1

تذكرة بالمتتاليات
الإثبات بالتدريج

1. عموميات عن المتتاليات
2. الإثبات بالتدريج أو الاستقراء الرياضي

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- التذكرة بخواص المتتاليات الحسابية والهندسية.
- التذكرة بطرائق دراسة المتتاليات المطّردة.
- تعلّم صياغة البرهان بالتدريج، وحلّ مسائل على ذلك.

تَدرَّبْ صفحة 18

① ليكن $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$. أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية وجِدْ أساسها.

الحل

لاحظ أن $u_n = aq^n$ حيث $a = \frac{1}{3}$ و $q = \frac{2}{3}$ فهي متتالية هندسية حدها الأول $a = \frac{1}{3}$ وأساسها $q = \frac{2}{3}$.

② الأسئلة الآتية تتعلّق بمتتاليات حسابية أو هندسية :

❶ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية فيها $u_2 = 41$ و $u_5 = -13$. احسب u_{20}

الحل

من العلاقة $u_5 - u_2 = (5-2)r$ نستنتج أن أساس هذه المتتالية الحسابية يساوي

$$r = \frac{u_5 - u_2}{3} = -18 ،$$

وعليه يكون $u_{20} = u_2 + r(20-2) = 41 - 324 = -283$.

❷ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_7 = \frac{1}{1080}$ و $u_{10} = \frac{25}{2197}$. احسب u_{30} .

الحل

من العلاقة $u_m = u_p q^{m-p}$ نستنتج أنّ $u_{10} = u_7 \cdot q^{10-7}$ ومنه $\frac{25}{2197} = \frac{1}{1080} q^3$ أي

$$q^3 = \frac{5^3 \times 6^3}{13^3}$$

وعليه $q = \frac{30}{13}$ إذن $u_{30} = u_{10} \cdot \left(\frac{30}{13}\right)^{30-10} = \frac{25}{2197} \cdot \left(\frac{30}{13}\right)^{20}$.

❸ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$. احسب u_n بدلالة n ، واستنتج قيمة المجموعين $u_{30} + u_{31} + u_{32}$ و $u_1 + u_2 + \cdots + u_{20}$.

الحل

من العلاقة $u_n - u_1 = 3(n-1)$ نستنتج أنّ $u_{31} = 88$ ، ومنه $u_{30} + u_{31} + u_{32} = 3u_{31} = 264$.

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 20 \times \frac{u_1 + u_{20}}{2} = 10 \times \left(-2 + 55\right) = 530$$

❹ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 3 وفيها $u_1 = -2$. احسب u_n بدلالة n ، واستنتج قيمة المجموعين $u_1 + u_2 + \cdots + u_7$ و $u_2 + u_4 + u_6 \cdots + u_{2n}$.

الحل

$$u_1+u_2+\cdots+u_7=1-3^7=-2186$$

وبملاحظة أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=u_{2n}$ هندسية أساسها 9 نجد

$$u_2+u_4+u_6\cdots+u_{2n}=u_2\frac{1-9^n}{1-9}=-\frac{3}{4}\left(9^n-1\right)$$

❺ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها -2 وفيها $u_0=-3$. احسب $u_{25}+u_{26}+\cdots+u_{125}$.

الحل

$$u_{25}+u_{26}+\cdots+u_{125}=(125-24)\times\frac{u_{25}+u_{125}}{2}=-15453$$

❻ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 2 وفيها $u_0=1$. احسب $u_3+u_4+\cdots+u_{10}$.

الحل

$$u_3+u_4+\cdots+u_{10}=u_3\frac{1-2^8}{1-2}=2040$$

❼ احسب المجموع $S=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+3+\cdots+10$.

الحل

نلاحظ أنّ $\frac{20\times 21}{2}=2S=1+2+3+4+5+\cdots+20$ إذن $S=105$.

❽ a و b و c ثلاثة حدود متوالية من متتالية هندسية. احسبها علماً أن

$a+b+c=36.75$ و $abc=343$

الحل

المتتالية هندسية إذن $ac=b^2$ ومنه $b^3=343=7^3$ إذن $b=7$، فإذا كان $q=\frac{c}{b}$ كان $a=\frac{7}{q}$

و $c=7q$، ومن ثمّ $7\left(q+\frac{1}{q}\right)=36\frac{3}{4}-7=\frac{119}{4}$ أو $q+\frac{1}{q}=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}$. هذه تؤول إلى معادلة

من الدرجة الثانية $(q-4)(4q-1)=0$. ومنه الحلان

$(a,b,c)=\left(\frac{7}{4},7,28\right)$ أو $(a,b,c)=\left(27,7,\frac{7}{4}\right)$.

③ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق $v_0=1$ و $v_{n+1}=\frac{v_n}{1+v_n}$.

❶ تحقق أنّ $v_n>0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $u_n=\frac{1}{v_n}$ متتالية حسابية.

❸ استنتج عبارة v_n بدلالة n.

الحل

❶ لتكن $E(n)$ الخاصّة $v_n > 0$. لما كان $v_0 = 1 > 0$ استنتجنا أن $E(0)$ صحيحة. وإذا افترضنا أنّ $E(n)$ صحيحة كان $v_n > 0$ وكان من ثَمّ $v_n + 1 > 1 > 0$. إذن $v_{n+1} > 0$ بصفته ناتج من قسمة عددين موجبين تماماً. إذن $E(n+1)$ صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $v_n > 0$ أياً كان n.

❷ نلاحظ أنّ $u_{n+1} - u_n = \frac{1+v_n}{v_n} - \frac{1}{v_n} = 1$. فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 1$ وأساسها 1. إذن $u_n = n+1$.

❸ نستنتج مباشرة أنّ $v_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{n+1}$ أياً كانت n.

④ ادرس جهة اطراد كلٍّ من المتتاليات الآتية.

❶ $u_n = \frac{3}{n^2}$ ❷ $u_n = \sqrt{3n+1}$ ❸ $u_n = \frac{2n-1}{n+4}$

❹ $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ ❺ $u_n = \frac{3n+1}{n-2}$ ❻ $u_n = \frac{n}{10^n}$

❼ $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$ ❽ $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ ❾ $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

الحل

❶ عندما يكبر مقام كسر يصغر. ولأنّ $(n+1)^2 > n^2$ أياً كان العدد الطبيعي n استنتجنا أنّ $u_{n+1} < u_n$ في هذه الحالة، ومن ثَمّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

ويمكن أيضاً أن نحسب الفرق $u_n - u_{n+1} = 3\frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{3(2n+1)}{n^2(n+1)^2}$ لنجده موجباً فنستنتج مجدداً أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

ويمكن أيضاً أن نحسب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ لنجدها أصغر من 1 فنستنتج مرة ثانية أنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة

❷ تابع الجذر التربيعي متزايدٌ، فإذا كان n عدداً طبيعياً كان $3(n+1)+1 > 3n+1$ ومن ثَمّ

$$u_{n+1} = \sqrt{3(n+1)+1} > \sqrt{3n+1} = u_n$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة. وهنا أيضاً يمكن أن نحسب الفرق أو النسبة لنصل إلى النتيجة.

❸ نلاحظ هنا أنّ

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+1}{n+5} - \frac{2n-1}{n+4} = \frac{9}{(n+4)(n+5)} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

❹ عندما يكبر مقام كسر يصغر. إذن من الواضح أنّ $u_n = \dfrac{1}{n^2+1} < \dfrac{1}{(n+1)^2+1} = u_{n+1}$،

ومن ثَمّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

❺ في حالة $n > 2$ لدينا $0 > \dfrac{-7}{(n-1)(n-2)} = u_{n+1} - u_n$ إذن إذن المتتالية متناقصة. كما يمكن أن نكتب $\dfrac{4}{n} + 3 = \dfrac{3n+4}{n} = u_{n+2}$، وعندما يكبر المقام يصغر الكسر إذن $u_{n+3} < u_{n+2}$ في حالة $n \geq 1$، والمتتالية متناقصة.

❻ في حالة $n \geq 1$ لدينا $0 > \dfrac{-9n+1}{10^{n+1}} = \dfrac{n}{10^n} - \dfrac{n+1}{10^{n+1}} = u_{n+1} - u_n$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0 = 1$.

❼ متتالية حسابية أساسها سالب فهي متناقصة.

❽ متتالية هندسية حدودها موجبة وأساسها أصغر من الواحد فهي متناقصة.

❾ متتالية هندسية حدودها موجبة وأساسها أكبر من الواحد فهي متزايدة.

تَدرَّبْ صفحة 21

① نعرف في حالة عدد طبيعي $n \geq 1$ المقدار $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$،

❶ احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4. ثُمّ عبر عن S_{n+1} بدلالة S_n و n.

❷ أثبت بالتدريج أنّه في حالة أية عدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا :

$S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

الحل

❶

n	1	2	3	4
S_n	1	5	14	30

ونلاحظ أنّه للانتقال من S_n إلى S_{n+1} نجمع $(n+1)^2$، أي $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$.

❷ لتكن $E(n)$ الخاصة $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $S_1 = 1 = \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6}$.
- نفترض $E(n)$ صحيحة عندئذ تكون $E(n+1)$ صحيحة لأنّ

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كانت $n \geq 1$.

② ليكن $x \geq -1$. في حالة عدد طبيعي n نرمز $E(n)$ إلى المتراجحة $(1+x)^n \geq 1+nx$. أثبت أنّ المتراجحة $E(n)$ محقّقة أياً كان العدد الطبيعي n.

الحل

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$.
- نفترض $E(n)$ صحيحة عندئذ تكون $E(n+1)$ صحيحة لأنّ

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \\ &\geq 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

فالمتراجحة $E(n)$ صحيحة أياً كانت n.

تمرينات ومسائل

1 بيّن أيُّ المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطّردة (ربما بدءاً من حدّ معيّن n_0).

① $u_n = -3n+1$ ② $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ ③ $u_n = 2^n$

④ $u_n = \left(-\dfrac{1}{n}\right)^n$ ⑤ $u_n = 1+\dfrac{1}{n^2}$ ⑥ $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$

⑦ $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2^n}$ ⑧ $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2\end{cases}$ ⑨ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2\end{cases}$

تذكّر أنّ $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 1$ في حالة $n \geq 1$.

الحل

① متناقصة. ② متزايدة. ③ متزايدة.

④ ليست مطردة. ⑤ متناقصة. ⑥ متناقصة بدءاً من الدليل $n_0 = 2$.

⑦ متزايدة. ⑧ ثابتة. ⑨ متزايدة.

مثلاً في حالة ⑥ لديناعندما $n \geq 2$ ما يأتي:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n+n(n-1)}{n+1} \geq \frac{n+2\times 1}{n+1} > 1$$

وفي حالة ⑨ لدينا $u_{n+1}-u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n(u_1-u_0) > 0$ (لماذا؟)

2 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 2u_n - 3$ في حالة أي عدد طبيعي غير معدوم n.

① احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 ثمَّ خمِّنْ عبارة u_n بدلالة n.

② بحساب عبارة $u_n - 3$ عند كل $n \geq 0$، عبِّرْ عن u_n بدلالة n.

الحل

① لدينا

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	1	-1	-5	-13	-29

ولكن نلاحظ أيضاً أننا عند حساب حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نضرب في كل مرة بالعدد 2 ثُم نعدّل الناتج بطرح العدد 3، فنتوقّع أنّ قوى العدد 2 تؤدي دوراً ما في هذه المتتالية، لذلك ننشئ جدولاً يضم الحدود المطلوبة وقوى العدد 2 في آن معاً لنجد

n	0	1	2	3	4	5
u_n	2	1	-1	-5	-13	-29
2^n	1	2	4	8	16	32

وهنا سرعان ما نرى أن مجموع كل عنصر من السطر الثاني مع العنصر الذي تحته ثابتٌ، ويساوي 3، أي إنّ $u_n + 2^n = 3$ ومنه التخمين $u_n = 3 - 2^n$.

② بملاحظة أنّ $u_{n+1} - 3 = 2(u_n - 3)$ نرى أنّ المتتالية (v_n) المعطاة بالصيغة $v_n = u_n - 3$ متتالية هندسية أساسها 2 وحدها الأوّل -1. إذن $v_n = -2^n$ ومنه $u_n = v_n + 3 = 3 - 2^n$، أياً كانت n.

3 المتتالية (u_n) معرفة وفق $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = -u_n + 4$ في حالة أي عدد طبيعي غير معدوم n. احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 وخمِّنْ عبارة u_n بدلالة n ثمَّ حدد u_n بدلالة n.

الحل لدينا

n	0	1	2	3	4	5
u_n	3	1	3	1	3	1

وهكذا نرى أنّ

$$u_n = \begin{cases} 3 & : n \text{ زوجي} \\ 1 & : n \text{ فردي} \end{cases}$$

ويمكن التعبير عن u_n بصيغة أخرى $u_n = 2 + (-1)^n$، التي يمكن إثبات صحتها بدلالة n. وكذلك يمكن اتباع أسلوب التمرين السابق.

4 نذكّر في حالة عدد طبيعي غير معدوم n بالرمز $n!$ دلالة على الجداء $1\times 2\times 3\times \cdots \times n$، الذي نقرأه «$n$ عاملي». أثبت بالتدريج الخاصتين الآتيتين

① $1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$.

② $n!\geq 2^{n-1}$.

الحل

① لتكن $E(n)$ الخاصة $1+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$.

- الخاصة صحيحة $E(1)$ لأنّ $1\times 1!=2!-1$.
- لنفترض الخاصة $E(n)$ صحيحة عندئذ

$$\begin{aligned}1+2\times 2!+\cdots+n\times n!+(n+1)\times(n+1)! &= (n+1)!-1+(n+1)\times(n+1)!\\ &=(n+2)!-1\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة، والخاصة $E(n)$ صحيحة مهما كان $n\geq 1$.

② لتكن $E(n)$ الخاصة $n!\geq 2^{n-1}$.

- الخاصة صحيحة $E(1)$ لأنّ $1!=1=2^0$.
- لنفترض الخاصة $E(n)$ صحيحة في حالة $n\geq 1$ عندئذ

$$(n+1)!=(n+1)\cdot n!\geq 2\cdot 2^{n-1}=2^n$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة، والخاصة $E(n)$ صحيحة مهما كان $n\geq 1$.

5 في حالة عدد طبيعي $n\geq 1$، ليكن $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ و $v_n=u_{2n}-u_n$. أثبت أنَّ المتتالية (v_n) متزايدة.

الحل

لاحظ أنّ u_n يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية بين 1 و n. إذن

$$\begin{aligned}v_n &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\\ v_{n+1} &= \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\end{aligned}$$

وعليه

$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n &= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\\ &=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\\ &=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}>0\end{aligned}$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة تماماً.

6 a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$. نعلم أنَّ a و b و c هي ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية، نرمز إلى أساسها بالرمز q. كما نعلم أنَّ $3a$ و $2b$ و c هي ثلاثة حدود متوالية من متتالية حسابية. احسب q.

الحل

الحدود الثلاثة هي إذن $(a,b,c) = (a,qa,q^2a)$ ولأنّ $(3a,2b,c)$ حدود متوالية من متتالية حسابية كان $3a + c = 2(2b) = 4b$ ومنه (لأنّ $a \neq 0$) $q^2 - 4q + 3 = 0$، وهذا يعطي $q \in \{1,3\}$.

لنتعلّم البحث معاً

7 صُغ افتراضاً ثُمّ تحقّق من صحته

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 10u_n - 18$ عند كل عدد طبيعي n. نهدف في هذا التمرين إلى التعبير عن u_n بدلالة n.

نحو الحلّ

- نعلم أنّه في حالة متتالية معرفة بعلاقة تدريجية، يمكننا حساب u_n بشرط أن نكون قد عرفنا الحدود التي تسبقه. والمطلوب هنا هو إيجاد طريقةٍ لحساب u_n مباشرةً بدلالة n. في هذا النمط من المسائل، نحسب حدوداً أولى من المتتالية ثمَّ نحاول في كل حالة الربط بين قيمة الحدّ ودليله.

احسب u_1، u_2، u_3، u_4، u_5 ...

لدينا

n	0	1	2	3	4	5
u_n	7	52	502	5002	50002	500002

- نجد أنَّ كل حد من الحدود المحسوبة يبدأ بالرقم 5 وينتهي بالرقم 2، ويوجد بينهما عددٌ من الأصفار يتعلق بقيمة n، أي بدليل هذا الحد. بالتأكيد، سيسمح لك هذا بالتعبير عن u_n بدلالة n.

1. عيّن عدد الأصفار المشار إليه أعلاه عندما تأخذ n القيم 1، 2، 3، 4 و 5.
2. ما عدد الأصفار بدلالة n.
3. تحقّق أنّ $u_k = 5 \times 10^k + 2$ في حالة k من $\{1,2,3,4,5\}$.
4. اقترح صيغة للحدّ u_n بدلالة n. ثُم أثبت صحة اقتراحك أياً كانت n.

من الواضح أنّ عدد الأصفار في الكتابة العشرية للحد u_n يساوي $n-1$ في حالة $1 \le n \le 5$.
نستنتج إذن الصيغة $u_k = 5\times 10^k + 2$ في حالة k من $\{1,2,3,4,5\}$. لنبرهن إذن صحة الخاصة $E(n): u_n = 5\times 10^n + 2$ أياً كانت $n \ge 0$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $5+2=7$.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. عندئذ

$$u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10(5\times 10^n + 2) - 18 = 5\times 10^{n+1} + 2$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة، والخاصة $E(n)$ صحيحة مهما كان $n \ge 1$.

8 متتالية هندسية مخفيّة

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ المعرفة تدريجياً وفق $u_0 = s$ و

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n \qquad (*)$$

① عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث تُحقّق المتتالية $(t_n)_{n\ge 0}$ التي حدها العام $t_n = P(n)$ العلاقة التدريجية $(*)$ نفسها أي $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ أياً كانت n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(v_n)_{n\ge 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسية.

③ اكتب عبارة v_n ثمّ u_n بدلالة n و s .

نحو الحلّ

☝ نبحث عن كثير حدود من الدرجة الثانية P. لنكتبه إذن بالصيغة $P(n) = an^2 + bn + c$. لتعيين الأمثال a و b و c نستفيد من كون المتتالية التي حدها العام $t_n = P(n)$ تُحقق العلاقة التدريجية.

1. بيّن أنّ $(t_n)_{n\ge 0}$ تحقق العلاقة التدريجية $(*)$ إذا وفقط إذا كان

$$\left(\frac{a}{2}-1\right)n^2 + \left(2a+\frac{b}{2}-1\right)n + \left(a+b+\frac{c}{2}\right) = 0$$

أياً كان العدد الطبيعي n.

2. استنتج من ذلك جملة بسيطة من المعادلات تحققها a و b و c. ثمّ عين هذه الأعداد.

✌ لإثبات أنّ المتتالية $(v_n)_{n\ge 0}$ هندسية، يكفي أن نجد عدداً q بحيث تتحقق المساواة $v_{n+1} = qv_n$، عيّن q.

👌 بمعرفة v_0 و q يمكننا استنتاج v_n، ثُمّ لأنّنا نعرف t_n يمكننا إنجاز المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

① نبحث عن كثير حدود من الدرجة الثانية P . لنكتبه إذن بالصيغة $P(n) = an^2 + bn + c$. لتعيين الأمثال a و b و c نستفيد من كون المتتالية التي حدها العام $t_n = P(n)$ تُحقق العلاقة التدريجية.

بتعويض t_n و t_{n+1} بقيمتهما في $t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$ نستنتج صحة العلاقة

$$\left(\frac{a}{2}-1\right)n^2 + \left(2a+\frac{b}{2}-1\right)n + \left(a+b+\frac{c}{2}\right) = 0$$

أياً كان العدد الطبيعي n . باختيار $n = 0$ و $n = 1$ و $n = 2$ نستنتج جملة المعادلات

$$2a + 2b + c = 0$$
$$7a + 3b + c = 4$$
$$14a + 4b + c = 12$$

نستعمل الأولى لحذف c من المعادلتين الثانية والثالثة لنجد الجملة المُكافئة

$$2a + 2b + c = 0$$
$$5a + b = 4$$
$$6a + b = 6$$

ثُمّ بطرح الثانية من الثالثة نجد $a = 2$ ، ثُمّ $b = -6$ و $c = 8$. ونتيقّن بالعكس، أنّ هذه الخيار لقيم a و b و c يجعل المساواة

$$\left(\frac{a}{2}-1\right)n^2 + \left(2a+\frac{b}{2}-1\right)n + \left(a+b+\frac{c}{2}\right) = 0$$

محققة أياً كانت قيمة n ، ومن ثَمّ تحقق المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ حيث $t_n = 2n^2 - 6n + 8$ العلاقة التدريجية $(*)$.

② هنا لدينا

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n^2 + n$$
$$t_{n+1} = \frac{1}{2}t_n + n^2 + n$$

بالطرح نستنتج أنّ $u_{n+1} - t_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - t_n)$ ، فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام $v_n = u_n - t_n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، وحدها الأوّل $v_0 = s - 8$ ، إذن $u_n - t_n = \frac{s-8}{2^n}$ ، ومن ثَمّ

$$u_n = (s-8)2^{-n} + 2n^2 - 6n + 8$$

وهي النتيجة المرجوة.

قُدُماً إلى الأمام

9 نُعطى عددين حقيقيين a و b ونفترض أنّ $a \neq 1$. نتأمّل المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق $v_{n+1} = av_n + b$، أياً كان العدد الطبيعي n.

① عيّن تابعاً f يحقق $v_{n+1} = f(v_n)$ أياً كانت قيمة $n \geq 0$.

② احسب ℓ حلّ المعادلة $f(x) = x$.

③ نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n = v_n - \ell$. أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية، واستنتج u_n بدلالة n و a و b و v_0. ثُمّ استنتج v_n بدلالة هذه المُعاملات.

الحل

هذا التمرين، تمرين مباشرٌ ومحلول بصفته نشاطاً في الصف الثاني الثانوي.

10 نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة بالتدريج وفق:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \ u_1 = 4, & \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

① عيّن عددين حقيقيين a و b يحققان $a + b = 5$ و $ab = 6$.

② لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - au_n$. أثبت أنَّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها b.

③ لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $w_n = u_{n+1} - bu_n$. أثبت أنَّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها a.

④ عبّر عن v_n و w_n بدلالة n. ثُمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n.

الحل

① عددان مجموعهما 5 وجداء ضربهما 6 هما 2 و 3 يمكننا إذن أن نأخذ $a = 2$ و $b = 3$.

② لنضع $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ عندئذ، في حالة $n \geq 1$ يكون لدينا

$$v_n - 3v_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n - 3(u_n - 2u_{n-1}) = u_{n+1} - 5u_n + 6u_{n-1} = 0$$

أو $v_n = 3v_{n-1}$ فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها 3.

③ ونبرهن بمثل ما سبق أنّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسُها 2.

④ نستنتج إذن أنّ $v_n = 3^n v_0 = 2 \times 3^n$ و $w_n = 2^n w_0 = 2^n$. أو

$u_{n+1} - 2u_n = 2 \times 3^n$ و $u_{n+1} - 3u_n = 2^n$.

وبطرح الأخيرة من الأولى نستنتج أنّ $u_n = 2 \times 3^n - 2^n$ أياً كانت n.

11 متراجحة تدرجية

① أثبت، أيّاً كان العدد الطبيعي n، $n \geq 2$، أنَّ: $3 \times n^2 \geq (n+1)^2$.

② نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq 2^n + 5 \times n^2$ ».

❶ ما أصغر عدد طبيعي غير معدوم n، تكون $E(n)$ صحيحة عنده؟

❷ أثبت أنَّ $E(n)$ صحيحة، أيّاً كان العدد الطبيعي n الذي يحقق الشرط $n \geq 5$.

الحل

① لاحظ أنّه في حالة $n \geq 2$ لدينا

$$3n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - 2n - 1 = 2n(n-1) - 1 \geq 2 \times 2 \times 1 - 1 = 3 > 0$$

ومنه الخاصة المطلوبة.

② ❶ لنضع في جدول طرفي المتراجحة الواردة في $E(n)$ عند القيم الصغيرة للعدد n.

n	3^n		$2^n + 5n^2$
1	3	$<$	7
2	9	$<$	24
3	27	$<$	53
4	81	$<$	96
5	243	$>$	157

إذن $n = 5$ هو أوّل عدد طبيعي موجب تماماً تكون عنده $E(n)$ محقّقة.

② ❷ رأينا أنّ $E(5)$ صحيحة. لنفترض إذن أنّ $E(n)$ صحيحة عند قيمة للعدد $n \geq 5$. عندئذ

$$3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3 \times (2^n + 5n^2)$$ ☜ لأنّ $E(n)$ صحيحة

$$\geq 3 \times 2^n + 5(3n^2)$$

$$\geq 2 \times 2^n + 5(n+1)^2$$ ☜ استفدنا من ①

$$\geq 2^{n+1} + 5(n+1)^2$$ ☜ هذه هي $E(n+1)$

وعليه تكون $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. إذن $E(n)$ صحيحة عند أيّة قيمة للعدد $n \geq 5$.

12 نرمز بالرمز $E(n)$ إلى القضية « $3^n \geq (n+2)^2$ ».

① أتكون القضايا $E(0)$ و $E(1)$ و $E(3)$ و $E(4)$ صحيحة؟

② أثبت بالتدريج أنَّ القضية $E(n)$ صحيحة عند كل عدد طبيعي n يحقق الشرط $n \geq 3$.

الحل

يُحلُّ بأسلوب مشابه للتمرين السابق، بل هو أسهل منه. إذ يعتمد على المتراجحة الواضحة في حالة عدد طبيعي n: $3(n+2)^2 - (n+3)^2 = 2n^2 + 6n + 3 > 0$.

13 أثبت بالتدريج، صحة كل من الخواص الآتية أياً كان العدد الطبيعي n.

① « $4^n + 5$ مضاعفٌ للعدد 3». ② « $2^{3n} - 1$ مضاعفٌ للعدد 7».

③ « $n^3 + 2n$ مضاعفٌ للعدد 3». ④ « $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعفٌ للعدد 7».

الحل

① لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $4^n + 5$ مضاعف للعدد 3.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ العدد $4^0 + 5 = 6$ مضاعف للعدد 3.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $4^n + 5 = 3k$ عندئذ

$$4^{n+1} + 5 = 4 \times 4^n + 5 = 4\big(3k - 5\big) + 5 = 3(4k - 5)$$

إذن $4^{n+1} + 5$ مضاعف للعدد 3 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $2^{3n} - 1$ مضاعف للعدد 7.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ العدد $2^0 - 1 = 0$ مضاعفٌ للعدد 7.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $2^{3n} - 1 = 7k$ عندئذ

$$2^{3(n+1)} - 1 = 8 \times 2^{3n} - 1 = 8(7k + 1) - 1 = 7(8k + 1)$$

إذن $2^{3(n+1)} - 1$ مضاعف للعدد 7 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

③ لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $n^3 + 2n$ مضاعف للعدد 3.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ العدد $0^3 + 2 \times 0 = 0$ مضاعفٌ للعدد 3.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $n^3 + 2n = 7k$ عندئذ

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1) = 3\big(k + n^2 + n + 1\big)$$

إذن $(n+1)^3 + 2(n+1)$ مضاعف للعدد 3 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

④ لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف للعدد 7.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ العدد $3^1 + 2^2 = 7$ مضاعفٌ للعدد 7.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$ عندئذ

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} &= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} \\ &= 9(7k - 2^{n+2}) + 2 \times 2^{n+2} = 7\big(9k - 2^{n+2}\big) \end{aligned}$$

إذن $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف للعدد 7 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

14 نرمز إلى القضية « يقسمُ العددُ 9 العددَ 10^n+1» بالرمز $E(n)$، في حالة $n\in\mathbb{N}$.

① أثبت أنّه إذا كانت $E(n)$ صحيحة عند قيمةٍ للعدد n، كانت عندئذ $E(n+1)$ صحيحة.

② أتكون القضية $E(n)$ صحيحة على $\mathbb{N}$؟ برِّرْ إجابتك.

الحل

① لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $10^n+1=9k$ عندئذ

$$10^{n+1}+1=10\times10^n+1=10(9k-1)+1=9(10k-1)$$

إذن $10^{n+1}+1$ مضاعف للعدد 9 والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة.

② القضية $E(n)$ غير صحيحة على $\mathbb{N}$؟ لأنّ $E(0)$ غير صحيحة. في الحقيقة إنّ كلّ $E(n)$ خطأ لأنّ مجموع خانات العدد $10^n+1=1\underbrace{00\cdots0}_{n-1}1$ يساوي 2 وهو ليس من مضاعفات 9.

15 $(u_n)_{n\geq0}$ متتالية معرفة وفق $u_0=1$ و $u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$ عند كل $n\geq1$.

① أثبت أنَّ $0\leq u_n\leq2$، أيّاً كان العدد الطبيعي n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

الحل

① لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $0\leq u_n\leq2$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ $0\leq u_0=1\leq2$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي أنّ $0\leq u_n\leq2$ عندئذ

$$0\leq u_n+2\leq4$$

إذن $0\leq\sqrt{u_n+2}\leq\sqrt{4}=2$ أو $0\leq u_{n+1}\leq2$ والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n.

② لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية: $u_n<u_{n+1}$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن $u_1=\sqrt{3}$ و $E(0)$ تنص على أنّ $u_0=1<u_1$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة أي أنّ $u_n<u_{n+1}$ عندئذ

$$0\leq u_n+2<u_{n+1}+2$$

ولأنّ تابع الجذر التربيعي متزايد تماماً استنتجنا أنّ $\sqrt{u_n+2}<\sqrt{u_{n+1}+2}$ أو $u_{n+1}<u_{n+2}$ والخاصة $E(n+1)$ أيضاً صحيحة. فنكون قد أثبتنا بالتدريج صحة الخاصة $E(n)$ أياً كان العدد الطبيعي n. أي أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة تماماً.

16 $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{2u_n + 6}$ عند كل $n \geq 0$.

① أثبت أنَّ التابع $x \mapsto \dfrac{3x+2}{2x+6}$ متزايدٌ تماماً واستنتج أنّ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$، أيّاً كان العدد n.

② أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

الحل

① لنضع $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x+6}$ في حالة $x > 0$. ولنلاحظ أنّ $f'(x) = \dfrac{14}{(2x+6)^2} > 0$. إذن التابع f متزايدٌ تماماً على $]0,+\infty[$.

- لنرمز بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$.
- إنّ $E(0)$ محققة لأنّ $\frac{1}{2} < u_0 = 1 \leq 1$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة أي أنّ $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$. بالاستفادة من تزايد f نستنتج أنّ

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) < f(u_n) \leq f(1)$$

أي $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq \frac{5}{8}$ ولكن $\frac{5}{8} \leq 1$ إذن $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$ والخاصة $E(n+1)$ محققة. فنكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ أياً كانت قيمة n.

②

- لنرمز بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة $u_{n+1} < u_n$.
- إنّ $E(0)$ محققة لأنّ $u_1 = \frac{5}{8} < 1 = u_0$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة أي أنّ $u_{n+1} < u_n$. لمّا كان f متزايداً تماماً على $]0,+\infty[$، والحدّان u_n و u_{n+1} ينتميان إلى $]0,+\infty[$ استناداً إلى النقطة السابقة استنتجنا أنّ $f(u_{n+1}) < f(u_n)$ أي $u_{n+2} < u_{n+1}$ وهذه هي الخاصة $E(n+1)$. فنكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_{n+1} < u_n$ أياً كانت قيمة n، والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً.

17 ليكن θ عددٌ حقيقي من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$. ثُمّ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_0 = 2\cos\theta$ و $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ في حالة $n \in \mathbb{N}$.

① احسب u_1 و u_2.

② أثبت بالتدريج، أنّ $u_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.

مساعدة: تذكَّر أنَّ $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$.

الحل

① هنا $u_1 = \sqrt{2(1+\cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2(\theta/2)} = 2\cos\frac{\theta}{2}$ وبالمثل $u_2 = 2\cos\frac{\theta}{4}$.

② الإثبات بالتدريج

- لنرمز بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة $u_n = 2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$.
- إنّ $E(0)$ محققة وضوحاً.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة أي $u_n = 2\cos\dfrac{\theta}{2^n}$. عندئذ

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} = \sqrt{2+2\cos(\theta/2^n)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta/2^n}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

إذن الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. فنكون قد أثبتنا صحة الخاصة المطلوبة أياً كانت n.

ملاحظة. في هذا التمرين θ عددٌ حقيقي من المجال $]0,\frac{\pi}{2}[$، إذن جميع الزوايا $\dfrac{\theta}{2^n}$ تنتمي أيضاً إلى هذا المجال، ومن ثمّ يكون $\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ عدداً موجباً، لذلك لا مشكلة عند حساب الجذر التربيعي لمربعه.

18 في مستوٍ $\mathcal{P}$، محدَّث بمعلم متجانس، $\mathcal{H}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق إحداثياتها المعادلة $x^2 - 5y^2 = 1$. ليكن f التابع الذي يقرن بكل نقطة $M(x,y)$ من المستوي $\mathcal{P}$ النقطة $M'(9x+20y, 4x+9y)$، أي $f(M) = M'$. لتكن S_0 النقطة التي إحداثياتها $(1,0)$، ثمّ لنتأمّل في المستوي $\mathcal{P}$ متتالية النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $S_{n+1} = f(S_n)$. أثبت أنَّ S_n نقطة من المجموعة $\mathcal{H}$ وأنّ إحداثياتها أعداد صحيحة.

الحل

أولاً في حالة $M(x,y)$ نرمز (x',y') إلى إحداثيتي $M' = f(M)$ أي
$x' = 9x+20y$ و $y' = 4x+9y$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} x'^2 - 5y'^2 &= (9x+20y)^2 - 5(4x+9y)^2 \\ &= 81x^2 + 360xy + 400y^2 - 5\left(16x^2 + 72xy + 81y^2\right) \\ &= x^2 - 5y^2 \end{aligned}$$

فإذا كان $x^2 - 5y^2 = 1$ كان $x'^2 - 5y'^2 = 1$. إذن، إذا انتمت M إلى $\mathcal{H}$ انتمت صورتها $M' = f(M)$ إلى $\mathcal{H}$.

ومن ناحية أخرى، نلاحظ أنّه إذا كان كل من x و y عدداً صحيحاً كان كذلك كل من x' و y' لأنّ مجموعة الأعداد الصحيحة مغلقة بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب!.

لنثبت بالتدريج أنّ جميع النقاط $(S_n)_{n\geq 0}$ تقع على $\mathcal{H}$ ومركبات كل منها أعداد صحيحة.

- لنرمز بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة " النقطة S_n تنتمي إلى $\mathcal{H}$ ومركّبتا S_n أعداد صحيحة".
- إنّ $E(0)$ محققة لأنّ $S_0 = (1,0)$ فمرّكبتاها عددان صحيحان وهما تحققان معادلة $\mathcal{H}$ وضوحاً.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة أي أنّ $S_n(x,y)$ تنتمي إلى $\mathcal{H}$ ومركّبتاها x و y عددان صحيحان.

استناداً إلى المقدّمة، النقطة $S_{n+1}(x',y') = f(S_n)$ تحقق معادلة $\mathcal{H}$ فهي تنتمي إليها، ومركّبتاها x' و y' عددان صحيحان. إذن الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

فنكون قد أثبتنا صحة الخاصة المطلوبة أياً كانت n.

19 يرمز x إلى عدد حقيقي ويرمز n إلى عدد طبيعي غير معدوم. نضع

$$S_n = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n-1)x)$$

① باستعمال دساتير مثلثاتية تعرفها، أثبت أنَّ:

$$\sin(2a) = 2\sin a\cos a \quad \text{و} \quad \sin a\cdot\cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big)$$

② حوّل كلاً من العبارتين الآتيتين من جداء نسبتين مثلثيتين إلى مجموع نسبتين مثلثيتين.

$$\sin nx\cdot\cos nx \quad \text{و} \quad \sin x\cdot\cos((2n+1)x)$$

③ أثبت أنّ $S_n = \cos(nx)\times\dfrac{\sin(nx)}{\sin x}$، أياً يكن $n \geq 1$ و $x \neq k\pi\big(k\in\mathbb{Z}\big)$.

الحل

① رأينا في دراستنا السابقة أنّ

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

بحساب نصف المجموع نجد العلاقة الأولى. ثُمّ باختيار $a = b$ نجد العلاقة الثانية.

② باختيار $a = x, b = (2n+1)x$ في العلاقة الأولى من ① نجد

$$\sin x\cdot\cos\big((2n+1)x\big) = \frac{1}{2}\big(\sin 2(n+1)x + \sin(-2nx)\big) = \frac{1}{2}\big(\sin 2(n+1)x - \sin 2nx\big)$$

وباختيار $a = nx$ في العلاقة الثانية من ② نجد $\sin 2nx = 2\sin nx\cdot\cos nx$.

③ بالتدريج.

- لنرمز، في حالة $n \geq 1$، بالرمز $E(n)$ إلى الخاصة

$$S_n = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n-1)x) = \cos(nx)\times\frac{\sin(nx)}{\sin x}.$$

- إنّ $E(1)$ محققة لأنّها تُكافئ $S_1 = \cos x = \cos x \times \dfrac{\sin x}{\sin x}$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محققة. يؤول الانتقال من S_n إلى S_{n+1} إلى جمع $\cos(2n+1)x$ إلى S_n.

إذن

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \cdots + \cos((2n-1)x) + \cos\cos((2n+1)x) \\
&= S_n + \cos((2n+1)x) \\
&= \cos nx \times \frac{\sin nx}{\sin x} + \frac{\sin 2(n+1)x - \sin 2nx}{2\sin x} \\
&= \frac{\sin 2nx}{2\sin x} + \frac{\sin 2(n+1)x - \sin 2nx}{2\sin x} \\
&= \frac{\sin 2(n+1)x}{2\sin x} = \cos(n+1)x \cdot \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}
\end{aligned}$$

إذن الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. فنكون قد أثبتنا صحة $E(n)$ أياً كانت $n \geq 1$.

2

التوابع : النهايات والاستمرار

1. نهاية تابع عند اللانهاية
2. نهاية تابع عند عدد حقيقي
3. العمليات على النهايات
4. مبرهنات المُقارنة
5. نهاية تابع مركّب
6. المقارب المائل
7. الاستمرار
8. التوابع المستمرة وحل المعادلات

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- نهاية تابع عند اللانهاية أو عند عدد حقيقي، والنهايات اللانهائية.
- العمليات على النهايات.
- مبرهنات المقارنة والإحاطة.
- نهاية تابع مركّب.
- المقاربات المائلة، الموضع النسبي لمنحن بالنسبة إلى مقاربه.
- الاستمرار، ومبرهنة القيم الوسطى.
- صورة مجال وفق تابع مستمر ومطرد تماماً.
- تطبيقات في حل المعادلات.
- مفهوم التابع العكسي.

تَدرَّبْ صفحة 34

❶ احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

① $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 1$ ② $f(x) = -3x^4 + 1$

③ $f(x) = 8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x$ ④ $f(x) = 5x^3 - 3x - 1$

⑤ $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 5x - 1$ ⑥ $f(x) = -2x^4 + 100x^3$

الحل

يذكر المدرّس بالمبرهنة: نهاية كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدّه المسيطر. عندئذٍ بإمكان الطالب حساب النهاية مباشرة:

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3 + x^2 - x + 1) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3 + x^2 - x + 1) = +\infty$

② $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^4 + 1) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^4 + 1) = -\infty$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty}(8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(8x^4 - 12x^3 + 5x^2 - x) = +\infty$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x^3 - 3x - 1) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3 - 3x - 1) = -\infty$

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty}(7x^3 + 2x^2 - 5x - 1) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(7x^3 + 2x^2 - 5x - 1) = -\infty$

⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^4 + 100x^3) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^4 + 100x^3) = -\infty$

❷ احسب نهاية التابع f المعطى بالعلاقة $f(x) = \dfrac{5x-1}{x-1}$ عند $+\infty$، ثمَّ أعطِ عدداً A يحقق الشرط: إذا كان $x > A$، كان $f(x)$ في المجال $]4.9, 5.1[$.

الحل

إنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$. وينتمي $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]4.9, 5.1[$ إذا وفقط إذا كان: $\left|f(x) - 5\right| < \dfrac{1}{10}$، أي $\dfrac{4}{|x-1|} < \dfrac{1}{10}$ أو $40 < |x-1|$، فإذا كان $x > 41$ تحقّقَ المطلوب، فيمكن أن نأخذ إذن $A = 41$ أو أي عدد أكبر منه.

تَدرَّبْ صفحة 38

❶ احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقطة a المعطاة، ويمكن في حالة عدم وجود النهاية حساب النهاية من اليمين والنهاية من اليسار عند a.

① $a = 1$ ، $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$ ② $a = 2$ ، $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x-2}$

③ $a = -1$ ، $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$ ④ $a = -1$ ، $f(x) = \dfrac{5x+1}{x+1}$

⑤ $a = 2$ ، $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ ⑥ $a = -2$ ، $f(x) = 3x - 5 + \dfrac{2}{x+2}$

الحل

① هنا $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=1$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$$

وليس للتابع نهاية عند 1.

② هنا $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x-2}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$$

وليس للتابع نهاية عند 2.

③ هنا $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$$

وليس للتابع نهاية عند -1.

④ هنا $f(x)=\dfrac{5x+1}{x+1}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=5 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=5$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$$

وليس للتابع نهاية عند -1.

⑤ هنا $f(x)=\dfrac{x+2}{(x-2)^2}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to2} f(x)=+\infty$$

⑥ هنا $f(x)=3x-5+\dfrac{2}{x+2}$ معرف على $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ ولدينا

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$$

2 جِدْ نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1، ثمَّ عيّن عدداً α يحقّق الشرط: إذا كان x عنصراً من المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ مختلفاً عن 1، كان $f(x)>10^3$.

الحل

تجري مقاربة هذا النوع من التمارين كما يأتي: تقسم السبورة إلى قسمين: قسم يجري تحليل المسألة عليه، وقسم يجري فيه صياغة الحل.

المسودة أوالتحليل. من الواضح استناداً إلى دراستنا أنّ $\lim_{x\to 1}\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}=+\infty$، ونبحث عن قيم x القريبة من الواحد وغير الواحد التي تجعل $\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>10^3$، كان الأمر أبسط لو كنا نبحث عن قيم x القريبة من الواحد وغير الواحد التي تجعل $\dfrac{A}{(x-1)^2}>10^3$، حيث A عدد موجب لأنّنا عندها نعيد كتابة المتراجحة السابقة بالشكل المُكافئ $\dfrac{A}{10^3}>(x-1)^2$ أي $\sqrt{A\times 10^{-3}}>|x-1|$ وعندها قيمة $\alpha=\sqrt{A\times 10^{-3}}$ كانت ستحقّق المطلوب.

ولكنّ التابع الذي ندرسه ليس من الشكل $\dfrac{A}{(x-1)^2}$، إذ لدينا في البسط $5x-1$ بدلاً من A. وهنا نتذكّر أنّ $5x-1$ يقترب من العدد 4 عندما تقترب x من العدد واحد، وعليه إذا اخترنا A أي عدد أصغر تماماً من 4 كان $A<5x-1$ في جوار العدد 1، (وتحديداً عندما $x>\frac{1+A}{5}=1-\frac{4-A}{5}$) وفي هذا الجوار يكون $\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>\dfrac{A}{(x-1)^2}$، يكفي عندئذ أنّ يحقّق x الشرط $|x-1|<\sqrt{A\times 10^{-3}}$ ليكون لدينا $f(x)=\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>\dfrac{A}{(x-1)^2}>10^3$.

مثلاً إذا اخترنا $A=1.6$ كان لدينا في حالة $x>0.52$ المتراجحة $\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}>\dfrac{1.6}{(x-1)^2}$، ومن ثَمّ إذا اخترنا x مختلفاً عن الواحد ليحقق أيضاً الشرط $|x-1|<\sqrt{1.6\times 10^{-3}}=0.04$ كان لدينا

$$f(x)=\frac{5x-1}{(x-1)^2}>\frac{1.6}{(x-1)^2}>10^3$$

وهكذا نلاحظ أنّ الشرط $|x-1|<0.04$ يقتضي أنّ $x>1-0.04$ فالشرط الأول "$x>0.52$" محقق حكماً في هذه الحالة. إذن باختيار $\alpha=0.04$ تكون المتراجحة $f(x)>10^3$ محققة على المجال $]1-\alpha,1+\alpha[$ باستثناء الواحد. لننتقل إلى صياغة الحل:

التركيب أوالصياغة. من الواضح استناداً إلى دراستنا أنّ $\lim_{x\to 1}\dfrac{5x-1}{(x-1)^2}=+\infty$. لنختر $\alpha=0.04$

عندئذ في حالة $x\neq 1$ من $]1-\alpha,1+\alpha[$ لدينا

$$5x-1>5\times 0.96-1=3.8>1.6 \quad \text{و} \quad (x-1)^2<16\times 10^{-4}$$

ومن ثَمّ $f(x)>\dfrac{1.6}{16\times 10^{-4}}=10^3$.

تَدرَّبْ ص 42

❶ احسب نهايات التوابع الآتية عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند النقاط a المعطاة، ويمكن عند الحاجة حساب النهاية من اليمين ومن اليسار عند a.

① $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$ ، $a=1,2$

② $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ ، $a=2,-2$

③ $f(x)=x^2-2+\dfrac{1}{(1-x)^2}$ ، $a=1$

④ $f(x)=x+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x-2}$ ، $a=1,2$

الحل

① هنا $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-2 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$$

② هنا $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-4}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$$

③ هنا $f(x)=x^2-2+\dfrac{1}{(1-x)^2}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to1} f(x)=+\infty$$

④ هنا $f(x)=x+\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x-2}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$$

❷ عيّن فيما يأتي مجموعة تعريف التابع f، ثمَّ ادرس في كل حالة نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس، عند اللزوم، النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

① $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ ② $f(x)=x^2+\sqrt{x}-1$

③ $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ ④ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$

⑤ $f(x)=\dfrac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ ⑥ $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$

الحل

① هنا $\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+1=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}=f(x)$ على مجموعة تعريفه $[0,1[\cup]1,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$$

② هنا $f(x)=x^2+\sqrt{x}-1$ على مجموعة تعريفه $[0,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

③ هنا $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ على مجموعة تعريفه $]0,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

④ هنا $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}$ على مجموعة تعريفه $[0,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

مثلاً لأنّ $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^2+t}{t^2+1}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ كان $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

⑤ هنا $f(x)=\dfrac{x^2+x-\sqrt{x}}{x^2+1}$ على مجموعة تعريفه $[0,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$$

مثلاً لأنّ $f(x)=\dfrac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x^2}}$ في حالة $x>0$.

