 = 8$ so oblike
$$\sqrt[7]{8} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{7}} \quad \text{za } k = 0, \ldots, 6.$$
Realni bi bili lahko samo rešitvi pri kotu 0 in π. Kot 0 dobimo pri $k = 0$, kota π pa ne moremo dobiti, saj enačba $1 = 2k/7$ nima celoštevilskih rešitev.
- Rešitve enačbe $z^3 = -8$ so oblike
$$\sqrt[3]{8} \cdot e^{i\left(\pi + \frac{2k\pi}{3}\right)} \quad \text{za } k = -1, 0, 1.$$
Realni bi bili lahko samo rešitvi pri kotu 0 in π. Kot π dobimo pri $k = 0$, kota π pa ne moremo dobiti, saj enačba $0 = 1 + \frac{2k}{3}$ nima celoštevilskih rešitev.

c. Ker imamo dva pogoja, potrebujemo funkcijo z dvema parametroma. Najenostavnejša taka funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je kar linearna funkcija, tj. $f(z) = az + b$. Veljati mora
$$1 = f(0) = b \quad \text{in} \quad 1 + i = f(1) = a + b.$$
Od tod iz prve enačbe sledi $b = 1$, iz druge pa
$$1 + i - b = 1 + i - 1 = i = a.$$
Torej je $f(z) = iz + 1$.

Rešitev naloge 6.

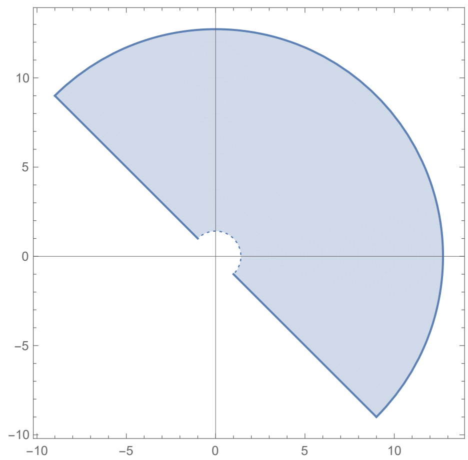
a. Velja
$$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$
in
$$\left((37 + 29i) \cdot \overline{(37 + 29i)}\right)^2 = |37 + 29i|^4 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im}\left(|37 + 29i|^4\right) = 0.$$

b. Območje je

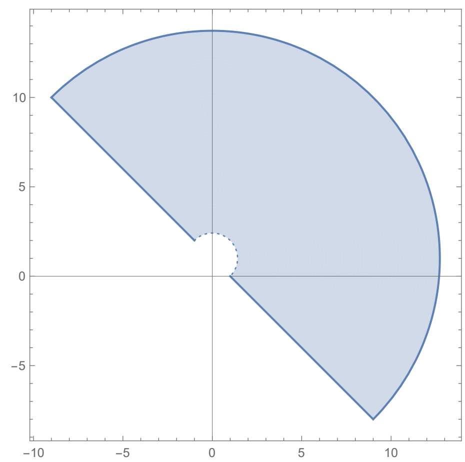


c. Velja $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. Torej je

$$(1+i)\mathcal{D}=\left\{z=|z|e^{i\varphi}\in\mathbb{C};\ -\frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{3\pi}{4},\sqrt{2}<|z|\leq 9\sqrt{2}\right\}.$$

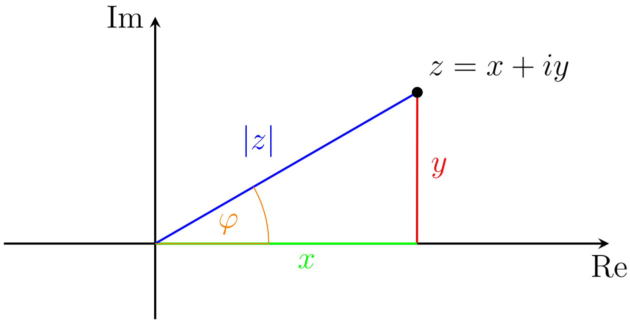


Območje $(1+i)\mathcal{D}+i$ dobimo s premikom območja $(1+i)\mathcal{D}$ za vektor $(0,1)$.

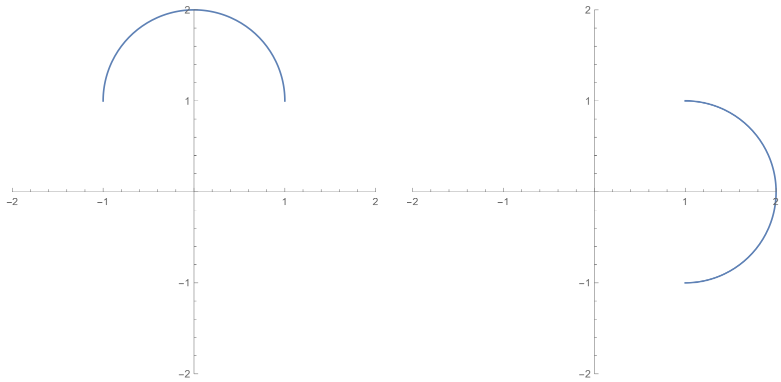


Rešitev naloge 7.

a. Polarni zapis kompleksnega števila $z=x+iy$ je zapis z s pomočjo oddaljenosti od izhodišča $|z|$ in polarnim kotom φ, ki ga kompleksno število oklepa z x-osjo. Velja $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ in $\tan\varphi=\frac{y}{x}$.



b. Ustrezni sliki sta



c. Levo sliko moramo zavrteti za $\frac{\pi}{2}$ v negativni smeri, da iz $\mathcal{A}$ pridemo v $\mathcal{B}$. Torej je ustrezna kompleksna funkcija $f(z) = z \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Zaporedja in vrste

Rešitev naloge 8.

a. Z definiranjem $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{S+1}}$ je prva vrsta harmonična, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, in zato divergentna, druga pa alternirajoča harmonična, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, in zato konvergentna.

b. Ne, saj je potreben pogoj za konvergenco vrste $\lim_n a_n = 0$. Po spremembah še vedno velja $\lim_n a_{2n+1} = 1$.

c. Primer. $f(x) = \begin{cases} S, & x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{S-x}, & \text{sicer.} \end{cases}$

d. Ne. Zvezna funkcija interval $[0, 1]$ preslika v interval oblike $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Torej ima $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\frac{1}{2021}\right)$ končno vrednost.

