Predavanja 8

Newtonov interpolacijski polinom

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

28. november 2021

Interpolacijski polinom - Newtonova baza

- Interpolacija prek standardne monomske baze $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ povzroči slabo pogojenost, je pa poceni za računanje (Horner).

- **Newtonov interpolacijsk polinom** na točkah $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

  $$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

- Baza so polinomi

  $$1, \quad x - x_0, \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad \ldots, \quad (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

- Newtonova baza je stabilnejša od standardne baze.

Primer računanja polinoma v Newtonovi bazi

Interpolirajmo podatke (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) v Newtonovi obliki.

Poiskati moramo koeficiente a_0, a_1 in a_2 v polinomu

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Iz 3 podatkov dobimo sistem 3 linearnih enačb v neznanih koeficientih:

$$\begin{aligned}
x_0 :&\quad y_0 = a_0 + 0 + 0 \\
x_1 :&\quad y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + 0 \\
x_2 :&\quad y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)
\end{aligned}$$

Ali v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Ker je matrika spodnje trikotna, potrebujemo samo $\mathcal{O}(n^2)$ operacij:

$$\begin{aligned}
a_0 &= y_0 = f(x_0), \qquad a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\
a_2 &= \frac{y_2 - a_0 - (x_2 - x_0)a_1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} = \frac{f(x_2) - f(x_0) - (x_2 - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} \\
&= \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}.
\end{aligned}$$

Interpolacijski polinom v Newtonovi bazi

Iz tega vidimo vzorec. Pojavljajo se izrazi oblike $f[x_i, x_j] := \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}$ Na zgornjem primeru dobimo:

$$a_0 = f(x_0), \qquad a_1 = f[x_0, x_1], \qquad a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}.$$

To se da posplošiti do rekurzivnega računanja polinomov v Newtonovi obliki. Označimo z $f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ **vodilni koeficient** interpolacijskega polinoma stopnje največ k, ki se z f ujema v točkah $x_0, \dots, x_k$.

Izrek

1. *Koeficienti Newtononovega interpolacijskega polinoma p_n stopnje največ n, ki se z f ujema v točkah $x_0, \dots, x_n$, so enaki*

$$a_0 = f[x_0], \qquad a_1 = f[x_0, x_1], \qquad a_2 = f[x_0, x_1, x_2], \dots, \qquad a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

2. *Deljene diference povezuje formula*

$$f[x_0, \dots, x_k] = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, & x_0 = x_1 = \dots = x_k, \\ \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Računanje deljenih diferenc

Deljene diference pa lahko bolj učinkovito računamo s pomočjo tabel:

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0,x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$	
		$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$	
		$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Konstruirajmo deljene diference za podatke $(1,3)$, $(\frac{3}{2},\frac{13}{4})$, $(0,3)$, $(2,\frac{5}{3})$.

Iz tabele deljenih diferenc preberimo interpolacijski polinom.

x	$f[\cdot]$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1	3			
		$\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}$	$\frac{13}{4}$		$\frac{1}{3}$	
		$\frac{1}{6}$		-2
0	3		$-\frac{5}{3}$	
		$-\frac{2}{3}$		
2	$\frac{5}{3}$			

Interpolacijski polinom je tako

$$p_2(x) = 3 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) - 2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)x.$$