⑥ هنا $\dfrac{-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}=f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$ على مجموعة تعريفه $[1,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to 1} f(x)=-1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

③ أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-2x+1}{x+3}$ عند $+\infty$، ثمَّ أوجد عدداً A يحقق الشرط : إذا كان $x>A$، كان $f(x)$ في المجال $]-2.05,-1.95[$.

الحل

إذن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-2$. نختار $A=137$. فإذا كان $x>A$ كان $x+3>140$ ومن ثم

$$0<f(x)+2=\frac{7}{x+3}<\frac{1}{20}=0.05$$

أي $-2<f(x)<-0.195$ أو $f(x)\in\,]-2.05,-0.195[$.

أمّا كيف وجدنا A فقد ناقشنا كما في المثال المحلول صفحة 33 من الكتاب،أو تدرب ② صفحة 34 .

④ أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x+3}{x-3}$ عند 5، ثمَّ أوجد مجالاً I مركزه 5 يحقق الشرط إذا كان x ينتمي إلى المجال I، كان $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]3.95,4.05[$.

الحل

هنا $\lim\limits_{x\to5} f(x)=4$. نختار مثلاً $x\in]5-\frac{1}{100},5+\frac{1}{100}[$ فيكون

$$2-\frac{1}{100}<x-3<2+\frac{1}{100} \quad \text{و} \quad 8-\frac{1}{100}<x+3<8+\frac{1}{100}$$

ومنه

$$\frac{8-\frac{1}{100}}{2+\frac{1}{100}}<f(x)=\frac{x+3}{x-3}<\frac{8+\frac{1}{100}}{2-\frac{1}{100}}$$

أو

$$3.95<4-\frac{5}{201}<f(x)<4+\frac{5}{199}<4.05$$

تَدرَّبْ صفحة 46

① أجب عن الأسئلة الأتية:

① f تابعٌ يحقق $\dfrac{3x+\cos x}{x}\le f(x)\le\dfrac{3x+7}{x-1}$، أيّاً كان $x>1$. ما نهاية f عند $+\infty$؟

الحل لمّا كان $\dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\cos x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ في حالة $x>0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\cos x}{x}=3$ ولدينا من جهة أخرى $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+7}{x}=3$. إذن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$.

② أثبت أنَّ $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{\cos x}{x+1} \leq \dfrac{-1}{x+1}$ أياً يكن $x > -1$. استنتج نهاية $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$. ثُمّ ادرس بالمثل نهاية التابع ذاته عند $-\infty$.

الحل لدينا $-1 \leq \cos x \leq +1$ وفي حالة $x > -1$ يكون $x+1 > 0$ ومنه :

$$\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x+1} = 0$.

وفي حالة $x < -1$ يكون $x+1 < 0$ ومنه : $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{\cos x}{x+1} \geq \dfrac{-1}{x+1}$ ولكن $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1}{x+1} = 0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos x}{x+1} = 0$

③ f تابعٌ يحقق $\left|f(x) - 3\right| \leq \dfrac{1}{x+1}$ ، أيّاً كان $x \geq 0$. ما نهاية f عند $+\infty$.

الحل لدينا $3 - \dfrac{1}{x+1} \leq f(x) \leq 3 + \dfrac{1}{x+1}$ أياً كان $x \geq 0$ ، ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ فيكون حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

④ f تابعٌ يحقق $f(x) \geq \dfrac{1}{4}x^2$ ، أيّاً كان $x < 0$. ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

الحل لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{4}x^2 = +\infty$ فيكون حسب مبرهنة الإحاطة $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

⑤ أثبت أنَّ $x^2 - 5\sin x \geq x^2 - 5$ ، أيّاً كان العدد الحقيقي x . استنتج من المتراجحة السابقة نهاية $x \mapsto x^2 - 5\sin x$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

الحل لدينا $\sin x \leq 1$ إذن $x^2 - 5\sin x \geq x^2 - 5$ ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 5) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - 5\sin x) = +\infty$. وبالمثل $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 5) = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 - 5\sin x) = +\infty$.

❷ ليكن f التابع المعرف على المجال $\left[0,+\infty\right[$ وفق $f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$.

① تحقق أنَّ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$ أياً يكن $x \geq 0$.

② استنتج أنَّ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \geq f(x) \geq \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ في حالة $x > 0$.

③ ما نهاية f عند $+\infty$؟

الحل

① $\dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \dfrac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

② لما كان $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$ أياً كان $x > 0$ كان : $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}}$

ومنه : $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

③ لمّا كان $0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

تَدرَّبْ صفحة 49

❶ فيما يأتي، نُعطى تابعاً f معرّفاً على مجموعة D ويُطلب حساب نهاية f عند a.

① $a=5$ ، $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}$ ، $D=]5,+\infty[$

② $a=-\infty$ ، $f(x)=\sqrt{-x^3+x^2+x}$ ، $D=\left]-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

③ $a=-\infty$ ، $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}$ ، $D=]-\infty,1[$

④ $a=1$ ، $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $D=]-1,+1[$

⑤ $a=1$ ، $f(x)=\cos\pi x+\dfrac{1}{(x-1)^2}$ ، $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$

⑥ $a=+\infty$ ، $f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)$ ، $D=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$

⑦ $a=1,-\infty$ ، $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}$ ، $D=]-\infty,1[$

⑧ $a=+\infty$ ، $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ، $D=]0,+\infty[$

⑨ $a=+\infty$ ، $f(x)=\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^2$ ، $D=]0,+\infty[$

⑩ $a=+\infty$ ، $f(x)=\cos^2\left(\pi\times\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$ ، $D=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

الحل

① هنا $\lim\limits_{x\to5^+}\dfrac{x+3}{x-5}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}=+\infty$.

② هنا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+x^2+x\right)=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x^3+x^2+x}=+\infty$.

③ هنا $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+1}{x^2+1}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{-x+1}{x^2+1}}=0$.

④ هنا $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{1-x^2}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=+\infty$.

⑤ $\lim\limits_{x\to1}\left(\cos\pi x+\dfrac{1}{(x-1)^2}\right)=+\infty$.

⑥ هنا $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\pi x+1}{x+2}=\pi$ إذن $\lim_{x\to\infty}\cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x+2}\right)=\cos\pi=-1$.

⑦ هنا $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2}{1-x}=+\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}=+\infty$.

وكذلك $\lim_{x\to1^-}\dfrac{2x^2}{1-x}=+\infty$ إذن $\lim_{x\to1^-}\sqrt{\dfrac{2x^2}{1-x}}=+\infty$.

⑧ هنا $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\sin 0=0$.

⑨ هنا $x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)+\dfrac{1}{x}$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ ومنه نستنتج أنّ

$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^2=+\infty$.

⑩ هنا $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\cos^2\left(\pi\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)=\cos^2\pi=1$.

2 ليكن f التابع المعرف على المجال $]-5,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{x-3}{x+5}$.

① احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، واستنتج $\lim_{x\to+\infty}f(f(x))$.

② أعدْ حساب $\lim_{x\to+\infty}f(f(x))$ بعد كتابة $f(f(x))$ بدلالة x .

الحل

① $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ إذن $\lim_{x\to\infty}f\left(f(x)\right)=f(1)=-\dfrac{1}{3}$.

② نجد بحساب بسيط أنّ

$$f\left(f(x)\right)=f\left(\frac{x-3}{x+5}\right)=\frac{\dfrac{x-3}{x+5}-3}{\dfrac{x-3}{x+5}+5}=-\frac{x+9}{3x+11}$$

ومنه نجد مجدداً أنّ $\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\dfrac{-1}{3}$.

تَدرَّبْ صفحة 51

❶ فيما يأتي بيّن معللاً إجابتك إذا كان المستقيم Δ مقارباً مائلاً للخط البياني C_f للتابع f، عند $+\infty$ أو عند $-\infty$. ادرس بعدئذ الوضع النسبي للخط C_f و مقاربه Δ.

① $\Delta : y = 2x + 3$ ، $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{10}{x+1}$

② $\Delta : y = -x + 1$ ، $f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$

③ $\Delta : y = x$ ، $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$

④ $\Delta : y = 3x + 7$ ، $f(x) = 3x + 7 - \dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$

⑤ $\Delta : y = 2x + 1$ ، $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$

⑥ $\Delta : y = x - 2$ ، $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2}$

⑦ $\Delta : y = -x - 4$ ، $f(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + \sin x}{x}$

⑧ $\Delta : y = \dfrac{1}{2}x + 1$ ، $f(x) = \dfrac{x^2 + \frac{5}{2}x + \sqrt{x} + 1}{2x + 1}$

الحل

① لنضع $g(x) = f(x) - (2x+3) = \dfrac{10}{x+1}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.
يتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، وأنّ

x	$-\infty$ $\quad$ -1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$+$
C_f	تحت Δ	فوق Δ

② لنضع $g(x) = f(x) - (-x+1) = -\dfrac{1}{x^2}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$.
يتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$، وأنّ $g(x) < 0$ أياً كانت $x \neq 0$. فالخط البياني C_f يقع دوماً تحت Δ.

③ لنضع $g(x) = f(x) - x = \dfrac{\sin x}{x}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. فيتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

تتفق إشارة التابع g مع إشارة $\sin$ على $]0,+\infty[$ وتعاكس إشارة $\sin$ على $]-\infty,0[$. وتحديداً:

في حالة عدد طبيعي k لدينا

x	$2\pi k$		$(2k+1)\pi$		$(2k+2)\pi$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	0
C_f		فوق Δ		تحت Δ	

وفي حالة عدد صحيح سالب تماماً k لدينا

x	$2k\pi$		$(2k+1)\pi$		$(2k+2)\pi$
$g(x)$	0	$-$	0	$+$	0
C_f		تحت Δ		فوق Δ	

ويتقاطع C_f عند النقاط $(k\pi,k\pi)$ حيث k عددٌ صحيح غير معدوم.

④ لنضع $g(x)=f(x)-(3x+7)=-\dfrac{5}{\sqrt{|x|}}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$. فيتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$. وأنّ $g(x)<0$ أياً كانت $x\neq 0$. فالخط البياني C_f يقع دوماً تحت Δ .

⑤ لنضع $g(x)=f(x)-(2x+1)=\dfrac{1}{x-4}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$. يتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، وأنّ

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$g(x)$	$-$	‖	$+$
C_f	تحت Δ	‖	فوق Δ

⑥ لنضع $g(x)=f(x)-(x-2)=\dfrac{-3}{(x+1)^2}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$. فيتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$ وعند $-\infty$. وأنّ $g(x)<0$ أياً كانت $x\neq -1$. فالخط البياني C_f يقع دوماً تحت Δ .

⑦ مشابه للتمرين ③ .

⑧ لنضع $g(x)=f(x)-(\frac{1}{2}x+1)=\dfrac{\sqrt{x}}{2x+1}$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$. فيتّضح فوراً أنّ Δ مستقيم مقارب للخط البياني C_f عند $+\infty$. وأنّ $g(x)>0$ أياً كانت $x>0$. فالخط البياني C_f يقع دوماً فوق Δ . ويتقاطع معه عند $(0,0)$.

تَدرَّبْ صفحة 54

❶ نتأمّل التابع f المعطى وفق $f(x)=\sqrt{1-\cos x}$.

① ما مجموعة تعريف f؟

② أيَكون f مستمراً على مجموعة تعريفه؟

③ بيّن أنّ التابع f زوجي ويقبل العدد 2π دوراً له.

④ ليكن g مقصور التابع f على المجال $[0,\pi]$. أثبت أنّ g اشتقاقي وارسم خطه البياني.

⑤ استنتج الخط البياني للتابع f على المجال $[-2\pi,2\pi]$. ما مجموعة تعريف f'؟

الحل

① لمّا كان $1-\cos x\geq 0$ أياً كانت قيمة x استنتجنا أنّ f معرّف على $D_f=\mathbb{R}$.

② التابع f مستمرٌّ على $\mathbb{R}$ نظراً إلى استمرار كلّ من التابع $x\mapsto 1-\cos x$ و $x\mapsto\sqrt{x}$.

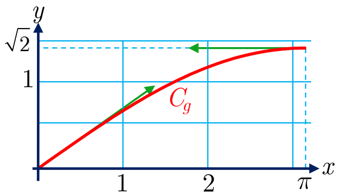
③ مجموعة التعريف متناظرة بالنسبة إلى 0 فهي كامل $\mathbb{R}$ وتابع التجيب زوجي إذن

$$f(-x)=\sqrt{1-\cos(-x)}=\sqrt{1-\cos x}=f(x)$$

فالتابع f زوجي. وكذلك فإنّ تابع التجيب دوري ويقبل العدد 2π دوراً إذن $f(x+2\pi)=f(x)$، فالتابع f أيضاً دوري ويقبل العدد 2π دوراً.

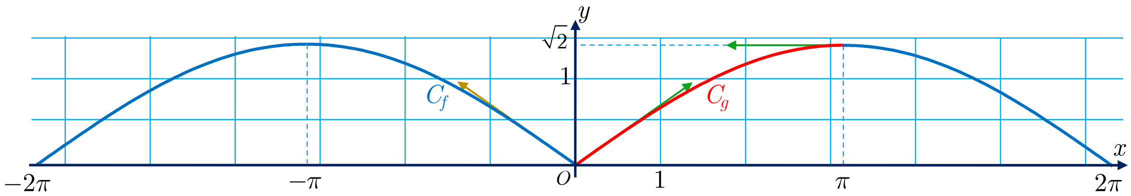
④ في حالة x من $[0,\pi]$ لدينا $\sin(\frac{x}{2})\geq 0$ ولأنّ $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$ استنتجنا أنّ

$$g:[0,\pi]\to\mathbb{R}, g(x)=\sqrt{2}\sin(\tfrac{x}{2})$$



إذن يتفق g أيضاً مع مقصور التابع الاشتقاقي $x\mapsto\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2})$ على المجال $[0,\pi]$. فهو إذن اشتقاقي على هذا المجال، ورسمه بسيط.

⑤ التابع f زوجي إذن من رسم g يمكن أن نستنتج رسم C_f على $[-\pi,\pi]$ وهذا مجال طوله دور للتابع f، وبتكرار هذا الرسم نحصل على رسم C_f على أي مجال من $\mathbb{R}$:



ونستنتج من الرسم أنّ f' غير معرّف عند 0 ومن ثَمّ عند أيّ $x_0=2\pi k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ لأنّ f دوري ويقبل العدد 2π دوراً.

تَدرَّبْ صفحة 61

❶ التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-x^2+x-2$. علّل لماذا يكون للمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ وحيد في المجال $]1,2[$ ؟

الحل

- التابع f مستمرّ على المجال $[1,2]$، ولدينا $f(1)=-1$ و $f(2)=4$ ، فالتابع f يغير إشارته على المجال $[1,2]$ فيوجد حلٌّ واحدٌ على الأقل للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1,2[$.
- ولإثبات وحدانيّة الحلّ يكفي إثبات أنّ f مطّرد تماماً على هذا المجال. ولكن

$$f'(x)=3x^2-2x+1=2x^2+(x-1)^2>0$$

- إذن f متزايدٌ تماماً والحل الذي وجدناه للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]1,2[$ وحيد.

❷ التابع f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x^2+1$. علّل لماذا يكون للمعادلة $f(x)+1=0$ ثلاثة وفقط ثلاثة حلول حقيقية؟

الحل

لندرس تغيرات التابع الحدودي f . من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ،
وكذلك فإنّ $f'(x)=3x(x-2)$ ، إذن يمكننا وضع جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

إذن

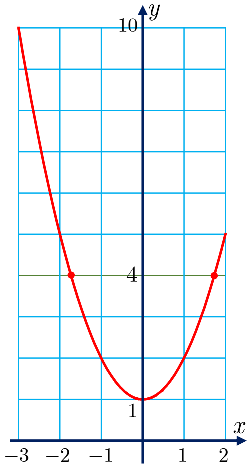
- f متزايدٌ تماماً على $]-\infty,0[$ و $f(]-\infty,0[)=]-\infty,1[$. ولأنّ $-1<1$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x)=-1$ حلاً وحلاً واحداً فقط x_1 ينتمي إلى $]-\infty,0[$.
- f متناقصٌ تماماً على $[0,2]$ و $f([0,2])=[-3,1]$. ولأنّ $-1\in[-3,1]$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x)=-1$ حلاً وحلاً واحداً فقط x_2 ينتمي إلى $[0,2]$.
- f متزايدٌ تماماً على $]2,+\infty[$ و $f(]2,+\infty[)=]-3,+\infty[$. ولأنّ $-1>-3$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x)=-1$ حلاً وحلاً واحداً فقط x_3 ينتمي إلى $]2,+\infty[$.

نستنتج أنّ مجموعة حلول المعادلة $f(x)+1=0$ هي $\{x_1,x_2,x_3\}$ ، وهي النتيجة المطلوبة.

❸ ليكن f التابع المعرف على المجال $I=[-3,2]$ وفق $f(x)=x^2+1$.

① ارسم خطه البياني C_f . واحسب $f(I)$.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x)=4$ في المجال I ؟



الحل

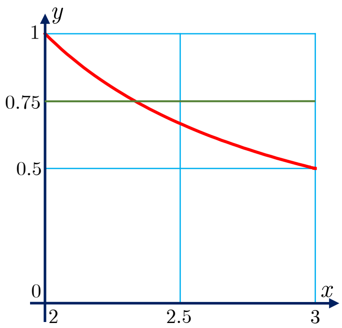
① f مستمرٌ ومتناقص تماماً على المجال $[-3,0]$ إذن $f([-3,0])=[1,10]$ وكذلك f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على المجال $[0,2]$ إذن $f([0,2])=[1,5]$. نستنتج أنّ $f(I)=[1,10]$ ، كما هو مبين في الرسم المجاور.

② استناداً إلى الرسم نرى أنّ للمعادلة $f(x)=4$ حلّين في I. أحدهما في المجال $]-3,0[$ والآخر في المجال $]0,2[$. يمكننا التوثق من ذلك بحل المعادلة مباشرة، فهي معادلة من الدرجة الثانية.

❹ ليكن f التابع المعرف على المجال $I=[2,3]$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$.

① ارسم خطه البياني C_f. واحسب $f(I)$.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x)=\dfrac{3}{4}$ في المجال I؟



الحل

① التابع المدروس مستمرٌ ومتناقص تماماً على $[2,3]$ إذن

$$f([2,3])=[f(3),f(2)]=[\tfrac{1}{2},1]$$

② لمّا كان $\frac{3}{4}$ عنصراً من $[\frac{1}{2},1]$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x)=\frac{3}{4}$ حلاً وحيداً في المجال $[2,3]$.

تذكّر: الاستمرار يقتضي وجود الحل، والاطراد التام يقتضي وحدانيته.

❺ ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=4x^3-3x-\dfrac{1}{2}$.

① احسب $f(-1)$ و $f(-\frac{1}{2})$ و $f(0)$ و $f(1)$.

② استنتج أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول في المجال $[-1,1]$.

الحل

① نلاحظ بحساب بسيط أنّ :

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

② التابع f مستمرٌ، لأنّه كثير حدود من الدرجة الثالثة، فله في $\mathbb{R}$ ثلاثة جذور مختلفة على الأكثر. ولكن لأنّ $f(-1)f(-\frac{1}{2})<0$ استنتجنا وجود حلّ x_1 للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي إلى $]-1,-\frac{1}{2}[$. ولأنّ $f(-\frac{1}{2})f(0)<0$ استنتجنا وجود حلّ x_2 للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي إلى $]-\frac{1}{2},0[$. وأخيراً لأنّ $f(0)f(1)<0$ استنتجنا وجود حلّ x_3 للمعادلة $f(x)=0$ ينتمي إلى $]0,1[$.

فلهذه المعادلة إذن ثلاثة حلول في المجال $[-1,1]$. **ملاحظة**. يكون $\cos\theta$ حلاً للمعادلة $f(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $\cos 3\theta=\frac{1}{2}$. ومنه نحسب $x_1=-\cos(\frac{2\pi}{9})$ و $x_2=-\sin(\frac{\pi}{18})$ و $x_3=\cos(\frac{\pi}{9})$.

6 ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 1 + 3x - x^3$

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② احسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثمَّ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f.

③ أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة جذور فقط، ينتمي كل واحد منها إلى واحد من المجالات: $[-2,-1]$، $[-1,1]$ و $[1,2]$.

الحل

① $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

② لدينا $f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1-x)(1+x)$. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

③ f مستمرٌ ومتناقص تماماً على $]-\infty,-1[$ ويحقق $f(]-\infty,-1[) =]-1,+\infty[$ ولأنّ $0 > -1$ استنتجنا وجود حلّ وحيد x_1 للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-\infty,-1[$. وأخيراً بملاحظة أنّ $f(-2) = 3$ و $f(-1) = -1$ نستنتج أنّ $x_1 \in]-2,-1[$.

وكذلك f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $]-1,1[$ ويحقق $f(]-1,1[) =]-1,3[$ ولأنّ $-1 < 0 < 3$ استنتجنا وجود حلّ وحيد x_2 للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-1,1[$.

وأخيراً f مستمرٌ ومتناقص تماماً على $]1,+\infty[$ ويحقق $f(]1,+\infty[) =]-\infty,3[$ ولأنّ $0 < 3$ استنتجنا وجود حلّ وحيد x_3 للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]1,+\infty[$. وأخيراً بملاحظة أنّ $f(2) = -1$ و $f(1) = 3$ نستنتج أنّ $x_3 \in]1,2[$. وبذا يكتما إثبات المطلوب.

7 نتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - \cos x$.

① احسب $f(0)$ ، و $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ واستنتج أنّه يوجد عدد حقيقي α يحقّق $f(\alpha) = 0$.

② اشرح لماذا كل حلّ للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $[-1,1]$.

③ استنتج أنّ كل حلّ للمعادلة $f(x) = 0$ يجب أن ينتمي إلى المجال $]0,1[$.

④ برهن أنّ التابع $x \mapsto x - \cos x$ متزايدٌ تماماً على المجال $]0,1[$، واستنتج أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ حقيقي وحيد α ينتمي إلى $]0,1[$.

الحل

① لدينا $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$ و $f(0) = -1 < 0$ ، ولأنّ التابع f مستمر، استنتجنا، استناداً إلى مبرهنة القيمة الوسطى أنّه يوجد عدد حقيقي α يحقّق $f(\alpha) = 0$. وأنّ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

② ليكن x حلاً للمعادلة $f(x) = 0$ عندئذٍ $x - \cos x = 0$ أي $x = \cos x \in [-1,1]$.

③ إذا كان $x \in [-1,0]$ كان $\cos x > 0$ ومن ثَمّ $f(x) = x - \cos x < 0$ إذن ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حل في المجال $[-1,0]$ إذن يجب أن ينتمي كلّ حل للمعادلة $f(x) = 0$ إلى المجال $]0,1]$، ولمّا كان $f(1) \neq 0$ استنتجنا أنّ كلّ حل لهذه المعادلة يجب أن ينتمي إلى المجال $]0,1[$.

④ إنّ التابع f هو مجموع التابعين المتزايدين تماماً على $]0,1[$ هما $x \mapsto x$، و $x \mapsto -\cos x$ فهو متزايد تماماً على المجال ذاته، وبالتالي فهو ينعدم مرّة واحدة على الأكثر على هذا المجال إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حلّ وحيد على الأكثر في المجال $]0,1[$. ولما كان $f(\alpha) = 0$ استنتجنا أنّ α هو الحل الوحيد لهذه المعادلة.

أنشطة

نشاط 1 البحث عن مقاربات مائلة

❶ أمثلة

1. f هو التابع المعرَّف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{x}$.

① لماذا يمكن تأكيد أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x - \frac{1}{2}$ مقاربٌ للخط C_f في جوار $+\infty$؟

② بيِّنْ الوضع النسبي للخطين Δ و C_f.

2. f هو التابع المعرَّف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+3}$.

بإعطاء x قيماً كبيرة، تكون قيم $f(x)$ قريبة من $\dfrac{2x^2}{x} = 2x$. فيمكن إذن أن يكون مستقيمٌ معادلته من النمط $y = 2x + b$ مقارباً للخط البياني C_f. سنسعى إذن إلى كتابة $f(x)$ بالصيغة:

$$f(x) = 2x + b + \frac{c}{x+3}$$

① عين عددين b و c يحققان $f(x) = 2x + b + \dfrac{c}{x+3}$، أياً كان $x \geq 0$.

② استنتج أنَّ C_f يقبل مقارباً مائلاً Δ، وبيِّنْ وضعه بالنسبة إلى C_f.

❷ الحالة العامة. نتأمّل تابعاً f تابعٌ يحققُ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. Δ مستقيم في معلمٍ معطىً، معادلته $y = ax + b$ $(a \neq 0)$. نفترض أنَّ

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0.$$

أثبت أنَّ $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ و $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$.

مساعدة: اكتب $f(x) = ax + b + (f(x) - (ax+b))$.

2. وبالعكس، أثبت أنّه إذا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $a\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$ (b عدد حقيقي) كان المستقيم الذي معادلته $y=ax+b$ مقارباً للخط C_f.

❸ تطبيق

ليكن f التابع المعرَّف على $[0,+\infty[$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. بالاستفادة من ❷، أثبت أنَّ C_f يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$.

ملاحظة. يُبحث عن المقارب المائل في جوار $-\infty$ بطريقة مماثلة لما هو في جوار $+\infty$.

الحل

.

❶ أمثلة

1. هنا $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x}$ على $]0,+\infty[$.

① إن Δ مقارب مائل للخط C_f عند $+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-\frac{1}{2})\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

② إشارة الفرق $g(x)=f(x)-(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{x}$ تحدّد الموقع النسبي للخط C_f بالنسبة إلى Δ، إذ نجده دوماً فوق Δ.

2. هنا $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x+3}$ على $[0,+\infty[$.

① نفترض وجود b و c بحيث $f(x)=2x+b+\dfrac{c}{x+3}$ أياً كانت $x\geq 0$. على الخصوص باختيار $x=0$ ثمّ $x=1$ نجد $\dfrac{1}{3}=b+\dfrac{c}{3}$ و $\dfrac{3}{4}=2+b+\dfrac{c}{4}$. بطرح المساواتين طرفاً من طرف نجد $c=19$ ثمّ بالتعويض في الأولى نجد $b=-6$. الآن نتحقّق أنّ $(b,c)=(-6,19)$ حلٌّ مناسب فنحسب في حالة $x\geq 0$:

$$2x-6+\frac{19}{x+3}=\frac{2x^2+1}{x+3}=f(x)$$

إذن $(b,c)=(-6,19)$ هو الحل المطلوب.

② لنتأمّل الفرق $g(x)=f(x)-(2x-6)=\dfrac{19}{x+3}$ فنلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$، إذن يتّضح أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x-6$ مستقيم مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$. ولأنّ $g(x)>0$ عندما $x\geq 0$ فإنّ C_f يقع فوق المقارب Δ.

❷ الحالة العامة.

1. في حالة $x>0$ لدينا

$$\frac{f(x)}{x}=a+\frac{b}{x}+\frac{f(x)-(ax+b)}{x}$$

ولكن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=0$ وكذلك $\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ، إذن يمكننا تعيين a بحساب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

وبعدئذ يكون $f(x)-ax=b+\big(f(x)-(ax+b)\big)$ ، ولكن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ إذن

$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$ ، إذن يمكننا تعيين b بحساب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)$.

2. لنفترض وجود النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ التي تعين a، ووجود النهاية $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-ax\big)=b$ التي تعين b. عندئذ نستنتج من ذلك أنّ $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$ وهذا يعني أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=ax+b$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

❸ تطبيق

3. لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ ، و $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$. استنتجنا أنّ أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

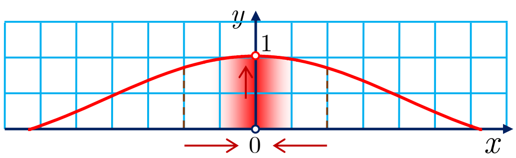
نشاط 1 نهايات جديرة بالاهتمام

❶ عموميات

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ بالصيغة $f(h)=\frac{\sin h}{h}$. في الجدول الآتي نجد بعض الأعداد القريبة من العدد 0 وقيم التابع f المقابلة لها.

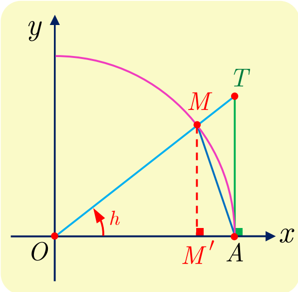
h	$\pm2^0$	$\pm2^{-1}$	$\pm2^{-2}$	$\pm2^{-3}$	$\pm2^{-4}$	$\pm2^{-5}$	$\pm2^{-6}$	$\cdots\to 0$
$f(h)$	0.84147	0.95885	0.98962	0.99740	0.99935	0.99948	0.99996	$\cdots\to 1$

نلاحظ من الجدول أنّه عندما تقترب قيمة h من العدد 0 تقترب قيمة $f(h)$ من العدد 1 وذلك مع كون التابع f غير معرف عند $h=0$. ويوضّح ذلك الشكل الآتي.



إذن من الطبيعي القول إنّ التابع f يسعى إلى العدد 1 عند الصفر : $\lim_{h\to0}f(h)=1$.

❷ حالة h من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$



لتكن C الدائرة المثلثاتيّة التي مركزها O. ولتكن M تلك النقطة من C بحيث يكون h التعيينَ الأساسي بالراديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.
h هو أيضاً قياس الزاوية الهندسية $\widehat{AOM}$ بالراديان. وفق هذه الشروط ومع الأخذ بدلالات الشكل المرافق، نعلم أنَّ $OA = 1$ و $OM' = \cos h$ و $MM' = \sin h$ وطول القوس $\overset{\frown}{AM}$ يساوي h.

مساحة المثلث OAM $\leq$ مساحة القطاع الدائري OAM $\leq$ مساحة المثلث OAT $\qquad (*)$

1. لماذا مساحة القطاع الدائري OAM تساوي $\frac{h}{2}$؟
2. لماذا مساحة المثلث OAM تساوي $\frac{1}{2}\sin h$؟
3. لماذا مساحة المثلث OAT تساوي $\frac{1}{2} \times \frac{\sin h}{\cos h}$؟
4. استنتج من $(*)$ أنَّ $\sin h \leq h \leq \frac{\sin h}{\cos h}$.
5. استنتج أنَّ $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$ أياً يكن h من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

❸ حالة h من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$

نضع $h' = -h$، فيكون $\frac{\pi}{2} > h' > 0$ واستناداً إلى الدراسة السابقة $\cos h' \leq \frac{\sin h'}{h'} \leq 1$.

1. استنتج أنّه أياً كان $h \neq 0$ و h من المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$، كان $\cos h \leq \frac{\sin h}{h} \leq 1$.
2. نهاية التابع المألوف $x \mapsto \cos x$ عند الصفر تساوي 1. استنتج أنَّ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

❹ النهاية الثانية المتعلّقة بتابع جيب التمام

يقودنا البحث عن نهاية $\frac{\cos h - 1}{h^2}$ عند الصفر، بحساب نهاية البسط ونهاية المقام، إلى حالة عدم تعيين، لأن نهاية كل من البسط والمقام تساوي الصفر عند $h = 0$.

1. بملاحظة أنَّ $\cos h = 1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}$، أثبت أنَّ

$$\frac{\cos h - 1}{h^2} = -\frac{2\sin^2(h/2)}{4 \times (h/2)^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(h/2)}{(h/2)}\right)^2.$$

2. استنتج أنَّ $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h^2} = -\frac{1}{2}$.

❺ تطبيق : لنتأمّل التابع المعرّف في $D = [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$ بالصيغة : $f(x) = \frac{\cos(3x) - \cos x}{x \sin x}$.
استعمل أسلوب الفقرة ❹ ونتائج هذا النشاط لتحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

الحل

❷ 1. مساحة القطاع الدائري $\frac{1}{2}r^2h$ حيث r هو نصف قطر الدائرة ويساوي 1 في حالتنا.

2. مساحة المثلث OAM تساوي $\frac{1}{2}OA \cdot MM' = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin h$.

3. مساحة المثلث OAT تساوي $\frac{1}{2}OA \cdot AT = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan h$.

4. نستنتج $\sin h \leq h \leq \dfrac{\sin h}{\cos h}$ من $(*)$ دون عناء.

5. نستنتج من $\sin h \leq h$ ومن كون $h > 0$ أنّ $\dfrac{\sin h}{h} \leq 1$ ومن $h \leq \dfrac{\sin h}{\cos h}$ بضرب طرفيها بالمقدار الموجب $\dfrac{\cos h}{h}$ أنّ $\cos h \leq \dfrac{\sin h}{h}$ إذن $\cos h \leq \dfrac{\sin h}{h} \leq 1$.

❸ 1. بتطبيق ما سبق على $h' = -h$ نجد $\cos(-h) \leq \dfrac{\sin(-h)}{-h} \leq 1$ أو $\cos h \leq \dfrac{\sin h}{h} \leq 1$. إذن في الحالتين تبقى المتراجحة نفسها صحيحة، أي $\cos h \leq \dfrac{\sin h}{h} \leq 1$ في حالة $h \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$.

2. وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة ومن كون $\lim\limits_{h \to 0} \cos h = \cos 0 = 1$ نجد $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$.

❹ تطبيق مباشر لما سبق: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h^2} = -\dfrac{1}{2}$.

❺ هنا نعلم أنّ $\cos 3x = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$ ومنه

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{(\cos 2x - 1)\cos x}{x \sin x} - \frac{\sin 2x}{x} = \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos 2x - 1}{x^2} - 2\frac{\sin 2x}{2x} \\
&= 4\cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{\cos 2x - 1}{(2x)^2} - 2\frac{\sin 2x}{2x}
\end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 4 \times 1 \times 1 \times \left(\frac{-1}{2}\right) - 2 \times 1 = -4.$$

تمرينات ومسائل

1 ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، وعند اللزوم ادرس النهاية من اليمين ومن اليسار.

① $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ ② $f(x)=2-\dfrac{4}{x^2}$

③ $f(x)=x^2+3x-\dfrac{1}{x+3}$ ④ $f(x)=x+\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{x+2}$

⑤ $f(x)=\left(2x-3\right)\left(5-\sqrt{x}\right)$ ⑥ $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{x}$

⑦ $f(x)=2x+\sin x$ ⑧ $f(x)=x^2+2x-\dfrac{1}{x}$

⑨ $f(x)=x-2\sqrt{x}+3$ ⑩ $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

الحل

① التابع معرّف على $\mathbb{R}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

② التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.

③ التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ وكذلك فإنّ

$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to(-3)^-} f(x)=+\infty \ .$$

④ التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ وكذلك فإنّ

$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$$

⑤ التابع معرّف على $[0,+\infty[$ ولدينا $f(0)=-15$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

⑥ التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. ليس للتابع نهاية عند $+\infty$ لأنه لو افترضنا وجود نهاية ℓ لهذا التابع عند $+\infty$ استنتجنا من كون $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ أنّ للتابع $x\mapsto\cos x$ نهاية ℓ أيضاً عند اللانهاية، وكان من ثمّ للتابع $x\mapsto\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ نهاية عند اللانهاية، وهذا يناقض ما أثبتناه في الدرس أن ليس للتابع $\sin$ نهاية عند اللانهاية. هذا التناقض يثبت أن ليس للتابع f نهاية عند $+\infty$.

وبالمثل، لو كان للتابع f نهاية L عند $-\infty$ استنتجنا من المساواة $f(x)=f(-x)+\dfrac{2}{x}$ أنه عندئذ سيسعى f أيضاً إلى L عند $+\infty$ وهذا يناقض ما أثبتناه أعلاه. إذن ليس للتابع f نهاية عند $-\infty$.

وأخيراً

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$$

⑦ التابع معرّف على $\mathbb{R}$ ولدينا، أياً كانت x، ما يأتي $f(x)\geq 2x-1$ و $f(x)\leq 2x+1$.

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ،

وكذلك لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

⑧ التابع معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ وكذلك فإنّ

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty \text{ و } \lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$$

⑨ التابع معرّف على $[0,+\infty[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to0} f(x)=3$ وبكتابة $f(x)=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)+3$ استنتجنا من كون $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

⑩ التابع معرّف على $\mathbb{R}$، و $f(x)\geq x$ أياً كانت x إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

ومن جهة أخرى في حالة $x<0$ لدينا $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

ملاحظة. تتمة للسؤال ⑥ لدينا الخاصة الآتية: إذا كان $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً **دورياً** و **غير ثابت** فعندئذ **لا** يكون للتابع g نهاية عند $+\infty$. لنفترض على سبيل الجدل أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\ell$ ، وليكن $T>0$ دوراً للتابع g، ثم لنتأمل عدداً a من $\mathbb{R}$. عندئذ نستنتج من $\lim\limits_{u\to\infty}(a+E(u)T)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\ell$ أنّ $\lim\limits_{u\to\infty} g(a+E(u)T)=\ell$ ولكن $g(a)=g(a+E(u)T)$ أياً كانت قيمة u إذن $g(a)=\ell$. ولأنّ a عدد كيفي استنتجنا أنّ g ثابت بما يناقض افتراضنا. إذن ليس للتابع g نهاية عند $+\infty$. وبتطبيق ما سبق على التابع $x\mapsto g(-x)$ نستنتج أن ليس للتابع g نهاية عند $-\infty$ أيضاً.

2 أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ عند 1 وعند $-\infty$ وعند $+\infty$، ثمَّ أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبيِّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

الحل

- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ ، فالمستقيم Δ الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=2$ مستقيم مقارب في جوار كل من $+\infty$ و $-\infty$. وكذلك فإن $f(x)-2=\frac{3}{x-1}$ ، إذن، يقع $\mathcal{C}_f$ فوق d على $]1,+\infty[$ وتحته على $]-\infty,1[$.

3 أوجد نهاية التابع f المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وعند -1. ثمَّ أوجد معادلات المستقيمات المقاربة لخطه البياني وبيِّن وضع الخط البياني بالنسبة إلى مقارباته الأفقية.

الحل

- $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$ ، فالمستقيم Δ الذي معادلته $x=1$ مقارب.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=-2$ مستقيم مقارب في جوار كل من $+\infty$ و $-\infty$. وكذلك فإن $f(x)+2=\dfrac{2}{x+1}$ ، إذن، يقع $\mathcal{C}_f$ فوق d على $]-1,+\infty[$ وتحته على $]-\infty,-1[$.

4 f هو التابع المعرف على المجال $]1,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+\sin x}{x-1}$.

① أثبت أنَّ $\dfrac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\dfrac{2x+1}{x-1}$ أياً يكن $x>1$.

② استنتج نهاية f عند $+\infty$.

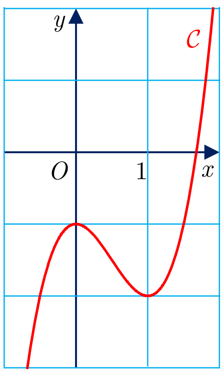
الحل

① لأنّ $-1\le\sin x\le 1$ أياً كانت x وجدنا أنّ $2x-1\le 2x+\sin x\le 2x+1$ ، وبالقسمة على المقدار الموجب $x-1$ استنتجنا أنّه في حالة $x>1$ لدينا

$$\frac{2x-1}{x-1}\le f(x)\le\frac{2x+1}{x-1}$$

② ولأنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{x-1}=2$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ استناداً إلى مبرهنة الإحاطة.

5 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2x^3-3x^2-1$ وليكن C خطه البياني المبيّن في الشكل المرافق.



① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② احسب $f'(x)$ وادرس إشارته، ثمَّ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f.

③ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل جذراً واحداً فقط. وإذا رمزنا إلى هذا الجذر بالرمز α، أثبت أنَّ α ينتمي إلى المجال $]1.6,1.7[$.

الحل

① $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

② $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ ، إذن

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

③ استناداً إلى جدول التغيرات في حالة x من $]-\infty,1[$ يكون $f(x) \leq -1$ فليس للمعادلة $f(x) = 0$ حلول في $]-\infty,1[$. أمّا على المجال $[1,+\infty[$ فالتابع متزايدٌ تماماً، ومن ثمَّ $f([1+\infty[) = [-2,+\infty[$ و 0 ينتمي إلى $[-2,+\infty[$، إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيد α في $[1,+\infty[$. وهو الحل الوحيد لهذه المعادلة في $\mathbb{R}$ إذ ليس لهذه المعادلة حلول في $]-\infty,1[$. وأخيراً بكتابة $f(x) = x^2(2x-3) - 1$ نحسب

$$f(1.6) = 2.56 \times (0.2) - 1 = 0.512 - 1 < 0$$
$$f(1.7) = 2.89 \times (0.4) - 1 = 1.156 - 1 > 0$$

نستنتج إذن أنّ $\alpha \in]1.6,1.7[$.

لنتعلّم البحث معاً

6 تغيير للمتحوّل

نتأمّل التابع f المعرف على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{x}$. ادرس نهاية f عند الصفر.

نحو الحلّ

- نحن أمام صيغة عدم تعيين، لماذا؟
- بحثاً عن طريق

الطريقة الأولى: تُذكِرنا عبارة $f(x)$ بالتابع $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ الذي تساوي نهايته 1 عند الصفر. وهذا يقودنا إلى التفكير بتغييرٍ للمتحول. أجرِ التغيير $X = 3x$ ، ثمَّ أنجز الحل.

الطريقة الثانية: تمكن كتابة $f(x)$ بالصيغة $f(x) = \dfrac{\sin(3x) - \sin 0}{x - 0}$ ، وهذه العبارة هي معدل تغير التابع $x \mapsto \sin 3x$. استفد من ذلك لإيجاد نهاية f عند الصفر.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

- لأن البسط والمقام ينعدمان عند الصفر.
- نضع $X = 3x$ فيكون $f(x) = 3\frac{\sin X}{X}$ ولكن $\lim\limits_{x \to 0} X = 0$ و $\lim\limits_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ ، إذن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

وبطريقة ثانية، نعلم أنّ التابع $g(x)=\sin 3x$ اشتقاقي ومشتقه $g'(x)=3\cos 3x$ وعلى الخصوص $g'(0)=3$، ولكن هذا يعني أنّ $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=3$ أو $\lim_{x\to 0} f(x)=3$.

7 التابع $x \mapsto \sqrt{ax^2+bx+c}$

ليكن f التابع المعرفُ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{2x^2+x+1}$. وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني.
المطلوب هو إثبات أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقبل مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$، وكذلك الأمر في جوار $-\infty$.

نحو الحلّ

فهم السؤال

- الحد المسيطر في كثير الحدود $2x^2+x+1$ هو $2x^2$، فيمكن أن نخمّن أنّه، عند القيم الكبيرة للمتحول x، يكون $f(x)$ من مرتبة $\sqrt{2x^2}=\sqrt{2}\,x$.

بحثاً عن طريق

① أثبت أنَّ $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}\,x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

② استنتج قيمة $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(\sqrt{2}\,x+\frac{\sqrt{2}}{4})\right)$.

③ أعد الدراسة السابقة في جوار $-\infty$.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

① نلاحظ أنه في حالة لدينا

$$f(x)-\sqrt{2}x=\frac{(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x)}$$

$$=\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{2}x}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{x+1}{x^2}}+\sqrt{2}}$$

إذن نستنتج من كون $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2}=0$ أنّ $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\sqrt{2}x\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

② نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\left(\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)=0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{4}$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

③ بالمثل نجد أن المستقيم الذي معادلته $y=-\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{4}$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$.

8 كثير الحدود ذي الدرجة الفردية

من المعلوم أنَّ كثيرَ حدودٍ P من الدرجة n يكتب بالصيغة

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ حيث $a_n \neq 0$.

نهدف إلى إثبات أنَّه إذا كان n عدداً فردياً، قبِلَ P جذراً حقيقياً على الأقل.

نحو الحلّ

فهم السؤال. يتعلق الأمر بإثبات أنَّ للمعادلة $P(x) = 0$ حلاً على الأقل في حالة n فردي. يتبادر إلى الذهن أن ندرس تغيرات التابع $x \mapsto P(x)$. ولأنَّ التابع P مستمرٌّ، يمكن التفكير في إيجاد عددين a و b يحققان $P(a) \times P(b) < 0$. أيَّةُ مبرهنة تفيد في تحقيق ما خطر لنا.

بحثاً عن طريق. لنفترض أوّلاً أنّ $a_n > 0$.

- احسب $\lim_{x \to +\infty} P(x)$ و $\lim_{x \to -\infty} P(x)$ مستفيداً من كون العدد n فردياً.
- استنتج أنّه يوجد عددان حقيقيان a و b يحققان $P(a) > 0$ و $P(b) < 0$.
- استنتج وجود عدد حقيقي c يحقق $P(c) = 0$.
- ادرس بالمثل حالة $a_n < 0$.

أنجزِ الحل واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

الحل

- لنفترض أولاً أنّ $a_n > 0$. إذن

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n = -\infty$$

نستنتج من $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$ أنّه يوجد عدد حقيقي a يحقق $p(a) < 0$.

ولأنّ $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ فيوجد b أكبر تماماً من a يحقق $P(b) > 0$.

ولما كان P مستمراً على $[a,b]$ ويحقق $P(a)P(b) < 0$ فللمعادلة $P(x) = 0$ حلّ واحد c على الأقل ينتمي إلى المجال $[a,b]$. ويتم إثبات المطلوب في هذه الحالة.