Rešitev naloge 9.

a. Ker je $a_n \geq b_n \geq 0$ in velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, je po izreku o sendviču $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Zaporedje $(-1)^n\, b_n$ je alternirajoče, absolutno padajoče z limito 0, zato po Leibnizovem kriteriju vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\, b_n$ konvergira.

b. Ker je $a_n \geq b_n \geq c_n \geq 0$, iz divergence vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ lahko sklepamo na divergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. O vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ pa ne moremo sklepati.

c. Konvergenca vrste je po definiciji ekvivalentna konvergenci zaporedja $S_m := \sum_{n=1}^{m} d_n$ delnih vsot vrste. Konvergenca zaporedja S_m pa ni odvisna od katerih koli končno mnogo členov zaporedja d_n. Torej je konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ ekvivalentna konvergenci vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, divergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$.

Rešitev naloge 10.

a. Alternirajoča vrsta $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, kjer je $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, konvergira, če je zaporedje a_n monotono padajoče in velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b. $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = -\frac{1}{5}$, $a_6 = \left(\frac{7}{6}\right)^6$.

c. Podzaporedje $a_3, a_6, a_9, \ldots$ je podzaporedje zaporedja $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, ki ima limito e. Torej je podzaporedje $b_n = a_{3n}$ primer iskanega podzaporedja.

d. Podzaporedje $a_1, a_2, a_3, a_5, \ldots$ je alternirajoče zaporedje, ki zadošča pogojem Leibnitzovega izreka in je zato konvergentno.

Rešitev naloge 11.

a. Realno število $L \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, tako da velja

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{za vsak} \quad n > N_\epsilon.$$

b. (a) Naj za zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ velja

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N} \qquad \text{in} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L,$$

kjer je $L \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L.$$

(b) Velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{3}{2} = 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

(c) Če primerjamo a_n z b_n, ugotovimo $a_n < b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Res,

$$\frac{2}{3^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{n+1} < 3^{n+1}.$$

Ker je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je $A \leq C \leq B$.

Rešitev naloge 12. ⇧

a. Število $L \in \mathbb{R}$ je supremum zaporedja $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, če velja $L \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in za vsako drugo število $L' \in \mathbb{R}$, ki tudi zadošča pogoju $L' \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, velja $L' \geq L$.

b. Zaporedje $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ki je naraščajoče (oz. padajoče), je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno (oz. navzdol omejeno).

c. (a) Zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je zaporedje delnih vsot harmonične vrste $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, ki je divergentna. Zato je tudi zaporedje $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergentno.

(b) Zaporedje $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je zaporedje delnih vsot alternirajoče vrste

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right).$$

Ker je zaporedje $\left\{e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ padajoče in velja

$$\lim_{k\to\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) = 0,$$

je po Leibnizovem kriteriju zaporedje $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno.

Rešitev naloge 13. ⇧

a. Število $L \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja $(a_n)_n$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, tako da za vsak $n \geq N$ velja $|a_n - L| < \epsilon$.

b. (a) Vrsta $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ni konvergentna, saj zaporedje členov ne konvergira proti 0, tj. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \neq 0$.

(b) Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ je geometrijska vrsta z začetnim členom $a=-\frac{2}{3}$ in kvocientom $k=-\frac{2}{3}$. Ker je $|k|<1$, je vrsta konvergentna in njena vsota je enaka

$$\frac{a}{1-k}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{-2}{5}.$$

(c) Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{n}$ ni konvergentna, saj dominira harmonično vrsto $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, ki je divergentna.

(d) Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2}$ ni konvergentna, zaporedje členov ne konvergira proti 0, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\neq 0.$$

Rešitev naloge 14.

a. Vrsta $\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n$ po definciji konvergira natanko tedaj, ko zaporedje $\{S_m\}_m$ njenih delnih vsot $S_m=\sum_{n=n_0}^{m}a_n$, kjer je $m\geq n_0$, konvergira.

b. $a_n=2+\frac{1}{n}$.

c. Ustrezni sta npr. zaporedji $a_n=\begin{cases}2, & \text{za sode } n,\\ 3, & \text{za lihe } n.\end{cases}$ in $b_n=3+\sin n$.

Rešitev naloge 15.

a. Spodnja meja zaporedja $\{a_n\}_n$ je vsako število $x\in\mathbb{R}$, ki zadošča $x\leq a_n$ za vsak $n\in\mathbb{N}$. Infimum pa je največja izmed vseh spodnjih mej.

Primer: $a_n=\frac{1}{n}$. Spodnje meje so vsa nepozitivna števila, infimum pa je 0.

b. Vrsta $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ je geometrijska vrsta z začetnim členom $a=1$, kvocientom $q=\frac{1}{2}$ in vsoto $\frac{1}{1-q}=2$.

Funkcije in odvod

Rešitev naloge 16.

a. Kandidate bi iskali z iskanjem stacionarnih točk, tj. takih točk (x_0, y_0), ki zadoščajo pogoju $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ in ležijo v $\mathcal{D}_f$.

b. Če g nima stacionarnih točk, so ekstremi na robu množice $\mathcal{D}_g$, tj. na krožnici
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\right\}.$$
Te pa poiščemo tako, da poiščemo stacionarne točke funkcije
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

c. Velja $g(0) = f(0) - 0 \geq 0$. Če je $g(0) = 0$, je $f(0) = 0$ in 0 je fiksna točka funkcije f. Sicer je $g(0) > 0$. Če je $g(1) = f(1) - 1 = 0$, je 1 fiksna točka funkcije f. Sicer je $g(1) < 0$ in po izreku o vmesni vrednosti obstaja $\alpha \in (0, 1)$, da je $g(\alpha) = 0$ oz. $f(\alpha) = \alpha$.