- لنفترض الآن أنّ $a_n < 0$. بتطبيق ما سبق على كثير الحدود $Q(x) = -P(x)$ الذي أمثال حده المسيطر موجبة نستنتج وجود عدد حقيقي c يحقق $Q(c) = 0$ وعندئذ يكون $P(c) = 0$ أيضاً فنكون قد أثبتنا صحة النتيجة في هذه الحالة أيضاً.

قُدُماً إلى الأمام

9 ادرس في كل حالة نهاية التابع f عند a، وادرس عند الضرورة النهاية من اليمين ومن اليسار.

① $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-6x+5}$ $\quad a=-\infty,1,5,+\infty$

② $f(x)=\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}$ $\quad a=-\infty,-2,2,+\infty$

③ $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$ $\quad a=-\infty,-2,1,+\infty$

④ $f(x)=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{2}{x^2-9}$ $\quad a=-\infty,-3,3,+\infty$

⑤ $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$ $\quad a=-\infty,1,+\infty$

⑥ $f(x)=2x+\sin^2 x$ $\quad a=-\infty,+\infty$

⑦ $f(x)=x^3(2+\cos x)$ $\quad a=-\infty,+\infty$

⑧ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}$ $\quad a=1,+\infty$

الحل

① هنا $\dfrac{x-4}{(x-1)(x-5)}=\dfrac{x-4}{x^2-6x+5}=f(x)$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to5^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to5^-} f(x)=-\infty$$

② هنا $\dfrac{x-6}{x-2}=\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-4}=f(x)$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=1 \qquad \lim_{x\to-2} f(x)=2$$
$$\lim_{x\to2^+} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x)=+\infty$$

③ هنا $\dfrac{2x^2+x+1}{x+2}=\dfrac{(x-1)(2x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)}=f(x)$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to1} f(x)=\frac{4}{3}$$
$$\lim_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$$

④ هنا $\dfrac{x+2}{x^2-9}=f(x)$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to3^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to3^-} f(x)=-\infty$$
$$\lim_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-3)^-} f(x)=-\infty$$

⑤ هنا $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^3-1}=x+\dfrac{1}{x^2+x+1}$ على مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to 1} f(x)=\frac{4}{3}$$

⑥ لأنّ $-1\le \sin x\le 1$ استنتجنا أنّ

$$2x-1\le f(x)=2x+\sin x\le 2x+1$$

وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة نجد

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

⑦ هنا لأنّ $-1\le\cos x\le 1$ استنتجنا أنّ $2+\cos x\ge 1$ ومنه

– في حالة $x>0$ لدينا $f(x)\ge x^3$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

– وفي حالة $x<0$ لدينا $f(x)\le x^3$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

⑧ هنا $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ على مجموعة تعريفه $]1,+\infty[$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \qquad \lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$$

10 ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$.

① أثبت أنَّ g محدود.

② استنتج كلاً من النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{3+2\sin x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}\right)$.

الحل

① التابع $u(x)=\dfrac{1}{3+2x}$ متناقص تماماً على $]-\frac{3}{2},+\infty[$ ولأنّ $-1\le\sin x\le +1$ أياً كانت x
استنتجنا أنّ $u(1)\le u(\sin x)\le u(-1)$ أي أياً كانت x كان $\dfrac{1}{5}\le g(x)\le 1$ فالتابع g محدود.

② نستنتج من المتراجحة السابقة أنّ $x^2g(x)\ge\dfrac{x^2}{5}$ أياً كانت x، إذن، لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{5}=+\infty$ ،
استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2g(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{3+2\sin x}=+\infty$.

وبالمثل في حالة $x>1$ لدينا $x+\sin x\ge x-1>0$، ومنه $(x+\sin x)g(x)\ge\dfrac{x-1}{5}$ في هذه الحالة، ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{5}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{3+2\sin x}=+\infty$.

11 ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2-x-2}$.

① عيّن $\mathcal{D}_f$ مجموعة تعريف f .

② أوجد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-2}$ ، أياً تكن x من $\mathcal{D}_f$.

③ ادرس نهاية f عند حدود المجالات الثلاثة التي تؤلف $\mathcal{D}_f$.

الحل

① بملاحظة أنّ $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$ نستنتج أنّ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$

② لنفترض وجود أعداد a و b و c تحقق

$$f(x)=\frac{3x^2+6x}{(x+1)(x-2)}=a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-2}$$

أياً كانت x من $\mathcal{D}_f$. عندئذ بحساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ باستعمال كل من العلاقتين نجد $a=3$. ثُمّ بضرب طرفي المساواة بالمقدار غير المعدوم $x+1$ نجد

$$\frac{3x^2+6x}{x-2}=a(x+1)+b+\frac{c(x+1)}{x-2}$$

فإذا حسبنا نهاية كل من الطرفين عند -1 وجدنا $b=1$. وأخيراً بحساب قيمة $f(0)$ بطريقتين نجد

$$0=3+\frac{1}{0+1}+\frac{c}{0-2}$$

ومنه $c=8$. وبالعكس، نتحقّق مباشرة أنّ

$$3+\frac{1}{x+1}+\frac{8}{x-2}=\frac{3x^2-3x-6+x-2+8x+8}{x^2-x-2}=\frac{3x^2+6x}{x^2-x-2}=f(x)$$

③

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=3 \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=3$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$$

12 ليكن f التابع المعين بالعلاقة $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

① ادرس نهاية f في جوار 1.

② أوجد مجالاً I مركزه 1 ويحقق $f(x)>10^6$ ، أياً تكن x من $I\setminus\{1\}$.

الحل

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$$

① من الواضح أنّه عندما تسعى x إلى الواحد يسعى البسط إلى الواحد ويسعى المقام إلى الصفر بقيم موجبة إذن $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$.

② المطلوب هو تعيين عدد α بحيث تقتضي المتراجحة $1-\alpha < x < 1+\alpha$ في حالة $x \neq 1$ المتراجحة $f(x) > 10^6$.

لنختر مثلاً $\alpha = 7\times 10^{-4}$ لمّا كان $\alpha < 0.5$ استنتجنا من $1-\alpha < x < 1+\alpha$، حيث $x \neq 1$، أنّ

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2} > \frac{1-\alpha}{\alpha^2} > \frac{0.5}{49\times 10^{-8}} = \frac{50}{49}\times 10^6 > 10^6$$

هنا في المتراجحة الأولى صغّرنا البسط وكبّرنا المقام، وفي المتراجحة الثانية استفدنا من $\alpha < 0.5$.

13 ادرس في كل حالة نهاية التابع f، عند a .

① $a = +\infty$ $\quad f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$ ② $a = -\infty$ $\quad f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x$

③ $a = 3$ $\quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ ④ $a = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$

⑤ $a = 1, +\infty$ $\quad f(x) = \dfrac{-x+\sqrt{x}}{x-1}$ ⑥ $a = -1, +\infty$ $\quad f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$

الحل

① هنا في حالة $x > 0$ لدينا:
$$f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

وعليه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

② هنا في حالة $x < -\frac{1}{4}$ لدينا: $\sqrt{x^2} = -x$ ومن ثَمّ
$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2+x}-2x} = \frac{1}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}-2}$$

وعليه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\dfrac{1}{4}$.

③ هنا في حالة $x > -1$ و $x \neq 3$ لدينا:
$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+2}$$

وعليه $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{1}{4}$.

④ هنا في حالة $x > -1$ و $x \neq 0$ لدينا
$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}-1} = 2(\sqrt{1+x}+1)$$

وعليه $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$.

⑤ هنا في حالة $x > 0$ و $x \neq 1$ لدينا
$$f(x) = \frac{-x+\sqrt{x}}{x-1} = -\frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = -\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = -\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

وعليه $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

⑥ هنا في حالة $x>1$ لدينا $(1+x)=\sqrt{(1+x)^2}$ ومنه

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)}}=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. وفي حالة $x<-1$ لدينا $1+x=-\sqrt{(1+x)^2}$ ومنه

$$f(x)=-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=0$.

14 ادرس في كل حالة نهاية التابع f .

① $a=0,+\infty$ $\quad f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ② $a=0$ $\quad f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

③ $a=0$ $\quad f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ ④ $a=2$ $\quad f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$

الحل

① في حالة $x>0$ لدينا $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\,\dfrac{\sin x}{x}$ إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0\times1=0$ ، ومن جهة أخرى لدينا $-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\le f(x)\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

② في حالة $x\neq0$ من المجال $]-\pi,\pi[$ لدينا $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

③ في حالة $x\neq0$ من المجال $]-\pi,\pi[$ لدينا $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=\dfrac{x}{\sin x}(1+\cos x)$ ، ومنه نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to0} f(x)=2$.

④ في حالة $x>\frac{2}{3}$ لدينا

$$f(x)=\frac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}=\frac{6-3x}{2+\sqrt{3x-2}}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2x-4}=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

إذن $\lim\limits_{x\to2} f(x)=-\frac{9}{4}$

15 ليكن g التابع المعرف على المجال $]3,+\infty[$ وفق $g(x)=\dfrac{3x-1}{x-3}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$.

② أعدْ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(g(x))$ بعد كتابة $g(g(x))$ بدلالة x .

الحل

① $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3$ وكذلك فإنّ $g(x) = 3 + \frac{8}{x-3} > 3$ أياً كانت x من $]3,+\infty[$ إذن $g(x)$ يسعى إلى 3 بقيم أكبر من 3 عند $+\infty$، وعليه فإنّ $\lim_{u\to 3^+} g(u) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} g(g(x)) =$.

② بحساب مباشر نجد $g(g(x)) = x$ أياً كانت $x > 3$. وهكذا نجد مجدداً أنّ $\lim_{x\to+\infty} g(g(x)) = +\infty$.

16 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$. جِدْ الأعداد الحقيقيّة a و b و c و d علماً أنّ الخواص الآتية محققة:

- المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 3$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- المستقيم المائل الذي معادلته $y = 2x - 5$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$.
- تنتمي النقطة $A(1,2)$ إلى الخط $\mathcal{C}$.

الحل

- لو كان $d \neq 3$ كان $\lim_{x\to 3} f(x) = 3a + b + \frac{c}{3-d}$ وهذا عددٌ حقيقي، مما يناقض كون المستقيم الذي معادلته $x = 3$ مستقيماً مقارباً شاقولياً للخط $\mathcal{C}$. إذن لا بُدّ أن يكون $d = 3$.
- استناداً إلى النقطة الثانية لدينا $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (2x-5)) = 0$ أي $\lim_{x\to+\infty} ((a-2)x + b + 5) = 0$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x-3} = 0$. وهذا يقتضي أن يكون $a = 2$ و $b = -5$.
- من $f(1) = 2$ نستنتج أنّ $c = -10$.

17 فيما يأتي $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f الذي ندرسه على مجموعة تعريفه $\mathcal{D}_f$. بيِّنْ، في كل حالة، إنْ كان ثمة مستقيمات مقاربة (أفقية أو شاقولية أو مائلة) للخط $\mathcal{C}$.

① $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ ② $f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x^2+1}$

③ $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ ④ $f(x) = 1 - x + \frac{3x}{x^2+2}$

⑤ $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 4}{x}$ ⑥ $f(x) = \frac{x^2 + 2 + \sin x}{x}$

⑦ $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 - 1}$ ⑧ $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

⑨ $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$ ⑩ $f(x) = \frac{3x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

مساعدة: في ⑧ و ⑨ و ⑩ فكّر باستعمال القسمة الإقليدية لكثيرات الحدود.

الحل

① التابع $x \mapsto f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ معرّف على $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$. ولأنّ $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$ استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب شاقولي معادلته $x = 3$.

② التابع $f(x) = -x + 3 + \dfrac{2}{x^2+1}$ معرّف على $\mathbb{R}$، ولأنّ

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x-3\big) = 0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+x-3\big) = 0$$

استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب معادلته $y = -x+3$ في جوار كلّ من $+\infty$ و $-\infty$.

③ التابع $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2}$ معرّف على $\mathbb{R}^*$، ولأنّ

$$\lim_{x\to-\infty}\Big(f(x)-\big(\tfrac{x}{2}+1\big)\Big) = 0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-\big(\tfrac{x}{2}+1\big)\Big) = 0$$

استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب معادلته $y = 1 + \dfrac{x}{2}$ في جوار كلّ من $+\infty$ و $-\infty$.

وكذلك لأن $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ استنتجنا أنّ للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب شاقولي هو محور التراتيب الذي معادلته $x = 0$.

④ مشابه للتمرين ②، ونجد أنّ المستقيم الذي معادلته $y = 1 - x$ مستقيم مقاربٌ.

⑤ هنا $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-4}{x} = 2x + 5 - \dfrac{4}{x}$ على $\mathbb{R}^*$. هذا يشبه التمرين ③. للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب معادلته $y = 2x+5$ في جوار كلّ من $+\infty$ و $-\infty$. ويقبل أيضاً محور التراتيب مقارباً شاقولياً.

⑥ هنا $f(x) = \dfrac{x^2+2+\sin x}{x} = x + \dfrac{2+\sin x}{x}$ على $\mathbb{R}^*$. للخط البياني $\mathcal{C}_f$ مستقيم مقارب معادلته $y = x$ في جوار كلّ من $+\infty$ و $-\infty$. ويقبل أيضاً محور التراتيب مقارباً شاقولياً.

⑦ هنا لدينا مقارب أفقي معادلته $y = 1$ ومقاربان شاقوليان معادلتاهما $x = 1$ و $x = -1$.

⑧ هنا لدينا مقارب مائل معادلته $y = x - 2$ ومقاربان شاقولي معادلته $x = 1$.

⑨ هنا لدينا مقارب مائل معادلته $y = x$.

⑩ هنا لدينا مقارب مائل معادلته $y = 3x$.

18 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \sqrt{x^2+2x+4}$.

① .a احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثمَّ $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)$.

.b استنتج وجود مقارب مائل Δ للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

.c ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

② .a احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

.b أثبت وجود عدد حقيقي a يحقق $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ وأنَّ نهاية $x\mapsto f(x)-ax$ عند $-\infty$ عددٌ حقيقي b.

.c استنتج وجود مقارب مائل Δ' للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

الحل

① في حالة $x>0$ لدينا $x^2+2x+4\geq x^2$ ومنه $f(x)\geq x$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. ومن جهة أخرى نجد بحساب بسيط أنّ

$$f(x)-(x+1)=\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+x+1}$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x-1\big)=0$ فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

لنضع $g(x)=f(x)-(x+1)$. التابع g تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}$. والمساواة $g(x)=0$ تقضي أن يكون $x^2+2x+4=x^2+2x+1$ وهذا أمرٌ مستحيل. إذن التابع g يحافظ على إشارة ثابتة على كامل $\mathbb{R}$، ولأنّ $g(0)=1>0$ استنتجنا أنّ $g(x)>0$ أياً كان x من $\mathbb{R}$، ومن ثمّ يقع الخط البياني C فوق Δ.

② لمّا كان $\lim_{x\to-\infty}(x^2+2x+4)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. وفي حالة $x<0$ لدينا $x=-\sqrt{x^2}$ إذن $\dfrac{f(x)}{x}=-\sqrt{\dfrac{x^2+2x+4}{x^2}}$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$. ثُمَّ كذلك في حالة $x<0$ لدينا

$$f(x)+x=x\left(1-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)=\frac{-2-4/x}{1+\sqrt{1+2/x+4/x^2}}$$

إذن $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big)=-1$. نستنتج إذن أنّ

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-(-x-1)\big)=0$$

فالمستقيم Δ' الذي معادلته $y=-x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

19 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$.

① احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

② a. اكتب ثلاثي الحدود x^2+4x+5 بالصيغة القانونية، (متمّماً إلى مربّع كامل).

b. استنتج وجود مقارب مائل للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$. اكتب معادلته.

الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}(x^2+4x+5)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. ثُمّ نلاحظ أنّ

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1$$

② إذن عندما تكون x كبيرة جداً يكون العدد 1 مهملاً أمام $(x+2)^2$ ومن ثَمّ يتصرف $f(x)$ وكأنّه $\sqrt{(x+2)^2}=x+2$ (لأنّ $x+2>0$ في هذه الحالة) لذلك نتوقّع أن يكون المستقيم الذي معادلته $y=x+2$ مستقيماً مقارباً للخط البياني للتابع f . لنتحقّق إذن من ذلك، لما كان

$$f(x)-(x+2)=\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}+x+2}$$

استنتجنا مباشرة أنّ $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-x-2\big)=0$ ، فالمستقيم الذي معادلته $y=x+2$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

20 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

① ادرس نهاية f عند $-\infty$. اشرح التأويل الهندسي لهذه النتيجة.

② أثبت أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مقاربٌ للخط C في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C.

الحل

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

① في حالة $x<0$ لدينا $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ ، فيكون محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيماً مقارباً للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$.

② في حالة $x>0$ لدينا $f(x)-2x=\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ إذن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$ ، فيكون المستقيم Δ الذي معادلته $y=2x$ مستقيماًمقارباً للخط C في جوار $+\infty$.

③ لنضع $g(x)=f(x)-2x$. التابع g تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}$. والمساواة $g(x)=0$ تقضي أن يكون $x^2+1=x^2$ وهذا أمرٌ مستحيل. إذن التابع g لا ينعدم فهو يحافظ على إشارة ثابتة على كامل $\mathbb{R}$، ولأنّ $g(0)=1>0$ استنتجنا أنّ $g(x)>0$ أياً كان x من $\mathbb{R}$، ومن ثمّ يقع C فوق Δ.

21 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\sqrt{|4x^2-1|}$.

① ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

② a.احسب $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-3x\big)$.

b.احسب $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big)$.

③ a.استنتج أنَّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين Δ_1 و Δ_2 يُطلب إيجاد معادلتيهما.

b.ادرس الوضع النسبي للخط C وكلٍ من المقاربين Δ_1 و Δ_2.

الحل

① في حالة $x>\frac{1}{2}$ لدينا $4x^2-1>0$ ومن ثَمّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. وفي حالة $x<-\frac{1}{2}$ لدينا أيضاً $4x^2-1>0$ و $x=-\sqrt{x^2}$ من ثَمّ $f(x)=x\left(1-\sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right)$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

② في حالة $x>\frac{1}{2}$ لدينا $f(x)-3x=\sqrt{4x^2-1}-2x=\dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1}+2x}$ إذن

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-3x)=0$$

فالمستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=3x$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

في حالة $x<-\frac{1}{2}$ لدينا $f(x)+x=\sqrt{4x^2-1}+2x=\dfrac{-1}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$ إذن

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=0$$

فالمستقيم Δ_2 الذي معادلته $y=-x$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

③ الجزء a. من السؤال أجبنا عنه أعلاه.

- لنضع $g(x)=f(x)-3x$. التابع g تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}$. والمساواة $g(x)=0$ تكافئ

$$\sqrt{|4x^2-1|}=2x$$

وهذا يُكافئ أنّ $x>0$ و $|4x^2-1|=4x^2$ أو $x>0$ و $8x^2=1$. إذن ينعدم g فقط عند قيمة واحدة هي $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ومنه الجدول الآتي

x	$-\infty$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f(x)-3x$	$+$	0	$-$
C	فوق Δ_1		تحت Δ_1

ويقطع C المقارب Δ_1 في النقطة $A\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$.

- لنضع $h(x)=f(x)+x$. التابع h تابع مستمرٌ على $\mathbb{R}$. والمساواة $h(x)=0$ تكافئ

$$\sqrt{|4x^2-1|}=-2x$$

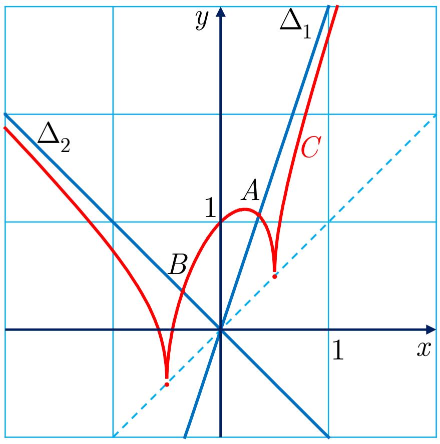
وهذا يُكافئ أنَّ $x<0$ و $|4x^2-1|=4x^2$ أو $x<0$

و $8x^2=1$. إذن ينعدم h فقط عند $x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ومنه

الجدول الآتي:

x	$-\infty$ $\quad\frac{-1}{2\sqrt{2}}\quad$ $+\infty$	
$f(x)+x$	$-\quad 0\quad +$	
C	تحت Δ_2	فوق Δ_2

ويقطع C المقارب Δ_2 في النقطة $B\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.



22 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{4x^2-4x+3}$.

① ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② a.اكتب $4x^2-4x+3$ بالشكل القانوني.

b.ادرس نهاية التابع h المعرف وفق $h(x)=f(x)-\sqrt{(2x-1)^2}$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

c.استنتج أنَّ الخط C يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب إيجاد معادلتيهما.

③ أثبت أنَّ الخط C يقع فوق كلٍّ من هذين المقاربين.

الحل

لا أفكار جديدة في هذه المسألة. نترك التفاصيل للقارئ.

23 ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

① a. أثبت أنَّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مقاربٌ للخط C في جوار $+\infty$.

b. ادرس الوضع النسبي للمقارب Δ والخط C .

② أصحيحٌ أنَّ المستقيم Δ' الذي معادلته $y=x-1$ مقاربٌ للخط C في جوار $-\infty$؟

الحل

① a. في حالة $x>0$ لدينا $\sqrt{x^2}=x$ إذن $f(x)-(x+1)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}-1$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=1-1=0$$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$. ولأنَّ $x^2<x^2+9$

استنتجنا أنَّ $f(x)-(x+1)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}-1<\sqrt{\dfrac{x^2+9}{x^2+9}}-1=0$ إذن C يقع دوماً تحت Δ .

② في حالة $x<0$ يكون $x=-\sqrt{x^2}$ إذن $f(x)-(x-1)=-\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+9}}+1$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-1))=0$$

فالمستقيم Δ' الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$.

24 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3+x+1$. احسب $f(-1)$ و $f(0)$ ثمَّ أثبت وجود عدد حقيقي وحيد c من المجال $]-1,0[$ يحقّق $f(c)=0$.

الحل

- التابع f متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$ لأنّ مشتقه موجبٌ تماماً. فإذا كان للمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ كان هذا الحل وحيداً.
- ولكن $f(-1)=-1$ و $f(0)=1$ إذن التابع المستمر f يغير إشارته على المجال $]-1,0[$، فلا بدّ أن ينعدم عند نقطة c من هذا المجال. إذن تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلاً وهذا الحل ينتمي إلى $]-1,0[$.

نستنتج مما سبق أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحلاً وحيداً c في $\mathbb{R}$، وأنّ c ينتمي إلى $]-1,0[$.

25 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^3}{x+1}$.

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على المجال $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$.

② نظِّم جدولاً بتغيرات f على المجال $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$.

③ أوجد $f\left(\left[-\frac{3}{2},-1\right[\right)$ وأثبت أنَّ للمعادلة $f(x)=10$ حلّاً وحيداً في المجال $\left[-\frac{3}{2},-1\right[$.

الحل

① نلاحظ أنّ $f'(x)=\dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$، إذن $f'(x)>0$ على المجال $\left]-\frac{3}{2},-1\right[$، فالتابع f متزايدٌ تماماً على هذا المجال.

② ولأنّ $\lim\limits_{x\to-3/2} f(x)=\dfrac{27}{4}$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ وجدنا جدول التغيرات الآتي

x	$-\frac{3}{2}$		-1
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

③ نستنتج مما سبق أنّ $f\left([-\frac{3}{2},-1[\right)=[\frac{27}{4},+\infty[$. ولأنّ 10 ينتمي إلى المجال $[\frac{27}{4},+\infty[$.

استنتجنا مما سبق أنّ للمعادلة $f(x)=10$ حلاً وحيداً في المجال $[-\frac{3}{2},-1[$.

26 ليكن f التابع المعرف على $I=[0,3]$ وفق $f(x)=x^2-2x-3$.

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② استنتج قيم x التي تحقق $f(x)=0$.

③ عيّن $f([0,3[)$.

الحل

لا أفكار جديدة في هذه المسألة البسيطة. التابع متناقص على $[0,1]$ ومتزايد $[1,3]$. للمعادلة جذرٌ وحيدٌ هو $x=3$. و $f([0,3[)=[-4,0[$.

27 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$. أثبت أنَّ f مستمر على $\mathbb{R}$ وعيّن $f(\mathbb{R})$.

الحل

التابع مستمر على $\mathbb{R}$ لأنّه تابع كسري بسطه كثير حدود، ومقامه كثير حدود لا ينعدم على $\mathbb{R}$. ودراسة بسيطة للتابع تعطينا جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

إذن $f(\mathbb{R})=[0,1[$.

28 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & : x\neq 0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$$

① احسب نهاية f عند الصفر.

② هل f مستمر عند الصفر؟ هل هو مستمر على $\mathbb{R}$؟ علل إجابتك.

الحل

① في حالة $x\neq 0$ لدينا $\left|f(x)\right|\leq x^2$ لأنّ $|\cos(1/x)|\leq 1$. المتراجحة $\left|f(x)\right|\leq x^2$ محققّة أيضاً في حالة $x=0$. ولكن $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

② لما كان $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. فالتابع f مستمرٌ عند الصفر، وهو مستمرٌ عند كل نقطة $x_0\neq 0$ بسبب استمرار $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ عند x_0، واستمرار كل من $x\mapsto \cos x$ و $x\mapsto x^2$ على $\mathbb{R}$. إذن f مستمر على $\mathbb{R}$.

29 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x^2+1}}{x} & : x\neq 0\\ m & : x=0\end{cases}$$

ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$؟

الحل

التابع مستمر على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$، فلكي يكون مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الصفر.

ولكن في حالة $x\neq 0$ لدينا $f(x)=\dfrac{-x}{1+\sqrt{1+x^2}}$ ومن ثَمّ فإنّ شرط استمرار f عند الصفر يكافئ $m=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

30 يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق $f(x)=x-E(x)$.

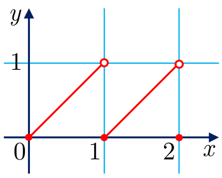
① ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,2]$.

② هل f مستمر على المجال $[0,2]$؟

الحل

① استناداً إلى تعريف تابع الجزء الصحيح لدينا $E(x)=0$ في حالة x من $[0,1[$، و $E(x)=1$ في حالة x من $[1,2[$، ومنه يمكن أن نعبّر عن f بالصيغة المُكافئة :

$$f(x)=x-E(x)=\begin{cases}x & : & x\in[0,1[\\ x-1 & : & x\in[1,2[\\ 0 & : & x=2\end{cases}$$



② نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1\neq f(1)$ فالتابع غير مستمر عند $x=1$ فهو غير مستمر على $[0,2]$

31 يرمز $E(x)$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x. ليكن f التابع المعرف على المجال $[0,2]$ وفق

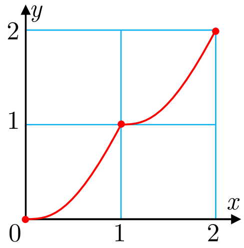
$$f(x)=E(x)+\big(x-E(x)\big)^2.$$

① اكتب $f(x)$ بعبارة مستقلة عن $E(x)$ (لا تحوي $E(x)$).

② أثبت أنَّ f مستمر على المجال $[0,2]$؟

الحل

① استناداً إلى تعريف تابع الجزء الصحيح لدينا $E(x)=0$ في حالة x من $[0,1[$، و $E(x)=1$ في حالة x من $[1,2[$، ومنه يمكن أن نعبّر عن f بالصيغة المُكافئة :



$$f(x)=E(x)+(x-E(x))^2=\begin{cases} x^2 & : \ x\in[0,1[\\ x^2-2x+2 & : \ x\in[1,2[\\ 2 & : \ x=2 \end{cases}$$

② التابع f تابع كثير الحدود على كل من المجالين $]0,1[$ و $]1,2[$ وهذه التوابع مستمرة على مجالات تعريفها. بقي إذن أن نتحقّق من استمرار f عند كل من 1 و 2. فنحسب

- عند 1 لدينا $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x^2=1=f(1)$ فالتابع مستمرٌ عند 1.
- عند 2 لدينا $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-2x+2\right)=2=f(2)$ فالتابع مستمر أيضاً عند 2.

إذن f مستمرٌ على $[0,2]$.

32 في معلمٍ متجانس، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $[0,\pi]$ وفق $f(x)=\sin x$. و d هو المستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x$.

① a. ارسم كلّاً من C و d.

b. يبدو أنَّ للمعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ حلّاً وحيداً α في المجال $]0,\pi]$. استفد من الرسم لإيجاد مجال صغير ينتمي إليه α.

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $[0,\pi]$ وفق $g(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$.

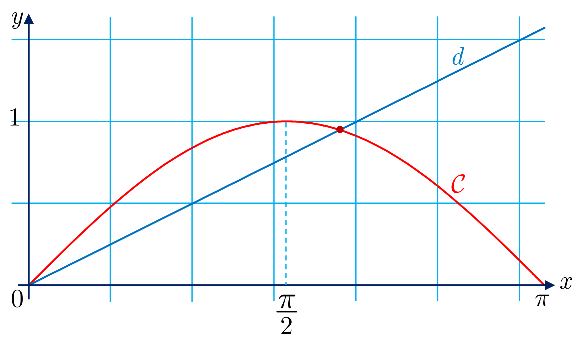
a. احسب $g'(x)$ وأثبت أنَّ $g'(x)$ ينعدم عند $x=\frac{\pi}{3}$.

b. نظِّمْ جدولاً بتغيرات g.

③ استنتج مما سبق أنَّ المعادلة $\sin x=\frac{1}{2}x$ تقبل حلّاً وحيداً α في المجال $]0,\pi]$.

الحل

① a.



b. يوحي الرسم أنّ $\alpha\in[\frac{\pi}{2},2]$.

② هنا لدينا $g(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$ و $g'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$ الذي ينعدم عند $x=\frac{\pi}{3}$ ومنه جدول التغيرات

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\frac{\pi}{3})$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

هنا من غير المهم أو المفيد حساب $g(\frac{\pi}{3})$ المهم فقط أن هذه القيمة موجبة، وذلك لأنّ g متزايدٌ تماماً على $[0,\frac{\pi}{3}]$، إذن $0=g(0)<g(\frac{\pi}{3})$.

③ – بسبب التزايد التام للتابع g على $[0,\frac{\pi}{3}]$ نستنتج أنّ $g(x)>g(0)$ في حالة x من $]0,\frac{\pi}{3}]$، فليس للمعادلة $g(x)=0$ حلول في المجال $[0,\frac{\pi}{3}]$.

– على المجال $[\frac{\pi}{3},\pi]$ التابع g متناقص تماماً. ولأنّ $g(\frac{\pi}{3})>0$ و $g(\pi)<0$ استنتجنا أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلاً وحيداً في هذا المجال وليكن α.

مما سبق نستنتج أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلّاً وحيداً α في المجال $]0,\pi]$. ونتوثّق أنّ $\alpha\in]\frac{\pi}{2},2[$ لأنّ

$$g(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{4}>0 \text{ و } g(2)=\sin 2-1<0$$

33 ليكن f تابعاً مستمراً ومعرفاً على المجال $I=[0,1]$ ويحقق $f(x)\in I$، أياً يكن x من I.

نرمز بالرمز k إلى التابع المعرف على I وفق $k(x)=f(x)-x$. بتطبيق مبرهنة القيمة الوسطى على التابع k، أثبت وجود عدد حقيقي a من I يحقق $f(a)=a$.

الحل

استناداً إلى الفرض $0\le f(0)$ و $f(1)\le 1$ إذن

$$k(1)=f(1)-1\le 0\le f(0)=k(0)$$

التابع k تابعٌ مستمرٌ على المجال I، ونعلم في هذه الحالة أنّ $k(I)$ هي مجال ينتمي إليه العددان $k(0)$ و $k(1)$ فلابُدّ أن ينتمي إليه العدد 0 الذي يقع بينهما أي $0\in[k(1),k(0)]\subset k(I)$. إذن يوجد a من I يحقّق $k(a)=0$ أي $f(a)=a$.

34 مجموعة توابع مستمرة

ليكن m عدداً حقيقياً، وليكن C_m الخط البياني للتابع f_m المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f_m(x)=x^3+mx^2-8x-m$$

① .a أثبت أنّ الخطين البيانيين C_0 و C_1 يتقاطعان في نقطتين A و B. أوجد إحداثيات هاتين النقطتين.

.b استنتج أنّ جميع الخطوط البيانية C_m تمر بالنقطتين A و B.

② أوجد نهاية f_m عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

③ استنتج مما سبق أنَّ للمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثةَ حلول متمايزة في $\mathbb{R}$، أياً يكن العدد m.

الحل

① إذا كانت (α,β) نقطة مشتركة بين C_0 و C_1 وجب أنّ يكون $f_0(\alpha) = \beta$ و $f_1(\alpha) = \beta$ أي

$$\alpha^3 - 8\alpha = \beta$$
$$\alpha^3 + \alpha^2 - 8\alpha - 1 = \beta$$

بالطرح نجد $\alpha^2 = 1$ وبالتعويض في جملة المعادلتين نجد $\beta = -7\alpha$. ومنه نستنتج أنّ

$$(\alpha,\beta) = (1,-7) \quad \text{أو} \quad (\alpha,\beta) = (-1,7)$$

إذن يتقاطع C_0 و C_1 في النقطتين $A(1,-7)$ و $B(-1,7)$.

من ناحية أخرى نحسب $f_m(1) = -7$ فنستنتج أنّ $A \in C_m$ وكذلك $f_m(-1) = 7$ فنستنتج أنّ $B \in C_m$. إذن تمر جميع الخطوط البيانية C_m بالنقطتين A و B.

② نهاية f_m عند كل من $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدّه المسيطر إذن

$$\lim_{x\to\infty} f_m(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty$$

③ لما كان f_m كثير حدود من الدرجة الثالثة فللمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول على الأكثر. ولكن كل تابع مستمر يغير إشارته على مجال ينعدم بالضرورة على هذا المجال ومنه:

- لما كان $f_m(-1) = 7$ و $\lim_{x\to-\infty} f_m(x)=-\infty$ فللمعادلة $f_m(x) = 0$ حل x_1 ينتمي إلى $]-\infty,-1]$.
- لما كان $f_m(-1) = 7$ و $f_m(1) = -7$ فللمعادلة $f_m(x) = 0$ حل x_2 ينتمي إلى $]-1,1[$.
- لما كان $f_m(1) = -7$ و $\lim_{x\to\infty} f_m(x) = \infty$ فللمعادلة $f_m(x) = 0$ حل x_3 ينتمي إلى $]1,+\infty[$.

فللمعادلة $f_m(x) = 0$ ثلاثة حلول متمايزة في $\mathbb{R}$.

35 ليكن f تابعاً مستمراً واشتقاقياً على المجال $I = [0,1]$ ويحقق الشرطين:

- أياً كان x من I كان $f(x)$ من I.
- وأياً كان x من $]0,1[$ كان $f'(x) < 1$.

أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = x$ حلّاً وحيداً في I.

الحل

لنتأمّل التابع $k : I \to \mathbb{R}, k(x) = x - f(x)$ هذا تابع اشتقاقي ومشتقه $k'(x) = 1 - f'(x)$ موجبٌ تماماً على I. إذن k تابع متزايدٌ تماماً على I ولدينا $k(I) = [-f(0),1 - f(1)]$. ولكن

$$-f(0) \le 0 \le 1 - f(1)$$

إذن $0 \in k(I)$، فللمعادلة $k(x) = 0$ حلٌ وحلٌّ واحد فقط في I (بسبب الاطراد التام).

36 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{1+x^2}$. وليكن C خطه البياني في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

① أثبت أنَّ للخط C محور تناظر.

② ادرس نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

③ أثبت أنَّ $f(x)-x=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ ، أياً يكن x من $\mathbb{R}$. استنتج أنَّ C يقبل مقارباً مائلاً d في جوار $+\infty$. عيِّن الوضع النسبي للخط C ومقاربه d.

④ ليكن C' الخط البياني للتابع g المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=-f(x)$ ، وليكن $\mathcal{H}=C\cup C'$. أثبت أنَّ معادلة $\mathcal{H}$ هي $y^2-x^2=1$.

⑤ نعتمد معلماً جديداً $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ حيث $\vec{u}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$ و $\vec{v}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$. لتكن M نقطة إحداثياتها (x,y) في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ وإحداثياتها (X,Y) في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. أوجد x و y بدلالة X و Y . ارسم الخط $\mathcal{H}$ في المعلم $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

الحل

① f معرف على مجموعة متناظرة بالنسبة إلى المبدأ، وفي حالة عدد حقيقي x لدينا

$$f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=\sqrt{1+x^2}=f(x)$$

فالتابع f زوجي وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى محور الراتيب.

② $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

③ لما كان $f(x)-x=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ ، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$. وأياً كانت x من $\mathbb{R}$ كان $f(x)=\sqrt{1+x^2}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$ أو $f(x)-x>0$ ، فالخط C يقع دوماً فوق مقاربه d.

④ النقطة (x,y) تنتمي إلى $\mathcal{H}$ إذا وفقط إذا كان $y=f(x)$ أو $y=g(x)=-f(x)$. وهذا يكافئ قولنا إنّ $y^2=(f(x))^2=1+x^2$. أي $y^2-x^2=1$.

⑤ لدينا

$$\begin{aligned}x\vec{i}+y\vec{j}=\overrightarrow{OM}&=X\vec{u}+Y\vec{v}=X\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)+Y\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)\\&=\tfrac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)\vec{i}+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\vec{j}\end{aligned}$$

إذن $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ و $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$.

$(x,y)\in\mathcal{H}$ إذا وفقط إذا كان $y^2-x^2=1$ أي $(X+Y)^2-(X-Y)^2=2$ أو $XY=\frac{1}{2}$.

فالمنحني $\mathcal{H}$ هو الخط البياني للتابع $X\mapsto\dfrac{1}{2X}$ في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، ورسمه معروف للقارئ.

37 تابع القيمة المطلقة: تغيرات. حل معادلة

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$ وفق:

$$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$$

① .a اكتب $f(x)$ بصيغة لا تحوي قيمةً مطلقة. $\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$

.b ادرس نهاية f عند حدود مجالات D_f. ثمَّ أوجد $f'(x)$ وادرس إشارته على مجالات D_f.

② ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

③ .a تحقّق من أنَّ المستقيمين اللذين معادلتاهما $y = x+1$ و $y = -x-1$ هما، بالترتيب، مقاربان مائلان للخط البياني C عند $+\infty$ وعند $-\infty$. ادرس وضع C بالنسبة إلى هذين المقاربين.

.b أوجد معادلةً للمماس T للخط البياني C في النقطة A منه علماً أنَّ فاصلة A تساوي الصفر.

.c ارسم T ومقاربي C ثمَّ ارسم C.

④ أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّاً وحيداً α في المجال $]-1,1[$ وأوجد مجالاً طوله 10^{-1} تنتمي إليه α

الحل

① لمّا كان $|x+1| = x+1$ في حالة $x > -1$ و $|x+1| = -x-1$ في حالة $x < -1$ استنتجنا أنّ

$$f(x) = \begin{cases} -x-1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x < -1 \\ x+1+\dfrac{x}{x^2-1} & : x > -1, x \neq 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$$

ولدينا

$$f'(x)=\begin{cases}-1-\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & : x<-1\\ \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} & : x>-1, x\neq 1\end{cases}$$

إذن $f'(x)<0$ على $]1,\sqrt{3}[\cup]-1,1[\cup]-\infty,-1[$ و $f'(x)>0$ على $]\sqrt{3},+\infty[$.

② ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}+1$	$\nearrow$	$+\infty$

③ نتأمّل تابع الفرق g : $g(x)=f(x)-(x+1)$. في حالة $x\in]-1,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا

$$f(x)-(x+1)=\frac{x}{x^2-1}$$

ومن ثمّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x+1)\big)=0$. فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $+\infty$.

ويكون C فوق Δ على المجال $]1,+\infty[$ لأن $\dfrac{x}{x^2-1}>0$ على هذا المجال. ويكون C تحت Δ على المجال $]0,1[$ وفوقه على المجال $]-1,0[$ في حين يتقاطع مع C على هذا المجال عند $(0,0)$.

بقي أن ندرس الموقع النسبي للخط C بالنسبة إلى Δ على $]-\infty,-1[$. على هذا المجال كل من التابعين f و $x\mapsto -x-1$ متناقصٌ تماماً، إذن التابع $g:x\mapsto f(x)-(x+1)$ متناقصٌ تماماً على $]-\infty,-1[$ ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x)=-\infty$. إذن يوجد قيمة وحيدة γ من المجال $]-\infty,-1[$ ينعدم عندها التابع g. وبملاحظة أن $g(-\frac{8}{5})=\frac{34}{195}>0$ و $g(-\frac{3}{2})=-\frac{1}{5}<0$ نستنتج أنّ $-1.6<\gamma<-1.5$ و $-0.6<f(\gamma)<-0.5$. إذن

x	$-\infty$	γ	-1	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	
C	فوق Δ	تحت Δ	فوق Δ	تحت Δ	فوق Δ	

▪ وبالمثل نتأمّل تابع الفرق h : $h(x)=f(x)+(x+1)$. في حالة $x\in]-\infty,-1[$ لدينا

$$f(x)+(x+1)=\frac{x}{x^2-1}$$

ومن ثمّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)+(x+1)\big)=0$. فالمستقيم Δ' الذي معادلته $y=-x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني C للتابع f في جوار $-\infty$.

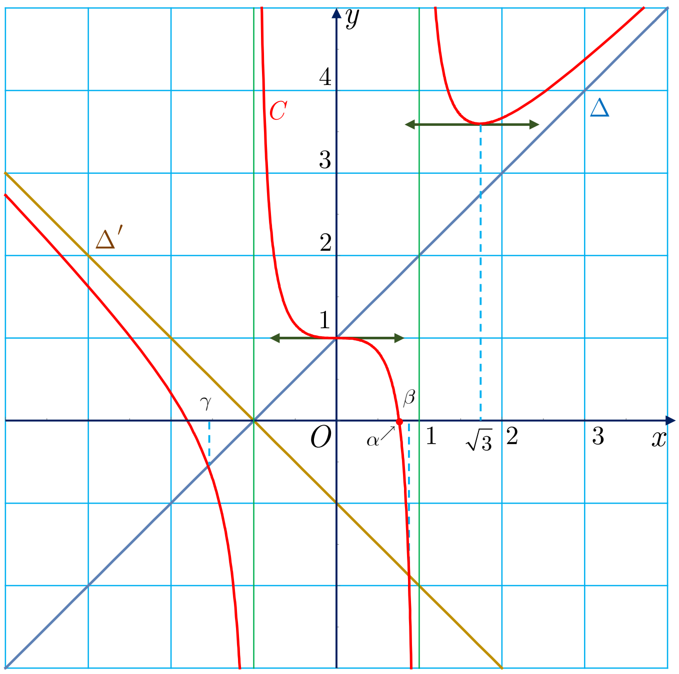
ويكون C تحت Δ' على المجال $]-\infty,-1[$ لأنّ $\frac{x}{x^2-1}<0$ على هذا المجال. ويكون C فوق Δ' على كل من المجالين $]-1,0[$ و $]1,+\infty[$ لأنّ $h(x)$ يساوي مجموع مقدارين موجبين هما $f(x)$ و $x+1$ على هذين المجالين. بقي أن ندرس الموقع النسبي للخط C بالنسبة إلى Δ' على $]0,1[$.
بدراسة بسيطة للتابع h على هذا المجال، نجد أنّه ينعدم مرة واحدة عند β تحقّق $0.8<\beta<0.9$ ومن ثَمّ $-1.8<f(\beta)<-1.9$.
إذن

x	$-\infty$	-1	0	β	1	$+\infty$
$h(x)$	$-$		$+$	$+$	$-$	$+$
C	تحت Δ' ‖		فوق Δ'		تحت Δ' ‖	فوق Δ'

ملاحظة. تُعدّ دراسة الموضع النسبي للخط C بالنسبة إلى المستقيمين Δ و Δ' مسألة مستقلة بحد ذاتها. لذلك، وما لم نكن نسعى إلى رسم دقيق جداً لهذا المنحني، يمكن الاكتفاء بدراسة الوضع النسبي للخط البياني بالنسبة إلى مقاربيه فقط في جوار $+\infty$ بالنسبة إلى Δ وفي جوار $-\infty$ بالنسبة إلى Δ'. ثُم نستنتج الخواص السابقة من الرسم.

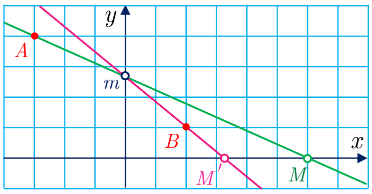
b. معادلة المماس في النقطة $A(0,1)$ هي $y=f(0)+f'(0)(x-0)=1$. فهو يوازي محور الفواصل.

c. الرسم.



④ f مستمر ومتناقص تماماً على $]-1,1[$ ويغير إشارته عليه فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى $]-1,1[$. ونلاحظ أنّ $f(\frac{3}{4})=\frac{1}{28}>0$ و $f(\frac{4}{5})=-\frac{19}{45}<0$, إذن $\alpha\in]\,0.75,0.8\,[$.

38 في معلمٍ متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$، لدينا النقطتان الثابتتان $A(-3,4)$ و $B(2,1)$ والنقطة المتحولة $M(x,0)$. نقرن بالنقطة M النقطة M' التي نعرفها كما يلي:



- يقطعُ المستقيمُ (AM) المحور $(O;\vec{j})$ في m.
- يقطعُ المستقيمُ (Bm) المحور $(O;\vec{i})$ في M'.

نرمزُ إلى فاصلة M' بالرمز $f(x)$.

① بدون حساب، خمِّنْ نهاية f عند $+\infty$.

② أثبت أنَّ $f(x)=\dfrac{8x}{3x-3}$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، ثمَّ استنتج نهاية f عند $+\infty$.

③ a.ادرس نهاية f عند $-\infty$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

b.ادرس نهاية f عند $x=1$. ما التأويل الهندسي لهذه النتيجة؟

④ عندما $x=-3$، يكون المستقيم (AM) موازياً $(O,\vec{j})$ وتكون m «في اللانهاية». يمكن أنْ نقول في هذه الحالة أنَّ (Bm) يوازي $(O,\vec{j})$ وأنَّ M' تقع في $(2,0)$. نعرِّف عندئذ التابع g وفق $g(x)=f(x)$ عندما تختلف x عن 1 وعن -3، و $g(-3)=2$. لماذا يكون g مستمراً عند -3؟

ملاحظة: نقول في هكذا حالة إننا مدَّدنا استمرار g ليشمل $x=-3$.

الحل

① عندما تسعى x إلى $+\infty$ يصبح المستقيم (AM) موازياً لمحور الفواصل فتنطبق m على $C(0,4)$، والمستقيم (CB) الذي معادلته $y=-\frac{3}{2}x+4$ يقطع محور الفواصل في النقطة $M'_{\infty}(\frac{8}{3},0)$. إذن نخمّن أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{8}{3}$,

② بافتراض أنّ إحداثيتا m هما $(0,b)$ يكون الشعاعان $\overrightarrow{Am}=\begin{bmatrix}3\\b-4\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{AM}=\begin{bmatrix}x+3\\0-4\end{bmatrix}$ مرتبطان خطياً ومنه نحسب $b=4+\dfrac{-12}{x+3}=\dfrac{4x}{x+3}$. وبالمثل إحداثيتا M' هما $(f(x),0)$ والشعاعان

$$\overrightarrow{Bm}=\begin{bmatrix}-2\\ \frac{3x-3}{x+3}\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BM'}=\begin{bmatrix}f(x)-2\\-1\end{bmatrix}$$

مرتبطان خطياً ومنه $f(x)=\dfrac{8x}{3x-3}$، و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{8}{3}$.

③ $.a$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{8}{3}$ ، عندما تسعى x إلى $-\infty$ يصبح المستقيم (AM) موازياً لمحور الفواصل، ومن الطبيعي أن تنطبق عندئذ M' على النقطة $M'_{\infty}(\frac{8}{3},0)$ التي عيّناها سابقاً.

$.b$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$. عندما تسعى x إلى 1 يصبح المستقيم (mB) موازياً لمحور الفواصل ولا يتقاطع معه، وكأنّ M' في اللانهاية.

④ إذن $g(x)=\dfrac{8x}{3(x-1)}$ في حالة $x\neq 1$. وهو مستمرٌ عند -3 .

3

التوابع : الاشتقاق

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- التذكرة بتعريف الاشتقاق، ومشتقات التوابع المألوفة.
- اشتقاق التوابع المركبة.
- تطبيقات الاشتقاق في دراسة التوابع وحلّ المعادلات.
- أمثلة على مشتقات من مراتب عليا.

تَدرَّبْ صفحة 84

① فيما يأتي C_f هو الخط البياني لتابع f. اكتب معادلةً لمماس C_f في النقطة A من C_f التي فاصلتها 4.

❶ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ❷ $f(x)=x^2$

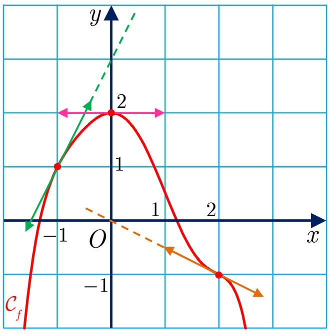
❸ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ❹ $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

الحل

معادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 4 هي $y=f(4)+f'(4)(x-4)$ ومنه

❶ $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}x$ ❷ $y=-16+8x$

❸ $y=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}x$ ❹ $y=\frac{9}{25}-\frac{x}{25}$



② في الشكل المرافق، C_f هو الخط البياني لتابعٍ f. تأمّل الشكل وأجب عن الأسئلة الآتية :

❶ عيّن ما كلاً من $f(0)$ و $f(2)$ و $f(-1)$ و $f'(0)$ و $f'(2)$ و $f'(-1)$.

❷ ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟ أعطِ عددين صحيحين متتاليين يحصران كلاً من حلول المعادلة $f(x)=0$.

الحل

❶

a	-1	0	2
$f'(a)$	2	0	$-\frac{1}{2}$
$f(a)$	1	2	-1

❷ للمعادلة $f(x)=0$ حلّان، أحدهما في المجال $[-2,-1]$ والآخر في المجال $[1,2]$.

③ فيما يأتي، احسب التابع المشتق للتابع f مبيّناً المجموعة التي تحسب المشتق عليها.

1. $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
2. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{4}$
3. $f(x)=x^4-2x\sqrt{x}$
4. $f(x)=\dfrac{2}{x+1}-x$
5. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$
6. $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
7. $f(x)=x\cos x$
8. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$
9. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$
10. $f(x)=\sin x\cos x$
11. $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x-1}$
12. $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{2+\cos x}$

الحل

1. على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=2x^2-x+1$.
2. على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$.

■3 على $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x) = 4x^3 - 3\sqrt{x}$. وإذا كتب الطالب $[0,+\infty[$ بدلاً من $]0,+\infty[$ فهذا صحيح أيضاً ولا يطلب تعليله، فقد جرت دراسته في مثال سابق.

■4 على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ لدينا $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2} - 1$.

■5 على $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$ لدينا $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x-4}{(x^2-4)^2}$.

■6 على $]0,+\infty[$ لدينا $f'(x) = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}$.

■7 على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = \cos x - x\sin x$.

■8 على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ لدينا $f'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

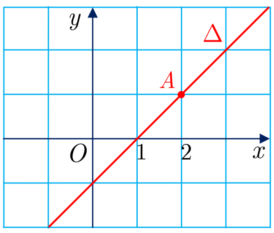
■9 على أي مجال لا يحوي مضاعفاً فردياً للعدد $\frac{\pi}{2}$ لدينا $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

■10 على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

■11 على أي مجال لا يحوي عدداً من الصيغة $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, (k \in \mathbb{Z})$ لدينا $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x - 1}$.

■12 على $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x) = \dfrac{\sin x + 2\cos x + 1}{(\cos x + 2)^2}$.

تَدرَّبْ صفحة 87



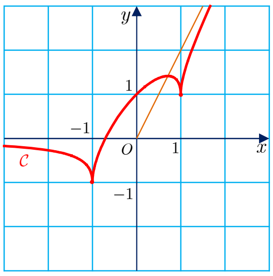
① ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $[-2,4]$ وفق $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$. عيّن a و b علماً أنَّ المستقيم Δ المرسوم في الشكل المجاور مماسٌ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A . تحقّق أنَّ التابع الذي وجدته ينسجم مع مضمون النص.

الحل

$\mathcal{C}$ يمرّ بالنقطة $A(2,1)$ إذن $f(2) = 1$. وميل المماس في A هو $f'(2)$ وهو يساوي ميل المستقيم Δ أي $f'(2) = 1$. ولكن $f'(x) = \dfrac{-ax^2 + a - 2bx}{(x^2+1)^2}$ إذن من $f(2) = 1$ و $f'(2) = 1$ نستنتج أنّ

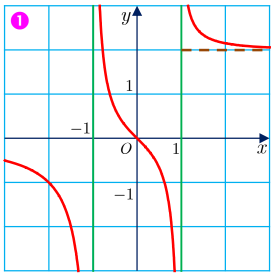
$$\tfrac{1}{5}(2a+b) = 1$$
$$\tfrac{1}{25}(-3a-4b) = 1$$

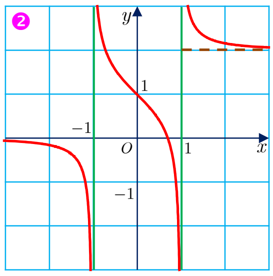
وبالحل المشترك نجد $a = 9$ و $b = -13$. ونتحقّق بسهولة أنّ A تقع على الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع $x \mapsto \dfrac{9x-13}{x^2+1}$ وأنّ Δ الذي معادلته $y = x - 1$ مماس للخط $\mathcal{C}$.

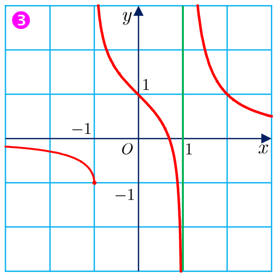


② في الشكل المجاور، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f معرفٍ على $\mathbb{R}$ واشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

أيُّ الخطوط البيانية المرسومة في الأشكال الآتية يمكن أن يمثّل الخط البياني للتابع المشتق f'؟







الحل

في الشكل ❶ الخط البياني للتابع المرسوم يمر بالمبدأ. فلو كان مساوياً لمشتق f لوجب أن يكون المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $(0,1)$ أفقياً وهذا خُلفٌ. إذن لا يمكن أن يمثل ❶ الخط البياني للتابع f'.

في الشكل ❸ الخط البياني للتابع المرسوم يقترب من -1 عندما تسعى x إلى $(-1)^-$. فلو كان مساوياً لمشتق f لوجب أن يكون ميل المماس من اليسار للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $(-1,-1)$ مساوياً -1 وهذا خُلفٌ أيضاً لأنّ $\mathcal{C}$ له مماس شاقولي في هذه النقطة. وكذلك نلاحظ أنّ المماس للخط $\mathcal{C}$ عندما تسعى x إلى اللانهاية يصبح موازياً للمقارب الذي ميله 2، وهذا يوحي بأنّ للخط البياني للمشتق f' مقارب أفقي معادلته $y = 2$. إذن في جميع الأحوال لا يمكن أن يمثل ❸ الخط البياني للتابع f'.

إذن الشكل ❷ هو الخط البياني للتابع f'.

③ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - x^2 + ax$. عيّن العدد الحقيقيّ a ليكون للتابع f قيمة حدية محلياً عند $x = 1$.

الحل

يجب أن يكون $f'(1) = 0$ ومنه $a = -1$.

④ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{x - 1}$، حيث a و b عددان حقيقيّان. نهدف إلى البحث عن قيم a و b بحيث يتحقّق الشرطان الآتيان:

- $f(-1)$ قيمة حديّة محلياً للتابع.
- هذه القيمة الحدية محلياً معدومة.

❶ لماذا $f'(-1) = 0$ و $f(-1) = 0$؟

❷ عيّن a و b، ثمَّ تحقق أنَّ التابع الذي حصلت عليه موافق لشروط المسألة.

الحل

❶ • $f(-1)$ قيمة حديّة محلياً للتابع، إذن $f'(-1) = 0$.

• هذه القيمة الحدية محلياً معدومة، إذن $f(-1) = 0$.

❷ ولكن $f'(x) = a - \dfrac{a+b+1}{(x-1)^2}$ إذن من $f(-1) = 0$ و $f'(-1) = 0$ نستنتج أنّ

$$\frac{1}{2}(-a+b-1) = 0$$
$$\frac{1}{4}(3a-b-1) = 0$$

وبالحل المشترك نجد $a = 1$ و $b = 2$. وفي هذه الحالة يكون $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$ وهو ينعدم هو ومشتقه عند $x = -1$.

⑤ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - 3x + 5$.

❶ ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

❷ تحقق أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ جذراً وحيداً يقع بين -3 و -2 . احصر هذا الجذر في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1} .

الحل

❶ هنا $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. ولدينا $f'(x) = 3(x^2-1)$ ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

❷ على المجال $]-1,+\infty[$ الحد الأدنى للتابع f يساوي 3، فليس للمعادلة $f(x) = 0$ حل على المجال $]-1,+\infty[$.

والتابع f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $]-\infty,-1[$ ويحقّق $f(]-\infty,-1[) =]-\infty,7[$. ولأنّ $0 < 7$ استنتجنا أنّه يوجد حلّ وحلٌّ واحد فقط α للمعادلة $f(x) = 0$ ينتمي إلى المجال $]-\infty,-1[$. فإذا استفدنا من النقطة السابقة استنتجنا أنّ α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في $\mathbb{R}$.

وعلاوة على ذلك، نرى أنّ $f(-2) = 3$ و $f(-3) = -13$ ، إذن $\alpha \in [-3,-2]$. وأخيراً بملاحظة أنّ $f(-2.2) = 0.952 > 0$ و $f(-2.3) = -0.267 < 0$ نرى أنّ $-2.3 < \alpha < -2.2$.

تَدرَّبْ صفحة 94

① في التمرينات الآتية، احسب مشتق f على المجموعة D المشار إليها في كل حالة.

❶ $f(x) = (2x^3 - 1)^5$, $D = \mathbb{R}$,

❷ $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^3$, $D = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$,

❸ $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$, $D = \mathbb{R}$,

❹ $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$, $D = \mathbb{R}$,

❺ $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $D = \mathbb{R}$,

❻ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-2}}$, $D = \mathbb{R}\backslash[-1,2]$,

❼ $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $D = [0,\frac{\pi}{2}[$,

❽ $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$, $D = [0,\frac{\pi}{2}[$,

❾ $f(x) = \tan(3x)$, $D = [0,\frac{\pi}{6}[$,

❿ $f(x) = \tan^2 x$, $D = [0,\frac{\pi}{2}[$,

الحل

❶ $f'(x) = 30x^2(1-2x^3)^4$

❷ $f'(x) = \dfrac{3(x+1)^2}{(x+2)^4}$

❸ $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{6}(3x+\pi)\right)$

❹ $f'(x) = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

❺ $f'(x) = \dfrac{1-x}{2(x^2+x+1)^{3/2}}$

❻ $f'(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{(x-2)^3(x+1)}}$

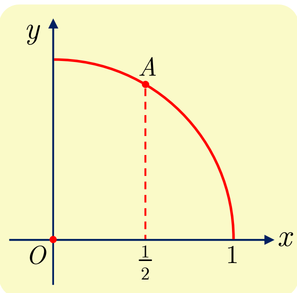
❼ $f'(x) = -\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

❽ $f'(x) = \dfrac{(\sin x)(3-\cos^2 x)}{\cos^4 x}$

❾ $f'(x) = 3(1+\tan^2(3x))$

❿ $f'(x) = 2(\tan x + \tan^3 x)$

② في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $x^2+y^2=1$ هي معادلةٌ للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 1. وعليه فإنّ ربع الدائرة C المرسوم في الشكل المرافق، هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.



❶ احسب $f'(x)$ على المجال $[0,1[$.

❷ استنتج معادلةً للمماس T للدائرة C في النقطة A التي تساوي فاصلتها $\dfrac{1}{2}$.

❸ تحقَّق أنَّ المستقيم (OA) والمماس T متعامدان.

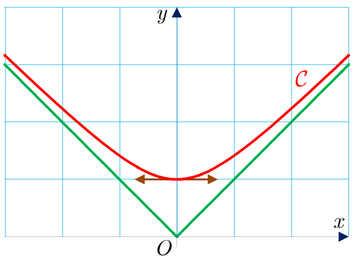
الحل

❶ $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

❷ $f'(\frac{1}{2})=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ إذن معادلة المماس T في $A(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ هي $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$. وميله $m=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

❷ معادلة (OA) $y=\sqrt{3}\,x$ وميله $m'=\sqrt{3}$. ونرى أنّ $mm'=-1$ إذن $T\perp(OA)$.

③ في الشكل المرافق نجد الخط البياني C للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.



❶ تحققْ أنَّ f تابعٌ زوجي.

❷ احسب نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

❸ علّل كون المستقيم الذي معادلته $y=x$ مقارباً مائلاً للخط البياني C في جوار $+\infty$؟

❹ ادرس تغيرات f . هل من توافق بين نتائج الدراسة والنتائج التي تستخلصها من الخط البياني؟

الحل

❶ التابع معرّف على $\mathbb{R}$ فالشرط الأوّل محقّق حكماً. وكذلك فإنّ

$$f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$$

إذن f تابعٌ زوجي.

❷ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

❸ لنضع $g(x)=f(x)-x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ وأنّ $g(x)>0$ أياً كانت قيمة x . إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للخط البياني C . والخط C يقع دوماً فوق Δ .

❹ لمّا كان $x\mapsto x^2$ متناقصاً تماماً على $\mathbb{R}_-$ ومتزايداً تماماً على $\mathbb{R}_+$ ، والتابع $x\mapsto\sqrt{x+1}$ متزايد تماماً استنتجنا أن تركيب هذين التابعين f متناقص تماماً على $\mathbb{R}_-$ ومتزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$ ، ومنه جدول تغيرات f الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ونلاحظ انسجام هذه النتائج مع الخط البياني المرسوم للتابع f .

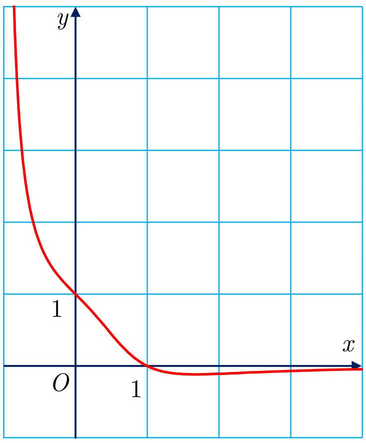
أنشطة

نشاط 1 دراسة تابع، التوابع المُساعدة

❶ دراسة تابع

في الحالة العامة، المقصود بدراسة تابع f هو تعيين مجموعة تعريفه D_f، وحساب نهاياته عند أطراف المجالات المكوّنة لمجموعة تعريفه والبحث عن مقاربات خطه البياني C_f، ودراسة تغيراته، وأخيراً رسم خطه البياني. وأحياناً، نكتشف بسهولة أنَّ f زوجي، أو فردي، أو دوري، مما يفيد في جعل دراسة التابع تقتصر على مجموعة جزئية من D_f ثُمّ تُمدّد الدراسة إلى كامل D_f مستفيدين من طبيعة الخاصة التي يتمتع بها التابع.

❷ دراسة تابع كسري



لنتأمّل التابع الكسري f المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق الصيغة $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$. لقد رسمنا باستعمال برنامج متخصص الخط البياني C للتابع f في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ستسمح الدراسة الآتية بتعرّف صفات f ومن ثَمَّ توضيح كيفية الوصول إلى رسم خطه البياني C دون استعمال أي برنامج وخصوصاً سير الخط البياني على المجال $[0,1]$. في الحقيقة، لا يعطي الخط المرسوم باستعمال الحاسوب دائماً، جميع المعلومات المتعلقة بالتابع، لكنّه يزودنا بتصور مفيد جداً عن تلك المعلومات.

① احسب $f'(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$ وتحقّق أنَّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $2x^3-3x^2-1$.

في حالة تعذر تعيين إشارة $f'(x)$ جبرياً، ندرس تغيراتِ تابعٍ مساعدٍ g نستنتج منه الإشارة المطلوبة.

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $]-1,+\infty[$ وفق $g(x)=2x^3-3x^2-1$.

a. ادرس تغيرات g.

b. أثبت أنَّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α على $]-1,+\infty[$، وأنَّ α ينتمي إلى المجال $[1.6,1.7]$.

c. استنتج إشارة $g(x)$.

③ بالاستفادة من النتائج السابقة، نظّمْ جدولاً بتغيرات f.

④ اكتب معادلةً للمماس Δ للخط البياني C في النقطة A منه التي تساوي فاصلتُها 0. وادرس الوضع النسبي للخط C ومماسه Δ على المجال $]-1,1]$.

⑤ أثبت أنَّ الخط C يقع فوق المستقيم d مماسه في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

⑥ ارسم Δ و d ثمَّ ارسم C.

الحل

① لدينا $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(x^3+1)^2}$، إذن إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $2x^3 - 3x^2 - 1$.

② a. لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ و $g(-1) = -6$. وكذلك فإنّ $g'(x) = 6x(x-1)$ إذن للتابع g جدول التغيرات الآتي:

x	-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-6	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

b. نستنتج من الجدول أنّ $g(]-1,1]) =]-6,-1]$ فالتابع g لا ينعدم على $]-1,1]$. أمّا على $[1,+\infty[$ فالتابع g تابعٌ مستمرٌ ومطردٌ تماماً ويحقّق $g([1,+\infty[) = [-2,+\infty[$. إذن للمعادلة $g(x)=0$ حلٌ واحد α في المجال $[1,+\infty[$. ولمّا كان g لا ينعدم على $]-1,1]$، استنتجنا أنّ α هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ في المجال $]-1,+\infty[$. وعلاوة على ذلك، انطلاقاً من الصيغة $g(x) = (2x-3)x^2 - 1$، نحسب:

$$g(1.6) = 0.2 \times 2.56 - 1 = 0.512 - 1 < 0$$
$$g(1.7) = 0.4 \times 2.89 - 1 = 1.156 - 1 > 0$$

إذن $1.6 < \alpha < 1.7$.

c. نستنتج من الدراسة السابقة أنّ $g<0$ على $]-1,\alpha[$ و $g>0$ على $]\alpha,+\infty[$.

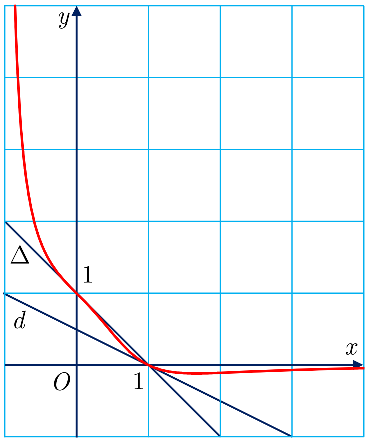
③ لمّا كان $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$ استنتجنا أنّ المستقيم الذي معادلته $x=-1$ مقارب شاقولي للخط البياني C. وكذلك فإنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$، إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط البياني C في جوار $+\infty$. واستناداً إلى دراسة إشارة المشتق التي أنجزناها سابقاً يمكن أن نكتب جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0

حيث $f(\alpha) \approx -0.12$ استناداً إلى القيمة التقريبية التي حسبناها للعدد α.

④ لما كان $f(0)=1$ و $f'(0)=-1$ استنتجنا أنّ $y=1-x$ هي معادلة للمماس Δ للخط البياني C في النقطة A منه التي تساوي فاصلتُها 0. وفوق ذلك نرى أنّ

$$f(x)-(1-x)=-\frac{x^3(1-x)}{x^3+1}=\frac{x^2}{x^3+1}\cdot x(x-1)$$



إذن تتفق إشارة $f(x)-(1-x)$ مع إشارة $x(x-1)$ على $]-1,1]$، إذن يقع C فوق Δ على $]-1,0[$، وتحته على $]0,1[$، وهو يتقاطع معه مجدداً في النقطة $(1,0)$.

⑤ لدينا $f(1)=0$ و $f'(1)=-\frac{1}{2}$ إذن $y=\frac{1}{2}(1-x)$ هي معادلة للمماس d للخط البياني C في النقطة التي فاصلتُها 1.

وعلاوة على ذلك نرى أنّ

$$f(x)-\frac{1}{2}(1-x)=\frac{(1-x)^2(1+x+x^2)}{2(x^3+1)}$$

إذن إشارة $f(x)-\frac{1}{2}(1-x)$ موجبة على $]-1,+\infty[$، والخط C يقع فوق d على $]-1,+\infty[$.

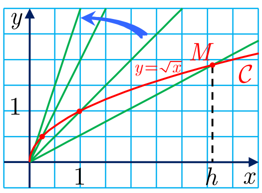
نشاط 2 مماس شاقولي

❶ الحالة العامة

لنتأمّل تابعاً f مستمراً عند نقطةٍ a تنتمي إلى أحد مجالات D_f. إذا كان

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$

قَبِلَ الخط البياني C_f للتابع f، في معلمٍ متجانس مماساً شاقولياً في النقطة $A(a,f(a))$. هندسياً، يفسَّرُ الشرطان « f مستمر عند a و $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$ » بأنَّ ميل القاطع للخط C_f في النقطة $A(a,f(a))$ يسعى إلى $+\infty$ (أو $-\infty$)، أي إنَّ القاطع يسعى إلى المستقيم الذي معادلته $x=a$.



❷ حالة التابع $f:x\mapsto\sqrt{x}$

تعلم أنَّ f مستمرٌ عند الصفر، لكنه غير اشتقاقي عند الصفر. أثبت أنَّ محور التراتيب مماس لخطه البياني في مبدأ المعلم.

❸ دراسة التابع $f:x\mapsto x\sqrt{x(2-x)}$

① a. تحقّق أنَّ f معرف على المجال $[0,2]$.

b. أثبت أنَّ f اشتقاقي على $]0,2[$ واحسب $f'(x)$ على هذا المجال.

② ما نهاية $\frac{f(x)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ استنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر.

③ ما نهاية $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ عندما تسعى x إلى 2؟ هل f اشتقاقي عند $x=2$؟

④ نرمز إلى الخط البياني للتابع f، في معلم متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$، بالرمز $\mathcal{C}$.

a. ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

b. عيّن مماسَي $\mathcal{C}$ في النقطتين $A(0,0)$ و $B(2,0)$.

c. ارسم مماسي $\mathcal{C}$ في A و B ثمَّ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

❷ هذا صحيح لأنّ $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}$ ومن ثمّ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = +\infty$.

❸ ① a. f معرف على المجال $[0,2]$ لأنّ $x(2-x)$ موجب على هذا المجال.

b. على $]0,2[$ التابع $u: x\mapsto x(2-x)$ تابع اشتقاقي وموجب تماماً إذن $x\mapsto\sqrt{u(x)}$ أيضاً اشتقاقي على $]0,2[$، وكذلك يكون $x\mapsto x\sqrt{u(x)}$، وفي حالة x من $]0,2[$:

$$f'(x) = \sqrt{u(x)} + x\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{3x-2x^2}{\sqrt{x(2-x)}}$$

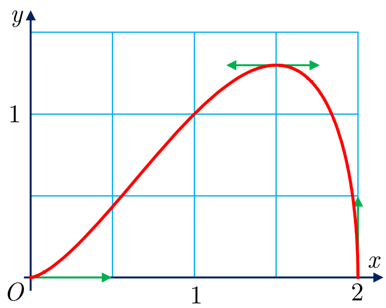
② في حالة x من $]0,2[$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sqrt{x(2-x)}$، إذن $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$. فالتابع f اشتقاقي عند 0 و $f'(0)=0$

③ في حالة x من $]0,2[$ لدينا $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -x\sqrt{\frac{x}{2-x}}$، إذن $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = -\infty$.

فالتابع f ليس اشتقاقياً عند 2 ولكن يقبل خطّه البياني مماساً شاقولياً عند 2.

④ a. جدول تغيرات f هو

x	0		$\frac{3}{2}$		2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0



④ b. مماس $\mathcal{C}$ في $A(0,0)$ هو محور الفواصل، ومماس $\mathcal{C}$ في $B(0,2)$ هو المستقيم الذي معادلته $x=2$.

④ c. الرسم مبينٌ في الشكل المجاور.

نشاط 3 دراسة تابع مثلثاتي

❶ كيف ندرس تابعاً مثلثاتيّاً ؟

تذكَّر

- التابعان sin و cos دوريان ويساوي الدورُ الأصغر لكل منهما 2π. لأنَّ:

$$\sin(x+2\pi)=\sin x \quad \text{و} \quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

- التابع tan دوري ويساوي دوره الأصغر π. لأنَّ:

$$\tan(x+\pi)=\tan x \quad \text{حيث} \quad x\neq \tfrac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{و} \quad k\in\mathbb{Z}$$

- التابعان $x\mapsto \sin(ax+b)$ و $x\mapsto \cos(ax+b)$ والدورُ الأصغر لكل منهما هو $\dfrac{2\pi}{|a|}$.

غالباً، ما تفيد الصفات الخاصة بالتوابع المثلثاتيّة في استنتاج مجال دراسة تابعٍ f معرّف على D_f:

- إذا كان T دوراً للتابع f، كان T موجباً تماماً، وأياً كان العدد الحقيقي x،
  إذا كان $x\in D_f$ كان $x+T\in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$
  في هذه الحالة يمكن أن ندرس التابع على مجالٍ طوله T.
- إذا كان f زوجياً أو فردياً، يكفي أن ندرسه على $\left[0,\frac{T}{2}\right]\cap D_f$، ثمّ:
  - إذا كان f زوجياً، أعطى التناظر المحوري بالنسبة إلى محور التراتيب الخط البياني على $\left[-\frac{T}{2},0\right]\cap D_f$.
  - وإذا كان f فردياً، أعطى التناظر بالنسبة إلى المبدأ O الخط البياني على $\left[-\frac{T}{2},0\right]\cap D_f$.
- بعدئذ، يسمح الانسحابان اللذان شعاعاهما $T\vec{i}$ و $-T\vec{i}$ بالحصول على الخط البياني على مجالات أخرى.

وخلاف ذلك، تجري دراسة التوابع المثلثاتيّة بمثل دراسة التوابع الأخرى.

❷ دراسة التابع $x\mapsto 2\sin x+\sin 2x$

لنتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2\sin x+\sin 2x$.

① تحقّق أنَّ f دوريٌّ وأنَّ 2π دورٌ له. ادرس الصفة الزوجية أو الفردية للتابع f. استنتج إمكانية دراسة f على المجال $[0,\pi]$.

② أثبت أنّه، في حالة عدد حقيقي x لدينا $f'(x)=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$.

③ ادرس تغيرات f على المجال $[0,\pi]$.

مساعدة: ستحتاج إلى حل المتراجحة $\cos x>\frac{1}{2}$. لهذا، يمكن استعمال الدائرة المثلثاتيّة، أو الخط البياني للتابع $x\mapsto \cos x$ على المجال $[0,\pi]$. وكذا الأمر عند دراسة إشارة $\cos x+1$.

④ ارسم الخط البياني للتابع f على المجال $[0,\pi]$، ثمَّ على المجال $[-2\pi,2\pi]$.

الحل

نتأمّل التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$.

① التابع معرّف على كامل $\mathbb{R}$، ونلاحظ أنّه مهما كانت x كان

$$f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + \sin(2x+4\pi) = 2\sin x + \sin 2x = f(x)$$

فالتابع f تابع دوري ويقبل العدد 2π دوراً. فتكفي مثلاً دراسته على المجال $[-\pi, \pi]$. ولدينا أيضاً

$$f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin x - \sin 2x = -f(x)$$

وذلك مهما كانت قيمة x، إذن f تابعٌ فردي. فتكفي دراسته على المجال $[0, \pi]$.

② من ناحية أخرى لدينا

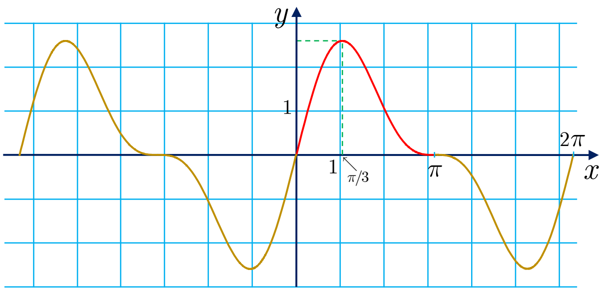
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\cos x + 2\cos 2x = 2(2\cos^2 x + \cos x - 1) \\ &= 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1) \end{aligned}$$

إنّ $1 + \cos x \geq 0$ دوماً إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $(2\cos x - 1)$، وعلى المجال $[0, \pi]$، للمعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ حل وحيد هو $x = \frac{\pi}{3}$.

③ إذن للتابع جدول التغيرات الآتي على المجال $[0, \pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

④ الرسم.



نشاط 4 نهايات ومشتقات

❶ المبدأ

ليكن g تابعاً ما، وليكن f تابعاً يحقق عند كل x من مجال مفتوح يحوي a و $x \neq a$ العلاقة

$$f(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

ثمّ لنفترض إضافةً إلى ذلك أنَّ التابع g اشتقاقي عند a، عندئذ يقبلُ f نهايةً عند a ويكون $\lim_{x \to a} f(x) = g'(a)$.

إذن، لإزالة حالة عدم التعيين من الصيغة « $\frac{0}{0}$ » لتابعٍ f عند نقطةٍ a، يمكن أن نحاول كتابة f بالشكل $f(x)=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ حيث g اشتقاقي عند a. عندئذ يكون $\lim\limits_{x\to a} f(x)=g'(a)$.

❷ تطبيقات

① ليكن f التابع المعرف بالعلاقة $f(x)=\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$. يقودنا البحث عن نهاية f عند الصفر إلى إحدى صيغ عدم التعيين. ضعْ $g(x)=\sqrt{x+4}$ لكي تتمكن من حساب نهاية f عند الصفر. ثُمّ احسب هذه النهاية.

② ننوي دراسة نهاية التابع $f: x\mapsto \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$ عند $\frac{\pi}{2}$.

a. تحقّق أنَّ الحساب المباشر يقود إلى صيغة عدم تعيين.

b. لاحظ أنَّ $\cos\frac{\pi}{2}=0$، واستنتج أنَّ نهاية f عند $\frac{\pi}{2}$ تساوي العدد المشتق للتابع $x\mapsto\cos x$ عند $\frac{\pi}{2}$، ماذا تساوي هذه النهاية؟

③ ادرس، في كلٍّ من الحالتين الآتيتين، نهاية التابع f في النقطة التي يشار إليها.

a. $f(x)=\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$ عند $x=\frac{\pi}{4}$.

b. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ عند $x=1$.

الحل

❷ ① بوضع $g(x)=\sqrt{x+4}$ نلاحظ أنّ $f(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x}$. ولكنّ التابع g اشتقاقي على $]-4,+\infty[$ ومشتقه $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$، وبوجه خاص $g'(0)=\frac{1}{4}$ إذن نستنتج من كون

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)=\frac{1}{4}$$

أنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{4}$.

❷ ② هنا أيضاً $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\cos(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}=\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

❷ ③ هنا نجد بسهولة أنّ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\tan'(\frac{\pi}{4})=1+\tan^2(\frac{\pi}{4})=2$

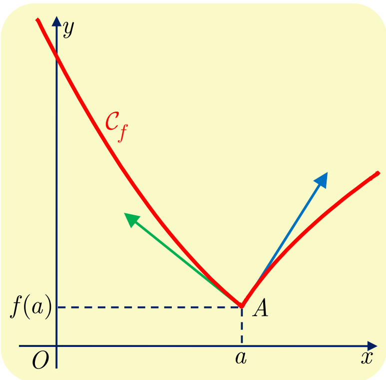
وبوضع $g(x)=\sqrt{x^2+1}$ نجد $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

نشاط 5 الاشتقاق من اليمين ومن اليسار

❶ حالة عامة: تعريف نصف المماس

عندما يكون التابع f مستمراً على مجالٍ يحوي a، ويقبلُ التابع $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ نهايةً ℓ من اليمين عند a، نقول عندئذ إنَّ التابع f **اشتقاقيٌ من اليمين** عند a، ونسمي ℓ العدد المشتق من اليمين للتابع f في a، ونرمز إليه بالرمز $f'(a^+)$. نعرِّف بأسلوب مماثل **الاشتقاق من اليسار** عند a ونرمز إلى العدد المشتق من اليسار بالرمز $f'(a^-)$ في حال وجوده.

في حال وجود $f'(a^+)$ و $f'(a^-)$ نقول إنّ الخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f يقبل في النقطة $A(a,f(a))$ نصف مماس من اليمين ونصف مماس من اليسار. ويكون $f'(a^+)$ ميلَ نصف المماس من اليمين، و $f'(a^-)$ ميلَ نصف المماس من اليسار.



❷ دراسة مثال

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{x+2}{|x|+1}$.

① ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليمين، ثمَّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليمين لخطه البياني C_f في النقطة $A(0,2)$.

② ادرس قابلية اشتقاق f عند الصفر من اليسار، ثمَّ اكتب معادلةً لنصف المماس من اليسار لخطه البياني في النقطة $A(0,2)$.

③ ارسم نصفي المماسين السابقين وارسم C_f على المجال $[-2,2]$.

الحل

❷ ① في حالة $x>0$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{x+2}{x+1}-2\right)=\frac{-1}{x+1}$، إذن

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$$

ومعادلة نصف المماس من اليمين للخط البياني هي $y=2-x$.

❷ ② في حالة $x<0$ لدينا $\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{x+2}{-x+1}-2\right)=\frac{3}{1-x}$، إذن

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=3$$

ومعادلة نصف المماس من اليسار للخط البياني هي $y=2+3x$.

❷ ③ بملاحظة أنّ

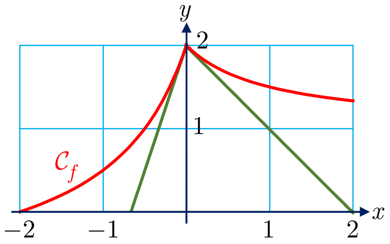
$$f(x)=\begin{cases}\frac{2+x}{1+x} & : \quad x\geq 0\\ \frac{2+x}{1-x} & : \quad x\leq 0\end{cases}$$

نستنتج أنّ

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-1}{(1+x)^2} & : \quad x>0\\ \frac{3}{(1-x)^2} & : \quad x<0\end{cases}$$

ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[-2,2]$:

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	$3 \| -1$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{4}{3}$



نشاط 6 تأطير (حصر) توابع مثلثاتية

❶ تمهيد

لنتأمّل تابعين f و g معرفين واشتقاقيين على المجال $D=[0,+\infty[$. ولنفترض أنّ $f'(x)\leq g'(x)$ أياً يكن x من D .

بدراسة التابع h المعرف على D وفق $h(x)=f(x)-f(0)-g(x)+g(0)$ أثبت أنَّ:

$$f(x)-f(0)\leq g(x)-g(0) \qquad (*)$$

❷ حصر $\sin x$ و $\cos x$.

① .a أثبت أنَّ $\sin x\leq x$ ، أياً يكن $x\geq 0$.

.b باختيار $f(x)=-\cos x$ ، و $g(x)=\frac{x^2}{2}$ برهن مستفيداً من التمهيد أنّه في حالة $x\in\mathbb{R}$

$$1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x\leq 1 \qquad (\Delta)$$

② .a أثبت أنَّ $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$ ، أياً يكن $x\geq 0$.

.b وأنَّ $1-\frac{x^2}{2}\leq \cos x\leq 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ ، أياً يكن $x\in\mathbb{R}$.

.c وأخيراً بين أنّ $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ ، أياً يكن $x\geq 0$.

❸ تطبيقات

① استنتج مما سبق أنَّ العدد $1-\frac{x^2}{2}$ تقريبٌ للعدد $\cos x$ بخطأ لا يتجاوز $\frac{x^4}{24}$. ما الخطأ الذي نرتكبه عندما نكتب $\cos(0.1)=0.995$ ؟

② احسب نهاية $\dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

③ احسب نهاية $\dfrac{x - \sin x}{x^3}$ عندما يسعى المتحول x إلى الصفر.

الحل

❶ نلاحظ أنّ $h'(x) = f'(x) - g'(x) \leq 0$ على $D = [0, +\infty[$، فالتابع h متناقص على D. ولكن $h(0) = 0$، إذن $h(x) \leq h(0) = 0$ أياً كانت x من D. وهذا يبرهن المتراجحة المطلوبة.

❷ حصر $\sin x$ و $\cos x$.

① a. بتطبيق التمهيد على $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ نستنتج من كون $\cos x \leq 1$ أنّ $\sin x \leq x$ في حالة $x \geq 0$.

① b. بتطبيق التمهيد على $f(x) = -\cos x$ و $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$ نستنتج من كون $\sin x \leq x$ على D أنّ $1 - \cos x \leq \dfrac{x^2}{2}$ في حالة $x \geq 0$. ولكنّ طرفي هذه المتراجحة زوجيان، إذن تتحقّق المتراجحة (Δ) على $\mathbb{R}$.

② a. بتطبيق التمهيد على $f(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$ و $g(x) = \sin x$ نستنتج من كون $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$ على D أنّ $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x$ في حالة $x \geq 0$، ولقد أثبتنا في ① a. أنّ $\sin x \leq x$ في هذه الحالة أيضاً وهذا يبرهن المتراجحة المطلوبة.

② b. نستنتج من ② a. أنّ $-\sin x \leq -x + \dfrac{x^3}{6}$ على D. إذن بتطبيق التمهيد على $f(x) = \cos x$ و $g(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ نستنتج أنّ $\cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ على D. أمّا المتراجحة الأخرى فتنتج من (Δ). وبسبب كون طرفي المتراجحة زوجيان، نستنتج أنها تبقى صحيحة على $\mathbb{R}$.

② c. أصبح الأمر سهلاً. نطبّق التمهيد على $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$ مستفيدين من نتيجة ② b.

❸ تطبيقات

① هذا لأنّ $\dfrac{x^4}{24} \geq \left|1 - \dfrac{x^2}{2}\right| - \cos x \geq 0$.

ففي حالة $x = 0.1$ يكون لدينا $0 \leq \cos(0.1) - 0.995 \leq 4.167 \times 10^{-6}$. في حين تعطي الآلة الحاسبة: $\cos(0.1) - 0.995 \approx 4.165 \times 10^{-6}$.

② بالاستفادة من ② b. لدينا في حالة $x \neq 0$ المتراجحة $\frac{x^2}{24} + \frac{1}{2} - \leq \frac{\cos x - 1}{x^2} \leq \frac{1}{2}-$،

وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة، نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أنّ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

③ في حالة $x > 0$ نستنتج من ② c. أنّ

$$\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$$

وبتطبيق هذه المتراجحة على $-x$ في حالة $x > 0$ نستنتج أنها تبقى صحيحة في حالة $x < 0$ أيضاً.

إذن مهما تكن $x \neq 0$ فلدينا $\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{1}{6}$. وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة، نستنتج عند جعل x تسعى إلى 0 أنّ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$.

تمرينات ومسائل

1 اكتب معادلة للمماس للخطّ البياني للتابع المعطى f في النقطة التي فاصلتها a.

① $f(x) = x^3 + x^2 - 3x, \quad a = 0$ ② $f(x) = x\sqrt{x}, \quad a = 1$

③ $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad a = 0$ ④ $f(x) = \frac{x}{x-1}, \quad a = 0$

⑤ $f(x) = \cos x, \quad a = 0$ ⑥ $f(x) = x\cos x, \quad a = \frac{\pi}{4}$

الحل

① $y = -3x$ ② $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

③ $y = x$ ④ $y = -x$

⑤ $y = 1$ ⑥ $y = \frac{\pi^2 - 4(\pi - 4)x}{16\sqrt{2}}$

2 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x+1}$.

① اكتب معادلةً لمماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

② هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = -4x$؟

③ هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x - 2y = 0$؟

الحل

نلاحظ أولاً أنّ $f(x)=x-4+\dfrac{5}{x+1}$ ومن ثَمّ $f'(x)=1-\dfrac{5}{(1+x)^2}$.

① لما كان $f(1)=-\frac{1}{2}$ و $f'(1)=-\frac{1}{4}$ استنتجنا أنّ معادلة المماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1 هي $y=-\frac{1}{4}(x+1)$.

② يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-4x$ أي ميله -4 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=-4$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ $1-\dfrac{5}{(1+x)^2}=-4$ أو $x^2+2x=0$. لهذه المعادلة حلان. إذن الجواب في هذه الحالة هو: نعم.

③ بالمثل، يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $3x-2y=0$ أي ميله $\frac{3}{2}$ إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=\frac{3}{2}$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ $(1+x)^2+10=0$ وهي مستحيلة الحل لأنّ مجموع حدود موجبة لا ينعدم إلا إذا انعدمت جميعها. إذن الجواب في هذه الحالة هو: لا.

ملاحظة. بوجه عام، يقبل $\mathcal{C}$ مماساً ميله m إذا وفقط إذا كان $m<1$.

3 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2}$.

① أعطِ معادلةً لمماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1.

② هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}x$؟

③ هل يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $4x-y=0$؟

الحل

نلاحظ أولاً أنّ $f'(x)=\dfrac{2-x^2}{(2+x^2)^2}$.

① لمّا كان $f(1)=\frac{1}{3}$ و $f'(1)=\frac{1}{9}$ استنتجنا أنّ معادلة المماس $\mathcal{C}$ في النقطة التي تساوي فاصلتُها 1 هي $y=\frac{1}{9}(x+2)$.

② يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=-\frac{1}{4}x$ أي ميله $-\frac{1}{4}$ إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=-\frac{1}{4}$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ بعد الإصلاح $x^4+12=0$ وهي معادلة مستحيلة الحل. إذن الجواب في هذه الحالة هو: لا.

③ يقبل $\mathcal{C}$ مماساً موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=4x$ أي ميله 4 إذا وفقط إذا كان للمعادلة $f'(x)=4$ حلول، وهذه المعادلة تكافئ بعد الإصلاح $4x^4+17x^2+14=0$ وهي معادلة مستحيلة الحل (مجموع حدود موجبة لا ينعدم إلا إذا انعدمت جميعها). إذن الجواب في هذه الحالة أيضاً هو: لا.

ملاحظة. بوجه عام، يقبل $\mathcal{C}$ مماساً ميله m إذا وفقط إذا كان $-\frac{1}{16}\le m\le\frac{1}{2}$.

4 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3-3x+1$.

① ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② تحقّق أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ ثلاثةَ جذور. واحصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

هنا نجد رمزاً جديداً: يعني هذا الرمز أنّ استعمال الآلة الحاسبة أو الحاسوب **مسموح**، ولكن **ليس ضرورياً**.

الحل

① جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات f مطّرد تماماً على كل من المجالات $]-\infty,-1[$ و $]-1,1[$ و $]1,+\infty[$، وعلاوة على ذلك

$$f(]-\infty,-1[)=]-\infty,3[\quad \text{و} \quad f(]-1,1[)=]-1,3[\quad \text{و} \quad f(]1,+\infty[)=]-1,+\infty[$$

- لأنّ 0 ينتمي إلى $]-\infty,3[$ فيوجد حلّ وحيد x_1 في المجال $]-\infty,-1[$ للمعادلة $f(x)=0$.
- ولأنّ 0 ينتمي إلى $]-1,3[$ فيوجد حلّ وحيد x_2 في المجال $]-1,1[$ للمعادلة $f(x)=0$.
- ولأنّ 0 ينتمي إلى $]-1,+\infty[$ فيوجد حلّ وحيد x_3 في المجال $]1,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=0$.

هذا يبرهن أنّ للمعادلة $f(x)$ ثلاثة جذور حقيقية هي $\{x_1,x_2,x_3\}$.