Rešitev naloge 17.

a. $f(x, y) = 2x + y$. Velja namreč $\operatorname{grad} f(1, T) = (2, 1)$.

b. $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - T)^2$. Velja namreč
$$g_x(1, T) = g_y(1, T) = 0 \quad \text{in} \quad g_{xx}(1, T) = g_{yy}(1, T) = 2,\ g_{xy}(1, T) = 0.$$
Torej je $(1, T)$ stacionarna, Hessejeva matrika
$$H_g(1, T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
pa zadošča pogojem za lokalni minimum.

c. Smer $(-1, 2)$. V vezanem ekstremu namreč velja, da sta $\operatorname{grad} f(1, T)$ in $\operatorname{grad} h(1, T)$ vzporedna. Torej oba kažeta v smeri $(2, 1)$. Tangenta na krivuljo $\mathcal{C}$ pa je v vsaki točki pravokotna na $\operatorname{grad} h$. Torej mora biti skalarni produkt $(2, 1)$ in smeri tangente (a, b) enak 0, tj. $2a + b = 0$.

Rešitev naloge 18.

a. Stacionarna točka P zadošča pogojema $g_x(P) = g_y(P) = 0$. Torej so stacionarne točke g: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $(-2, 1)$, $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$.

b. Točka P je lokalni ekstrem funkcije g, če je stacionarna in je Hessejeva matrika $H_g(P)$ definitna, tj. $g_{xx}(P) g_{yy}(P) - g_{xy}^2(P) > 0$. Torej so kandidati za lokalne ekstreme le stacionarne točke.

Velja
$$g_{xx}\left(\frac{2}{3}, 0\right) g_{yy}\left(\frac{2}{3}, 0\right) - g_{xy}^2\left(\frac{2}{3}, 0\right) = 2 - 1 = 1.$$
Ker je še $g_{xx}\left(\frac{2}{3}, 0\right) > 0$, je točka $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ lokalni minimum funkcije g.

Velja
$$g_{xx}(-2, 1)\, g_{yy}(-2, 1) - g_{xy}^2(-2, 1) = -3 - 0 = -3.$$
Torej $(-2, 1)$ ni lokalni ekstrem funkcije g.

Velja
$$g_{xx}\left(\frac{2}{3},1\right)g_{yy}\left(\frac{2}{3},1\right)-g_{xy}^2\left(\frac{2}{3},1\right)=2-1=1.$$
Ker je še $g_{xx}\left(\frac{2}{3},1\right)<0$, je točka $\left(\frac{2}{3},1\right)$ lokalni maksimum funkcije g.

c. Enakost $h(x,y)=0$ lahko velja le, če je $f(x)^2=(y-1)^2=0$. Torej mora biti $f(x)=0$ in $y=1$. Iz grafa funkcije f vidimo, da mora biti $x\in\left\{-2,-1,\frac{2}{3},3\right\}$. Torej so kandidati za vezane ekstreme točke $(-2,1),(-1,1),\left(\frac{2}{3},1\right),(3,1)$. Med temi pa je minimum v točki $(-1,1)$, tj. -7, maksimum pa v točki $(3,1)$, tj. 3.

Rešitev naloge 19.

a. Oba sta enaka 0.

b. Iz slike vidimo, da gre za lokalni minimum. Primer Hessejeve matrike:
$$H_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}.$$
Veljati mora namreč
$$f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}(x_0,y_0)^2>0 \quad \text{in} \quad f_{xx}(x_0,y_0)>0.$$
Pri nas $2^2-1=3$ in 2.

c. Tvorili bi Lagrangeovo funkcijo
$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda(g(x,y)-6)$$
in rešili sistem
$$L_x=L_y=L_\lambda=0.$$

Rešitev naloge 20.

a. Za poljubo realno število $c\in\mathbb{R}$ je nivojska krivulja funkcije dveh spremenljivk $f(x,y)$ množica točk
$$\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2\colon f(a,b)=c\right\}.$$

b. Velja
$$f(1,0)=\tan\left(\log\left(\sqrt{2-1^2-0^2}\right)\right)=\tan(\log(1))=\tan(0)=0.$$
Torej iščemo točke $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, tako da velja
$$f(a,b)=\tan\left(\log\left(\sqrt{2-a^2-b^2}\right)\right)=0.$$
Vemo, da je $\tan(x)=0$ natanko tedaj, ko je $x=k\pi$ za nek $k\in\mathbb{Z}$. Zato mora biti
$$\log\left(\sqrt{2-a^2-b^2}\right)=k\pi \quad \text{oz.} \quad 2-a^2-b^2=e^{2k\pi} \quad \text{oz.} \quad 2-e^{2k\pi}=a^2+b^2.$$
Nivojnica je tako unija krožnic s središči v izhodišču in polmeri $\sqrt{2-e^{2k\pi}}$, kjer je $k\leq 0$.

c. Vezani ekstremi funkcije g pri pogoju $f(x,y)=0$ so največje in najmanjše vrednosti funkcije g na nivojnici funkcije f pri vrednosti 0.

d. Po substituciji dobimo $a+b=2-e^{2k\pi}$, od koder lahko izrazimo eno od spremenljivk, npr. $a=2-e^{2k\pi}-b$. Vstavimo v $g(a,b)$:
$$g(a,b)=5+a+2b=7-e^{2k\pi}+b.$$
Ker je $b\in[0,2-e^{2k\pi}]$, velja ocena
$$7-e^{2k\pi}\le g(a,b)\le 9-2e^{2k\pi}.$$
Za $b=0$ dobimo tako za vsak k vezani lokalni minimum, za $b=2-e^{2k\pi}$ pa za vsak k vezani lokalni maksimum. Najmanjša vrednost g pri vezi $f=0$, je tako pri $k=0$, tj. 7, največja vrednost pa ne obstaja, saj je
$$\lim_{k\to-\infty}\left(9-2e^{2k\pi}\right)=9,$$
pri čemer je funkcija $h(k):=9-2e^{2k\pi}$ padajoča.