علينا إذن حصر هذه الجذور بمجالات طولها 10^{-1}.

x	$f(x)$
-2	-1
-1.9	-0.159
-1.8	0.568

نلاحظ أنّ $f(-2)=-1$ و $f(-1)=3$ إذن $-2<x_1<-1$. ثمّ نحسب كما في الشكل المجاور، حيث بدأنا من العدد -2 الذي قيمة التابع f عنده أقرب إلى الصفر ورحنا نحسب قيمة f عند الأعداد -1.9 و -1.8، ولكن سرعان ما نجد f يغير إشارته، فنستنتج أنّ $-1.9<x_1<-1.8$.

x	$f(x)$
0	1
0.1	0.701
0.2	0.408
0.3	0.127
0.4	-0.136

وبالمثل، نلاحظ أنّ $f(0)=1$ و $f(1)=-1$ إذن $0<x_2<1$. ثمّ نحسب كما في الشكل المجاور، لنجد أنّ $0.3<x_2<0.4$.

وأخيراً، نلاحظ أنّ $f(2)=3$ و $f(1)=-1$ إذن $1<x_3<2$. ثمّ نحسب كما في السابق، لنجد أنّ $1.5<x_3<1.6$.

ملاحظة. يمكن لمن يرغب أن يتحقّق أنّ $x_1=2\cos\frac{8\pi}{9}$ و $x_2=2\cos\frac{4\pi}{9}$ وأخيراً $x_3=2\cos\frac{2\pi}{9}$.

5 ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x^3 - x^2 - x + \dfrac{1}{2}$.

① ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

③ احصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

الحل

هذه المسألة تشبه السابقة. جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{37}{54}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

وللمعادلة $f(x) = 0$ ثلاثة جذور حقيقية $\{x_1, x_2, x_3\}$ تحقّق

$-0.9 < x_1 < -0.8$ و $0.4 < x_2 < 0.5$ و $1.4 < x_3 < 1.5$.

6 ليكن f هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4$.

① ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

② ما عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

③ احصر كلّاً منها في مجال لا يزيد طوله على 10^{-1}.

الحل

هذه المسألة تشبه السابقة. جدول تغيرات f :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-28	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

وللمعادلة $f(x) = 0$ أربعة جذور حقيقية $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ تحقّق

$-2.8 < x_1 < -2.7$ و $-0.6 < x_2 < -0.5$ و $0.7 < x_3 < 0.8$ و $1.2 < x_4 < 1.3$.

7 في كل حالة من الحالات الآتية، احسب المشتقات من المراتب 1 و 2 و 3 للتابع f المعرف بالعلاقة المشار إليها. وحدِّدْ في كل حالة المجموعة التي تحسب عليها المشتق.

① $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$ ② $f(x) = x\sqrt{x}$

③ $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ④ $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$

⑤ $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ ⑥ $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

الحل

① $D = \mathbb{R},$

$$f(x) = x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x - 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - x + 1$$
$$f''(x) = 6x - 1$$
$$f'''(x) = 6$$

② $D =]0,+\infty[,$

$$f(x) = x\sqrt{x}$$
$$f'(x) = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$
$$f''(x) = \tfrac{3}{4\sqrt{x}}$$
$$f'''(x) = -\tfrac{3}{8x\sqrt{x}}$$

③ $D = \mathbb{R}\setminus\{1\},$

$$f(x) = \tfrac{1}{x-1}$$
$$f'(x) = -\tfrac{1}{(x-1)^2}$$
$$f''(x) = \tfrac{2}{(x-1)^3}$$
$$f'''(x) = -\tfrac{6}{(x-1)^4}$$

④ $D = \mathbb{R},$

$$f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$$
$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin(2x)$$
$$f''(x) = -4\cos(2x) - 4\sin(2x)$$
$$f'''(x) = -8\cos(2x) + 8\sin(2x)$$

⑤ $D =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

$$f(x) = \tfrac{1}{\cos x}$$
$$f'(x) = \tfrac{\sin x}{\cos^2 x}$$
$$f''(x) = \tfrac{2}{\cos^3 x} - \tfrac{1}{\cos x}$$
$$f'''(x) = \tfrac{6\sin x}{\cos^4 x} - \tfrac{\sin x}{\cos^2 x}$$

⑥ $D =]0,\pi[$

$$f(x) = \tfrac{1}{\sin x}$$
$$f'(x) = -\tfrac{\cos x}{\sin^2 x}$$
$$f''(x) = \tfrac{2}{\sin^3 x} - \tfrac{1}{\sin x}$$
$$f'''(x) = -\tfrac{6\cos x}{\sin^4 x} + \tfrac{\cos x}{\sin^2 x}$$

ملاحظة. لم يطلب السؤال تحديد أكبر مجموعة تكون هذه الحسابات صحيحة عليها، بل طلب من الطالب أن يحدد هو مجموعةً تكون حساباته عليها صحيحة. فمثلاً في ② يمكن أن يضيف الطالب أنّ f اشتقاقي أيضاً عند الصفر، ولكن f' ليس كذلك، ولكن هذا غير مطلوب في صيغة السؤال. وكذلك يمكنه في ⑤ أن يختار D لتكون أي مجال أو اجتماع مجالات لا يضم أي عدد من الشكل $\frac{\pi}{2}+\pi k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$، أو أن يختار D في ⑥ لتكون أي مجال أو اجتماع مجالات لا يضم أي عدد من الشكل πk حيث $k\in\mathbb{Z}$. الهدف من التمرين هو التدرّب على إجراء العمليات على الاشتقاق، وليس على تعيين مجموعات التعريف.

8 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x+\sqrt{1+x^2}$.

① تحقّق أنّ $f(x) = f'(x)\cdot\sqrt{1+x^2}$، أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

② استنتج أنّ $(1+x^2)f''(x)+xf'(x)-f(x)=0$، أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

الحل

① هذا تحقّق مباشر إذ إنّ $f'(x) = 1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ومن ثَمّ $f(x) = f'(x)\cdot\sqrt{1+x^2}$.

② باشتقاق طرفي المساواة السابقة $f(x)$ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f'(x) = \sqrt{1+x^2}f''(x) + f'(x)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

وهذا يعطي المساواة المطلوبة بضرب الطرفين بالمقدار $\sqrt{1+x^2}$.

9 في كلٍّ من الحالات الآتية، ادرس قابلية التابع f للاشتقاق عند الصفر.

① $f(x) = x^2\sqrt{x}$ ② $f(x) = x|x|$ ③ $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$

الحل

① هنا f معرّف على $[0,+\infty[$، وفي حالة $x>0$ لدينا $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sqrt{x}$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = 0$، والتابع f اشتقاقي عند الصفر ومشتقه $f'(0)$ يساوي 0.

② هنا f معرّف على $\mathbb{R}$، وعندما $x \neq 0$ لدينا $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = |x|$ إذن $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = 0$، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر ومشتقه $f'(0)$ يساوي 0.

③ هنا f معرّف على $\mathbb{R}$، وفي حالة $x \neq 0$ لدينا

$$t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+1} & : \quad x>0 \\[2mm] \dfrac{x-1}{x^2+1} & : \quad x<0 \end{cases}$$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} t(x) = 1$ ، و $\lim\limits_{x\to 0^-} t(x) = -1$. فالتابع f ليس اشتقاقياً عند الصفر. ولكن له مشتق من اليمين ومشتق من اليسار عند الصفر. ولدينا $f'(0^+) = 1$ و $f'(0^-) = -1$.

10 التابع f معرفٌ على $\mathbb{R}$ وفق $f(0)=0$ و $f(x) = x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ في حالة $x \neq 0$.

① هل f اشتقاقيٌّ عند الصفر؟ علّل إجابتك.

② احسب $f'(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

الحل

① عندما $x \neq 0$ لدينا $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\cos x$ إذن $|t(x)| \leq |x|$ لأنّ $|\cos x| \leq 1$. ومنه نستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to 0} t(x) = 0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$ ، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر ومشتقه $f'(0)$ يساوي 0 .

② في حالة $x \neq 0$ يمكن تطبيق قواعد الاشتقاق:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

لنتعلّم البحث معاً

11 محلّ هندسي

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، M هي النقطة التي إحداثياتها $(m,0)$ حيث $0 \le m \le 3$، و N هي النقطة التي إحداثياتها $(0,n)$ حيث $n \ge 0$، النقطتان M و N تحقّقان $MN = 3$. وأخيراً J هي نقطة من القطعة المستقيمة $[MN]$ تُحقق $MJ = 2$. نهدف إلى تعيين المحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J عندما تتحول m في المجال $[0,3]$، ورسمه.

نحو الحلّ

- هذه مسألةٌ في دراسة المحل الهندسي تحليلياً. سنسعى بدايةً إلى حساب (x,y) إحداثيّتي النقطة J بدلالة m. يمكن التفكير بمبرهنة تالس، لكنْ يبدو الأمر أيسرَ باستعمال الأشعة.
  - ① أثبت أنَّ $3\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$.
  - ② أثبت أنَّ $n = \sqrt{9-m^2}$. واستنتج (x,y) إحداثيّتي للنقطة J بدلالة m.
- للحصول على معادلة للمحل الهندسي $\mathcal{L}$ للنقطة J، نبحث عن علاقةٍ بين الإحداثيّتين x و y للنقطة J مستقلةٍ عن الوسيط m. أثبت أنَّ $y = 2\sqrt{1-x^2}$، عندها تنتمي J إلى الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x) = 2\sqrt{1-x^2}$.
- يبقى أن نجيب عن السؤال: أترسم J الخط البياني $\mathcal{C}$ كاملاً عندما تتحول m على المجال $[0,3]$؟
  - ① لماذا تنتمي x إلى المجال $[0,1]$؟
  - ② ما هو إذن المحل الهندسي للنقطة J؟
  - ③ ادرس تغيرات f وادرس قابلية اشتقاقه عند 1. وأخيراً ارسم $\mathcal{L}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

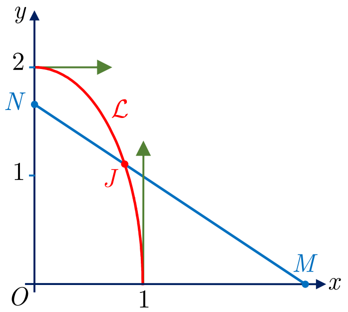
- ① من تعريف J نرى أنّ $\overrightarrow{MJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$ ومنه $3\overrightarrow{OJ} - 3\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OM}$ وهي تكافئ المساواة $3\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}$.
- ② من $MN = 3$ لدينا $m^2 + n^2 = 9$ ولأنّ $n \ge 0$ يمكننا حساب $n = \sqrt{9-m^2}$. ونستنتج من المساواة الشعاعية السابقة أنّ $3\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}$، إذن $x = \frac{m}{3}$ و $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-m^2}$.
- تُكتب العلاقتان السابقتان بالشكل $x = \frac{m}{3}$ و $y = 2\sqrt{1-\left(\frac{m}{3}\right)^2}$ إذن $y = 2\sqrt{1-x^2}$.

① استناداً إلى الفرْض تتحوّل m في المجال $[0,3]$، إذن تتحولّ $x=\frac{m}{3}$ في المجال $[0,1]$.

② رأينا أنّ المحل الهندسي $\mathcal{L}$ محتوى في $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $f: x\mapsto 2\sqrt{1-x^2}$ على $[0,1]$، وبالعكس إذا كانت (x,y) نقطة من $\mathcal{C}$، كانت $m=3x\in[0,3]$، وانطبقت النقطة الموافقة J من $\mathcal{L}$ على (x,y). إذن جميع نقاط $\mathcal{C}$ هي نقاط من المحل الهندسي $\mathcal{L}$.

③ التابع f متناقصٌ تماماً على المجال $[0,1]$، وله جدول التغيرات الآتي

x	0		1
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	0



وفي حالة $0<x<1$ لدينا $t(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

إذن $\lim\limits_{x\to1}t(x)=-\infty$، والخط البياني للتابع f يقبل مماساً شاقولياً عند 1.

12 توابع ومجموعات نقطية

في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، نرمز بالرمز $\mathcal{E}$ إلى مجموعة النقاط $M(x,y)$ التي تحقق:

$$x^2-2x+4y^2=3 \qquad (*)$$

نهدف إلى إثبات أنَّ المجموعة $\mathcal{E}$ هي اجتماع خطين بيانيين C_1 و C_2 لتابعين f_1 و f_2 ومن ثمَّ رسمُ $\mathcal{E}$.

نحو الحلّ

بحثاً عن طريق. يتعلق الأمر بإثبات أنَّ المجموعة $\mathcal{E}$ من النقاط $M(x,y)$ تساوي $C_1\cup C_2$. يجب إذن إثبات أنّ القول « تنتمي M إلى $\mathcal{E}$ » يكافئ « تنتمي M إلى $C_1\cup C_2$ » أو « تنتمي M إلى C_1 أو إلى C_2 »، حيث C_1 و C_2 هما خطّان بيانيان لتابعين f_1 و f_2 فتكون معادلتاهما

$$y=f_1(x) \quad \text{و} \quad y=f_2(x)$$

يتعلق الأمر إذن بإيجاد تابعين f_1 و f_2 تكون معهما المقولتان الآتيتان متكافئتين:

- « إحداثيّتا M تحققان $x^2-2x+4y^2=3$ »
- « إحداثيّتا M تحققان $y=f_1(x)$ أو $y=f_2(x)$ ».

① تحقق أنّ العلاقة $(*)$ تكافئ $y^2=\dfrac{-x^2+2x+3}{4}$.

② تعلم أنَّ « $y^2=a$ » تكافئ « $y=\sqrt{a}$ أو $y=-\sqrt{a}$ » فقط عندما يكون $a\geq0$. ما قيم x التي تحقّق $-x^2+2x+3\geq0$؟

✌ تبقى دراسة تغيرات f_1 و f_2، ثمَّ رسم خطيهما البيانيين C_1 و C_2. نرمز بالرمز f_1 إلى التابع المعرف على $[-1,3]$ وفق $f_1(x)=\dfrac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{2}$.

① أثبت أنَّ f_1 اشتقاقي على $]-1,3[$. احسب $f_1'(x)$ على $]-1,3[$.

② ادرس قابلية f_1 للاشتقاق عند -1 وعند 3. ثُمّ نظِّم جدولاً بتغيرات f_1. وارسمْ C_1.

✌ يمكن، لكي نرسم C_2، أن ندرس تغيرات f_2. ولكن هنا، لدينا: $f_2(x)=-f_1(x)$، أياً تكن x من $[-1,3]$. وفق أيّ تحويلٍ هندسي يكون C_2 صورة C_1؟ ارسم C_2.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

✌ العلاقة $(*)$ تُكافئ $y^2=\frac{1}{4}\left(3+2x-x^2\right)$ وضوحاً. ولأنّ $3+2x-x^2=(3-x)(1+x)$، فقيم x التي تجعل $3+2x-x^2\geq 0$ هي $[-1,3]$. وعليه تنتمي $M(x,y)$ إلى $\mathcal{E}$ إذا وفقط إذا كانت M تنتمي إلى C_1 أو إلى C_2 حيث C_1 و C_2 هما بالترتيب الخطان البيانيان للتابعين:

$f_1:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_1(x)=\frac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$ و $f_2:[-1,3]\to\mathbb{R}, f_2(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{3+2x-x^2}$

✌ التابع $u:x\mapsto 3+2x-x^2$ تابعٌ كثير الحدود فهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$، وهو موجب تماماً على $]-1,3[$، إذن f_1 اشتقاقي على $]-1,3[$، ولدينا

$$f_1'(x)=\frac{1-x}{2\sqrt{3+2x-x^2}}$$

قابلية الاشتقاق عند -1. هنا في حالة $-1<x<3$ يكون $1+x>0$ ومنه $\sqrt{(1+x)^2}=1+x$ إذن:

$$t(x)=\frac{f_1(x)-f_1(-1)}{x+1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}$$

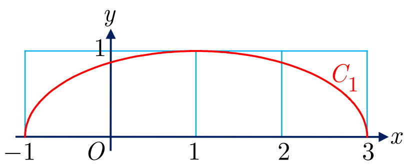
وعليه $\lim\limits_{x\to-1}t(x)=+\infty$، فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند -1 ولكن لخطه البياني C_1 مماس شاقولي عند $(-1,0)$.

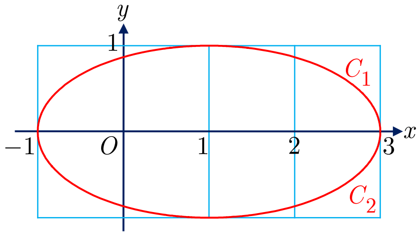
قابلية الاشتقاق عند 3. هنا في حالة $-1<x<3$ يكون لدينا بمثل ما سبق:

$$t(x)=\frac{f_1(x)-f_1(3)}{x-3}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{3-x}}$$

وعليه $\lim\limits_{x\to3}t(x)=-\infty$، فالتابع f_1 غير اشتقاقي عند 3 ولكن لخطه البياني C_1 مماس شاقولي عند $(3,0)$. يمكننا إذن وضع جدول التغيرات الآتي للتابع f_1.

x	-1		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0





الخط البياني C_2 هو صورة C_1 وفق التناظر المحوري بالنسبة إلى محور الفواصل ومنه، نجد الرسم البياني للمجموعة $\mathcal{E}$ التي نسميها قطعاً ناقصاً.

13 متراجحة هويغنز *Huygens*

نهدف إلى إثبات صحة المتراجحة $2\sin x + \tan x \geq 3x$ أياً يكن x من المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}[$.

نحو الحلّ

- يبدو حل هذه المتراجحة مثلثاتياً شبه مستحيل. لذا نلجأ إلى دراسة التابع f المعرف على I وفق $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x$. تحقّق أنَّ إشارة $f'(x)$ على المجال I تماثل إشارة $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.
- يمكنك أن تضع $t = \cos x$، ثم تدرس إشارة كثير الحدود $P(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$ مع t من $]0,1]$. ادرس تغيرات P على المجال $]0,1]$، وتحقق أنَّ P موجب على هذا المجال.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- نلاحظ أنّه في حالة x من I لدينا $f'(x) = 2\cos x + \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3 = \dfrac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$، ولأنّ المقام موجب في هذه العبارة، تتفق إشارة $f'(x)$ مع إشارة $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1$.
- بوضع $t = \cos x \in]0,1]$ نلاحظ أنّ $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1 = P(t)$ حيث

$$P(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

ولدينا $P'(t) = 6t(t-1)$ إذن $P'(t) \leq 0$ على المجال $]0,1]$ فالتابع $t \mapsto P(t)$ متناقصٌ تماماً على المجال $]0,1]$، ولكن $P(1) = 0$، نستنتج أنّ $P(t) \geq 0$ على $]0,1]$، ومن ثَمّ نستنتج أنّ $f'(x) \geq 0$ على المجال I، فالتابع f تابعٌ متزايد على I. ولكن $f(0) = 0$، إذن $f(x) \geq 0$ في حالة x من المجال $I = [0, \frac{\pi}{2}[$. وهذا يثبت صحة المتراجحة المطلوبة.

ملاحظة. كان بالامكان الاستفادة من المساواة $P(t) = (t-1)^2(2t+1)$ في إثبات أنّ $P(t) \geq 0$ على $]0,1]$.

قُدُماً إلى الأمام

14 التابع f معرفٌ على المجال $[0,1[$ وفق $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

① هل f اشتقاقيٌّ عند الصفر؟

② احسب $f'(x)$ على $]0,1[$.

الحل

① في حالة $0<x<1$ لدينا $\sqrt{x^2}=x$ ومنه $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=t(x)$، ومنه نرى أنّ $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=0$. إذن f اشتقاقي عند $x=0$. و $f'(0)=0$.

② على $]0,1[$ يمكننا تطبيق قواعد الاشتقاق إذ نلاحظ أنّ $f(x)=\sqrt{u(x)}$ حيث $u(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$، ولكن $u'(x)=\dfrac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2}$ إذن :

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}=\frac{3-2x}{2(1-x)}\cdot\sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

15 نتأمّل التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$.

① احسب التابع المشتق للتابع f.

② استنتج مشتق كلٍّ من التوابع الآتية:

❶ $g: x\mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x}-1}$ ❷ $h: x\mapsto \dfrac{x^4+1}{x^2-1}$

❸ $\ell: x\mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$ ❹ $k: x\mapsto \dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x-1}$

الحل

① بملاحظة أنّ $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x-1}$ نجد مباشرة أنّ $f'(x)=1-\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

② ❶ هنا $g(x)=f(\sqrt{x})$ إذن $g'(x)=\left(1-\dfrac{2}{(\sqrt{x}-1)^2}\right)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

❷ هنا $h(x)=f(x^2)$ إذن $h'(x)=\left(1-\dfrac{2}{(x^2-1)^2}\right)\cdot 2x$.

❸ هنا $\ell(x)=\sqrt{f(x)}$ إذن $\ell'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+1}}$.

❹ هنا $k(x)=f(\sin x)$ إذن $k'(x)=\left(1-\dfrac{2}{(\sin x-1)^2}\right)\cdot\cos x$.

ملاحظة. هنا لا يطلب تحديد المجموعات التي تكون التوابع اشتقاقية عليها.

16 فيما يأتي، أوجد التابع المشتق للتابع f محدداً المجموعة التي تنجز عليها الاشتقاق.

① $f(x)=\cos^2 3x$ ② $f(x)=\sin^3 2x$

③ $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 3x}$ ④ $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 2x}$

الحل

① على $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=\cos^2 3x$ من ثَمّ $f'(x)=-6\cos 3x\cdot\sin 3x$.

② على $\mathbb{R}$ لدينا $f(x)=\sin^3 2x$ ومن ثَمّ $f'(x)=6\sin^2 2x\cdot\cos 2x$.

③ على $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{3}k : k\in\mathbb{Z}\}$ لدينا $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 3x}$ ومن ثَمّ $f'(x)=-6\dfrac{\cos 3x}{\sin^3 3x}$.

④ على $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{4}(1+2k) : k\in\mathbb{Z}\}$ لدينا $f(x)=\dfrac{1}{\cos^3 2x}$ ومن ثَمّ $f'(x)=-6\dfrac{\sin 2x}{\cos^4 2x}$.

ملاحظة. يمكن أن يذكر الطالب أي مجال مناسب في ③ أو ④ .

17 ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$.

① عيِّن التابع المشتق f' للتابع f .

② نرمز بالرمز g إلى التابع المعرف على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x)=f(\sin x)$. أثبت أنَّ g اشتقاقي على I ثمَّ احسب $g'(x)$ على I.

③ نرمز بالرمز h إلى التابع المعرف على $J=\left]1,+\infty\right[$ وفق $h(x)=f\left(\sqrt{x}\right)$. أثبت أنَّ h اشتقاقي على J ثمَّ احسب $h'(x)$ على J.

الحل

① $\dfrac{-5}{(x-1)^2}=\dfrac{2x+3}{x-1}=f'(x)$ على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

② هنا $x\mapsto\sin x$ اشتقاقي على $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ولا يأخذ القيمة 1، و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$، إذن $x\mapsto g(x)=f(\sin x)$ اشتقاقي على I و $g'(x)=f'(\sin x)\cos x=\dfrac{-5\cos x}{(\sin x-1)^2}$.

③ هنا $x\mapsto\sqrt{x}$ اشتقاقي على $J=\left]1,+\infty\right[$ ولا يأخذ القيمة 1، و f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$، إذن $x\mapsto h(x)=f(\sqrt{x})$ اشتقاقي على J و $h'(x)=f'(\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{-5}{2(\sqrt{x}-1)^2\sqrt{x}}$.

18 a و b عددان حقيقيان، و $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=ax^3+bx^2+1$$

هل يمكن تعيين a و b لكي يقبل $\mathcal{C}$ مماساً أفقياً في النقطة $A(1,2)$ منه؟

الحل

الشرطان المعطيان يُكافئان $f(1)=2$ و $f'(1)=0$. أي

$$3a+2b=0 \quad \text{و} \quad a+b=1$$

ومنه $(a,b)=(-2,3)$.

19 a و b عددان حقيقيان، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{3x^3+ax+b}{x^2+1}$$

عيّن a و b لتكون $y=4x+3$ معادلةً للمماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 منه؟

الحل

الشرط المعطى يُكافئ $f(0)=3$ و $f'(0)=4$. أي $b=3$ و $a=4$.

ملاحظة. عند حساب $f'(0)$ نجرى الحساب مباشرة عند الصفر، فإذا كان البسط g والمقام h كتبنا

$$f'(0)=\frac{g'(0)h(0)-h'(0)g(0)}{\left(h(0)\right)^2}=\frac{a\times 1-0\times b}{1^2}=a .$$

20 a عددٌ حقيقيٌّ، و f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=ax^3+3x^2+3x$. هل يمكن تعيين a ليكون للتابع f قيمة حدّية محلية عند $x=1$؟

الحل

شرط لازم. إذا بلغ التابع قيمة حدية عند $x=1$ وجب أن يكون $f'(1)=0$ وهذا يقتضي أن يكون $a=-3$.

الشرط كاف. لنفترض أنّ $a=-3$ عندئذ

$$f'(x)=-9x^2+6x+3=-3(3x^2-2x-1)=-3(x-1)(3x+1)$$

إذن للتابع f' جدول الاطراد الآتي على المجال $[0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

فالتابع f يبلغ قيمة كبرى محلية عند $x=1$. الجواب إذن : نعم.

21 f هو تابع معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها. إضافةً إلى ذلك نفترض أنّ:

- $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.
- f' متزايد على المجال $[0,+\infty[$ ومتناقص على المجال $]-\infty,0]$.

ارسمْ خطاً بيانياً $\mathcal{C}$ **يمكن** أن يمثل التابع f .

الحل

هناك الكثير من التوابع المرشحة لتؤدي دور f' ، نبحث عن تابع متزايد على $[0,+\infty[$ ومتناقص على $]-\infty,0]$ ، ويأخذ القيمة 1 عند الصفر. أي تابع من الشكل $x\mapsto ax^2+1$ (حيث a عدد كيفي موجب) يفي بالغرض. إذن نريد تابعاً f يكون لمشتقه هذه الصيغة وينعدم عند الصفر. أي تابع $f:x\mapsto bx^3+x$ (حيث b عدد كيفي موجب) يحقق الشرطين المطلوبين. مثلاً $x\mapsto x$.

22 في كلٍّ من الحالات الآتية، احسب في حال وجودها نهاية التابع f عند a المشار إليها.

① $a=0$ $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$ ② $a=0$ $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$

③ $a=1$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ ④ $a=1$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}$

الحل

① $x\mapsto \cos x$ اشتقاقي ومشتقه $x\mapsto -\sin x$ إذن $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=\cos'(0)=-\sin 0=0$.

② $x\mapsto \tan x$ اشتقاقي على $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ ومشتقه $x\mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ إذن

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\tan'(0)=\dfrac{1}{\cos^2 0}=1$.

③ $g:x\mapsto\sqrt{x+1}$ اشتقاقي على $]-1,+\infty[$ ومشتقه $x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ إذن

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

④ $g:x\mapsto\sqrt{x^2+x+2}$ اشتقاقي ومشتقه $x\mapsto\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}$ إذن

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\dfrac{3}{4}$.

23 في كلٍّ من الحالات الآتية، أوجد عدد حلول المعادلة، ثمَّ احسب قيمةً تقريبية لكل جذر بحيث لا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1}.

① $x^5-x^3+x-5=0$ ② $x(2x+1)^2=5$

③ $x^4-\dfrac{1}{2}x+1=0$ ④ $\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{3}x^3+1=0$

الحل

① التابع $x\mapsto f(x)=x^5-x^3+x-5$، تابعٌ مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$، لأنّ مشتقه موجبٌ تماماً عليها. وهو يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ أي $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. فللمعادلة $f(x)=0$ حلٌ وحيد α في $\mathbb{R}$. وعلاوة على ذلك نلاحظ أنّ $f(1)=-4$ و $f(2)=21$. إذن $1<\alpha<2$.

ثمّ نحسب بعض القيم المتتالية لنجد أنّ $1.4<\alpha<1.5$

x	$f(x)$
1	-4
1.1	-3.62049
1.2	-3.03968
1.3	-2.18407
1.4	-0.96576
1.5	0.71875

② للتابع $x \mapsto f(x) = x(2x+1)^2 - 5$ جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\frac{137}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات، للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيدٌ α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\frac{1}{6},+\infty[$ ، وعلاوة على ذلك $f(\frac{3}{4}) = -\frac{5}{16} < 0$ و $f(\frac{4}{5}) = \frac{51}{125} > 0$. إذن $0.75 < \alpha < 0.8$.

③ التابع $x \mapsto f(x) = x^4 - \dfrac{1}{2}x + 1$ له جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{13}{16}$	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات، ليس للمعادلة $f(x) = 0$ حلولٌ في $\mathbb{R}$.

④ التابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 1$ له جدول التغيرات الآتي :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{17}{15}$	$\searrow$	$\frac{13}{15}$	$\nearrow$	$+\infty$

استناداً إلى جدول التغيرات، للمعادلة $f(x) = 0$ حلٌّ وحيدٌ α في $\mathbb{R}$ وهذا ينتمي إلى المجال $]-\infty,-1[$ ، وعلاوة على ذلك $f(-2) = -\frac{41}{15}$. إذن $-2 < \alpha < -1$. ثُمَّ بحساب بعض القيم كما في الجدول المجاور نجد أنّ $-1.7 < \alpha < -1.6$.

x	$f(x)$
-2	-2.73333
-1.9	-1.66586
-1.8	-0.83517
-1.7	-0.20205
-1.6	0.26818

24 ليكن f التابع المعرّف على المجال $[1,+\infty[$ وفق $f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$.

① ادرس تغيرات التابع f . أثبت أنَّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّاً وحيداً يطلب حساب قيمة تقريبية لهذا الحل على ألّا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1} .

② احسب جبرياً القيمة الحقيقية لذلك الجذر .

الحل

① التابع f ، تابعٌ مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $I = [1,+\infty[$ ، لأنّ مشتقه موجبٌ تماماً . وهو يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$ ، $f(1) = -3$ أي $f(I) = [-3,+\infty[$. فللمعادلة $f(x) = 0$ حلّ وحيدٌ α في I . ونلاحظ أنّ $f(3) = \sqrt{2} - 1 > 0$ و $f(2) = -1$ إذن $2 < \alpha < 3$. وأخيراً نجد $2.6 < \alpha < 2.7$ بحساب بعض القيم كما في الجدول المجاور .

x	$f(x)$
3	0.41421
2.9	0.27840
2.8	0.14164
2.7	0.00384
2.6	-0.13589

② تُكتب المعادلة $f(x)=0$ بالصيغة المُكافئة $\sqrt{x-1}=4-x$ فهي إذن تُكافئ

$$x-1=x^2-8x+16 \quad \text{و} \quad 4-x\geq 0$$

إذن $x\leq 4$ و $x^2-9x+17=0$ ومنه نستنتج أن $\alpha=\dfrac{9-\sqrt{13}}{2}\approx 2.697\ 224$.

25 ليكن f التابع المعرّف على المجال $I=\left]1,+\infty\right[$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\sqrt{x}$.

① ادرس تغيرات f على I .

② استنتج أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً α يقع في المجال $\left]1,2\right[$.

③ احسب قيمة تقريبية لهذا الجذر على ألا يتعدى الخطأ في الحساب 10^{-1} .

الحل

① التابع f ، تابعٌ مستمرٌ ومتناقصٌ تماماً على I ، لأنّ مشتقه سالبٌ تماماً، أو لأنه يساوي مجموع تابعين متناقصين تماماً. وهو يحقّق $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty,$ ، $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$ أي $f(I)=\mathbb{R}$.

② فللمعادلة $f(x)=0$ حلٌ وحيد α في I . وكذلك فإنّ $f(2)=1-\sqrt{2}<0$ إذن $f(\left]1,2\right[)=\left]1-\sqrt{2},+\infty\right[$ ، ومنه $1<\alpha<2$.

③ وأخيراً نجد $1.7<\alpha<1.8$ بحساب بعض القيم كما في الجدول المجاور.

x	$f(x)$
2	-0.41421
1.9	-0.26729
1.8	-0.09164
1.7	0.12473

26 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، ليكن C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^2+x}{x^2+x+3}$$

① ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني C .

② نريد تعيين المماسات للخط البياني C المارة بالمبدأ، (غير المماس في المبدأ).

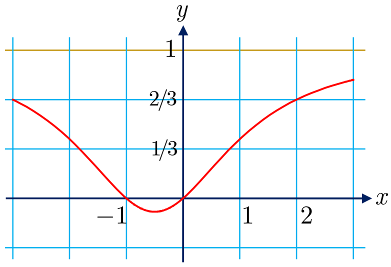
a. ليكن a عدداً حقيقياً. اكتب معادلةً للمماس T_a الذي يمس C في النقطة $A\left(a,f(a)\right)$.

b. فكِّر في أنَّ T_a يكون أحد المماسات المطلوبة عندما يمر بالمبدأ. ثُمّ جد معادلة لكل مماس للخط البياني C يمر بالمبدأ.

الحل

① نلاحظ أوّلاً أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، فالمستقيم الأفقي الذي معادلته $y=1$ مستقيم مُقاربٌ في جوار كلٍّ من $+\infty$ و $-\infty$.

ولأنّ $f(x)=1-\dfrac{3}{x^2+x+3}$ سَهُلَ حساب $f'(x)$ لنجد $f'(x)=\dfrac{3(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$ ، فإشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $(2x+1)$.



ومنه جدول التغيرات والرسم البياني المطلوبين:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{11}$	$\nearrow$	1

② $a.$ معادلة T_a هي $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ أي

$$y = \frac{a^2 + a}{a^2 + a + 3} + \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}(x-a)$$

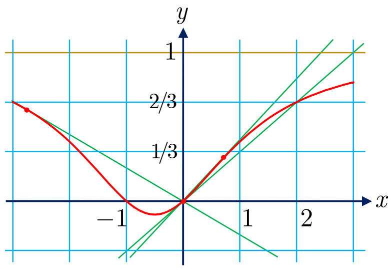
أو

$$y = \frac{a^2(a^2+2a-2)}{(a^2+a+3)^2} + \frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2}x$$

② $b.$ يمر T_a بالمبدأ إذا حققت النقطة $(0,0)$ معادلته وهذا يكافئ $a^2(a^2+2a-2) = 0$. إذن إمّا أن يكون $a = 0$ وعندها T_0 هو المماس في المبدأ وهو من ثَمّ غير مطلوب. أو أن يكون $a = -1-\sqrt{3}$ أو $a = -1+\sqrt{3}$. ولكن في حالة $a \in \left\{-1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3}\right\}$ لدينا $a^2 = 2-2a$. إذن

$$(a^2+a+3)^2 = (5-a)^2 = 27 - 12a$$

وعليه إذا كان $a = -1 + s\sqrt{3}$ حيث $s \in \{-1, 1\}$ كان



$$\frac{3(2a+1)}{(a^2+a+3)^2} = \frac{2a+1}{9-4a} = \frac{-1+s2\sqrt{3}}{13-s4\sqrt{3}}$$
$$= \frac{(-1+s2\sqrt{3})(13+s4\sqrt{3})}{169-48} = \frac{1+s2\sqrt{3}}{11}$$

ومعادلتا المماسين المطلوبين هما

$$T_{-1-\sqrt{3}} : y = \tfrac{1-2\sqrt{3}}{11}x \quad \text{و} \quad T_{-1+\sqrt{3}} : y = \tfrac{1+2\sqrt{3}}{11}x$$

ملاحظة. في الشكل، الواحدة على محور الفواصل لاتساوي الواحدة على محور التراتيب.

27 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق:

$$f(x) = \frac{2x^2+x+7}{x+1}$$

① أوجد نهاية f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = 2x - 1$ مقاربٌ مائل للخط $\mathcal{C}$.

③ ادرس نهاية f عند -1. ماذا تستنتج فيما يتعلق بالخط $\mathcal{C}$ ؟

④ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

⑤ أثبت أنَّ النقطة $I(-1; -3)$ هي مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

⑥ ارسم مقاربات $\mathcal{C}$ ثمّ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

① نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

② نضع $g(x)=f(x)-(2x-1)$ فنلاحظ أنّ $g(x)=\dfrac{8}{x+1}$. إذن

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=0$$

والمستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مستقيم مقاربٌ للخط $\mathcal{C}$، في جوار كل من $+\infty$ و $-\infty$.

③ نلاحظ أنّ $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$. نستنتج أنّ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f .

④ من الصيغة $f(x)=2x-1+\dfrac{8}{x+1}$ نستنتج أنّ

$$f'(x)=2-\frac{8}{(x+1)^2}=\frac{2(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

مما يفيدنا في إنشاء جدول تغيرات f كما يأتي:

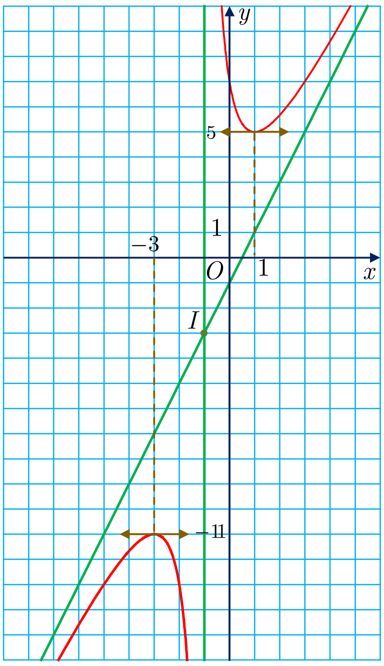
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ نلاحظ أولاً أن المجموعة $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ متناظرة بالنسبة إلى -1 فإذا كان $-1+h$ في $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ كان أيضاً $-1-h$ عنصراً من $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. وعلاوة على ذلك:

$$\frac{f(-1+h)+f(-1-h)}{2}=-3$$

إذن $I(-1,-3)$ هي مركز تناظر للخط البياني للتابع f .

⑥ الرسم مبين في الشكل المجاور.



28 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق:

$$f(x)=\frac{x^3-3x^2+10x-11}{(x-1)^2}$$

① أوجد نهايات f عند حدود مجموعة تعريفه، ثمَّ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-1$ مقاربٌ مائل للخط $\mathcal{C}$.

③ ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$، ثمَّ ارسم كلاً من d و $\mathcal{C}$.

④ حدِّدْ هندسياً عدد حلول المعادلة $x^3-(m+3)x^2+(2m+10)x-11-m=0$.

الحل

① نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. وكذلك نلاحظ أنّ $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

فنستنتج أنّ المستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f . وبالاستفادة من الصيغة $f(x) = x - 1 + \dfrac{7x-10}{(x-1)^2}$ أو بحساب مباشر نجد

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{-7x+13}{(x-1)^3} = \frac{x^3-3x^2-4x+12}{(x-1)^3} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)(x-3)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

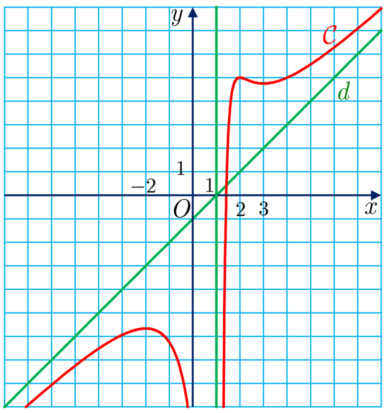
ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{17}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	$\frac{19}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

② نضع $g(x) = f(x) - (x-1)$ فنلاحظ أنّ $g(x) = \dfrac{7x-10}{(x-1)^2}$. إذن

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

نستنتج أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f .



③ ونستنتج مما سبق أنّ C و d يتقاطعان في النقطة $(\frac{10}{7},\frac{3}{7})$، ويكون C تحت d على المجال $]-\infty,\frac{10}{7}[$، وفوق d على المجال $]\frac{10}{7},+\infty[$. يبين الرسم المجاور الخط C ومقارباته.

④ تكافئ المعادلة المعطاة ما يأتي:

$x^3 - 3x^2 + 10x - 11 - m(x^2 - 2x + 1) = 0$.

ولأنّ $x = 1$ ليس حلاً لهذه المعادلة يمكننا قسمة طرفي المعادلة على $(x-1)^2$ لنجدها تكافئ $f(x) = m$. وهذه يسهل حلها هندسياً من الرسم البياني لنجد:

- في حالة $m \in \{-\frac{17}{3},\frac{19}{4},5\}$ للمعادلة $f(x) = m$ حلان.
- في حالة $-\frac{17}{3} < m < \frac{19}{4}$ أو $m > 5$ للمعادلة $f(x) = m$ حلٌ واحدٌ.
- في حالة $\frac{19}{4} < m < 5$ أو $m < -\frac{17}{3}$ للمعادلة $f(x) = m$ ثلاثة حلول.

29 في معلمٍ متجانسٍ $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، C هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق:

$$f(x)=x-\sqrt{x^2+8}$$

① احسب نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل C مقارباً أفقياً؟

② تحقّق أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مقارب للخط C.

③ نظِّمْ جدولاً بتغيرات f.

④ ارسم مقاربات C ثمَّ ارسم C.

الحل

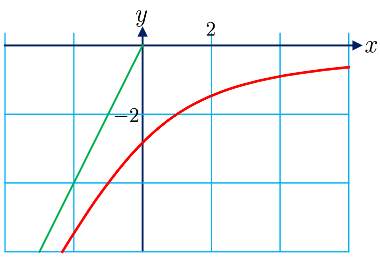
① من الواضح أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

ولمّا كان $f(x)=\dfrac{-8}{x+\sqrt{x^2+8}}$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب أفقي للخط البياني C في جوار $+\infty$. ومن جهة

② لنضع $g(x)=f(x)-2x=\dfrac{-8}{\sqrt{x^2+8}-x}$. نلاحظ إذن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=g(x)=0$، فالمستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب للخط C في جوار $-\infty$. ولمّا كان g سالباً، أيّاً كانت قيمة x، استنتجنا أنّ الخط البياني C للتابع f يقع دوماً تحت d.

③ لدينا $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+8}}$ وهو مقدار موجبٌ دوماً لأنّ $\sqrt{x^2+8}>\sqrt{x^2}=\left|x\right|\geq x$ إذن

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0



④ الرسم موضح جانباً.

30 دراسة تابع مثلثاتي

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=3\sin^2 x+4\cos^3 x$.

① قارن كلّاً من $f(-x)$ و $f\left(x+2\pi\right)$ مع $f(x)$. استنتج أنّه تكفي دراسة f على $[0,\pi]$.

② أثبت أنَّ $f'(x)=6\cos x\times\sin x\left(1-2\cos x\right)$، عند كل عدد حقيقي x.

③ ادرس تغيرات f على $[0,\pi]$.

④ ارسم الخط البياني للتابع f على $[-2\pi,2\pi]$.

الحل

① نلاحظ أنّ

$$f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x$$
$$f(-x) = 3\sin^2(-x) + 4\cos^3(-x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$
$$f(x+2\pi) = 3\sin^2(2\pi + x) + 4\cos^3(2\pi + x) = 3\sin^2 x + 4\cos^3 x = f(x)$$

فالتابع f دوري ويقبل العدد 2π دوراً. إذن تكفي دراسة f على مجال طوله دور واحد وليكن $[-\pi,\pi]$.

ولأنّ التابع زوجي فلدراسته على $[-\pi,\pi]$، تكفي دراسته على $[0,\pi]$.

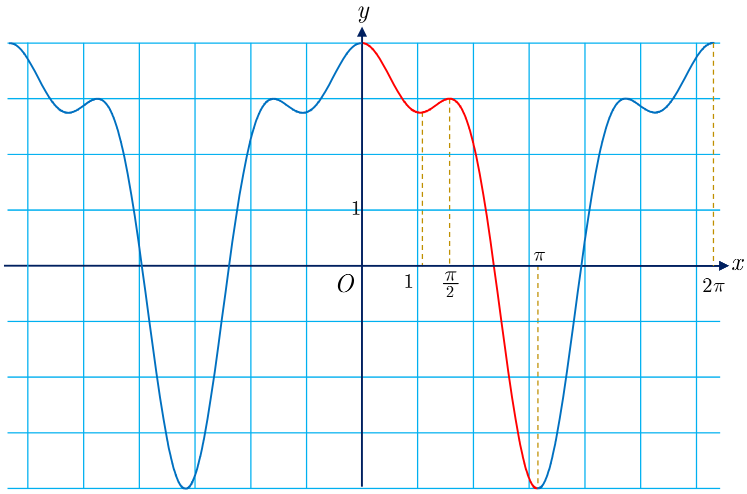
② واضح أنّ

$$f'(x) = 6\sin x\cos x - 12\cos^2 x\sin x$$
$$= 6\sin x\cdot\cos x\cdot\big(1 - 2\cos x\big)$$

③ على $]0,\pi[$، ينعدم $f'(x)$ فقط عند $x = \frac{\pi}{3}$ (الموافقة لـ $\cos x = \frac{1}{2}$)، وعند $x = \frac{\pi}{2}$ (الموافقة لـ $\cos x = 0$)، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[0,\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-4

④ الرسم مبيّن أدناه.



31 دراسة تابع مثلثاتي

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 4\sin^3 x + 3\cos x$.

① أثبت أنَّ $f(x+2\pi) = f(x)$، أياً يكن العدد الحقيقي x.

② تحقق أنَّ $f'(x) = 3\sin x\big(2\sin 2x - 1\big)$، أياً يكن العدد الحقيقي x.

③ ادرس f على مجال طوله 2π، وارسم خطه البياني على المجال $[-2\pi,2\pi]$.

الحل

① هذه الخاصة واضحة لأنّ كل من $\sin$ و $\cos$ تابع دوري ودوره 2π.