Rešitev naloge 21.

a. $L\in\mathbb{R}$ je leva limita funkcije f v x_0 natanko tedaj, ko za vsak $\epsilon>0$ obstaja $\delta>0$, tako da
$$\text{iz pogoja}\quad x_0-x<\delta,\qquad\text{sledi}\qquad |f(x)-f(x_0)|<\epsilon.$$

b. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{za } x\ge 0,\\ -1, & \text{za } x<0.\end{cases}$

(a) $g(x)=\begin{cases}1, & \text{za } x\ge a,\\ -1, & \text{za } x<a.\end{cases}$, $f(x)=1$ za vsak $x\in\mathbb{R}$.

(b) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{za } x\ge 0,\\ -1, & \text{za } x<0.\end{cases}$, $g(x)=1$ za vsak $x\in\mathbb{R}$.

(c) $g(x)=x$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Rešitev naloge 22.

a. Za $k\in\mathbb{R}$ je nivojnica $\mathcal{N}_k$ funkcije f množica
$$\mathcal{N}_k:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon f(x,y)=k\right\}.$$

b. Vezan ekstrem funkcije f je vsaka točka $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, kjer je vrednost $f(x_0,y_0)$ maksimalna ali pa minimalna med vsemi vrednostmi $f(x,y)$, pri čemer (x,y) zadošča pogoju $g(x,y)=0$.

c. (a) Vse točke so ekstremne, saj je $g(x,y)=0$ ravno nivojnica funkcije f za vrednost 10.

(b) Iz $g(x,y)=0$, sledi $x=y$. Torej iščemo ekstreme funkcije $f(x,x)=x$. Ti pa ne obstajajo.

(c) Množica rešitev $g(x,y)=0$ je krožnica. To pa je omejena in zaprta množica. Ker je $f(x,y)$ zvezna funkcija, ima minumum in maksimum na krožnici.

Rešitev naloge 23.

a. Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je zvezna v točki $x_0\in\mathbb{R}$, če za vsak $\epsilon>0$ obstaja $\delta>0$, tako da iz pogoja $|x-x_0|<\delta$ sledi $|f(x)-f(x_0)|\leq\epsilon$.

b. (a) Ne, saj zvezna funkcija zaprt omejen interval preslika v zaprt omejen interval. Torej je $f([0,1])=[a,b]$ za neka $a,b\in\mathbb{R}$.

(b) Da, saj za zvezno funkcijo f velja $\lim\limits_{x\nearrow\frac{1}{4}} f(x)=\lim\limits_{x\searrow\frac{1}{4}} f(x)$.

(c) Da, zvezna funkcija na zaprtem intervalu zavzame vse vrednosti med najmanjšo in največjo. Tako ima f na intervalih $\left[0,\frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ in $\left[\frac{3}{5},1\right]$ vsaj po eno ničlo.

(d) Da. Velja

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}(g\circ f)(x)=g\left(\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)\right)=g(4)=2\cdot 6=12.$$

(e) Da. Velja $f([0,1])=[-2,5]$ in zato $(g\circ f)([0,1])=g([-2,5])=[0,14]$.

(f) Da. V predpisu $2(x+2)=y$ zamenjamo x,y in izrazimo y. Dobimo $y=\frac{x}{2}-2$.

Rešitev naloge 24.

a. Smerni odvod $f_{\vec{e}}(x_0,y_0)$ funkcije $f(x,y)$ v smeri vektorja $\vec{e}=(e_1,e_2)$ v točki (x_0,y_0) je enak

$$f_{\vec{e}}(x_0,y_0)=e_1 f_x(x_0,y_0)+e_2 f_y(x_0,y_0).$$

b. Na levi sliki je potrebno narisati vektor v smeri gradienta, tj. pravokotno na krivuljo v označeni točki. Na desni strani je potrebno narisati vektor v smeri tangente na krivuljo v označeni točki.

c. (a) Točka P je stacionarna, saj je $f_x(P)=f_y(P)=0$. Hessejeva matrika $H_f(P)$ je enaka

$$H_f(P)=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Njena determinanta je $3-1=2>0$. Torej je P ekstrem. Ker je $f_{xx}(P)>0$, gre za lokalni minimum.

(b) Točka R ni stacionarna, saj je $f_y(R)\neq 0$. Torej R ni lokalni ekstrem.

(c) Točka Q je stacionarna, saj je $f_x(Q)=f_y(Q)=0$. Hessejeva matrika $H_f(Q)$ je enaka

$$H_f(Q)=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Njena determinanta je $3 - 4 = -1 < 0$. Torej je Q sedlo.

Rešitev naloge 25.

a. Vrednost $L \in \mathbb{R}$ je limita funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki (a, b), če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsako točko $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ki zadošča pogoju
$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta,$$
velja
$$|f(x, y) - L| < \epsilon.$$

b. Izračunamo nekaj vrednosti funkcije g:
$$\begin{aligned} g(0) &= 1, \\ g\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + 1 > 0, \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 < 0. \end{aligned}$$
Ker je g zvezna funkcija, ki je v točkah $-\frac{1}{2}$ in 0 različno predznačena, ima na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ gotovo vsaj eno ničlo.

c. (a) Primer lihe injektivne funkcije je $f(x) = x$.

(b) Vsaka soda funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadošča pogoju $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, torej ne more biti injektivna.

(c) Primeri lihih funkcij, ki niso injektivne:
$$\begin{aligned} f_1(x) &= 0 \qquad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}, \\ f_2(x) &= \sin x, \\ f_3(x) &= \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(d) Če ne obstaja soda injektivna funkcija, potem tudi vsaka soda funkcija ne more biti injektivna.

Rešitev naloge 26.

a. Linearna aproksimacija funkcije f v točki x_0 je
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
Geometrijsko pri tem funkcijsko vrednost v okolici izbrane točke x_0 aproksimiramo s pomočjo tangente na graf funkcije v točki x_0. Velja
$$\sqrt{1.1} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1}}(1.1 - 1) = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{10} = 1.05.$$

b. Pogoju $f'(-2) = -f'(2)$ zadoščata grafa g in h. Pogoju $f''(0) > 0$ pa zadošča samo graf h, saj je konveksen v okolici 0.

c. Graf g prehaja iz konveksnega v konkavnega in nato ponovno v konveksnega. Torej drugi odvod preide iz pozitivnih vrednosti v negativne, ter nato ponovno v pozitivne. Zato ni monotona funkcija. Podobno velja za graf h. Graf k pa je ustrezen.

Rešitev naloge 27.

a. Parcialni odvod po spremenljviki x funkcije dveh spremenljivk $f(x,y)$ v točki (a,b) je enak

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},$$

če ta limita obstaja.

b. Najenostavnejši primer funkcije je linearna funkcija $f(x,y)=ax+by$. Veljati mora $-2=f_x(1,1)=a$ in $1=f_y(1,1)=b$. Torej je $f(x,y)=-2x+y$.

c. Tvorimo Lagrangeovo funkcijo

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda(g(x,y)-c),$$

kjer je $g(x,y)=c$, $c\in\mathbb{R}$, nivojnica g, na kateri iščemo ekstremne vrednosti funkcije f. Potrebni pogoji za vezane ekstreme so

$$L_x(x,y,\lambda)=L_y(x,y,\lambda)=L_\lambda(x,y,\lambda)=0.$$

Rešitev naloge 28.

a. Gradient $\operatorname{grad} f(a,b)$ v točki (a,b) funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je enak

$$\operatorname{grad} f(a,b)=(f_x(a,b),f_y(a,b)).$$

b. Imamo dva pogoja, ki jima moramo zadostiti, zato potrebujemo funkcijo z dvema parametroma. Najenostavnejša je linearna funkcija $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=ax+by$. Veljati mora

$$\pi=f_x(1,1)=a \quad \text{in} \quad -2=f_y(1,1)=b.$$

Torej je $f(x,y)=\pi x-2y$.

c. Gradient $\operatorname{grad} f(a,b)$ v točki (a,b) je pravokoten na nivojnico $\mathcal{N}$ funkcije f skozi točko (a,b), tj. $\mathcal{N}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon f(x,y)=f(a,b)\}$.

d. Taylorjeva vrsta neskončnokrat odvedljive funkcije f v točki a je

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

e. Izračunajmo nekaj odvodov funkcije $f(x)=(x-1)e^x$:

$$\begin{aligned}
f'(x)&=e^x+(x-1)e^x=xe^x,\\
f''(x)&=e^x+xe^x=(x+1)e^x,\\
f^{(3)}(x)&=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x.
\end{aligned}$$

Opazimo

$$f^{(n)}(x)=(x+(n-1))e^x.$$

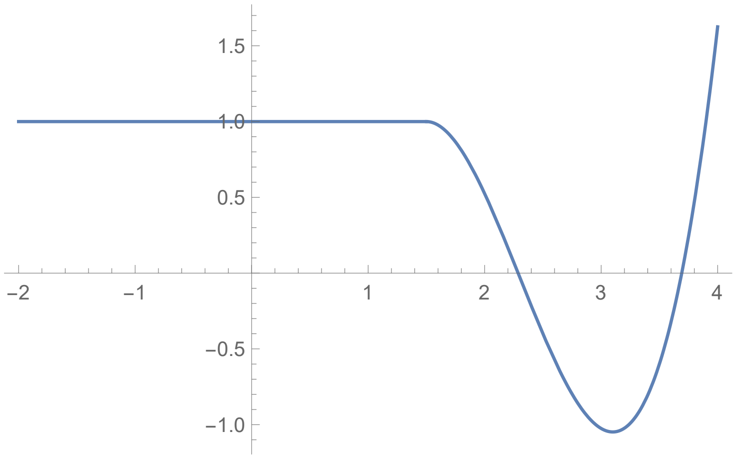
(Kar lahko dokažemo z indukcijo.) Torej je

$$f^{(n)}(0) = n - 1.$$

Sledi

$$(x-1)e^x = -1 + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{n-1}{n!} \cdot x^n + \cdots.$$

f. Ena od ustreznih slik je naslednja:



Ta graf ima natanko en prevoj, tj. prehod iz konkavnosti v konveksnost (pri $x \approx 2.2$). To je tudi najmanjše možno število prevojev funkcije z lastnostmi iz naloge. Obstajati mora $x_0 \in (0, 3)$, tako da je $f'(x_0) < 0$, saj bi bilo v nasprotnem veljalo $0 < f(0) \leq f(3)$, kar je protislovje. Ker je $f'(4) > 0$, mora obstajati $x_1 \in (x_0, 4)$, tako da je $f''(x_1) > 0$, saj bi v nasprotnem veljalo $0 > f'(x_0) \geq f'(4)$, kar je protislovje. Ker je še $f''(2) < 0$, mora obstajati x_2, kjer f'' spremeni predznak oz. je x_2 prevoj.

Rešitev naloge 29.

a. Ustrezna funkcija je npr.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1, \\ 2, & -1 < x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < 1, \\ -2, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & 2 \leq x. \end{cases}$$

b. Sekanta čez točki $(-1, 3), (1, -1)$ ima enačbo

$$\ell(x) = 3 \cdot \frac{x-1}{-2} - \frac{x+1}{2}.$$

Naslednji približek je presečišče te sekante z x-osjo, tj.

$$0 = \ell(x_n) = 3 \cdot \frac{x_n - 1}{-2} - \frac{x_n + 1}{2},$$

oz. $x_n = \frac{1}{2}$.

c. Primer take funkcije je $f(x, y) = \sqrt{x-1} + \sqrt{y}$.