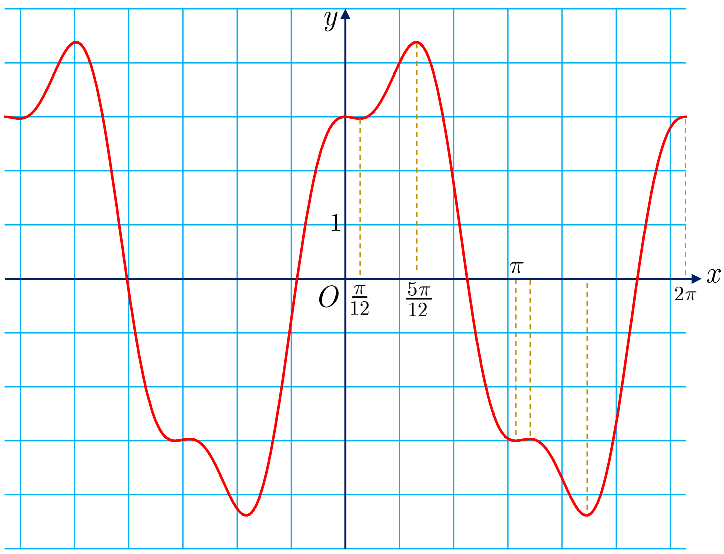
② واضح أنّ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12\sin^2 x \cdot \cos x - 3\sin x \\ &= 3\sin x \cdot \left(4\sin x \cos x - 1\right) \\ &= 3\sin x\left(2\sin 2x - 1\right) \end{aligned}$$

③ على $]0, 2\pi[$، ينعدم $f'(x)$ فقط عند $x \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\}$ (الموافقة لـ $\sin 2x = \frac{1}{2}$)، وعند $x = \pi$ (الموافقة لـ $\sin x = 0$)، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على $[0, 2\pi]$.

x	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		π		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{17\pi}{12}$		2π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	3	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	3

ومنه الرسم البياني للتابع f.



32 ليكن f التابع المعرف على المجال $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ وفق $f(x) = 4x - \tan^2 x$.

① احسب التابع المشتق $f'(x)$. ضعْ $t = \tan x$ وتحقّق أنّ

$$f'(x) = 2(1-t)\left(t^2 + t + 2\right)$$

② استنتج جدولاً بتغيرات f على المجال I.

③ أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = -1$، في المجال I جذراً وحيداً α.

الحل

① هنا نتذكّر أن $\tan' = 1 + \tan^2$ فنجد

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 - 2\tan x \cdot (\tan^2 x + 1) \\ &= -2t^3 - 2t + 4 = 2(1-t)(t^2+t+2) \end{aligned}$$

حيث وضعنا $t = \tan x$.

② لمّا كان المقدار t^2+t+2 موجباً في حالة $t \geq 0$ استنتجنا أنّ إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1-t = 1-\tan x$. الذي ينعدم على $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ فقط في حالة $x = \frac{\pi}{4}$.

ومن جهة أخرى، نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = +\infty$ ، فالمستقيم الشاقولي الذي معادلته $x = \frac{\pi}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وهكذا يمكننا إنشاء جدول التغيرات الآتي للتابع f على I.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	4	$+$	0	$-$	$\Vert$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\pi - 1$	$\searrow$	$-\infty \Vert$

③ نرى من جدول التغيرات أنّ $f([0, \frac{\pi}{4}]) = [0, \pi - 1]$ والعدد -1 لا ينتمي إلى $[0, \pi-1]$ فليس للمعادلة $f(x) = -1$ حلول على المجال $[0, \frac{\pi}{4}]$. أمّا على المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ فالتابع f مستمرٌ ومطرد تماماً ويحقّق $f(]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[) =]-\infty, \pi - 1[$. ولأنّ $-1 < \pi - 1$ استنتجنا أنّ للمعادلة $f(x) = -1$ حلّ وحيد على المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. بالنتيجة للمعادلة $f(x) = -1$ حلٌّ وحيد α في المجال I. وهذا الحلّ ينتمي إلى المجال $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

33 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x\cos x$.

① احسب عند كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$.

② أثبت، مستخدماً البرهان بالتدرّيج، أنَّ مهما تكن $n \geq 1$ فلدينا:

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x + (n-1) \times \frac{\pi}{2}\right)$$ أياً يكن x من $\mathbb{R}$.

الحل

① هنا لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= x\cos x \\ f'(x) &= -x\sin x + \cos x \\ f''(x) &= -x\cos x - 2\sin x \\ f'''(x) &= x\sin x - 3\cos x \end{aligned}$$

② في الحقيقة، لنتذكّر أنّ $\cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos'(x+a) = -\sin(x+a)$.

- لتكن $E(n)$ الخاصة الآتية:

« مهما تكن x من $\mathbb{R}$ يكن $f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$. »

- لمّا كان $f'(x) = -x\sin x + \cos x = x\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + 1\times\cos\left(x+0\times\frac{\pi}{2}\right)$ استنتجنا أنّ $E(1)$ محقّقة.

- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. باشتقاق العلاقة

$$f^{(n)}(x) = x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+(n-1)\times\frac{\pi}{2}\right)$$

نجد

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= x\cos'\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos'\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\\
&= x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) + n\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\\
&= x\cos\left(x+\frac{(n+1)\pi}{2}\right) + (n+1)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

أي إنّ $E(n+1)$ صحيحة. فنكون قد أثبتنا صحة الخاصة $E(n)$ مهما كانت قيمة n.

34 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

① أوجد عددين حقيقيين a و b يحققان $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$، على $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

② بالاستفادة مما سبق، أوجد عبارة $f^{(n)}(x)$ في حالة $n \geq 1$ و x من $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

الحل

① هذا سهل إذ نتيقن بسهولة أنّ $\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$.

② وجدنا في دراستنا أنّ

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \text{و} \quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

إذن

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

35 إيجاد تابع

نفترض وجود تابع f معرف على $\mathbb{R}$ واشتقاقي عليها، ويحقّق

$f(0)=0$ و $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ عند كل x من $\mathbb{R}$.

وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس (لن نبحث عن عبارة $f(x)$).

① ليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=f(x)+f(-x)$.

a. تحقق أنَّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}$. واحسب $g'(x)$.

b. احسب $g(0)$ واستنتج أنَّ التابع f فردي.

② ليكن h التابع المعرف على $I=\left]0,+\infty\right[$ وفق $h(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. تحقق أنَّ h اشتقاقي على I، واحسب $h'(x)$ على I.

b. أثبت أنَّ $h(x)=2f(1)$، أياً يكن x من I.

c. استنتج أنَّ نهاية التابع f عند $+\infty$ تساوي $2f(1)$.

d. ماذا تستنتج بشأن الخط البياني $\mathcal{C}$؟

③ ليكن k التابع المعرف على $J=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ وفق $k(x)=f(\tan x)-x$.

a. احسب $k'(x)$. ماذا تستنتج بشأن التابع k؟

b. احسب $f(1)$.

c. نظِّمْ جدولاً بتغيرات f على $\mathbb{R}$.

d. ارسم المستقيمات المقاربة للخط البياني $\mathcal{C}$ وارسم مماساته في النقاط التي فواصلها -1 و 0 و 1، ثُم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

①*a*. لمّا كان f اشتقاقياً على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $g: x\mapsto f(x)+f(-x)$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$g'(x)=f'(x)-f'(-x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(-x)^2}=0$$

①*b*. إذن التابع g تابعٌ ثابتٌ، ولدينا $g(0)=2f(0)=0$ إذن $g=0$ على $\mathbb{R}$. هذا يبرهن أن التابع f تابعٌ فردي.

②*a*. لمّا كان f اشتقاقياً على $\mathbb{R}$، وكان التابع $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ اشتقاقياً على $I=\left]0,+\infty\right[$، استنتجنا أنّ $h: x\mapsto f(x)+f(1/x)$ اشتقاقي على I ولدينا

$$h'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+x^{-2}}=0$$

② b. نستنتج إذن أنّ h تابعٌ ثابتٌ على I، ولأنّ $h(1) = 2f(1)$ استنتجنا أنّ $h(x) = 2f(1)$ أياً كانت قيمة x من I.

② c. لمّا كان $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = f(0) = 0$ ، فإذا لاحظنا أنّه في حالة $x > 0$ لدينا $f(x) = 2f(1) - f\left(\frac{1}{x}\right)$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2f(1) - 0 = 2f(1)$.

② d. إذن يقبل الخط البياني للتابع f مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y = 2f(1)$.

③ a. في حالة x من J لدينا

$$k'(x) = f'(\tan x)\left(1 + \tan^2 x\right) - 1 = \frac{1}{1 + \tan^2 x}\left(1 + \tan^2 x\right) - 1 = 0$$

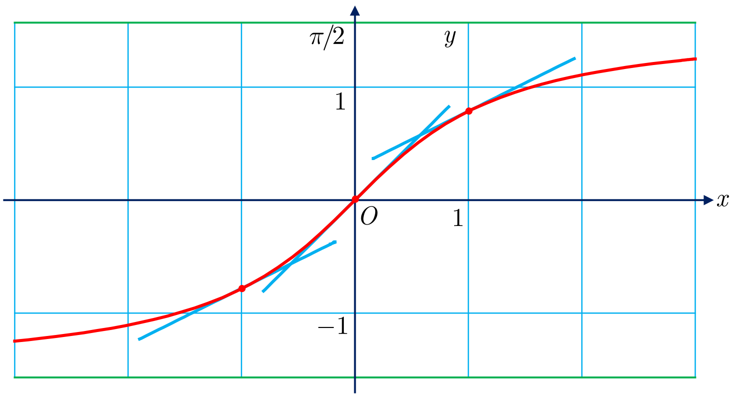
إذن التابع k تابعٌ ثابتٌ على J، ولكن $k(0) = f(0) - 0 = 0$ ، إذن $f(\tan x) = x$ في حالة x من J .

③ b. باختيار $x = \frac{\pi}{4}$ نجد $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

③ c. وبالاستفادة من كون f فردياً يمكننا أن ننشئ جدول تغيرات f الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

③ d. معادلة المماس في $(1, \frac{\pi}{4})$ هي $y = \frac{\pi-2}{4} + \frac{1}{2}x$. ومنه الرسم الآتي:



4

نهاية متتالية

1. نهاية متتالية : تذكرة
2. مبرهنات تخصّ النهايات
3. تقارب المتتاليات المطّردة
4. متتاليات متجاورة

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- نهاية متتالية وقواعد حسابها.
- المتتاليات المطردة، وتقارب المحدودة منها، مبرهنة فايرشتراس.
- المتتاليات المتجاورة: إثبات التجاور واستخلاص النتائج.
- تطبيقات على دراسة بعض المتتاليات المعرفة تدريجياً.

تدرّبْ صفحة 119

① المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$. نعلم أنَّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \in \left]-10^{-3}, 10^{-3}\right[$ عند كل $n > n_0$.

الحل حدود المتتالية موجبة فالشرط $u_n \in \left]-10^{-3}, 10^{-3}\right[$ يُكافئ $\dfrac{1}{n\sqrt{n}} < \dfrac{1}{10^3}$ أو $n^3 > 10^6$ وأخيراً $n > 100$. إذن باختيار $n_0 = 100$ نضمن أنّ جميع الحدود u_n حيث $n > n_0$ تقع في المجال المطلوب.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{3n+1}{n-1}$ وتساوي نهايتها 3. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n \in \left]2.98, 3.02\right[$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

الحل هنا الشرط $u_n \in \left]2.98, 3.02\right[$ يعني $2.98 < u_n < 3.02$ أو $-0.02 < u_n - 3 < 0.02$. ولكن

$$u_n - 3 = \frac{4}{n-1}$$

إذن $u_n - 3$ مقدار موجب، و تتحقّق المتراجحة $-0.02 < u_n - 3 < 0.02$ إذا وفقط إذا كان

$$\frac{4}{n-1} < \frac{2}{100}$$

وهذا يكافئ $n - 1 > 200$ أو $n > 201$. فإذا اخترنا $n_0 \geq 201$ تحقق المطلوب.

③ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = n\sqrt{n}$. نعلم أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$. جد عدداً طبيعياً n_0 يجعل $u_n > 10^6$ عند كل n أكبر تماماً من n_0.

الحل الشرط $u_n > 10^6$ يكافئ $n\sqrt{n} > 10^6$ أي $n^3 > 10^{12}$ أو $n > 10^4$. فإذا اخترنا $n_0 \geq 10000$ تحقق المطلوب.

④ احسب نهاية كل من المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ حيث $x_n = \dfrac{3^n}{2^n}$ و $y_n = \dfrac{10^n}{(10.1)^n}$.

الحل المتتالية $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}$ متتالية هندسية من الشكل $u_n = q^n$ حيث $q = 1.5 > 1$ فهي تسعى إلى $+\infty$ لأن أساسها أكبر تماماً من الواحد.

بالمثل المتتالية $u_n = \dfrac{10^n}{(10.1)^n}$ متتالية هندسية من الشكل $u_n = q^n$ حيث $q = \dfrac{1}{1.01}$ فهي تسعى إلى 0 لأن أساسها يحقق $-1 < q < 1$.

⑤ ليكن $-1 < q < 1$، ولنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $u_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. أعط صيغة أخرى تفيد في حساب u_n واستنتج قيمة $S = \lim_{n\to\infty} u_n$.

الحل هذا مجموع متتالية هندسية أساسها q وحدها الأوّل 1. إذن

$$u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q} \times q^n$$

ولكن $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ لأنّ $-1 < q < 1$، ومن ثمّ $S = \lim_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{1-q}$

⑥ نتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق:

$$x_0 = 3 \text{ ، } x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 2 \quad \text{و} \quad y_n = x_n + 3\text{.}$$

❶ a. أثبت أنَّ المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية.

b. احسب y_n ثمَّ x_n بدلالة n.

❷ نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$.

a. احسب كلّاً من S_n و S'_n بدلالة n.

b. استنتج نهاية كلٍّ من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$.

الحل ❶ نحسب

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}x_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}(x_n + 3) = \frac{1}{3}y_n$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأوّل $y_0 = x_0 + 3 = 6$. إذن $y_n = \dfrac{6}{3^n}$، ومن ثمّ $x_n = \dfrac{6}{3^n} - 3$.

❷ نضع $S_n = y_0 + \cdots + y_n$ و $S'_n = x_0 + \cdots + x_n$، فيكون

$$S_n = \frac{6}{3^0} + \frac{6}{3^1} + \cdots + \frac{6}{3^n} = 6\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = 9\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) = 9 - \frac{3}{3^n}$$

و

$$\begin{aligned} S'_n &= x_0 + \cdots + x_n = (y_0 - 3) + (y_1 - 3) + \cdots + (y_n - 3) \\ &= y_0 + \cdots + y_n - 3(n+1) = S_n - 3n - 3 = -3n + 6 - \frac{3}{3^n} \end{aligned}$$

إذن

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \lim_{n\to+\infty}\left(-3n + 6 - \frac{3}{3^n}\right) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(9 - \frac{3}{3^n}\right) = 9$$

⑦ نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، معرّفة وفق العلاقة التدريجية $u_{n+1} = au_n + b$ و $u_0 = s$.

❶ نفترض أنّ $a = 1$، تيقّن أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية في هذه الحالة، واحسب u_n بدلالة n و b و s في هذه الحالة.

❷ هنا نفترض أنّ $a \neq 1$. ونضع ℓ الحل الوحيد للمعادلة $x = ax + b$.

a نعرّف $(t_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $v_n = t_n - \ell$. برهن أنّ $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية.

b استنتج صيغة t_n بدلالة n و b و a و s في هذه الحالة.

c برهن أنّه في حالة $-1 < a < 1$ تتقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، واحسب نهايتها بدلالة b و a و s.

الحل

❶ واضح هنا أنّ المتتالية حسابية في هذه الحالة لأنّ $u_{n+1} - u_n = b$ أياً كانت قيمة n. فحدّها الأوّل $u_0 = s$ وأساسها b إذن $u_n = s + bn$ أياً كان n .

❷ لأنّ $a \neq 1$ للمعادلة $x = ax + b$ حلٌّ وحيد هو $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. تعريفاً لدينا $\ell = a\ell + b$ ومن جهة أخرى $u_{n+1} = au_n + b$ فإذا طرحنا الأولى من الثانية وجدنا

$$u_{n+1} - \ell = au_n - a\ell = a(u_n - \ell)$$

أو $t_{n+1} = at_n$ فالمتتالية $\left(t_n\right)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالصيغة $t_n = u_n - \ell$ متتالية هندسية أساسها a وحدها الأوّل $t_0 = u_0 - \ell = s - \ell$. إذن، مهما كان العدد الطبيعي n كان

$$t_n = (s-\ell)a^n = \left(s - \frac{b}{1-a}\right)a^n$$

في حالة $-1 < a < 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ ومن ثمّ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. ولكن $u_n = \ell + t_n$ إذن

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{b}{1-a}$$

تَدرَّبْ صفحة 123

① المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{\cos(2n)}{\sqrt{n}}$. تحقَّق أنَّ $-\dfrac{1}{\sqrt{n}} < u_n < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$، وذلك أياً يكن $n \geq 1$، ثمَّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل تطبيق مباشر على مبرهنة الإحاطة. سهل ومتروك للقارئ.

② المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة بالصيغة $u_n = n + 1 - \cos n$. تحقَّق أنَّ $n \leq u_n \leq n + 2$، وذلك أياً يكن $n \geq 1$، ثمَّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل تطبيق مباشر على مبرهنة الإحاطة. سهل ومتروك للقارئ.

③ فيما يأتي احسب نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ في حال وجودها:

1. $u_n = \dfrac{2n+3}{3n-1}$ 2. $u_n = \dfrac{5n-3}{3n-5}$ 3. $u_n = n - \dfrac{1}{n+1}$

4. $u_n = \dfrac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$ 5. $u_n = \dfrac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$ 6. $u_n = \dfrac{n}{4} + \dfrac{2n}{n^2+1}$

7. $u_n = \dfrac{10n-3}{n^2+1}$ 8. $u_n = \dfrac{2n^2-1}{3n+5}$ 9. $u_n = \sqrt{\dfrac{4n-3}{n+1}}$

10. $u_n = \sqrt{\dfrac{2n^2-1}{3n+1}}$ 11. $u_n = \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3n+1}\right)$ 12. $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi+1}{2n+1}\right)$

13. $u_n = \dfrac{2n+(-1)^n}{3n}$ 14. $u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}$ 15. $u_n = \dfrac{n!-2}{n!}$

16. $u_n = \sqrt{2n^2-5} - n\sqrt{2}$ 17. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{n}{\sqrt{n+2}}$ 18. $u_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$

19. $u_n = n^2\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{2}\right)$ 20. $u_n = \dfrac{3n-\sqrt{9n^2+1}}{\sqrt{n^2+5}}$ 21. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+1}$

الحل الإجابات:

1. $\dfrac{2}{3}$ 2. $\dfrac{5}{3}$ 3. $+\infty$

4. 5 5. $-\dfrac{3}{2}$ 6. $+\infty$

7. 0 8. $+\infty$ 9. 2

10. $+\infty$ 11. $-\dfrac{1}{2}$ 12. 1

13. $\dfrac{2}{3}$ 14. 0 15. 1

16. 0 17. 0 18. $+\infty$

19. $+\infty$ 20. 0 21. 0

في حالة المتتالية 14. نكتب $u_n = \sqrt{n^2+n} - n - \dfrac{1}{2}$

$$u_n = \frac{n^2+n-(n+\frac{1}{2})^2}{\sqrt{n^2+n}+n+\frac{1}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{n^2+n}+4n+2}$$

المقام يسعى إلى $+\infty$ والبسط ثابتٌ. إذن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

وفي حالة 15. $u_n = \dfrac{n!-2}{n!}$ نلاحظ أنّ $1-u_n = \dfrac{2}{n!}$ إذن $0 \leq 1-u_n = \dfrac{2}{n!} < \dfrac{2}{n}$ ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(1-u_n) = 0$ أو $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

وفي حالة 19. $u_n = n^2\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}\right)$ نلاحظ أنّ

$$\sqrt{2+\frac{1}{n}}-\sqrt{2}=\frac{1}{n\left(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}\right)}\geq\frac{1}{n\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\geq\frac{1}{4n}$$

إذن $u_n \geq \frac{n}{4}$، ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4}=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$.

تَدرَّبْ صفحة 128

① في كلٍّ من الحالات الآتية، مثِّلْ هندسياً الحدود الأولى من المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$، ثمَّ خمِّنْ جهة اطردها إذا كانت مطرّدة ونهايتها المحتملة.

1. $u_0 = 2$ و $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-3$.
2. $u_0 = 1$ و $u_{n+1}=-\frac{1}{2}u_n$.
3. $u_0 = 1$ و $u_{n+1}=u_n+2$.

الحل تمرين بسيط ومتروك للقارئ.

② تأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق $u_n = 5-\frac{10}{n^2}$. بيّن أيُّ الأعداد الآتية راجحٌ عليها: 0، 6، 4.99999، 5 ؟

الحل يكون عددٌ راجحاً على متتالية إذا كان أكبر من جميع حدودها. هنا العددان 6 و 5 راجحان على $(u_n)_{n\geq 1}$ في حين لا يكون العددان 0 و 4.99999 را جحين عليها لأنّه إذا اخترنا $n=10000$ مثلاً كان $u_{10000}=4.9999999$ وهو أكبر من كلا العددين 0 و 4.99999 .

③ تأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $u_n=\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$. أثبت أنَّ $1\leq u_n\leq 3$، أياً يكن العدد الطبيعي n .

الحل

في الحقيقة

$$u_n-1=\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}-1=\frac{2n}{1+n(n-1)}\geq 0$$

$$3-u_n=3-\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}=\frac{2(n-1)^2}{1+n(n-1)}\geq 0$$

ومنه يكون $1\leq u_n\leq 3$، أياً كانت n .

④ فيما يأتي أعطِ متتاليتين $(t_n)_{n\geq 2}$ و $(s_n)_{n\geq 2}$، تختلفان عن $(u_n)_{n\geq 2}$ وتحقّقان $t_n \leq u_n \leq s_n$ أياً يكن $n \geq 2$.

❶ $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ ❷ $u_n = \dfrac{5n+1}{n+1}$

❸ $u_n = \dfrac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$ ❹ $u_n = \dfrac{n^2-4n+7}{n-1}$

❺ $u_n = \sqrt{2+n}$ ❻ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$

الحل هنا المطلوب أمثلة، ولا يوجد حلول وحيدة

	s_n	$\leq$	u_n	$\leq$	t_n
❶	$\dfrac{n+2}{n}$	$\leq$	$\dfrac{n+2}{n+1}$	$\leq$	$\dfrac{n}{n+1}$
❷	6	$\leq$	$\dfrac{5n+1}{n+1}$	$\leq$	$\dfrac{5n}{n+1}$
❸	$\dfrac{2}{n-1}$	$\leq$	$\dfrac{2n-3}{(n-1)(n+2)}$	$\leq$	$\dfrac{2n-3}{n(n+2)}$
❹	$\dfrac{n^2+7}{n}$	$\leq$	$\dfrac{n^2-4n+7}{n-1}$	$\leq$	$\dfrac{n^2-4n}{n-1}$
❺	n	$\leq$	$\sqrt{2+n}$	$\leq$	$\sqrt{n}$
❻	1	$\leq$	$\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$	$\leq$	$\dfrac{1}{n}$

⑤ فيما يأتي، بيّن إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ محدودة، أو محدودة من الأعلى، أو من الأدنى.

1. $u_n = \sin n$
2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n+2}$
4. $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$
5. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
6. $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}}$
7. $u_n = \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}}$
8. $u_n = n\sqrt{3} - 2$
9. $u_n = n^2 + n - 1$
10. $u_n = \dfrac{1}{n+1} + n^2$
11. $u_n = n + \cos n$
12. $u_n = (-1)^n \times n^2$

الحل

1. محدودة لأنّ $-1 \leq \sin n \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.
2. محدودة لأنّ $1 \leq 1 + \dfrac{1}{n^2} \leq 2$ أياً كانت $n \geq 1$.
3. محدودة لأنّ $0 \leq \dfrac{1}{n+2} \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.
4. محدودة لأنّ $0 \leq \dfrac{1}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{2}$ أياً كانت $n \geq 1$.

5. محدودة لأنّ $0 \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

6. محدودة لأنّ $0 \leq \sqrt{\dfrac{n^2-1}{n^2+1}} \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

7. محدودة لأنّ $-1 \leq \dfrac{-2}{\sqrt{2n+3}} \leq 0$ أياً كانت $n \geq 1$.

8. محدودة من الأدنى فقط لأنّ $n\sqrt{3}-2 \geq -2$ أياً كانت $n \geq 1$، ولكنها غير محدودة من الأعلى لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{3}-2) = +\infty$.

9. محدودة من الأدنى بالعدد -1 وغير محدودة من الأعلى.

10. محدودة من الأدنى بالعدد 0 وغير محدودة من الأعلى.

11. محدودة من الأدنى بالعدد 0 وغير محدودة من الأعلى.

12. غير محدودة من الأدنى وغير محدودة من الأعلى.

⑥ لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة بالصيغة :

$$u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$$

❶ أثبت بالتدريج على العدد n، أنّ $n \leq 2^n$ مهما كان العدد الطبيعي n.

❷ استنتج مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

الحل

❶

- لتكن $E(n)$ الخاصة $2^n \geq n$.
- الخاصتان $E(0)$ و $E(1)$ محققتان وضوحاً لأنّ $2^0 \geq 0$ و $2^1 \geq 1$.
- لنفترض صحة $E(n)$ في حالة عدد $n \geq 1$. عندئذ $2^{n+1} = 2\times 2^n \geq 2n \geq n+1$

فالخاصة $E(n+1)$ محققة أيضاً، فنكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $2^n \geq n$ أياً كانت n.

❷ بالاستفادة مما سبق نستبدل كل عدد k في بسط كل كسر بالقوة 2^k لنجد

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n} \\ &\leq \frac{2^1}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \cdots + \frac{2^n}{3^n} \\ &= q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n : \quad q = \frac{2}{3} \\ &= q\frac{1-q^n}{1-q} = 2\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \leq 2 \end{aligned}$$

فالمتتالية محدودة من الأعلى بالعدد 2.

① لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = -\dfrac{1}{2n+4}$ و $s_n = \dfrac{1}{n+1}$. أثبت أنهما متجاورتان ثمَّ عيّن نهايتهما المشتركة.

الحل

هذا تطبيق مباشر على التعريف. يمكن مثلاً حساب إشارة الفرقين $t_{n+1} - t_n$ و $s_{n+1} - s_n$ ثُمّ تعيين نهاية $(s_n - t_n)_n$. نجد $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

② لتكن $(t_n)_{n\geq 0}$ و $(s_n)_{n\geq 0}$ المتتاليتان المعرفتان وفق $t_n = \dfrac{n-1}{n}$ و $s_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$. أثبت أنّهما متجاورتان ثمَّ عيّن نهايتهما المشتركة.

الحل

هذا تطبيق مباشر على التعريف. يمكن مثلاً حساب إشارة الفرقين $t_{n+1} - t_n$ و $s_{n+1} - s_n$ ثُمّ تعيين نهاية $(s_n - t_n)_n$. نجد $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$.

③ في كلٍّ من الحالات الآتية، تبيَّنْ إن كانت المتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتين أم لا.

❶ $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$، $y_n = x_n + \dfrac{1}{4n}$,

❷ $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1}$، $y_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$,

❸ $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$، $y_n = x_n + \dfrac{1}{n}$,

❹ $x_n = 2 - \dfrac{1}{n}$، $y_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$,

الحل

❶ هنا

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

إذن

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

ونجد

$$\begin{aligned} y_{n+1}-y_n &= x_{n+1}-x_n+\frac{1}{4(n+1)}-\frac{1}{4n}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}-\frac{1}{2n(2n+2)} \\ &= \frac{1}{2n+2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}\right)=-\frac{1}{4n(n+1)(2n+1)}<0 \end{aligned}$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

وأخيراً $y_n-x_n=\frac{1}{4n}$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n-x_n\right)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

❷ هنا

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1} \\ x_{n+1} &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

إذن

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}=-\frac{1}{2n(2n+1)}<0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

وكذلك

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \\ y_{n+1} &= \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

إذن

$$y_{n+1}-y_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}>0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

وأخيراً $x_n-y_n=\frac{1}{2n}$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n-y_n\right)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

❸ هنا $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ والمتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة. ونجد أيضاً

$$y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-x_n+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n(n+1)}=-\frac{1}{n(n+1)^2}<0$$

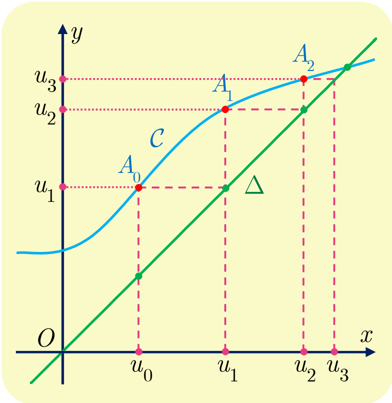
فالمتتالية $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة. وأخيراً $y_n-x_n=\frac{1}{n}$، إذن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(y_n-x_n\right)=0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان.

❹ بسيط ومتروك للقارئ.

أنشطة

نشاط 1 تمثيلٌ هندسي لمتتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$

❶ المبدأ



في الشكل المجاور، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f في معلمٍ متجانس. نوضِّع العدد الحقيقي u_0 على محور الفواصل، ثمَّ النقطة A_0 ذات الفاصلة u_0 على الخط البياني $\mathcal{C}$، نرمز إلى ترتيب A_0 بالرمز u_1 فيكون $u_1 = f(u_0)$.

نوضِّع u_1 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$، u_1 هي فاصلة نقطة تقاطع Δ والمستقيم الذي معادلته $y = u_1$.

نرمز إلى ترتيب النقطة A_1 من الخط $\mathcal{C}$، التي فاصلتها u_1، بالرمز u_2 فيكون $u_2 = f(u_1)$. نوضِّع u_2 على محور الفواصل بالاستفادة من المستقيم Δ كما في السابق. ونتابع بهذا لتعيين القيم المتوالية للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$.

❷ تمرين

في كلٍّ من الحالات الآتية، مثِّل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المشار إليها، ثمَّ خمِّنْ جهة تغيرها ونهايتها المحتملة.

① $u_{n+1} = 2u_n - 1, \quad u_0 = 1$ ② $u_{n+1} = u_n^2 - 1, \quad u_0 = 1$

③ $u_{n+1} = u_n^2 - 1, \quad u_0 = 0$ ④ $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2}, \quad u_0 = 1$

⑤ $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + u_n, \quad u_0 = 1$ ⑥ $u_{n+1} = u_n^2, \quad u_0 = 1$

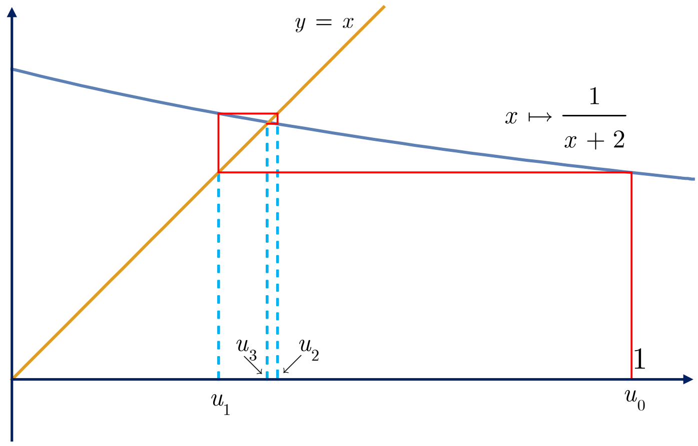
الحل

① متتالية ثابتة. وهي تسعى إلى 1

② الحدود ذات الدليل الفردي تساوي الصفر والحدود ذات الدليل الزوجي تساوي -1 بدءاً من الدليل 2 أي $u_1 = u_3 = \cdots = u_{2m+1} = 0$ و $u_2 = u_4 = \cdots = u_{2m} = -1$. وهي إذن غير متقاربة.

③ الحدود ذات الدليل الزوجي تساوي الصفر والحدود ذات الدليل الفردي تساوي -1 أي
$u_0 = u_2 = \cdots = u_{2m} = 0$ و $u_1 = u_3 = \cdots = u_{2m+1} = -1$.
وهي إذن غير متقاربة.

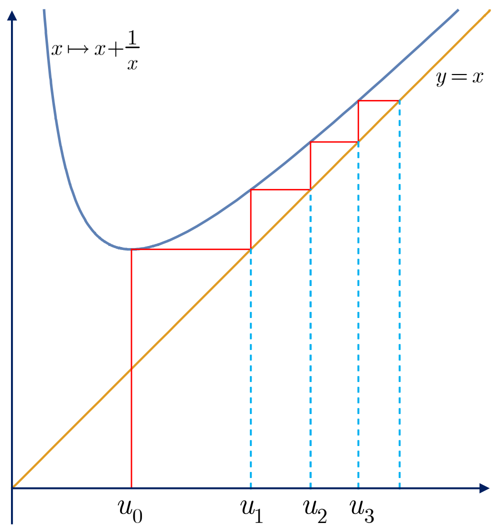
④ نلاحظ من الشكل أنّ متتالية الحدود ذات الدليل الزوجي تتناقص، ومتتالية الحدود ذات الدليل الفردي تتزايد، وأنّ المتتالية تتقارب من ℓ الذي هو الحل الموجب (لأن جميع حدود المتتالية موجبة) للمعادلة $f(x) = x$ أي $x^2 + 2x - 1 = 0$ ومنه $\ell = \sqrt{2} - 1$.



الخلاصة: إذا وضعنا $\ell = \sqrt{2} - 1$ ، فإننا نلاحظ أنّ $u_{2n} \geq u_{2n+2} \geq \ell$ و $\ell \geq u_{2n+1} \geq u_{2n-1}$ أياً كانت قيمة n وأنّ $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \sqrt{2} - 1$.

ملاحظة: هنا لا يُطلب من الطالب إثبات أي شيء، بل ملاحظة الرسم، للتنبؤ بالخواص.

⑤ نلاحظ من الشكل أنّ المتتالية متزايدة تماماً وتسعى إلى $+\infty$. في الحقيقة، لو تقاربت من عدد موجب تماماً ℓ لوجب أن يحقق المعادلة $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$ وهذا تناقض.



ملاحظة: نؤكد هنا لا يُطلب من الطالب إثبات أي شيء، بل ملاحظة الرسم، للتنبؤ بالخواص.

⑥ هنا نلاحظ أنّ المتتالية ثابتة وتسعى من ثمّ إلى 1.

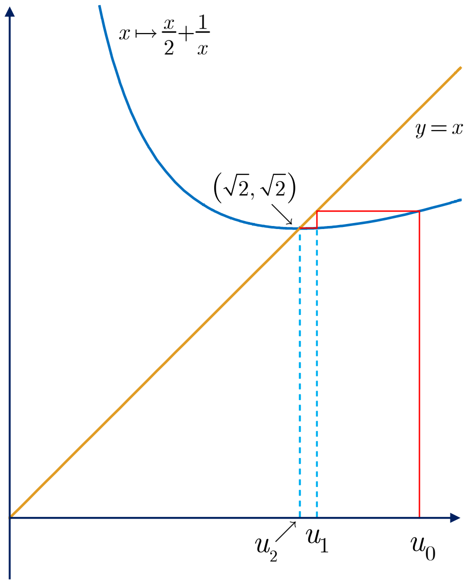
❸ تطبيق

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالشرطين $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$. استعمل الطريقة السابقة لتجيب عن الأسئلة الآتية :

① أتكون المتتالية مطّردة ؟ أتكون محدودة من الأدنى ؟ أتكون متقاربة ؟

② برهن صحة النتائج التي توصلتَ إليها إن أمكن.

الحل



① نلاحظ من الشكل أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$، وأنها تسعى إلى العدد $\sqrt{2}$.

② لنعرّف $E(n)$ الخاصة $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$.

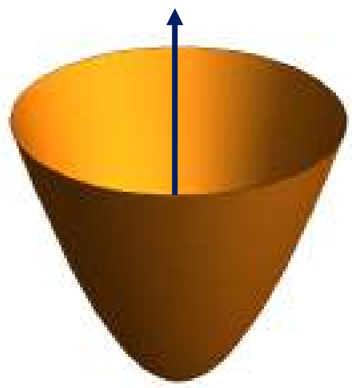
- نلاحظ أنّ $u_1 = 1.5$ إذن إنّ $E(0)$ محققة لأنّ $\sqrt{2} < 1.5 < 2$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ محقّقة. ولنلاحظ أنّ مشتق التابع المعرّف على $]\sqrt{2},+\infty[$ بالصيغة $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ موجب تماماً على المجال المفتوح $]\sqrt{2},+\infty[$، فهو متزايدٌ تماماً على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$، ومن ثَمّ نستنتج من المتراجحة $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$ أنّ $f(\sqrt{2}) < f(u_{n+1}) < f(u_n)$، وهذه تُكافئ المتراجحة $\sqrt{2} < u_{n+2} < u_{n+1}$، فالخاصة $E(n+1)$ محققة. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$. فهي إذن متقاربة من عدد ℓ أكبر أو يساوي $\sqrt{2}$ ويحقق المساواة $\ell = f(\ell)$. وهذان الشرطان يقتضيان أن يكون $\ell = \sqrt{2}$. أي إنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً ومتقاربة من العدد $\sqrt{2}$.

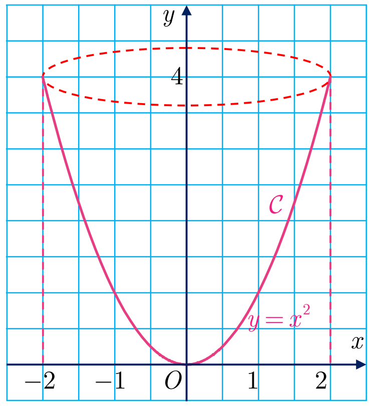
ملاحظة: تسمى هذه الطريقة في حساب العدد $\sqrt{2}$ الطريقة البابليّة، وقد كانت معروفة للبابليين.

نشاط 2 حجم مجسم قطع مكافئ دوراني

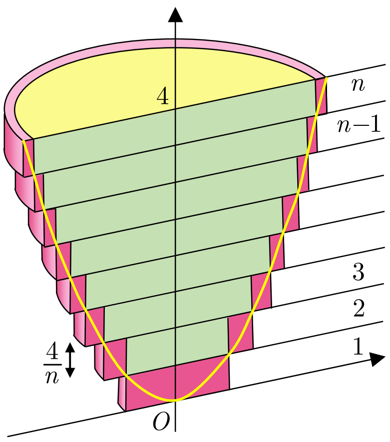
في الشكل نجد الخط البياني للتابع $f : x \mapsto x^2$، الذي يسمى قطعاً مكافئاً معادلته $y = x^2$، وهو متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب كما تعلم. نهتم بالجزء $\mathcal{C}$ الموافق لقيم x من المجال $[-2,2]$.

عندما يدور $\mathcal{C}$ في الفراغ دورةً كاملة حول محور التراتيب، نحصل على مجسَّم نسميه **مجسم القطع المكافئ الدوراني**.





نهدف إلى حساب $\mathcal{V}$ حجم هذا المجسّم، في مثل هذه الحالات وفي غياب أية طرائق أخرى نسعى إلى حصر المقدار المجهول، وهو هنا $\mathcal{V}$ بمقادير معلومة ويمكننا حسابها، وفي الوقت نفسه تحصر المقدار المجهول بالدقة التي نريد. لنوضّح المقصود: نحن نعرف كيف نحسب حجم أسطوانة، لنرجع الأمر إلى حساب مجموع حجوم أسطوانات.



ليكن n عدداً طبيعياً أكبر تماماً من 2. ولنفترض أننا حاولنا ملء المجسّم بـ $n-1$ أسطوانة ارتفاع كلّ منها $\frac{4}{n}$، (بالطبع ستبقى بعض الفراغات)، وأننا استطعنا وضع المجسّم داخل n أسطوانة ارتفاع كل منها $\frac{4}{n}$ أيضاً، كما في الشكل المجاور.

لنرمز بالرمز V_n إلى مجموع حجوم الأسطوانات الخارجية، وبالرمز v_n إلى مجموع حجوم الأسطوانات الداخلية.

① برهن أنّ

$$v_n = \frac{16\pi}{n^2}\big(1+2+\cdots+(n-1)\big) \quad \text{و} \quad V_n = \frac{16\pi}{n^2}\big(1+2+\cdots+(n-1)+n\big)$$

② برهن أنّ المتتاليتين $(V_n)_{n\ge0}$ و $(v_n)_{n\ge0}$ متقاربتان، واستنتج قيمة $\mathcal{V}$ أي حجم المجسم المطلوب.

الحل

من النص نجد أنه تم وضع المجسم داخل n أسطوانة ارتفاع كل منها $h=\frac{4}{n}$، تم تقسيم ارتفاع المجسم $[0,4]$ إلى n جزءاً متساوياً إلى n بواسطة النقاط

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = 4$$

حيث $x_1 = h$، $x_2 = 2h$، وهكذا $x_k = kh$ وأخيراً $x_n = nh = 4$.

هناك n اسطوانة خارجية:

- ارتفاع الأسطوانة الخارجية ذات الدليل 1 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_1}$ فحجمها $\pi x_1 h$.

- ارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل 2 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_2}$ فحجمها $\pi x_2 h$.
- وهكذا...
- ارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل k يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_k}$ فحجمها $\pi x_k h$.
- وارتفاع الأسطونة الخارجية ذات الدليل n يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_n}$ فحجمها $\pi x_n h$.

وهكذا نجد أنّ مجموع حجوم الاسطوانات الخارجية يساوي

$$V_n = \pi h\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) = \pi h^2(1 + 2 + \cdots + n)$$

وهي الصيغة المطلوبة لأنّ $h = 4/n$. وكذلك

هناك $n - 1$ اسطوانة داخلية:

- ارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل 1 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_1}$ فحجمها $\pi x_1 h$.
- ارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل 2 يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_2}$ فحجمها $\pi x_2 h$.
- وهكذا...
- ارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل k يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_k}$ فحجمها $\pi x_k h$.
- وارتفاع الأسطونة الداخلية ذات الدليل $n - 1$ يساوي h ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{x_{n-1}}$ فحجمها $\pi x_{n-1} h$.

وهكذا نجد أنّ مجموع حجوم الاسطوانات الداخلية يساوي

$$v_n = \pi h\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}\right) = \pi h^2(1 + 2 + \cdots + (n - 1))$$

وهي الصيغة المطلوبة لأنّ $h = 4/n$.

② نعرف مجموع متتالية حسابية. إذن

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad \text{و} \quad 1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}$$

ومنه $V_n = 8\pi\left(\frac{n + 1}{n}\right)$ و $v_n = 8\pi\left(\frac{n - 1}{n}\right)$. ولأنّ $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = 8\pi$ و لدينا $v_n \le \mathcal{V} \le V_n$ أياً كانت n استنتجنا بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\mathcal{V} = 8\pi$.

تمرينات ومسائل

1 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرّفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n!}$. ($n! = n(n-1)\times\cdots\times 2\times 1$ عندما $n \geq 1$).

① احسب الحدود الستة الأولى منها.

② تيقّن أنَّ $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$ ثمَّ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

①

n	1	2	3	4	5	6
u_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{720}$

② من الواضح أنّ جداء ضرب أعداد طبيعية جميعها أكبر من الواحد هو عدد أكبر من الواحد، إذن من الطبيعي أن يكون $n! \geq n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \geq n$ في حالة $n \geq 2$. وهذا المتراجحة تبقى صحيحة أيضاً في حالة $n = 1$. إذن $n! \geq n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \geq n$ مهما كانت $n \geq 1$، وهذا يقتضي أن يكون $0 < u_n = \dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{n}$ في حالة $n \geq 1$. ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ استناداً إلى مبرهنة الإحاطة مثلاً.

2 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \left(\dfrac{n}{10} - 1\right)^n$.

① أعطِ قيماً تقريبية لحدودها الأولى من u_1 حتى u_{11}.

② أثبت أنَّ جميع حدودها، بدءاً من الحد u_{31}، تحقق $u_n \geq 2^n$. استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$.

الحل

الهدف من هذا التمرين هو تنبيه الطالب إلى أنّ قيم حدود المتتالية الأولى يمكن أن تقودنا إلى استنتاجات خاطئة.

①

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	-0.9	0.64	-0.34	0.13	$-\frac{3.1}{10^2}$	$\frac{4.1}{10^3}$	$-\frac{2.2}{10^4}$	$\frac{2.6}{10^6}$	$-\frac{1.0}{10^9}$	$0.$	$\frac{1.0}{10^{11}}$

توحي لنا هذه القيم وكان المتتالية تسعى إلى الصفر، ولكن مهلاً.

② في حالة $n \geq 31$ يكون $\dfrac{n}{10} - 1 \geq \dfrac{31}{10} - 1 = 2.1 > 2$، ومن ثمّ $u_n > 2^n$. إذن

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty \text{ لأنّ } \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$$

3 المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{n^3}{n!}$.

① احسب حدودها الستة الأولى.

② a. أثبت أنَّ $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$، أياً يكن $n \geq 4$.

b. استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq1}$.

الحل

①

n	1	2	3	4	5	6
$u_n = \frac{n^3}{n!}$	1	4	$\frac{9}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{3}{10}$

② a.

- لنضع $E(n)$ الخاصة : $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$.
- إنّ $E(4)$ محققة لأنّها تكافئ $4! \geq 4\times3\times2\times1$ وهذه صحيحة.
- لنفترض صحّة $E(n)$ في حالة $n \geq 4$ عندئذ

$$\begin{aligned}(n+1)! = (n+1)\times n! &\geq (n+1)n(n-1)(n-2)\underbrace{(n-3)}_{\geq1}\\ &\geq (n+1)n(n-1)(n-2)\\ &= (n+1)(n+1-1)(n+1-2)(n+1-3)\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. فنكون قد أثبتنا صحة المتراجحة المطلوبة في حالة $n \geq 4$.

② b. نستنتج إذن أنّه في حالة $n \geq 4$ يكون لدينا

$$0 \leq u_n = \frac{n^3}{n!} \leq \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{n}{n-1}\times\frac{n}{n-2}\times\frac{1}{n-3}$$

ولكن $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-3} = 0$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-2} = 1$ و $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1$ إذن بجعل n تسعى إلى اللانهاية في المتراجحة السابقة نستنتج استناداً إلى مبرهنة الإحاطة أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

4 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ و $(w_n)_{n\geq1}$ و $(t_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{n^2+1}{n+1},\quad y_n = \frac{x_n}{n},\quad w_n = x_n - n,\quad t_n = \frac{y_n-1}{w_n-1}$$

الحل

$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$ و $\lim_{n\to\infty} w_n = -1$ و $\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{0-1}{-1-1} = \frac{1}{2}$.