Rešitev naloge 30.

a. Na vsakem intervalu, kjer je funkcija različno predznačena v krajiščih, obstaja vsaj ena njena ničla. Funkcija h ima tako vsaj eno ničlo na intervalih $[-1,0]$ in $[1,2]$.

b.
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

c. Nivojske krivulje $\mathcal{N}_c, c \in \mathbb{R}$, funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so krivulje, kjer ima funkcija f konstantno vrednost enako c, tj.
$$\mathcal{N}_c = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = c\right\}.$$
Primer. $f(x,y) = x^2 + y^2$. Nivojske krivulje so
$$\mathcal{N}_c = \begin{cases} \emptyset, & c < 0, \\ \text{krožnica s središčem v } (0,0) \text{ in polmerom } \sqrt{c}, & c \geq 0. \end{cases}$$

Rešitev naloge 31.

a. Glej rešitev dela a naloge 24.

b. Poskusimo kar z linearno funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = ax + by$. Velja $f_x(1,1) = a$ in $f_y(1,1) = b$. Veljati mora
$$f_{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})}(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}a + \frac{1}{\sqrt{2}}b = 1.$$
Izberemo lahko npr. $a = \sqrt{2}$ in $b = 0$, tj. $f(x,y) = \sqrt{2}x$.

c. Hessejeva matrika funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ v točki $P \in \mathbb{R}^2$ je enaka
$$\begin{bmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{bmatrix}.$$

d. Če je P stacionarna točka dvakrat zvezno odvedljive funkcije f, tj.
$$f_x(P) = f_y(P) = 0,$$
Hessejeva matrika v točki P je definitna, tj.
$$f_{xx}(P)f_{yy}(P) - f_{xy}(P)^2 > 0,$$
in velja:
- $f_{xx}(P) > 0$, potem je P lokalni minimum funkcije f.
- $f_{xx}(P) < 0$, potem je P lokalni maksimum funkcije f.

e. Funkcija g ima na vsakem od intervalov $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$ lokalni ekstrem, ki je stacionarna točka. Ločimo dve možnosti:
- Če ima na intervalu $[3,4]$ funkcija f le en lokalni ekstrem, potem je $g'(4) < 0$, saj je $g'(3) > 0$, g' pa lahko samo enkrat spremeni predznak na $[3,4]$. Ker je $g(5) > g(4)$, mora nekje na intervalu $[4,5]$ funkcija naraščati, tako da je tam g' pozitiven. Torej tudi na intervalu $[4,5]$ odvod g' vsaj enkrat spremeni predznak. Tako obstajajo vsaj 4 stacionarne točke.

- Če ima na intervalu $[3, 4]$ funkcija f vsaj dva lokalna ekstrema, potem obstajajo vsaj 4 stacionarne točke.

V obeh zgornjih primerih lahko najdemo funkcijo, ki ima natanko 4 stacionarne točke.

f. Glej rešitev dela b naloge 22.

Integral

Rešitev naloge 32.

a. $D_F = \mathbb{R}^2$ (Funkcija f je po predpostavki namreč integrabilna na vsakem zaprtem omejenem intervalu pod $\mathbb{R}$.)

b. Naj bo $x > y$. Ker je f strogo pozitivna, je

$$\int_y^x f(t)\,dt \geq m(x-y) > 0,$$

kjer je $m = \min\{f(t) \colon t \in [y, x]\}$. Podobno za $y > x$ velja $\int_y^x f(t)\,dt < 0$. Torej je $\int_y^x f(t)\,dt = 0$ natanko tedaj, ko je $x = y$ in zato $\mathcal{Z}_F = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$.

c. Velja

$$F(x, y) = \left[\frac{t^2}{2}\right]_y^x = \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Sledi $F(2, 0) = 2$ in zato

$$\mathcal{N}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - y^2 = 4\}.$$

d. Po osnovnem izreku integralskega računa je $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f(x)$ in

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_x^y -f(t)\,dt\right)(x, y) = -f(y).$$

Rešitev naloge 33.

a. Ustrezna je slika 3, saj se vsi nedoločeni integrali razlikujejo le za konstanto C (na grafu premik za C v y-smeri).

b. Ustrezna je slika 1. $F(2) = 0$, tako da izbiramo med slikama 1 in 4. Toda na sliki 4 je $F(0) = 0$, moral pa bi biti negativen, saj na intervalu $[-2, 0]$ ves čas integriramo negativno funkcijo.

c. Ustrezna je slika 2. Kje ima modra funkcija lokalni ekstrem, mora imeti oranžna funkcija 0. To je res samo za sliko 2.

Rešitev naloge 34.

a. Ustrezne so slike 2,3 in 4, saj so ploščine pod grafi funkcij končne. Na sliki 1 funkcija v točki 0 nima desne limite, torej določeni integral ne obstaja.

b. Ustrezna je slika 4, saj se graf zvezno spremeni iz konveksnega v konkavnega. Slika 3 ni ustrezna, saj niti prvi odvod v točki prehoda ne obstaja.

c. Ustrezna je slika 3, saj v točki $x \approx 0.07$ levi in desni odvod nista enaka.

d. Ustrezna je slika 1, saj je funkcija ves čas padajoča.

Rešitev naloge 35.

a. $I_n = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = -\frac{1}{n} + 1$. Sledi

$$\lim_{n\to\infty} I_{kn} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{kn} + 1\right) = 1.$$

b. Pravilna skica so vrisani trije pravokotniki pod grafom funckije. Prvi na intervalu $[1,2]$ in višino $f(2) = \frac{1}{2^2}$, drugi na intervalu $[2,3]$ in višino $f(3) = \frac{1}{2^3}$ in tretji na intervalu $[3,4]$ in višino $f(4) = \frac{1}{4^2}$.

c. Po definiciji velja

$$\begin{aligned} R_n &= f(c_1)(x_1 - x_0) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(c_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

R_n je manjši od I_n.

d. Vrsta $\sum_{k=k_0}^{\infty} C\frac{1}{k^2}$ je konvergentna natanko tedaj, ko je vrsta $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergentna. Velja, da je R_n naraščajoče zaporedje, dominirano z zaporedjem I_n, ki je tudi naraščajoče in ima limito 1. Po izreku o konvergenci monotonih zaporedij, R_n konvergira.

Rešitev naloge 36.

a. Število $M \in \mathbb{R}$ je globalni maksimum funkcije f, če je $f(x_0) = M$ za nek $x_0 \in [a,b]$ in velja $f(x) \leq M$ za vsak $x \in [a,b]$.

b. Kandidata sta ničli odvoda, tj. $x \approx 0.5$ in $x \approx 2.5$. Odvod mora biti levo od maksimuma namreč pozitiven, desno pa negativen.

c. Nedoločeni integral je funkcija $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, ki za vsak $x \in (a,b)$ zadošča pogoju $F'(x) = f(x)$.

d. Po osnovnem izreku integralskega računa je funkcija $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eden izmed nedoločenih integralov funkcije f. Torej je treba vrisati graf funkcije, ki v vsaki točki poda vrednost predznačene ploščine pod grafom f. Na intervalu $[0,1]$ je to del premice z naklonom 1, na $[2,3]$ del premice z naklonom -1, ki ima v $x = 3$ vrednost 0, na [2,3] pa gre za navzdol obrnjeno parabolo, ki zvezno nadaljuje daljici iz obeh intervalov.

e. Funkcija je konveksna, če za vsak par števil $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, velja

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

za vsak $t \in [0, 1]$. Z besedami: Na vsakem intervalu $[x_1, x_2]$ graf funkcije leži pod daljico, ki povezuje točki $(x_1, f(x_1))$ in $(x_2, f(x_2))$.

f. Katera koli funkcija, ki je padajoča na intervalu (0,2), naraščajoča na $(2, 4) \cup (4, 5)$, konkavna na $(0, 1) \cup (3, 4)$, konveksna na $(1, 3) \cup (4, 5)$, ter zadošča $\lim_{x \to 5} f(x) = \infty$, je ustrezna.

Rešitev naloge 37.

a. $I \in \mathbb{R}$ je določen integral funkcije f, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da za vsako delitev

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$$

intervala $[a, b]$, ki zadošča $x_{i+1} - x_i < \delta$, $i = 0, \ldots, n$, in vsako izbiro točk $x_i' \in [x_i, x_i + 1]$, $i' = 0, \ldots, n$, velja

$$\left| \sum_{i=0}^{n} f(x_i')(x_{i+1} - x_i) - I \right| < \epsilon.$$

b. $I \in \mathbb{R}$ je posplošen integral $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ funkcije f, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{R}$, tako da velja

$$\left| \int_1^a f(x)dx - I \right| < \epsilon$$

za vsak $a > N$.

c. Taka funkcija f ne obstaja, saj je po osnovnem izreku integralskega računa funkcija

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx$$

p rimitivna funkcija funkcije f na intervalu $(0, 1)$.

d. Taka funkcija je $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Rešitev naloge 38.

a. Nedoločeni integral funkcije $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je vsaka funkcija $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, ki zadošča $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in (a, b)$.

b. Nedoločeni integral funkcije je do konstante natančno določen. Torej je $(F - G)(x) = C$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, kjer je $C \in \mathbb{R}$ neka konstanta. Iz $F(1) - G(1) = -2$ sledi, da je $C = -2$. Od tod izračunamo $G(5) = F(5) - C = 4 + 2 = 6$.

c. (a) Da. Naj bo $x > 0$. Velja

$$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\int_{-x}^{0} e^{-t^2} dt = -\int_{x}^{0} e^{-u^2}(-du) \\ &= \int_x^0 e^{-u^2}(du) = -\int_0^x e^{-u^2} du = -F(x), \end{aligned}$$

kjer smo v drugi in peti enakosti uporabili definicijo integrala, ko zamenjamo meji, v tretji enakosti pa naredili substitucijo $u = -t$.

(b) Da. Po osnovnem izreku integralskega računa velja $f'(x) = e^{-x^2}$. Torej je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in f je naraščajoča.

(c) Ne. Ne velja namreč $f'(0) = 0$. Velja $f'(0) = e^0 = 1$.

(d) Da. Velja $f''(x) = -2xe^{-x^2}$. Torej je $f''(x) = 0$ natanko za $x = 0$.

(e) Ne. Velja $f''(x) = -2xe^{-x^2} \geq 0$ za $x \leq 0$. Torej je f konveksna na poltraku $(-\infty, 0]$.

(f) Ne. f nima lokalnih ekstremov, saj je $f'(x) \neq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

Rešitev naloge 39.

a. Povprečna vrednost μ funkcije f na intervalu $[a, b]$ je enaka $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

b. Po osnovnem izreku integralskega računa je $f'(x) = x^3 - x$. Stacionarne točke f so torej ničle polinoma $x^3 - x$, tj. $0, 1, -1$.

c. Če si ogledamo lokalni maksimum grafa A, opazimo, da nobeden od grafov B in C tam nima ničle. Torej je lahko A samo f''. Funkcija f' je nedoločen integral funkcije A. Kjer ima A ničlo, mora imeti f' ekstrem. To pa je že pri prvi ničli A res samo za C. Torej je f' lahko samo C. f je tako B.

d. $\int_1^2 f(x)dx$ je predznačena ploščina (tj. ploščine med grafom in x-osjo nad x-osjo imajo predznak $+$, ploščine med grafom in x-osjo pod x-osjo imajo predznak $-$) funkcije f na intervalu $[1, 2]$. Torej primerjamo predznačene ploščine pod grafi A, B, C. Največjo predznačeno ploščino ima B.

e. Velja

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} (2f(x) + 1)dx &= 2 \cdot \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} 1dx \\ &= 2 \cdot \left(\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx \right) + 4 \\ &= 2 \cdot 2 + 4 = 8, \end{aligned}$$

pri čemer smo v tretji enakosti upoštevali, da je f soda funkcija in zato za vsak pozitiven $x > 0$ velja $\int_0^x f(t)dt = \int_{-x}^0 f(t)dt$.

f. Posplošen integral funkcije $f : [0, \infty)$ je definiran kot

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)dx.$$

Za $f_1(x) = \frac{1}{x^2+1}$ velja

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty} [\arctan x]_0^t = \pi/2.$$

Za $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ velja

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+1}dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{x+1}dx = \lim_{t\to\infty} [\log(x+1)]_0^t = \infty.$$

Za f_1 bi lahko vzeli tudi $\frac{1}{(x+1)^2}$ in dobili

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+1)^2}dx = \lim_{t\to\infty} [-(x+1)^{-1}]_0^t = 1.$$

Opomba. Funkcije $f(x) = \frac{1}{x^k}$ imajo singularnost v točki $x = 0$, tako da bi morali posplošen integral računati z limitama na obeh straneh, tj. pri $x = 0$ in v neskončnosti. Zato raje naredimo premik $x \mapsto x + 1$ in se temu izognemo.