5 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ و $(t_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1},\quad y_n = x_n\sqrt{n},\quad w_n = x_n - \frac{1}{\sqrt{n}},\quad t_n = \frac{y_n}{w_n}$$

الحل

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{w_n} = -\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = -\infty$.

6 أوجد نهاية كلٍّ من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ و $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق:

$$x_n = \frac{3n^2-4}{n+1},\quad y_n = \frac{x_n}{n},\quad u_n = x_n - 3n$$

الحل

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 3$ و $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -3$.

7 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالصيغة $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

① أثبت أنَّ $0 < u_n \leq 1$، أياً يكن n.

② $a.$ أثبت أنه إذا كان $n > 10^4$، كان $0 < u_n < 10^{-2}$.

$b.$ أثبت أنه إذا كان $n > 10^8$، كان $0 < u_n < 10^{-4}$.

$c.$ كيف نختار n كي نحصل على $u_n < 10^{-8}$؟

③ ما نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$؟

الحل

① تابع الجذر التربيعي متزايد إذن $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq \sqrt{0+1} + \sqrt{0} = 1$ ومن ثَمّ

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \in \left]0,1\right]$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

② $a.$ إذا كان $n > 10^4$ كان $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} > \sqrt{10^4} = 10^2$ ومن ثَمّ

$$0 < u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{100}$$

② $b.$ إذا كان $n > 10^8$ كان $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} > \sqrt{10^8} = 10^4$ ومن ثَمّ

$$0 < u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < 10^{-4}$$

② $c.$ يكفي أن نختار $n > 10^{16}$ كي نحصل على $u_n < 10^{-8}$.

③ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$، لأنّه مهما صَغُر العدد ε الموجب تماماً يكفي أن نختار n_0 بحيث $n_0 > \varepsilon^2$ لتتحقق المتراجحة $u_n \in \left]-\varepsilon,\varepsilon\right[$ في حالة $n > n_0$.

8 المتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ معرفتان وفق: $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $y_n = \dfrac{1}{n}$.

① أثبت أنَّ العدد 1 راجحٌ على $(x_n)_{n\geq1}$.

② أثبت أنَّ $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

③ أيُّ النتيجتين السابقتين أكثر إثارة للاهتمام؟

الحل

① و ② هذا واضح لأنّه في حالة $n \geq 1$ لدينا $1 \leq n = \sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1}$ ومن ثَمّ

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} < \frac{1}{n} \leq 1$$

أي $x_n < y_n \leq 1$ أياً كانت $n \geq 1$.

③ إنّ الخاصة ② أكثر إثارة للاهتمام لأنها تفيد في إثبات أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

9 المتتاليتان $(x_n)_{n\geq1}$ و $(y_n)_{n\geq1}$ معرفتان وفق: $x_n = \dfrac{2n^2+5n+3}{2n+1}$ و $y_n = 5n$.

① أثبت أنَّ $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

② أثبت أنَّ $x_n \geq \dfrac{1}{5}y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

الحل

① نحسب، في حالة $n \geq 1$:

$$y_n - x_n = \frac{10n^2+5n-2n^2-5n-3}{2n+1} = \frac{8n^2-3}{2n+1} \geq \frac{8-3}{2n+1} = \frac{5}{2n+1} > 0$$

إذن $x_n \leq y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

② نحسب، في حالة $n \geq 1$:

$$x_n - \frac{1}{5}y_n = \frac{2n^2+5n+3-2n^2-n}{2n+1} = \frac{4n+3}{2n+1} > \frac{4n+2}{2n+1} = 2 > 0$$

إذن $x_n \geq \dfrac{1}{5}y_n$، أياً يكن $n \geq 1$.

10 المتتالية $(u_n)_{n\geq4}$ معرفة وفق $u_n = \dfrac{1}{n^2-5n+6}$. أثبت أنَّها محدودة من الأعلى بالعدد $\dfrac{1}{2}$.

الحل

نلاحظ أنّه في حالة $n \geq 4$ لدينا $n^2-5n+6 = (n-2)(n-3) \geq (4-2)(4-3) = 2$ إذن،

$$u_n = \frac{1}{n^2-5n+6} \leq \frac{1}{2}$$

لنتعلّم البحث معاً

11 عندما تفرض المناقشة نفسها

ليكن a و b عددين يحققان $a > b > 0$ ولتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

ادرس تقارب هذه المتتالية.

نحو الحلّ

في عبارة u_n، نجدُ فقط حدوداً من النمط q^n، وإذ لدينا معرفة بنهاية المتتالية $(q^n)_{n\geq 0}$، نفكر بالاستفادة من مبرهنات العمليات على النهايات. ولكنَّ a و b غير معروفين، فعلينا أن نتوقع التعرض لصيغة عدم تعيين.

1. تحقق من التعرض لصيغة عدم تعيين في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

❶ $a > 1$ و $b > 1$ ❷ $a > 1$ و $b < 1$.

2. في حالة $a = 1$ و $b < 1$، لماذا تفيد مبرهنات النهايات في تعيين نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ ؟

قد تفيد دراسة حالة خاصة في تعرف الحالة العامة. لنختر، مثلاً، في حالة $a = 3$ و $b = 2$، لدينا $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$. وعندما تكون قيم n كبيرة، تكون قيم 3^n و 2^n غاية في الكبر. لمقارنة مرتبتي كبرهما عندما تسعى n إلى $+\infty$. ندرس نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \dfrac{2^n}{3^n}$.

1. لماذا لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ؟

2. تحقق أنَّ $u_n = \dfrac{1 - v_n}{1 + v_n}$. إذن ما نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$؟

نستشف من المثال السابق أهمية المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ ودورها في الوصول إلى النتيجة المرجوة.

1. أوجد نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$ تبعاً لقيم a و b.

2. تحقق أنَّ $u_n = \dfrac{1 - v_n}{1 + v_n}$ واستفد من حصيلة الأسئلة السابقة للوصول إلى الهدف المنشود.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. في حالة $a > 1$ و $b > 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = +\infty$ ، إذن يظهر في بسط المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ صيغة عدم تعيين من النمط $(+\infty) - (+\infty)$. وفي حالة $a > 1$ و $b < 1$ لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$ ، إذن يظهر عند حساب نهاية $(u_n)_{n\geq 0}$ عدم تعيين من النمط $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

2. في حالة $a = 1$ و $b < 1$، لدينا $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ ، إذن نستنتج من المساواة

$$u_n = \frac{1-b^n}{1-b^n}$$

أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

1. المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{2^n}{3^n}$ هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3} < 1$، إذن

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$$

2. نحسب

$$\frac{1-v_n}{1+v_n} = \frac{1-\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2^n}{3^n}} = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = u_n$$

ولمّا كان $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ استنتجنا مجدداً أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$.

1. في حالة العامة المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = \frac{b^n}{a^n}$ هي متتالية هندسية أساسها $q = \frac{b}{a} < 1$،

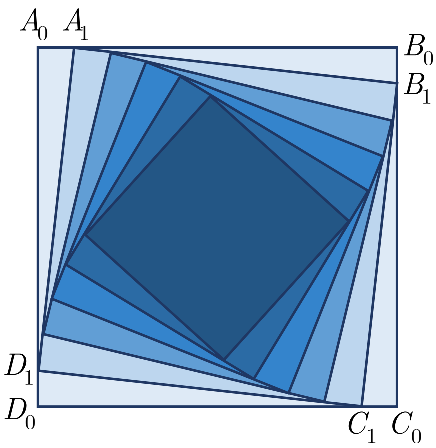
لأنه لدينا فرضاً $a > b > 0$، إذن $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

2. نحسب

$$\frac{1-v_n}{1+v_n} = \frac{1-\frac{b^n}{a^n}}{1+\frac{b^n}{a^n}} = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = u_n$$

ولمّا كان $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ استنتجنا مجدداً أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1-0}{1-0} = 1$.

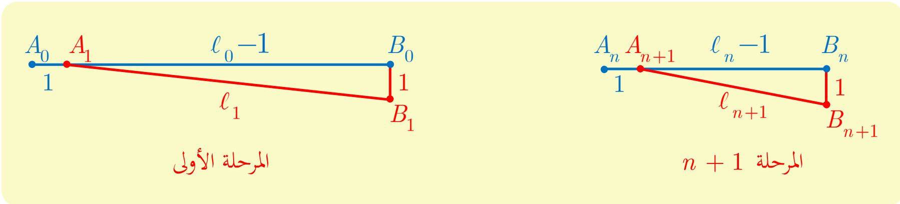
12 دراسة متتالية من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$



نرمز إلى المربع $A_0B_0C_0D_0$ الذي طول ضلعه 10 بالرمز S_0، وإلى المربع $A_1B_1C_1D_1$ الذي تقع رؤوسه على أضلاع S_0 (كما يشير الشكل المرافق) بالرمز S_1 حيث $A_0A_1 = 1$. بالطريقة التي رسمنا فيها S_1 انطلاقاً من S_0، نرسم S_2 انطلاقاً من S_1 ونقبل إمكانية الاستمرار بهذا الرسم عدداً غير منتهٍ من المرات. نرمز إلى طول ضلع المربع S_n بالرمز ℓ_n . نهدف إلى دراسة المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ وتعيين نهايتها.

نحو الحلّ

لنتفحّص كيف يجري الإنشاء: يُرسم كلُّ مربع انطلاقاً من سابقه. فالمتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ هي إذن متتالية تدريجية.



علّل صحة المتراجحة $1 < \ell_{n+1} < \ell_n$ أياً كان العدد الطبيعي n؟

لماذا يمكن استنتاج أنَّ المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ متقاربة؟

أثبت أنَّ $\ell_{n+1} = \sqrt{1+(\ell_n - 1)^2}$.

يبقى تحديد العدد ℓ، نهاية المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$. إحدى الطرق العامة لذلك هي الاستعانة بالتابع f المعرف بالعلاقة $\ell_{n+1} = f(\ell_n)$.

عيّنْ التابع f المستعان به.

أثبت أنَّ ℓ حلٌّ للمعادلة $x = \sqrt{1+(x-1)^2}$.

استنتج من ذلك قيمة النهاية ℓ.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

في المثلث القائم $A_{n+1}B_{n+1}B_n$ طول الوتر أكبر من طول أيّ من الضلعين القائمتين وبوجه خاص يكون $A_{n+1}B_{n+1} > B_nB_{n+1}$ أي $\ell_{n+1} > 1$. ومن جهة أخرى طول أي ضلع أصغر تماماً من مجموع طولي الضلعين الأخريين إذن $A_{n+1}B_{n+1} < A_{n+1}B_n + B_nB_{n+1}$ أي

$$\ell_{n+1} < \ell_n - 1 + 1 = \ell_n$$

فنكون بذلك قد أثبتنا أنّ $1 < \ell_{n+1} < \ell_n$، أياً كانت قيمة n.

المتتالية $(\ell_n)_n$ هي إذن متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 1 فلا بُدّ أن تكون متقاربة. لنرمز إلى نهايتها بالرمز ℓ.

وأخيراً، بتطبيق مبرهنة فيثاغورث في المثلث القائم $A_{n+1}B_{n+1}B_n$ نستنتج أنّ

$$\ell_{n+1} = \sqrt{1+(\ell_n - 1)^2}$$

إذا عرّفنا $f(x) = \sqrt{(x-1)^2+1}$ كانت المتتالية $(\ell_n)_{n\geq 0}$ معرّفة تدريجياً بالشرط $\ell_0 = 10$ والعلاقة $\ell_{n+1} = f(\ell_n)$. ولأنّ $\ell = \lim_{n\to\infty} \ell_n$ استنتجنا أنّ ℓ هي حلٌّ للمعادلة $x = f(x)$. وحل هذه المعادلة بسيط ويعطي $\ell = 1$. إذن $\lim_{n\to\infty} \ell_n = 1$.

13 مجموع عدد غير منته من الحدود

ليكن $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ في حالة عدد طبيعي غير معدوم n. وليكن

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

ادرس المتتالية $(S_n)_{n\geq 1}$.

نحو الحلّ

يبدو من غير الممكن الاستفادة من تطبيقات مباشرة لمبرهنات مألوفة. ولكن معرفة قيم بضعة حدود أولى من متتالية قد تتيح تصورَ خواصٍ لها من قبيل: جهة الاطراد، العناصر الراجحة عليها أو القاصرة عنها، أو إيجاد علاقة بين حدها ذي الدليل n والدليل ذاته n، أو بين هذا الحد والحد الذي يليه. احسب S_1 و S_2 و S_3 و S_4 بصيغة كسور مختزلة.

تُظهر النتائج أنَّ دليل S_n، أي n، يظهر في عبارة S_n. وتحديداً يبدو أنَّ $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

تحقّق أنّك ستحصل على النتيجة ذاتها عند $n = 5$ وعند $n = 6$.

أثبت صحة $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ بالبرهان بالتدريج.

ثمة حلٌّ آخر، يتمثل في تعيين عددين a و b يحققان $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$. جد هذين العددين ثمّ استنتج عبارة S_n.

ملاحظة: عند دراسة متتاليةٍ $(u_n)_{n\geq 0}$، من المهم، في أكثر الحالات، تعرُّف الحدود الأولى منها، ومعرفة ما إن كانت هذه الحدود تتيح رؤية علاقةٍ بين u_n و n.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

n	1	2	3	4	5	6
S_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$

لنثبت بالتدريج أنّ $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ أياً كانت $n \geq 1$ >

- نعرّف الخاصة $E(n)$ بأنها $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
- الخاصة $E(1)$ محققة وضوحاً إذ تنص على أنّ $S_1 = \dfrac{1}{1\times 2} = \dfrac{1}{1+1}$.

• لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ ولنلاحظ أنّ S_{n+1} تنتج من S_n بإضافة u_{n+1} إليها إذن

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + u_{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{n+1}{n+1+1} \end{aligned}$$

إذن $E(n+1)$ محققة. فنكون بذلك قد أثبتنا صحة المساواة $S_n = \dfrac{n}{n+1}$ أياً كانت $n \geq 1$.

✍ لنبحث عن عددين a و b بحيث تتحقق المساواة $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1}$ أياً كانت n. نلاحظ أنّ هذا يُكافئ $(a+b)n + a = 1$ مهما كانت n. إذن $a = 1$ و $b = -1$. ومنه

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

إذن

$$\begin{array}{rcccc} u_1 & = & 1 & - & \frac{1}{2} \\ u_2 & = & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{3} \\ u_3 & = & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} \\ \vdots & & \vdots & & \\ u_{n-1} & = & \frac{1}{n-1} & - & \frac{1}{n} \\ + \quad u_n & = & \frac{1}{n} & - & \frac{1}{n+1} \\ \hline S_n & = & 1 & - & \frac{1}{n+1} \end{array}$$

لاحظ وجود العديد من الاختصارات، إذ تُختصر جميع الحدود باستثناء 1 و $-\dfrac{1}{n+1}$. ونحصل مجدداً على الصيغة المطلوبة.

14 دراسة متتاليتين في آن معاً

ليكن a و b عددين يُحقّقان $0 < a < b$. ولنتأمّل المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق $x_0 = a$ و $y_0 = b$ وعند كل عدد طبيعي n:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

نهدف إلى دراسة المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ في آن معاً.

نحو الحلّ

☝ لنتفحص الفرْضَ كي نرى إنْ كانت ثمة نتائج مباشرة تفيد في الحل. يمكن ملاحظة أنَّ مقام x_{n+1} يساوي بسط y_{n+1}، فنستنتج أنَّ:

$$x_{n+1} \times y_{n+1} = x_n \times y_n = ab \qquad (*)$$

ونلاحظ أيضاً أنَّ x_n و y_n موجبان. تحقق من المساواة $(*)$.

أثبت، بالتدريج، صحة الخاصة «$x_n > 0$ و $y_n > 0$» : $E(n)$ ، أيّاً يكن العدد الطبيعي n.

✌ لتحقيق فهم أفضل، قد يكون مفيداً تعرُّف بضعَ حدودَ أولى من المتتالية. ولمّا كان a و b غير معلومين، نتأمّل مثلاً الحالة الخاصة $a = 1$ و $b = 3$.

احسب حدوداً أولى من كلٍّ من $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$.

وضِّعْ هذه الحدود على محور الأعداد الحقيقية، ماذا تلاحظ ؟

👌 ربما علينا إذن إثبات أنَّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان. ولتحقيق ذلك علينا بدايةً دراسة اطِّراد هاتين المتتاليتين. علينا إذن دراسة إشارة كلٍّ من $x_{n+1} - x_n$ و $y_{n+1} - y_n$.

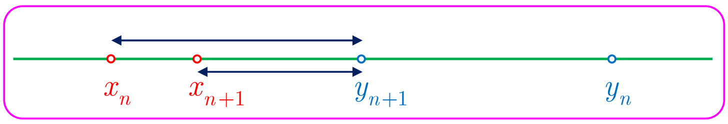
أثبت أنَّ:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n(y_n - x_n)}{x_n + y_n} \quad \text{و} \quad y_{n+1} - y_n = \frac{x_n - y_n}{2}.$$

لاحظ أنّ إشارتي x_n و $x_n + y_n$ معلومتان، فإشارتا $x_{n+1} - x_n$ و $y_{n+1} - y_n$ تتعلقان بإشارة $y_n - x_n$. يُتوقع استناداً إلى ✌ أنْ يكون $y_n - x_n$ موجباً. احسب $y_{n+1} - x_{n+1}$ واستنتج أنَّ $y_{n+1} - x_{n+1}$ موجب.

استنتج اطِّراد كلٍّ من المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$.

🖐 يبقى علينا إثبات أنَّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0$. ولذلك سنسعى إلى تعريف متتالية $(t_n)_{n\geq0}$ تحقق عند كل عدد طبيعي n المتراجحة $0 < y_n - x_n < t_n$، وبحيث يكون $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$. يبدو إنجاز ذلك صعباً انطلاقاً من العبارة $y_{n+1} - x_{n+1}$ التي أثبتناها سابقاً فلنرسم مخططاً يساعدنا:



أثبت إذنْ أنَّ $y_{n+1} - x_{n+1} \leq y_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(y_n - x_n)$.

أثبت، مستخدماً البرهان بالتدريج، أنَّ $y_n - x_n \leq \frac{1}{2^n}(y_0 - x_0)$.

أثبت أنَّ المتتاليتين تتقاربان إلى النهاية ℓ ذاتها.

استفدْ من العلاقة $(*)$ لإثبات أنَّ $\ell^2 = ab$ ثمّ $\ell = \sqrt{ab}$.

الحل

نتحقّق أولاً أنّ

$$x_{n+1}\cdot y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}\cdot\frac{x_n+y_n}{2}=x_n\cdot y_n$$

إذن المتتالية $(x_ny_n)_{n\geq 0}$ ثابتة وحدها الأوّل يساوي ab فجميع حدودها تساوي ab.

لنبين بالتدريج صحة الخاصة «$x_n>0$ و $y_n>0$» : $E(n)$.

- إنّ $E(0)$ صحيحة فرضاً، لأنّ $x_0=a>0$ و $y_0=b>0$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. عندئذ يكون كل من x_n+y_n و x_ny_n موجباً تماماً، وعندئذ يكون كذلك كل من $x_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ و $y_{n+1}=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}$. فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

وهكذا يكون $x_n>0$ و $y_n>0$ أياً كانت n.

نختار $a=1$ و $b=3$. ونحسب

n	0	1	2	3	4
x_n	1	1.5	1.7143	1.73196	1.732050805
y_n	3	2.0	1.7500	1.73214	1.732050810

نلاحظ وكأنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان. الأولى متزايدة والثانية متناقصة والمسافة بينهما تسعى إلى الصفر.

لنثبت إذن أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.

نلاحظ أولاً أنّ

$$y_{n+1}-y_n=\frac{x_n+y_n}{2}-y_n=\frac{x_n-y_n}{2}\qquad(1)$$

وأنّ

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}-x_n=\frac{x_ny_n-x_n^2}{x_n+y_n}=\frac{x_n}{x_n+y_n}(y_n-x_n)\qquad(2)$$

في الحالتين إشارة الفرق y_n-x_n هي التي تعطي للفرقين السابقين إشارتهما، لنحسب إذن

$$\begin{aligned}y_{n+1}-x_{n+1}&=\frac{x_n+y_n}{2}-\frac{2x_ny_n}{x_n+y_n}=\frac{(x_n+y_n)^2-4x_ny_n}{2(x_n+y_n)}\\&=\frac{(x_n-y_n)^2}{2(x_n+y_n)}\geq 0\end{aligned}$$

إذن لقد أثبتنا أنّ المقادير (y_n-x_n) موجبة في حالة $n\geq 1$، وهذا محقّق أيضاً في حالة $n=0$ لأننا افترضنا بداية أنّ $b-a>0$. إذن مهما كانت n كان $y_n-x_n\geq 0$. وبالعودة إلى (1) و (2) نستنتج أنّ المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ متزايدة، والمتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

لقد رأينا أنه مهما تكن n يكن

$$x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$$

عندئذ من الواضح أنّ

$$y_{n+1} - x_{n+1} \leq y_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(y_n - x_n)$$

- لنضع إذن $E(n)$ دلالة على الخاصة $y_n - x_n \leq \dfrac{y_0 - x_0}{2^n}$.
- الخاصة $E(0)$ صحيحة وضوحاً لأنّ $2^0 = 1$.
- لنفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. عندئذ

$$y_{n+1} - x_{n+1} \leq \frac{1}{2}(y_n - x_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{y_0 - x_0}{2^n}\right) = \frac{y_0 - x_0}{2^{n+1}}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. ونكون قد أثبتنا، مهما كان العدد الطبيعي n

$$0 \leq y_n - x_n \leq \frac{b-a}{2^n}$$

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$ إذن نستنتج مما سبق أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$. فالمتتاليتان $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان. وهما من ثَمّ تتقاربان من النهاية ℓ نفسها.

ولكن رأينا أنّ $x_n y_n = ab$ مهما كانت قيمة n، فإذا جعلنا n تسعى إلى اللانهاية استنتجنا أنّ $\ell^2 = ab$، ولكن العدد ℓ موجب لأنّه يحقق $a = x_0 \leq \ell \leq y_0 = b$. إذن $\ell = \sqrt{ab}$.

قُدُماً إلى الأمام

15 ادرس تقارب كلٍّ من المتتاليتين:

① $x_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n - 1}$ ② $y_n = \dfrac{10^n - 1}{10^n + 1}$.

الحل

نكتب

$$x_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \quad \text{و} \quad y_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^n}$$

ونتذكّر أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ في حالة $|q| < 1$، لنستنتج أنّ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 1.$$

16 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق: $u_0 = \frac{3}{2}$ وعند كل $n \in \mathbb{N}$، $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $1 \leq u_n \leq 2$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$.

② .a أثبت أنَّ $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$.

.b استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة.

③ أهي متقاربة؟

الحل

① لنضع $E(n)$ الخاصة $1 \leq u_n \leq 2$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ $u_0 = 1.5 \in [1,2]$.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ عندئذ $1 \leq u_n \leq 2$ ومن ثَمّ $0 \leq u_n - 1 \leq 1$ إذن

$$1 \leq (u_n - 1)^2 + 1 \leq 2$$

ولكن هذه هي تحديداً الخاصة $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ أي $E(n+1)$. فنكون قد أثبتنا أنّ $1 \leq u_n \leq 2$ مهما كانت قيمة n.

ملاحظة: يمكن أيضاً ملاحظة أنّ التابع $f(x) = x^2 - 2x + 2$ متزايد على المجال $[1,+\infty[$ ومن ثَمّ إذا كان $1 \leq u_n \leq 2$ كان $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

② نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2 \\ &= (u_n - 1)(u_n - 2) \end{aligned}$$

واستناداً إلى نتيجة ① إشارة المقدار $u_{n+1} - u_n$ سالبة أياً كانت n فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة. وهي محدودة من الأدنى بالعدد 1. إذن هي متقاربة من عدد ℓ.

ملاحظة: هنا تنتهي الإجابة عن السؤال المطروح. ولكن يمكننا في الحقيقة تعيين ℓ. إذ نعلم أنّ $1 \leq u_n \leq u_0$ مهما كانت n لأن المتتالية متناقصة. ومن ثَمّ $\ell \in [1,1.5]$، ونستنتج من المساواة $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$ بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\ell = \ell^2 - 2\ell + 2$، إذن إمّا أن يكون $\ell = 1$ أوأن يكون $\ell = 2$ ولكن هذه الأخيرة مستحيلة لأنّ $\ell \in [1,1.5]$. إذن $\ell = 1$، والمتتالية تسعى إلى الواحد.

17 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

① أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

② استنتج أنَّ العدد 3 راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

③ أثبت أنَّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة.

الحل

① لنضع $E(n)$ الخاصة $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ في حالة $n \geq 1$.

• الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنّ $\frac{1}{1!} = 1 = \frac{1}{2^0}$.

• لنفترض صحة الخاصة $E(n)$، عند قيمة $n \geq 1$. ننتقل من $\frac{1}{n!}$ إلى $\frac{1}{(n+1)!}$ بقسمة الأوّل على $n+1$ إذن

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

حيث استعملنا صحة $E(n)$ في (1)، واستعملنا أنّ $n \geq 1$ في (2). إذن $E(n+1)$ صحيحة.

فنكون قد أثبتنا أنّ $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ مهما كانت قيمة $n \geq 1$.

② نكتب استناداً إلى ما أثبتناه

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq 1 + \left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}\right) \quad ☞ \quad q = \frac{1}{2} \\ &\leq 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \end{aligned}$$

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

③ يكفي أن نلاحظ أن المتتالية متزايدة، إذ رأينا سابقاً أنّها محدودة من الأعلى. ولكن ننتقل من u_n إلى u_{n+1} بإضافة الحد $\frac{1}{(n+1)!}$ إلى الأوّل. إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$، والمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً، فهي متقاربة لأنّها محدودة من الأعلى بالعدد 3.

18 نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تحقّق الشرط التي: يوجد عدد حقيقي $\ell > 0$ يحقق عند كل n العلاقة $0 \leq u_{n+1} - \ell \leq \frac{2}{3}\left(u_n - \ell\right)$.

أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة إلى ℓ. بافتراض أنّ $u_0 = 1$ عيّن عدداً طبيعيّاً N يحقق $u_n \in \left]\ell - 10^{-3}, \ell + 10^{-3}\right[$ عند كل $n \geq N$.

الحل

- لتكن $E(n)$ الخاصة $0 \leq u_n - \ell \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell)$.
- باختيار $n = 0$ في الفرض $0 \leq u_{n+1} - \ell \leq \frac{2}{3}\left(u_n - \ell\right)$ نستنتج مباشرة أنّ $0 \leq u_0 - \ell$،

ومن ثمّ تكون المتراجحة $0 \leq u_0 - \ell \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 (u_0 - \ell)$ محققة وضوحاً، إذن $E(0)$ محققة.

- نفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. عندئذ

$$0 \leq u_{n+1} - \ell \leq \frac{2}{3}\left(u_n - \ell\right) \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (u_0 - \ell)$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً. إذن مهما كان العدد الطبيعي n كان

$$0 \leq u_n - \ell \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell)$$

لمّا كان $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأنّ $0 \leq \frac{2}{3} < 1$ استنتجنا بجعل n تسعى إلى اللانهاية في المتراجحة السابقة ومستفيدين من مبرهنة الإحاطة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(u_n - \ell\right) = 0$ أو $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

في حالة $u_0 = 1$ نستنتج من كون $u_0 - \ell \geq 0$ أنّ $\ell \leq 1$، ولدينا فرضاً $0 < \ell$. إذن $u_0 - \ell \leq 1$.

من ناحية أخرى

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{20} = \left(\frac{4}{9}\right)^{10} < \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}$$

(الفكرة هنا هي السعي لإظهار القوة العاشرة للعدد 2 وهي قريبة من 1000). إذن في حالة $n \geq 20$ يكون لدينا

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \ell) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \times 1 < 10^{-3}$$

ومن ثَمّ $0 \leq u_n - \ell < 10^{-3}$ أي $u_n \in \left]\ell - 10^{-3}, \ell + 10^{-3}\right[$. يمكن إذن أن نأخذ $N = 20$، أو أي عدد طبيعي أكبر منه.

19 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

① أثبت أنّ $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ ثمّ استنتج أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة نحو الصفر.

② المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق:

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

a. استفدْ من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n.

b. استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$.

الحل

① بملاحظة أنّ $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=1$ نستنتج مباشرة أنّ

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

ولأنّ المقام يسعى إلى اللانهاية عند $+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

②

$$\begin{array}{rcll}
u_0 & = & \sqrt{1} & -\ 0\\
u_1 & = & \sqrt{2} & -\ \sqrt{1}\\
u_2 & = & \sqrt{3} & -\ \sqrt{2}\\
u_3 & = & \sqrt{4} & -\ \sqrt{3}\\
\vdots & & \vdots & \\
u_{n-2} & = & \sqrt{n-1} & -\ \sqrt{n-2}\\
+\quad u_{n-1} & = & \sqrt{n} & -\ \sqrt{n-1}\\
\hline
v_n & = & \sqrt{n} &
\end{array}$$

بالطبع يسمح ما سبق بإثبات صحة الصيغة $v_n=\sqrt{n}$ ، ويمكن أيضاً إثبات صحتها بالتدريج على العدد n . انطلاقاً من هذه الصيغة للحد v_n نرى مباشرة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=+\infty$.

20 ما العبارات الصحيحة وما العبارات غير الصحيحة فيما يأتي؟ تحقّق من إجابتك في كل حالة.

① إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية، عندئذ ليس للمتتالية $(u_n+v_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

② إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متقاربة من عدد حقيقي ℓ وكانت $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية ليس لها نهاية حقيقية، عندئذ ليس للمتتالية $(u_nv_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقية.

③ إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\cdot v_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ، كان $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$.

④ إذا كان لمتتالية عنصرٌ قاصر عنها، كان لها عنصرٌ راجح عليها.

الحل

① صحيح. لأنّ $v_n=(v_n+u_n)-u_n$ ، فإذا افترضنا أنّه كان لدينا $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\ell'\in\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\ell\in\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=\ell'-\ell\in\mathbb{R}$ وهذا خُلفٌ.

② خطأ. خذ مثلاً $(u_n)_{n\geq 0}$ حيث $u_n=\frac{1}{n+1}$ التي تحقق $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0=\ell\in\mathbb{R}$ ، وخذ $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n=(-1)^n$. ليس للمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ نهاية ومع ذلك $\lim\limits_{n\to\infty}(u_nv_n)=0$.

③ صح، لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left((v_nu_n)\times\frac{1}{u_n}\right)=\ell\times 0=0$.

④ خطأ. خذ مثلاً $(u_n)_{n\geq0}$ حيث $u_n = n$. الصفر عنصر قاصر عن $(u_n)_{n\geq0}$ ، وليس لهذه المتتالية عنصر راجح عليها.

21 المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ معرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة.

② .a أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيّاً يكن $n \geq 1$.

.b ماذا يمكنك أنْ تستنتج بالنسبة إلى المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

الحل

① للانتقال من الحد u_n إلى الحد الذي يليه u_{n+1} نجمع إلى u_n العدد الموجب تماماً $\frac{1}{(n+1)^2}$ أي

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة.

② .a لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ في حالة $n \geq 1$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة لأنها تنص على أنّ $u_1 = \frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1}$ وهذه صحيح وضوحاً.
- لنفترض إذن صحة الخاصة $E(n)$ عندئذ

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \frac{1}{n+1} + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}}_{A} \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

إذن $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. أي إنّ الخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

② .b نستنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة.

ملاحظة. يُبرهن أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$ وترجع هذه النتيجة إلى أويلر.

22 ليكن عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

① أوجد عددين حقيقيَّين a و b يحققان عند كل عدد طبيعي n، $u_n = \dfrac{a}{2n-1} + \dfrac{b}{2n+1}$.

② ليكن، في حالة عدد طبيعي n، $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. عبِّرْ عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

الحل

① $u_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1}$.

②

$$
\begin{array}{lcll}
u_0 & = & \dfrac{\frac{1}{2}}{-1} & - \dfrac{\frac{1}{2}}{1} \\
u_1 & = & \dfrac{\frac{1}{2}}{1} & - \dfrac{\frac{1}{2}}{3} \\
u_2 & = & \dfrac{\frac{1}{2}}{3} & - \dfrac{\frac{1}{2}}{5} \\
\vdots & & \vdots & \\
u_{n-1} & = & \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-3} & - \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1} \\
+ \quad u_n & = & \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1} & - \dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1} \\
\hline
S_n & = & -\dfrac{1}{2} & - \dfrac{1}{4n+2}
\end{array}
$$

بالطبع يسمح ما سبق بإثبات صحة الصيغة

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} = -\frac{2n+3}{4n+2}$$

ويمكن أيضاً إثبات صحتها بالتدريج على العدد n. انطلاقاً من هذه الصيغة للحد S_n نرى مباشرة أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\dfrac{1}{2}$.

23 لنضع في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n، $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

① أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② اكتب $u_{2n} - u_n$ واستنتج أنَّ $u_{2n} - u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

③ أثبت، مستعملاً البرهان بالتدريج، أنَّ $u_{2^n} \geq \dfrac{n}{2}$، أيّاً يكن العدد الطبيعي n غير المعدوم.

④ هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية حقيقية؟

الحل

① ننتقل من الحد u_n إلى الحد u_{n+1} الذي يليه بإضافة $\frac{1}{n+1}$ إلى u_n أي

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$$

هذا يبرهن على أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

② u_{2n} يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية من 1 إلى $2n$ و u_n يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية من 1 إلى n إذن $u_{2n} - u_n$ يساوي مجموع مقاليب الأعداد الطبيعية من $n+1$ إلى n أي

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

هناك n حدّاً وأصغر هذه الحدود هو $\frac{1}{2n}$. إذن

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

③ لتكن $E(n)$ الخاصة $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ في حالة $n \geq 1$.

- الخاصة $E(1)$ صحيحة وضوحاً لأنّها تنص على أنّ $u_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. عندئذ: $u_{2^{n+1}} = u_{2^n} + u_{2\times 2^n} - u_{2^n} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$.

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة. إذن لقد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ أياً كانت $n \geq 1$.

④ لو افترضنا أنّ لهذه المتتالية نهاية حقيقية ℓ لكانت محدودة بهذه النهاية لأنها متزايدة. ولكن النتيجة السابقة تقول إنّ هذه المتتالية غير محدودة. فليس للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية حقيقية.

24 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+3} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$

① أثبت أنَّ $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$، أيّاً يكن $n \geq 1$.

② استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$. ما نهايتها؟

الحل

① يساوي u_n مجموع n حداً أصغرها $\frac{n}{n^2+n}$ وأكبرها $\frac{n}{n^2+1}$ إذن

$$n \times \frac{n}{n^2+n} \leq u_n \leq n \times \frac{n}{n^2+1}$$

② اعتماداً على مبرهنة الإحاطة، نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$ لأنّ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 \text{ و } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

25 المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل عدد طبيعي $n \geq 1$ وفق:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

① أثبت أنّ $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$، أيّاً يكن $n \geq 1$.

② استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$. ما نهايتها؟

الحل

① يساوي u_n مجموع n حداً أصغرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ وأكبرها $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ إذن

$$n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

② لمّا كان

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \text{ و } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$

استنتجنا من مبرهنة الإحاطة أن $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

26 بيّن أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ الآتيتين متجاورتان

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} \quad \text{و} \quad x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

الحل

نحسب

$$y_n - x_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}+n} \geq 0 \end{aligned}$$

فنستنتج أنّ $(y_n)_{n\geq 1}$ متناقصة، و $(x_n)_{n\geq 1}$ متزايدة و $\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ ، فالمتتاليتان متجاورتان.

27 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 3$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n+1}$.

① أثبت أنَّ $u_n > 0$، أياً يكن n.

② المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ معرفة عند كل عدد طبيعي n وفق $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. أثبت أنَّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية واحسب نهايتها.

③ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل

① لتكن $E(n)$ الخاصة $u_n > 0$ في حالة $n \geq 0$.

- الخاصة $E(0)$ صحيحة وضوحاً لأن $u_0 = 3 > 0$ فرضاً.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. عندئذ $u_n + 1 > 0$ ومن ثمّ $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n+1} > 0$، فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة. إذن لقد أثبتنا بالتدريج أنّ $u_n > 0$ أياً كانت $n \geq 0$.

② نحسب

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\dfrac{2}{u_n+1} - 1}{\dfrac{2}{u_n+1} + 2} = \frac{2 - u_n - 1}{2 + 2u_n + 2} = \frac{1 - u_n}{2(u_n+1)} = -\frac{1}{2}t_n$$

فنستنتج أنّ $(t_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\dfrac{1}{2}$ وحدها الأوّل $t_0 = \dfrac{3-1}{3+2} = \dfrac{2}{5}$. وبوجه خاص لدينا $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ لأنّ $|q| < 1$.

③ من المساواة $t_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ نستنتج أنّ $u_n = \dfrac{1 + 2t_n}{1 - t_n}$، ولأنّ $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

28 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = 2$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.

① أثبت أنَّ $u_n > 0$، أياً يكن n.

② المتتالية معرّفة بصيغة من النمط $u_{n+1} = f(u_n)$، عيّن التابع f المعرّف على $]0,+\infty[$.

a. ادرس تغيرات التابع f وارسم خطه البياني $\mathcal{C}_f$ ومقارباته، وارسم على الشكل نفسه المستقيم d الذي معادلته $y = x$، بعد أن تحسب إحداثيتا نقطة تقاطع d مع $\mathcal{C}_f$.

b. بيّن أنّ ما سبق يفيد في إثبات أنّ f متزايد على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$ وأنّ $f(x) \leq x$ على هذا المجال.

③ استفد من الرسم لتُنشئ الحدود الأولى من المتتالية المدروسة. أتجدها مطّردة؟ ما جهة اطرادها؟ أهي محدودة؟ ثُمّ برهن صحة توقعاتك عن طريق الاستفادة من b② لتبرهن بالتدريج أنّ : $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ مهما كان العدد n.

④ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها.

الحل

① تدريج بسيط: مقلوب عدد موجب موجب، وكذلك يكون نصفه وكذلك يكون مجموعهما.

② التابع موضوع الدراسة هو $f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

- هذا تابع مستمرٌ واشتقاقي على مجموعة تعريفه.
- وهو يحقق $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ فهو يقبل محور التراتيب مقارباً شاقولياً.
- وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ، ونلاحظ أنّ $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{x}$ ، إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y = \frac{x}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f كما إنّ $\mathcal{C}_f$ يقع فوق Δ ولا يتقاطع معه.
- نلاحظ أنّ

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{x+\sqrt{2}}{2x^2}\left(x-\sqrt{2}\right)$$

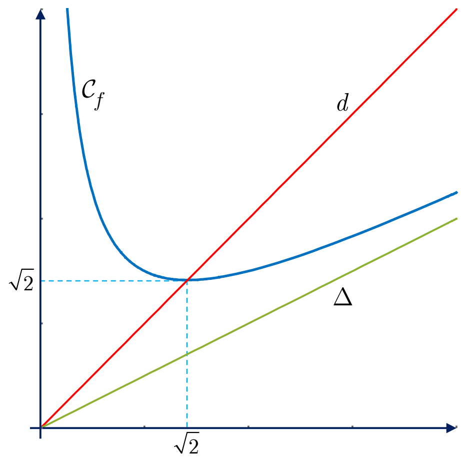
إذن إشارة $f'(x)$ تُماثل إشارة $x - \sqrt{2}$ ، ومنه جدول تغيرات f الآتي

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

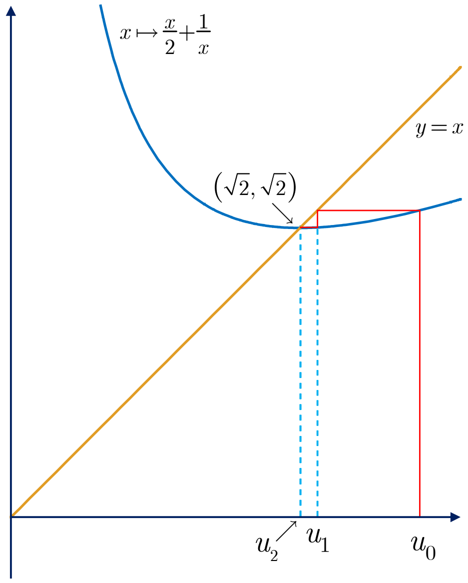
- وأخيراً نلاحظ أنّ

$$f(x) - x = \frac{2-x^2}{2x} = \frac{\sqrt{2}+x}{2x}(\sqrt{2}-x)$$

إذن يتقاطع $\mathcal{C}_f$ مع منصف الربع الأوّل d في النقطة $(\sqrt{2},\sqrt{2})$، ويقع $\mathcal{C}_f$ تحت d على $]\sqrt{2},+\infty[$ وفوقه على $]0,\sqrt{2}[$.



- نستنتج من الدراسة السابقة أنّ f متزايدٌ على المجال $[\sqrt{2},+\infty[$، وأنّ $f(x) \leq x$ على هذا المجال.



③ يوحي الرسم المجاور أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد $\sqrt{2}$.

- لنضع $E(n)$ الخاصة $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- لما كان $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$ استنتجنا أنّ

$$\sqrt{2} = f(\sqrt{2}) \leq u_1 = f(u_0) \leq u_0$$

إذن الخاصة $E(0)$ صحيحة.

- وإذا افترضنا أنّ $E(n)$ صحيحة: $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$، استنتجنا من كون f متزايداً أنّ

$$f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

أي

$$\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً.

④ نستنتج إذن أنّ $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ مهما كانت قيمة n. فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى فهي متقاربة من نهاية $\ell \geq \sqrt{2}$.

من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ نستنتج بجعل n تسعى إلى اللانهاية أنّ $\ell = f(\ell)$، إذن ℓ هي فاصلة نقطة تقاطع d و $\mathcal{C}_f$ أي $\ell = \sqrt{2}$. فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من العدد $\sqrt{2}$.

29 المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرفة وفق $u_0 = \frac{1}{2}$ وعند كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 2u_n$.

① احسب u_1 و u_2 و u_3 و u_4 و u_5.

② نرمز بالرمز f إلى التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$.

a. ادرس تغيرات f ونظِّمْ جدولاً بها.

b. أثبت أنَّه إذا انتمى x إلى المجال $[0,3]$، انتمى $f(x)$ إلى المجال $[0,3]$.

③ استنتج من السؤال السابق أنَّ:

a. العدد 3 عنصرٌ راجحٌ على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

b. المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

④ استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها مع ملاحظة أنَّ $u_{n+1} = f(u_n)$.

الحل

① نلاحظ من الجدول وكأن المتتالية تتزايد متقاربة من 3.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0.5	0.9167	1.5532	2.3023	2.8377	2.9912

② دراسة f بسيطة، ونجد له جدول التغيرات الآتي

x	$-\infty$		0		3		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نستنتج أنّ f متزايد تماماً على المجال $[0,3]$، فإذا كان $0 \le x \le 3$ كان

$$0 = f(0) \le f(x) \le f(3) = 3$$

أي $f([0,3]) \subset [0,3]$.

③ لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $0 \le u_n \le 3$.

- الخاصة $E(0)$ محققة لأنّ $u_0 = 0.5$ فرضاً.
- إذا كانت $E(n)$ محقّقة أي $u_n \in [0,3]$ استنتجنا مما سبق أنّ $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,3]$، أي إنّ $E(n+1)$ محققة. فنكون قد أثبتنا أنّ $0 \le u_n \le 3$ مهما كانت n.

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$، والعدد 0 قاصر عنها.

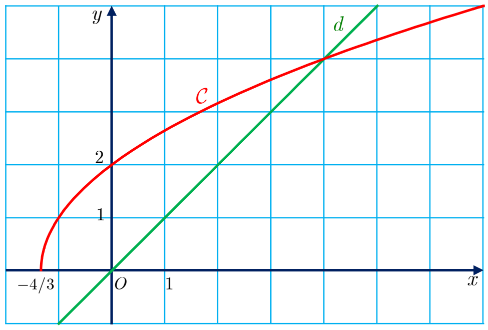
من جهة أخرى لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6u_n - u_n^2 - 3u_n}{3} = \frac{u_n(3-u_n)}{3} \ge 0$$

إذن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة.

④ المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة. وإذا رمزنا ℓ إلى نهايتها استنتجنا من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ ومن استمرار التابع f أنّ $\ell = f(\ell)$. أي إما أن يكون $\ell = 0$ أو $\ell = 3$. ولكنّ الحالة الأولى مستحيلة، لأنّ كون المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة يجعل جميع حدودها أكبر من الحد الأوّل $u_0 = 0.5$، فلا بُد أن تكون النهاية كذلك أكبر من 0.5 وهي من ثم لا يمكن أن تساوي 0. نستنتج إذن أنّ $\ell = 3$. أي $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$.

30 المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ معرفة وفق $u_0 > -\frac{4}{3}$ و $u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n}$ عند كل عدد طبيعي n. نجد في الشكل أدناه، الخط البياني C للتابع f المعرف على المجال $\left[-\frac{4}{3},+\infty\right[$ وفق $f(x) = \sqrt{4+3x}$. والمستقيم d الذي المعادلة $y = x$.



① ما إحداثيتا نقطة تقاطع الخط C والمستقيم d؟

② نفترض في هذا السؤال أنَّ $u_0 = 6$.

a. أثبت أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة من الأدنى.

b. ادرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

c. استنتج أنَّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة وأوجد نهايتها.

③ a. أثبت أنَّ هذه النتيجة صحيحة أياً يكن $u_0 > 4$.

b. هل هذه النتيجة صحيحة أيضاً عندما $-\frac{4}{3} < u_0 < 4$؟

الحل

① $(4,4)$.

② لنضع $E(n)$ دلالة على الخاصة $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

- من الفرض $u_0 = 6$ و $u_1 = f(6) = \sqrt{22} \in [4,6]$ لأنّ $16 \leq 22 \leq 36$. فالخاصة $E(0)$ صحيحة.
- لنفترض صحة الخاصة $E(n)$ أي $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$. نستنتج من كون التابع f متزايداً أنّ

$$f(4) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \quad \text{أو} \quad 4 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة.