Rešitev naloge 40.

a. Določeni integral funkcije f je število $I \in \mathbb{R}$, za katerega velja, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da vsako delitev

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

intervala $[a, b]$, ki zadošča $x_{i+1} - x_i < \delta$ za $i = 0, \ldots, n-1$, in vsako izbiro vmesnih točk $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, velja

$$|f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) - I| < \epsilon.$$

b. Velja:

$$(\ln|2x|)' = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}, \qquad \left(\frac{\ln|2x|}{2}\right)' = \frac{1}{2x}, \qquad \left(\frac{\ln|x|}{2}\right)' = \frac{1}{2x}, \qquad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}.$$

c. Lokalna minimuma sta pri $x = -2$ in $x = 2$, lokalni maksimum pa pri $x = 1$.

d. Prevoji so ničle h'', kjer h'' spremeni predznak. To so $-1.5, 0, 0.8, 1.7$. Prehod iz konkavnosti v konveksnost je pri 0 in 1.7.

e. Ker je h' na intervalu $(-2, 0)$ pozitiven, tam funkcija h narašča. Ker je $h(-1) = 0$, je na intervalu $(-2, -1)$ negativna, na intervalu $(-1, 0)$ pa pozitivna. Zato je $\int_{-2}^{-1} h(x)dx$ negativen, $\int_{-1}^0 h(x)dx$ pa pozitiven.

f. Nedoločeni integral funkcije je do konstante natančno določen. Če je namreč funkcija F eden od nedoločenih integralov funkcije f, tj. $F'(x) = f(x)$ za vsak x iz definicijskega območja, potem je tudi $F + c$, $c \in \mathbb{R}$, nedoločeni integral funkcije f, tj. $(F + c)'(x) = F'(x) = f(x)$ za vsak x iz definicijskega območja.

Rešitev naloge 41.

a. Glej rešitev dela c naloge 36.

b. Velja
$$\int_{-2}^{2} f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \int_{-1}^{1} f(t)\,(2dt) = 4\int_{0}^{1} f(t)\,dt = 4,$$
kjer smo v prvi enakosti uvedli substitucijo $t = \frac{x}{2}$, v drugi pa upoštevali, da zaradi sodosti funkcije f velja $\int_0^1 f(t)dt = \int_{-1}^0 f(t)dt$.

c. Pravilna je funkcije k. Vrednost $f(0)$ je namreč enaka vrednosti odvoda funkcije $\int f(x)dx$ v točki 0 oz. smernem koeficientu tangente na graf funkcije $\int f(x)dx$ v točki 0. Ta je negativen samo v primeru funkcije k.

d. Funkcija f' je enaka drugemu odvodu funkcije $\int f(x)dx$. Ker je slednja konkavna na intervalu $[-3, 3]$, je f' negativna na $[-3, 3]$.

e. Volumen je enak določenemu integralu $\displaystyle\int_a^b (\pi f(x)^2)dx$.

f. Za $f_1(x) = \ln x$ velja
$$\int_0^1 f_1(x)dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_\epsilon^1 f_1(x)dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\,[x(\ln x - 1)]_\epsilon^1 = -1,$$
kjer smo upoštevali $\int \ln x\; dx = x(\ln x - 1)$ (per partes) in
$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
(V drugi enakosti smo uporabili l'Hospitalovo pravilo).

Za $f_2(x) = -\frac{1}{x}$ velja
$$\int_0^1 f_2(x)dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_\epsilon^1 f_2(x)dx = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\,[-\ln x]_\epsilon^1 = \infty.$$

Diferencialne enačbe

Rešitev naloge 42.

a. Ortogonalna trajektorija je krivulja, ki je v vsaki točki pravokotna na neko krivuljo iz dane družine.

b. (a) Odvajamo enačbo: $y^2 = ax \;\Rightarrow\; 2yy' = a$.

(b) Znebimo se parametra: $2yy' = \frac{y^2}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{2x}$.

(c) Zamenjamo y' z $-\frac{1}{y'}$: $y' = -\frac{2x}{y}$.

(d) Rešimo dobljeno DE:

$$ydy = -2xdx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = -x^2 + C,\ C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{y^2}{2} = C.$$

Rešitev naloge 43.

a. To je diferencialna enačba oblike $h(x)y'(x) = f(y)$, kjer sta h, f neki funkciji.

b. Najprej rešimo homogeni del DE, tj. $y' + 2y = 0$. Uporabimo separacijo spremenljivk.

$$\frac{dy}{-2y} = dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\log|y| = x + C \quad \Rightarrow \quad \log|y| = -2(x + C)$$
$$\Rightarrow \quad y_h(x) = Ke^{-2x},\ K \in \mathbb{R}.$$

V zadnji implikaciji smo uvedli novo konstanto $K = \pm e^{-2C}$, pri čemer je predznak odvisen od predznaka y.

Sedaj moramo najti partikularno rešitev. Poskušamo z ugibanjem glede na izgled desne strani: $y_p(x) = C$, kjer je C neka konstanta. Vstavimo v DE in dobimo

$$y'(x) + 2y(x) = 0 + 2C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = 1.$$

Torej je splošna rešitev DE

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ke^{-2x} + 1.$$

Sedaj upoštevamo še pogoj $y(0) = 2$, da določimo K:

$$y(0) = K + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad K = 1.$$

Rešitev DE, ki gre skozi točko $(0, 2)$, je

$$y(x) = e^{-2x} + 1.$$

Literatura

[1] M. Brojan, J. Globevnik, *Analiza I*, DMFA založništvo, 2008, https://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skripta.pdf

[2] M. Brojan, J. Globevnik, *Analiza II (zapiski predavanj)*, https://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf

[3] P. Oblak, *Matematika*, Založba FE in FRI, 2014, http://matematika.fri.uni-lj.si/mat/matvsp.pdf

[4] P. Oblak, *Matematika*, http://matematika.fri.uni-lj.si/mat/matvsp2019.pdf

[5] G. Tomšič, N. Mramor-Kosta, B. Orel, *Matematika I*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, 2004.

[6] G. Tomšič, N. Mramor-Kosta, B. Orel, *Matematika II*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, 2004.