نستنتج أنّ المتتالية متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 4. فهي متقاربة. ولكن لأنّ التابع f مستمرٌ نستنتج من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ أنّ $\ell = f(\ell)$، فالعدد ℓ هو فاصلة نقطة تقاطع $\mathcal{C}_f$ مع منصف الربع الأوّل d. إذن $\ell = 4$. ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

③ a. المكان الوحيد في البرهان السابق الذي استعملنا فيه قيمة u_0 هو لإثبات صحة $E(0)$ أي أنّ $4 \leq u_1 \leq u_0$. ولكن من الشكل لدينا $f(x) \leq x$ على المجال $[4,+\infty[$، والتابع f متزايدٌ على هذا المجال، فإذا بدأنا من $u_0 > 4$ كان $4 = f(4) \leq f(u_0) \leq u_0$. أي كانت الخاصة $E(0)$ محققة. وعندئذ تسري بقية خطوات الحل السابق دون تعديل ونستنتج أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى في هذه الحالة وتحقق $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

③ b. في هذه الحالة لدينا $f(x) \geq x$ على المجال $[-\frac{4}{3}, 4]$، والتابع متزايدٌ أيضاً. نبرهن إذن أنّه في حالة $-\dfrac{4}{3} \leq u_0 < 4$ تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 وتحقق مجدداً $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$.

5

التابع اللوغاريتمي النيبري

1. التابع اللوغاريتمي النيبري
2. لوغاريتم جداء ضرب
3. دراسة التابع اللوغاريتمي $\ln$
4. اشتقاق تابع مركب من النمط $\ln \circ u$
5. نهايات مهمة تتعلق بالتابع اللوغاريتمي

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف وخواص التابع اللوغاريتمي
- النهايات الأساسية المتعلقة بالتابع اللوغاريتمي
- اطراد التابع اللوغاريتمي واشتقاقيته
- اشتقاقيّة لوغاريتم تابع
- حل معادلات ومتراجحات تحوي لوغاريتم
- دراسة توابع تضم التابع اللوغاريتمي في علاقة ربطها.

تَدرَّبْ الصفحة 154

① في الحالات الآتية عيّن قيم x التي تجعل المقدار المعطى معرفاً:

❶ $\ln(x^2)$	❷ $\ln(1-x)$	❸ $\ln(x-3)$
❹ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$	❺ $\frac{1}{\ln x}$	❻ $\ln(x^2+4x)$
❼ $\ln(x^2-3x+2)$	❽ $\ln\lvert x+1\rvert-\ln\lvert x-1\rvert$	❾ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$

الحل

① ❶ $\ln(x^2)$ معرف عندما $x^2>0$، أي $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

❷ $\ln(1-x)$ معرف عندما $1-x>0$، أي $x<1$، إذن $x\in\left]-\infty,1\right[$.

❸ $\ln(x-3)$ معرف عندما $x-3>0$، أي $x>3$، إذن $x\in\left]3,+\infty\right[$.

❹ $\frac{1}{x}\ln(1+x)$ معرف في حالة $(1+x>0$ و $x\neq 0)$ أي $(x>-1$ و $x\neq 0)$، إذن

$$x\in\left]-1,+\infty\right[\setminus\{0\}=\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$$

❺ $\frac{1}{\ln x}$ معرف في حالة $(x>0$ و $\ln x\neq 0)$ أي $(x>0$ و $x\neq 1)$، إذن

$$x\in\left]0,+\infty\right[\setminus\{1\}=\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$$

❻ $\ln(x^2+4x)$ معرف عندما $x^2+4x>0$. x^2+4x ثلاثي حدود من الدرجة الثانية، جذراه 0 و -4، فتتحقق المتراجحة $x^2+4x>0$ خارج هذين الجذرين، بمعنى أنَّ $x\mapsto\ln(x^2+4x)$ معرف على $\left]-\infty,-4\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

❼ $\ln(x^2-3x+2)$ معرف عندما $x^2-3x+2>0$. أي على $\left]-\infty,1\right[\cup\left]2,+\infty\right[$.

❽ $\ln\lvert x+1\rvert-\ln\lvert x-1\rvert$ معرف في حالة $x+1\neq 0$ و $x-1\neq 0$ أي على $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$،

❾ $\ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right)$ معرف عندما $\frac{x-3}{2-x}>0$. أي على المجال $\left]2,3\right[$.

② f هو التابع المعرف على المجال $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=2+\ln x$. بيّن أنّ f اشتقاقي على I، واحسب $f'(x)$، واكتب معادلةً لمماس الخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل

- التابع $x\mapsto\ln x$ اشتقاقي على $\left]0,+\infty\right[$ والتابع الثابت $x\mapsto 2$ اشتقاقي على $\mathbb{R}$، فالتابع f اشتقاقي على $\left]0,+\infty\right[$ بصفته مجموع هذين التابعين.

• التابع المشتق للتابع f هو $f'(x) = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$. لإيجاد معادلة المماس، نبحث عن نقطة التماس وميل المماس. إنّ m ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 1 يساوي $m = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$.
ولأنّ فاصلة نقطة التماس $x_0 = 1$، فترتيبها $y_0 = f(1) = 2$. فمعادلة المماس في النقطة التي فاصلتها 1 هي $y = 2 + 1(x-1)$ أو $y = x+1$.

③ f هو التابع المعرف على المجال $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

❶ أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

❷ نظِّم جدولاً باطراد f.

❸ استنتج من جدول الاطراد أنَّ $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

الحل

❶ f هو مجموع التابعين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto \frac{1}{x}$ وكل منهما اشتقاقي على I، فالتابع f اشتقاقي على I. التابع المشتق للتابع f هو:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$$

❷ إشارة $f'(x)$ فتماثل إشارة $-1+x$ لأنَّ $x^2 > 0$ على I. وبهذا ننظم الجدول الآتي باطراد f:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

نجد من الجدول أنَّ f متناقص تماماً على المجال $]0,1]$ ومتزايد تماماً على المجال $[1,+\infty[$.

❸ نقرأ في الجدول أنَّ جميع قيم f أكبر من 1، أي $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$.

④ حلّ المعادلات الآتية:

❶ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$ ❷ $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

❸ $\ln(x-2) = \ln 2$ ❹ $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$

الحل

❶ $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $2x > 0$ و $2x = x^2 - 1$. أي $x > 0$ و $x^2 - 2x - 1 = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران أحدهما فقط موجب تماماً هو $x_0 = 1+\sqrt{2}$. (والآخر سالب هو $1-\sqrt{2}$ ولا يحقق الشرط الأوّل).

❷ $\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $-3x > 0$ و $x^2 - 4 = -3x$. أي $x < 0$ و $x^2 + 3x - 4 = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران أحدهما فقط سالب تماماً هو $x_0 = -4$. (والآخر موجب هو 1 ولا يحقق الشرط الأوّل).

❸ $\ln(x-2) = \ln 2$.

هذه المعادلة تكافئ $x - 2 = 2$ أي $x = 4$.

❹ $\ln(x-2) = \ln(x^2-2)$.

يُشترط للحلّ أن يكون $x - 2 > 0$ و $x^2 - 2 = x - 2$. أي $x > 2$ و $x(x-1) = 0$. وللمعادلة الأخيرة جذران 0 و 1 وكلاهما لا يحقق الشرط الأوّل. فمجموعة حلول هذه المعادلة خالية.

⑤ حلّ المتراجحات الآتية:

❶ $\ln(x-2) \le \ln(2x-1)$ ❷ $\ln(2x) \ge \ln(x^2-1)$

❸ $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \ge \ln x$ ❹ $\ln x \le \ln(x^2-2x)$

الحل

❶ $\ln(x-2) \le \ln(2x-1)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x - 2 > 0$ و $2x - 1 \ge x - 2$ معاً. أي $x > 2$ و $x > -1$. إذن $\mathcal{S} =]2,+\infty[$.

❷ $\ln(2x) \ge \ln(x^2-1)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x^2 - 1 > 0$ و $2x \ge x^2 - 1$ معاً. أي $x^2 - 1 > 0$ و $x^2 - 2x - 1 \le 0$. المتراجحة الأولى محققة فقط خارج المجال $[-1,1]$ والثانية محققة فقط في المجال $[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$. إذن $\mathcal{S} =]1,1+\sqrt{2}]$.

❸ $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \ge \ln x$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x > 0$ و $1 + \frac{2}{x} \ge x$ معاً. أي $x > 0$ و $x^2 - x - 2 \le 0$. وأخيراً $x > 0$ و $(x+1)(x-2) \le 0$. المتراجحة الأولى محققة فقط في المجال $]0,+\infty[$ والثانية محققة فقط في المجال $[-1,2]$. إذن $\mathcal{S} =]0,2]$.

❹ $\ln x \le \ln(x^2-2x)$.

مجموعة الحلول $\mathcal{S}$ هي مجموعة قيم x التي تحقق الشرطين : $x > 0$ و $x^2 - 2x \ge x$ معاً. أي $x > 0$ و $x(x-3) \ge 0$. وأخيراً $x > 0$ و $x - 3 \ge 0$. إذن $\mathcal{S} = [3,+\infty[$.

تَدرَّبْ الصفحتان 157 و 158

① بسِّط كتابة الأعداد الآتية:

❶ $a = \ln 3 + \ln\dfrac{1}{3}$ ❷ $b = \ln\dfrac{1}{16}$ ❸ $c = \dfrac{1}{2}\ln\sqrt{2}$

الحل

❶ $a = \ln 3 - \ln 3 = 0$

❷ $b = -\ln 16 = -\ln 2^4 = -4\ln 2$

❸ $c = \dfrac{1}{2}\times\ln 2^{1/2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\ln 2 = \dfrac{1}{4}\ln 2$

② اكتب كلاً من الأعداد الآتية بدلالة $\ln 2$ و $\ln 5$:

❶ $a = \ln 50$ ❷ $b = \ln\dfrac{16}{25}$ ❸ $c = \ln 250$

الحل

❶ $a = \ln(2\times 5^2) = \ln 2 + \ln 5^2 = \ln 2 + 2\ln 5$

❷ $b = \ln\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 2\ln\left(\dfrac{4}{5}\right) = 2(\ln 4 - \ln 5) = 4\ln 2 - 2\ln 5$

❸ $c = \ln(2\times 5^3) = \ln 2 + \ln 5^3 = \ln 2 + 3\ln 5$

③ أثبت أنَّ $\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) = 0$.

الحل

$$\begin{aligned}\ln(2+\sqrt{3}) + \ln(2-\sqrt{3}) &= \ln\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)\\ &= \ln(4-3) = \ln 1 = 0\end{aligned}$$

④ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x = \ln 5,\quad y = \ln 2 + \ln 3$

❷ $x = 2\ln 3,\quad y = 3\ln 2$

الحل

❶ $y = \ln(2\times 3) = \ln 6 > \ln 5 = x$. إذن $y > x$.

❷ $x = \ln 3^2 = \ln 9$ و $y = \ln 2^3 = \ln 8$. إذن $x > y$.

⑤ فيما يأتي بسِّط كتابة كلٍ من a و b.

❶ $a = \ln 567 - \ln 72 - \ln\dfrac{7}{8} + \ln\dfrac{1}{27}$

❷ $b = \ln\sqrt{216} + \ln\sqrt{75} - \ln 15 - \ln\sqrt{27}$

الحل

❶

$$a = \ln\left(\frac{567 \times 8}{72 \times 7 \times 27}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{7} \times 81 \times \cancel{8}}{\cancel{8} \times 9 \times \cancel{7} \times 27}\right) = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$

❷

$$b = \frac{1}{2}\left(\ln 216 + \ln 75 - \ln 225 - \ln 27\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{8 \times \cancel{27} \times \cancel{75}}{\underset{3}{\cancel{225}} \times \cancel{27}} = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(3\ln 2 - \ln 3\right) = \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3$$

⑥ أثبت صحة كلٍ من المساواتين الآتيتين مهما يكن $x > 0$.

❶ $\ln(1+x) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

❷ $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

الحل

❶ نرمز إلى الطرف الأيمن من العلاقة بالرمز A، فتكون المساواة صحيحة لأن:

$$A = \ln x + \ln(\tfrac{x+1}{x}) = \cancel{\ln x} + \ln(1+x) \cancel{- \ln x} = \ln(1+x)$$

❷ نرمز إلى الطرف الأيمن من العلاقة بالرمز B، فتكون المساواة صحيحة لأن:

$$B = \ln(x^2) + \ln(\tfrac{x^2+1}{x^2}) = \cancel{\ln x^2} + \ln(1+x^2) \cancel{- \ln x^2} = \ln(1+x^2)$$

⑦ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، جد مجموعة قيم x التي تُحقّق المساواة.

❶ $\ln(x^2 - x) = \ln x + \ln(x-1)$

❷ $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$

الحل

❶ الطرف الأيمن من المساواة معرف عندما $x > 0$ و $x - 1 > 0$ أي في حالة $x \in]1,+\infty[$.
وعندئذ تتحقق المساواة المعطاة بحسب خواص اللوغاريتم إذن تتحقق المساواة فقط على $]1,+\infty[$.

❷ الطرف الأيمن من المساواة معرف عندما $x - 1 > 0$ و $x + 2 > 0$ أي في حالة $x \in]1,+\infty[$.
وعندئذ تتحقق المساواة المعطاة بحسب خواص اللوغاريتم إذن تتحقق المساواة فقط على $]1,+\infty[$.

⑧ جد مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق كلاً من المتراجحات الآتية:

❶ $2^n \le 100$ ❷ $\left(\frac{1}{3}\right)^n \le 10^{-2}$ ❸ $0.2 \ge \left(\frac{2}{5}\right)^n$ ❹ $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \ge 2$

الحل

❶ $2^6 = 64 < 100$ و $2^7 = 128 > 100$، فمجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

❷ المتراجحة $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-2}$ تكافئ $\frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{100}$، إذن $3^n \geq 100$. ولكن $3^4 = 81 < 100$ و $3^5 = 242 > 100$، فمجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $n > 4$.

❸ المتراجحة $0.2 \geq \left(\frac{2}{5}\right)^n$ تكافئ $\ln(0.2) \geq n\ln(0.4)$ ولأنّ $\ln(0.4) < 0$ هذه الأخيرة تكافئ $n \geq \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.4)} = \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} \approx 1.76$. إذن مجموعة قيم n التي تحقق هذه المتراجحة هي $n \geq 2$.

يمكن أن نتحقق دون آلة حاسبة أنّ $2 < \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 2} < 1$ لأنّ هذه المتراجحة تكافئ $2 < 1$ و $5 < 4$.

❹ المتراجحة $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n \geq 2$ تكافئ $n \times \ln\left(1+\frac{3}{100}\right) \geq \ln 2$ لأنَّ التابع $\ln$ متزايد تماماً. وهذه تكافئ $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1.03)} \approx 23.45$، فمجموعة قيم n التي تحقق المتراجحة هي $n \geq 24$.

⑧ حل كلّ متراجحة أو معادلة فيما يأتي:

❶ $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$ ❷ $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$

❸ $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$ ❹ $\ln(x+11) = \ln[(x+3)(x+2)]$

❺ $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x-6) + \ln(x+1)$ ❻ $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

❼ $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$ ❽ $\ln(3x^2 - x) \leq \ln x + \ln 2$

❾ $\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2 - x - 2)$ ❿ $3\ln x > \ln(3x-2)$

الحل

❶ المعادلة $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

الطرف الأيسر معرّف فقط في حالة $x > 0$، وعندها يكون الطرف الأيمن معرفاً لأن $2x > 0$ و $x + 4 > 0$. ولأنّ $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ نجد المعادلة المعطاة تكافئ $\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x+4)$ نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\frac{x}{2} = (x+4)$ فنجد حلها $x = -8$ ومن ثمّ مجموعة حلول المعادلة المعطاة خالية.

❷ المعادلة $2\ln x = \ln(2x^2 + 8x)$

مجموعة تعريف المعادلة هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x > 0$ و $2x^2 + x > 0$ فهي إذن $D =]0,+\infty[$. وعلى المجموعة D، تُكتب المعادلة (E) بالشكل $\ln x^2 = \ln(2x^2 + 8x)$. نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2 = 2x^2 + 8x$ التي تعطي بعد الإصلاح $x(x+8) = 0$ وهذا مستحيل في حالة $x > 0$. فمجموعة حلول المعادلة خالية.

❸ المعادلة $\ln(x+11)=\ln(x+3)+\ln(x+2)$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحات $x+11>0$ و $x+3>0$ و $x+2>0$، فهي إذن $I=]-2,+\infty[$. وعلى I، لدينا:

$$\ln(x+3)+\ln(x+2)=\ln[(x+3)(x+2)]=\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$$

نحل إذن المعادلة $x^2+5x+6=x+11$ أو $x^2+4x-5=0$ أو $(x-1)(x+5)=0$. لهذه المعادلة جذران حقيقيان: $x_1=-5\notin I$ و $x_2=1\in I$. فللمعادلة (E) حل وحيد $x=1$.

❹ المعادلة $\ln(x+11)=\ln[(x+3)(x+2)]$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x+11>0$ و $(x+3)(x+2)>0$ فهي إذن $I=]-11,-3[\cup]-2,+\infty[$. وعلى I، تكتب (E) بالصيغة:

$$\ln\big((x+3)(x+2)\big)=\ln(x^2+5x+6)=\ln(x+11)$$

نحل إذن المعادلة $x^2+5x+6=x+11$ فنجد لها جذرين حقيقيين: $x_1=-5\in I$ و $x_2=1\in I$. فمجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{-5,1\}$.

❺ المعادلة $\ln 4+\ln 2=\ln(x-6)+\ln(x+1)$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً المتراجحتين $x>6$ و $x>-1$، فهي $I=]6,+\infty[$. وعلى I، تكتب المعادلة $\ln(4\times 2)=\ln[(x-6)(x+1)]$ أو $\ln(x^2-5x-6)=\ln 8$. نحلّ إذن المعادلة $x^2-5x-6=8$ فنجد لها جذرين $x_1=7\in I$ و $x_2=-2\notin I$. فللمعادلة (E) حلٌّ وحيد هو $x=7$.

❻ المعادلة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}$

مجموعة تعريف المعادلة المعطاة (E) هي مجموعة قيم x التي تحقّق في آنٍ معاً $x>0$ و $x<3$ و $x>-1$، فمجموعة تعريفها $I=]0,3[$. وعلى المجال I، تكتب المعادلة (E) بالصيغة $\frac{1}{2}\ln(2x)=\ln(3-x)-\frac{1}{2}\ln(x+1)$، أو بعد الإصلاح $\ln(2x^2+2x)=\ln(x^2-6x+9)$. نحلّ إذن المعادلة $2x^2+2x=x^2-6x+9$ التي تكافئ $(x+9)(x-1)=0$. فنجد لها، حلّين $x_1=-9\notin I$ و $x_2=1\in I$. إذن للمعادلة (E) حلٌّ وحيد هو $x=1$.

❼ المتراجحة $\ln 3\le\ln(5-x)+\ln(x-1)$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x<5$ و $x>1$، فمجموعة تعريفها $I=]1,5[$. وعلى I، تكتب المتراجحة $\ln 3\le[\ln(5-x)(x-1)]$ أو $\ln 3\le\ln(-x^2+6x-5)$ فهي تكافئ

$$(x-2)(x-4)\le 0$$

فمجموعة حلول المتراجحة الأصلية هي المجال $[2,4]$ المحتوى في I.

❽ المتراجحة $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x>0$ و $3x^2-x>0$، أي $x>0$ و $x(3x-1)>0$، أو $x>0$ و $3x-1>0$. فمجموعة تعريف المتراجحة المدروسة هي $I=\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$. وعلى I، تكتب المتراجحة $\ln x+\ln(3x-1)\leq \ln x+\ln 2$ أو $\ln(3x-1)\leq \ln 2$. وهذه تكافئ $0<3x-1\leq 2$ أو $\frac{1}{3}<x\leq 1$. نستنتج أنَّ مجموعة حلول المتراجحة المدروسة هي $\left]\frac{1}{3},1\right]$.

❾ المتراجحة $\ln(6x+4)\leq \ln(3x^2-x-2)$

مجموعة حلول هذه المتراجحة هي قيم x التي تحقق $0<6x+4\leq 3x^2-x-2$ فهي إذن مجموعة قيم x التي تحقق في آن معاً

$0<3x+2$ و $0\leq 3x^2-7x-6=(3x+2)(x-3)$.

أو $x>-\frac{3}{2}$ و $x\geq 3$، أي $x\geq 3$. نستنتج أنَّ مجموعة حلول المتراجحة المدروسة هي $[3,+\infty[$.

❿ المتراجحة $3\ln x > \ln(3x-2)$

هذه المتراجحة معرفة في حالة $x>0$ و $3x-2>0$. أي $x>\dfrac{2}{3}$. وفي هذه الحالة هي تكافئ

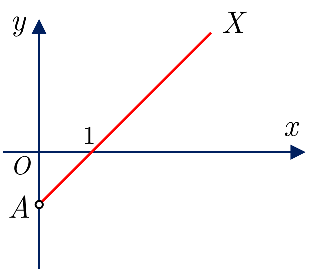
$$0<3x-2 \quad \text{و} \quad 3x-2<x^3$$

ولكن $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. إذن عندما $x>\frac{2}{3}$ يكون $x^3-3x+2\geq 0$ ولا تتحقق المساواة إلّا في حالة $x=1$. فمجموعة حلول المتراجحة المعطاة هي $]\frac{2}{3},1[\cup]1,+\infty[$.

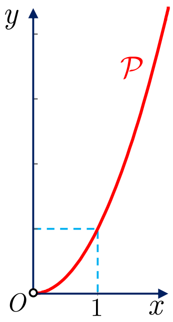
⑨ في كل حالة آتية، ارسم في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحقّقة للشرط المشار إليه.

❶ $\ln x=\ln(y+1)$ ❷ $\ln y = 2\ln x$ ❸ $\ln x+\ln y=0$

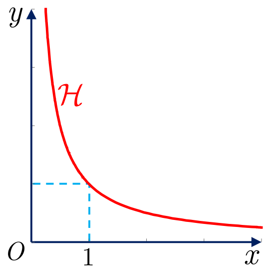
الحل



❶ العلاقة $\ln x=\ln(y+1)$ معرفة في حالة $x>0$ و $y>-1$. مع هذين الشرطين العلاقة $\ln x=\ln(y+1)$ تكافئ $x=y+1$ أو $y=x-1$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي نصف المستقيم $[AX)$ المحمول على الخط البياني للتابع $x\mapsto x-1$ دون طرفه $A(0,-1)$.



❷ العلاقة $\ln y = 2\ln x$ معرفة في حالة $x > 0$ و $x > 0$. مع هذين الشرطين العلاقة $\ln y = 2\ln x$ تكافئ $\ln y = \ln(x^2)$ أو $y = x^2$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي نصف القطع المكافئ $(\mathcal{P})$ المرسوم في الربع الأول عدا ذروته $O(0,0)$.

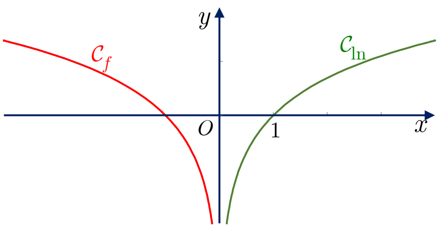


❸ العلاقة $\ln y + \ln x = 0$ معرفة في حالة $x > 0$ و $x > 0$. مع هذين الشرطين العلاقة $\ln y + \ln x = 0$ أو العلاقة $\ln y = -\ln x$ تكافئ $\ln y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ وتكافئ $y = \frac{1}{x}$. فمجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط هي فرع القطع الزائد $(\mathcal{H})$ الذي معادلته $xy = 1$ والمرسوم في الربع الأول.

تَدرَّبْ الصفحة 162

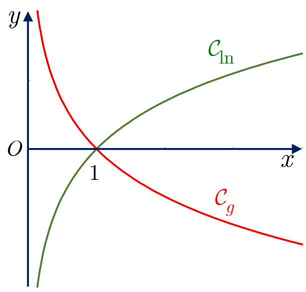
① انطلاقاً من الخط البياني للتابع $x \mapsto \ln x$، ارسم الخط البياني لكل من التوابع الآتية : $x \mapsto \ln(-x)$، و $x \mapsto -\ln x$ و $x \mapsto -\ln(-x)$، و $x \mapsto 1 + \ln x$.

الحل

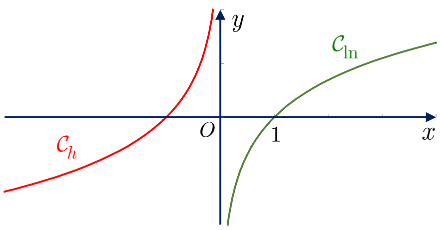


نرمز إلى الخط البياني للتابع ln بالرمز $\mathcal{C}_{\ln}$.

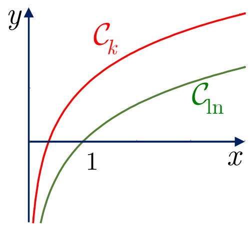
- التابع f: $f(x) = \ln(-x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_f$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (-x,y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور التراتيب.



- التابع g: التابع $g(x) = -\ln(x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_g$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (x,-y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى محور الفواصل.



- التابع h: $h(x) = -\ln(-x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_h$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x,y) \to (-x,-y)$ فهو نظير $\mathcal{C}_{\ln}$ بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات.



• التابع k : $k(x) = 1 + \ln(x)$ خطه البياني $\mathcal{C}_k$ ناتجٌ عن $\mathcal{C}_{\ln}$ بالتحويل $(x, y) \to (x, 1 + y)$ فهو ناتج من $\mathcal{C}_{\ln}$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.

② أثبت أنَّ $\ln x \le 2(\sqrt{x} - 1)$، أياً يكن $x > 0$. واستنتج أنّ $2 < e < 4$ باختيار قيم مناسبة للعدد x.

الحل

ندرس اطراد التابع $f : x \mapsto \ln x - 2\sqrt{x} + 2$ المعرف على المجال $I = \left]0, +\infty\right[$. نلاحظ أنّ

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x} = \frac{1 - x}{x(1 + \sqrt{x})}$$

إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $1 - x$ ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

• نقرأ في الجدول أنّ $f(x) \le 0$ أياً يكن $x > 0$. أي $\ln x \le 2(\sqrt{x} - 1)$، أياً يكن $x > 0$. وأنّ المساواة تقع فقط عندما $x = 1$.

• باختيار $x = e$ نستنتج أنّ $1 \le 2(\sqrt{e} - 1)$ أو $\frac{3}{2} \le \sqrt{e}$ وأخيراً $2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 \le e$.

• وباختيار $x = \frac{1}{e}$ نستنتج أنّ $-1 \le 2\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right)$ أو $\sqrt{e} \le 2$ وأخيراً $e \le 4$.

• وباختيار $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ نستنتج أنّ $e < \frac{2^8}{3^4} = \frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81} < 4$.

③ في كلٍ من الحالتين الآتيتين، قارن بين العددين x و y دون استعمال آلة حاسبة.

❶ $x = \ln e^3 - 2, y = \ln\left(e\sqrt{e}\right)$ ❷ $x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3, y = \left(\ln\frac{1}{e}\right)^2$

الحل

❶ $x = \ln e^3 - 2 = 1$ و $y = \ln(e \times e^{\frac{1}{2}}) = \ln(e^{\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2}$ إذن $x < y$.

❷ $x = \ln\frac{1}{e^3} = -\ln e^3 = -3$ و $y = (-\ln e)^2 = (-1)^2 = 1$ إذن $x < y$.

5

④ حلّ كل متراجحة أو معادلة مما يأتي :

❶ $\ln(1-x)=-2$ ❷ $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

❸ $(\ln x)^2=16$ ❹ $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

❺ $\ln(2-x)\geq 1$ ❻ $\ln\dfrac{1}{x}>2$

الحل

❶ $\ln(1-x)=-2$

المعادلة المدروسة تكافئ $1-x=e^{-2}$ إذن $x=1-e^{-2}$.

❷ $\ln(x-2)-\ln(x+1)=2$

كلّ حل x لهذه المعادلة يحقق الشروط $x-2>0$ و $x+1>0$ و $\ln\dfrac{x-2}{x+1}=2$ أي

$$x>2 \quad \text{و} \quad x=\frac{e^2+2}{1-e^2}$$

وهذا مستحيل لأنّ $\dfrac{e^2+2}{1-e^2}<0$ فليس لهذه المعادلة حلول.

❸ المعادلة $(\ln x)^2=16$

تكتب هذه المعادلة بالشكل $(\ln x-4)(\ln x+4)=0$. فإما $\ln x-4=0$، ومنه $x=e^4$. وإما $\ln x+4=0$، إذن $\ln x=-4$، ومنه $x=e^{-4}$. فمجموعة حلول المعادلة هي $\left\{e^4,e^{-4}\right\}$.

❹ المعادلة $(\ln x-1)(\ln x+2)=0$

إما $\ln x-1=0$، إذن $\ln x=1$، ومنه $x=e$. وإما $\ln x+2=0$، إذن $\ln x=-2$، ومنه $x=e^{-2}$. فللمعادلة المدروسة جذران $x_1=e$ و $x_2=e^{-2}$.

❺ المتراجحة $\ln(2-x)\geq 1$

هذه المتراجحة تكافئ $2-x\geq e$، إذن $x\leq 2-e$. فمجموعة حلول المتراجحة هي $]-\infty,2-e]$.

❻ المتراجحة $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)>2$

هذه المتراجحة تكافئ $\dfrac{1}{x}>e^2$، إذن $0<x<\dfrac{1}{e^2}$. فمجموعة حلول المتراجحة هي المجال $\left]0,e^{-2}\right[$.

تَدرَّبْ الصفحة 165

① جد كلاً من النهايات الآتية:

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$ ❷ $\lim\limits_{x\to0}\left((x^2-x)\ln x\right)$ ❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

الحل

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$

في حالة $x>0$ لدينا: $\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln x}{x^2}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0\times0=0$.

❷ $\lim\limits_{x\to0}\left((x^2-x)\ln x\right)$

لاحظ أنّه في حالة $x>0$ لدينا: $(x^2-x)\ln x=(x-1)(x\ln x)$. ولكن

$\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1$

إذن $\lim\limits_{x\to0}\left((x^2-x)\ln x\right)=-1\times0=0$.

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$

في حالة $x>0$ لدينا: $\dfrac{u}{\ln u}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$، وقد وضعنا $u=u(x)=\sqrt{x}$. ولكن

$\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{\ln u}=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}=+\infty$.

② فيما يأتي، جد نهاية التابع f عند أطراف مجالات تعريفه.

1. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$
2. $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x}$
3. $f(x)=x-\ln x$
4. $f(x)=x+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$
5. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$
6. $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$
7. $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$
8. $f(x)=x(1-\ln x)$
9. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right)$
10. $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x-1)$
11. $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x}$
12. $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$

الحل

1. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=\,]0,+\infty[$.

- نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ وهي نهاية f عند $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

2. $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x}$. مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=\,]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.
- في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=\dfrac{x}{x}-\dfrac{\ln x}{x}=1-\dfrac{\ln x}{x}$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1-0=1$.

3. $f(x)=x-\ln x$.

مجموعة تعريف هذا التابع هي $I=\,]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to0}(\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}x=0^+$ ، إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$.
- في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)=1$ ، ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

4. $f(x)=x+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$. مجموعة تعريف f هي $I=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$

- لحساب نهاية التابع f في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$ وعند -1 ، نكتب

$f(x)=x+\dfrac{\ln(1+u)}{u}$ و $u(x)=\dfrac{1}{x}$.

نظراً إلى أنَّ $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=0$ ، و $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ نجد $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty+1=-\infty$.

وبالمثل $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ ، و $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=1$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty+1=+\infty$.

وأخيراً لأنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\big(1+u(x)\big)=0^+$ ، وجدنا $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\ln(1+u)}{u}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-1+\infty=+\infty$.

- لحساب نهاية التابع f عند 0 نكتب في حالة $x>0$ ما يأتي:

$$f(x)=x+x\ln(1+x)-x\ln x$$

ونظراً إلى أنَّ $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0$ ، و $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(1+x)=0\times0$ نجد $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$.

5. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to +\infty}(-\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$.

6. $f(x)=\frac{x\ln x}{x+1}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{0}{1}=0$.
- لحساب نهاية f في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$.

7. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

- $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0^-$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=0^+$.

8. $f(x)=x(1-\ln x)$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}(1-\ln x)=-\infty$. و $\lim\limits_{x\to +\infty}(x)=+\infty$ ،

نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$.

- لحساب نهاية f عند الصفر، نكتب $f(x)=x-x\ln x$.

$\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0-0=0$

9. $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$.

f معرف على مجموعة قيم x التي تحقق $\frac{x+1}{x-4}>0$. أي $I=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]4,+\infty\right[$.

لنضع $u(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to 1}\ln(u)=0$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} u(x)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{u\to 0}\ln(u)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 4^+} u(x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to 1}\ln(u)=0$.

.10 $f(x)=\dfrac{1}{x}(\ln x-1)$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-1)=-\infty$. و $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$. نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

لحساب نهاية f في جوار $+\infty$ ، نكتب $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}$. ونعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0-0=0$.

.11 $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x}$.

مجموعة تعريف f هي المجال $I=]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ و $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

في جوار $+\infty$ لدينا $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\times\dfrac{x}{\ln x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)=+\infty$ ،
إذن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$. وأخيراً $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$.

.12 $f(x)=x+\ln(x+1)-\ln x$.

مجموعة تعريف f هي $I=]0,+\infty[$. نكتب $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ ، ونضع $u=\dfrac{x+1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x)=0$.نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=1$ ، إذن $\lim\limits_{u\to 1}\ln(u)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

③ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x}$.

1. لماذا المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟

2. ادرس الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$.

الحل

1. ليكن g التابع المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق $g(x) = f(x) - (x+1)$، أي

$g(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{x} - (x+1) = -\frac{\ln x}{x}$.

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. فالمستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

2. لدراسة الوضع النسبي للخطين d و $\mathcal{C}$، ندرس إشارة $g(x)$، التي تماثل إشارة $-\ln x$ فنجد

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

نستخلص من الجدول:

- في النقطة $(1,2)$: يتقاطع الخطان d و $\mathcal{C}$.
- على المجال $]0,1[$ لدينا $g(x) > 0$، إذن الخط $\mathcal{C}$ يقع فوق المستقيم d.
- على المجال $]1,+\infty[$ لدينا $g(x) < 0$، إذن الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت المستقيم d.

④ في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

❶ $I =]2,+\infty[,\quad f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$ ❷ $I =]1,+\infty[,\quad f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

❸ $I =]0,+\infty[,\quad f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ❹ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = \ln(1+x^2)$

الحل

❶ التابع $x \mapsto \ln(x-2)$ اشتقاقي على $I_1 =]2,+\infty[$ والتابع $x \mapsto \ln(x+2)$ اشتقاقي على $I_2 =]-2,+\infty[$، و f هو مجموع هذين التابعين، فهو اشتقاقي على $I_1 \cap I_2 =]2,+\infty[$.

$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$.

❷ على $]1,+\infty[$ التابع $x \mapsto u(x) = \frac{x-1}{x+1}$ موجب تماماً واشتقاقي، فالتابع f اشتقاقي على I.

ويكون

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1}$$

❸ التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$ ، وكذلك فإنّ التابع $x \mapsto u(x) = 1 + \frac{1}{x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I . نستنتج إذن أنّ $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} - \ln u(x)$ اشتقاقي على I وأنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{-1/x^2}{1+1/x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(1+x)}$$
$$= \frac{-1}{x^2(1+x)}$$

❹ التابع $x \mapsto u(x) = 1 + x^2$ موجب تماماً واشتقاقي على $\mathbb{R}$ ، فالتابع f اشتقاقي على $\mathbb{R}$. ونجد

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x}{1+x^2} .$$

أنشطة

نشاط 1 تتمات عن التابع اللوغاريتمي ln

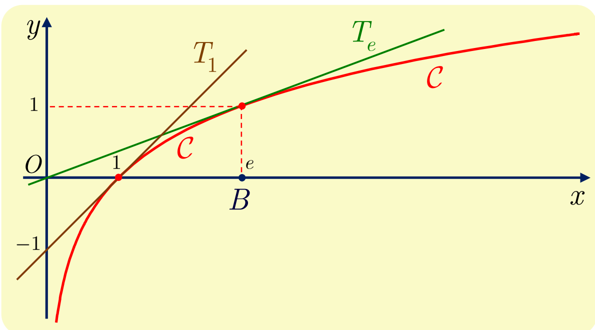
فيما يأتي $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع ln في معلمٍ متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

❶ وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مماساته

A نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها $a > 0$ ، و T_a هو المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A .

① a. أثبت أنَّ $y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a$ معادلةٌ للمماس T_a .

b. تحقّق أنَّ المماس T_e للخط $\mathcal{C}$ في النقطة $B(e,1)$ يمر بالنقطة O مبدأ المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



② ليكن g التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $g(x) = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a - \ln x$.

a. أثبت أنَّ g اشتقاقي على $\mathbb{R}_+^*$ وادرس إشارة $g'(x)$.

b. استنتج جدولاً باطراد g ومن ثمَّ إشارة g .

③ استنتج مما سبق أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت أي مماس له.

❷ تطبيق

① استنتج من الفقرة السابقة أنّه مهما كان $0 < a$ و $0 < x$ كان $\ln x \leq \ln a + \frac{x-a}{a}$ (1)

② استنتج من (1) أنَّه مهما كان $0 < a$ كان $\ln(a+1) - \ln a \leq \frac{1}{a}$ (2)

③ .a يبدو الخط $\mathcal{C}$ على المجال $[10,11]$ وكأنه قطعة مستقيمة أفقية، لماذا؟

.b ما فاصلتا النقطتين I و J من الخط $\mathcal{C}$ اللتين ترتيباهما على التوالي 10 و 15؟ أمن الممكن وضع هاتين النقطتين على الخط $\mathcal{C}$؟ لماذا؟

تُفَسّر المعلومات السابقة أنّ التابع $\ln$ «يسعى ببطء إلى $+\infty$ ».

الحل

❶ وضع الخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مماساته

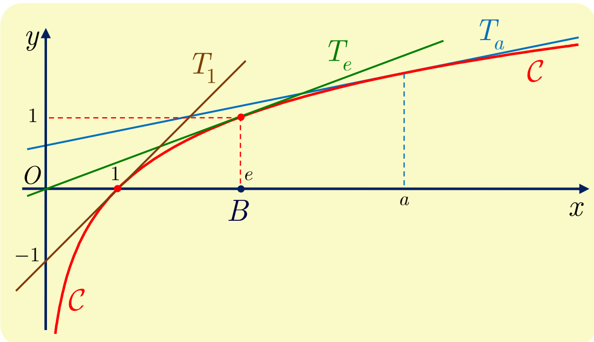
① .a بوجه عام معادلة المماس T_a للخط البياني $\mathcal{C}_f$ لتابع اشتقاقي f في النقطة التي فاصلتها a هي

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

في حالتنا $f(a) = \ln a$ و $f'(a) = \frac{1}{a}$. إذن معادلة T_a، هي $y = \ln a + \frac{1}{a}(x-a)$ أو

$$y = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a \text{ .}$$

.b في حالة $a = e$ لدينا $\ln e = 1$ فتصبح معادلة المماس T_e في النقطة $B(e,1)$، كما يأتي: $y = \frac{1}{e}x$. وهي معادلة مستقيم مار بالمبدأ $O(0,0)$.



② بهدف تعيين الوضع النسبي للخط البياني للتابع اللوغاريتمي ومماسه في النقطة التي فاصلتها a منه، نصطنع التابع g الذي يمثل الفرق بين ترتيب نقطة فاصلتها x من T_a وترتيب النقطة التي فاصلتها x من $\mathcal{C}$، وليكن التابع $x \mapsto g(x) = \frac{1}{a}x - 1 + \ln a - \ln x$ المعطى في النص.

التابع g معرف على المجال $]0,+\infty[$ وهو اشتقاقي على هذا المجال وضوحاً. ولدينا

$$g'(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \frac{x-a}{ax}$$

إذن إشارة $g(x)$ تتفق مع إشارة $x-a$ ومنه جدول الاطراد الآتي:

x	0 a $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$

نستنتج من جدول اطراد g أنّه موجبٌ على $]0,+\infty[$ ولا ينعدم إلّا عند $x=a$. إذن يقع الخط البياني $\mathcal{C}$ تحت T_a ولا يشترك معه إلّا عند نقطة التماس التي فاصلتها $x=a$.

③ نستنتج مما سبق أنّ الخط $\mathcal{C}$ يقع تحت أي مماس له.

❷ تطبيق

① المتراجحة (1) تعبّر عن المتراجحة $g(x)\geq 0$ ، التي أثبتنا صحتها.

② باختيار $x=a+1$ في المتراجحة (1) والإصلاح نحصل على (2).

③ a. استناداً إلى (2)، لدينا $0<\ln(11)-\ln(10)\leq\dfrac{1}{10}$ أي إن تغيّر ترتيب التابع اللوغاريتمي يكون صغيراً على المجال $[10,11]$ وهذا ما يجعل خطه البياني يبدو وكأنه قطعة مستقيمة أفقية.

b. من $\ln x_I=10$ ، و $\ln x_J=15$. نستنتج أنّ

$$x_J=e^{15}\approx 3\,269\,017 \quad \text{و} \quad x_I=e^{10}\approx 22\,026$$

وعليه، مهما اخترنا واحدة للقياس على محور الفواصل، فستكون x_J أبعد من x_I عن O بحوالي 148 مرة. وهذا يجعل الرسم غير ممكن على ورقة كتاب عادية الأبعاد.

نشاط 2 تابع اللوغاريتم العَشري log

① احسب $\log(1)$ و $\log(10)$ ، ثم $\log(100)$ و $\log(1000)$ و $\log(10000)$.

② نضع $k=\dfrac{1}{\ln(10)}$. أثبت أنّ $0<k<1$.

③ باستعمال المساواة $\log x=k\ln x$ ، تحقّق من أنّ التابع log يتمتع بجميع خواص التابع ln .

④ ارسم في معلم متجانس واحد الخطّين البيانيين للتابعين log و ln .

الحل

① نعلم أنّ $\log(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$ ، إذن، $n=\dfrac{n\ln 10}{\ln 10}=\dfrac{\ln 10^n}{\ln 10}=\log(10^n)$ ومنه $\log(1)=0$ و $\log(10)=1$ و $\log(100)=2$ و $\log(1000)=3$ و $\log(10000)=4$.

② لمّا كان $e<3$ استنتجنا أنّ $e<10$ ومنه $1<\ln 10$ أي $0<k=\dfrac{1}{\ln 10}<1$.

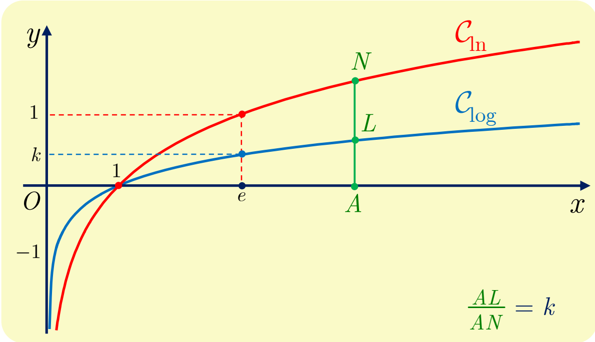
في الحقيقة، لمّا كان $e^2<10$ نستنتج أنّ $0<k<\dfrac{1}{2}$.

③ لما كان k ثابتاً عددياً، فمجموعة تعريف log هي نفسها مجموعة تعريف ln أي $]0,+\infty[$.

ولأنَّ $k > 0$ استنتجنا من خواص التابع اللوغاريتمي $\ln$ أنّ $\log$ متزايد تماماً على $]0,+\infty[$ وأنّ

$$\lim_{x\to 0}\log(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\log(x) = +\infty .$$

④ نرمز إلى الخط البياني للتابع $\log$ بالرمز $\mathcal{C}_{\log}$ وإلى الخط البياني للتابع $\ln$ بالرمز $\mathcal{C}_{\ln}$.



نشاط 3 حصر المقدار $\ln(1+x)$

❶ متراجحة تضم $\ln(1+x)$

① ادرس على $\mathbb{R}_+^*$ التابع $f : x \mapsto \ln x + 1 - x$، واستنتج في حالة $x > 0$ صحة المتراجحة

$$(1)\cdots \ln x \le x - 1$$

② a. بالاستفادة من (1) برهن أنّه في حالة $t > -1$، يكون $\ln(1+t) \le t$.

b. وكذلك باختيار $x = \dfrac{1}{1+t}$، أثبت أنّه في حالة $t \ge -1$، يكون $\dfrac{t}{1+t} \le \ln(1+t)$.

نستنتج إذن صحة المتراجحة:

$$\text{في حالة } t > -1 \text{ لدينا } \frac{t}{1+t} \le \ln(1+t) \le t \cdots (2)$$

❷ إحاطة المقدار $\ln(2)$

ليكن p عدداً طبيعياً موجباً تماماً. ولنضع $x = \dfrac{1}{p}$.

① أثبت انطلاقاً من (2) أنّ $\dfrac{1}{p+1} \le \ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right) \le \dfrac{1}{p}$.

② نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ بالعلاقة $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.

a. أثبت أنّ $u_n \le \ln 2 \le u_n + \dfrac{1}{2n}$.

b. استنتج أنّ $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة من العدد $\ln 2$.

c. احصر العدد $\ln 2$ باختيار $n = 10$.

الحل

❶ متراجحة تضم $\ln(1+x)$

①

- $\lim_{x\to 0^+}(\ln x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^+}(1-x)=1$ ، إذن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

أمّا في جوار $+\infty$ ، فلدينا

$$f(x)=x\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1\right).$$

ولأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ، استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\times(-1)=-\infty$.

- يحسب مشتق f بسهولة بالعلاقة $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ ، فإشارته تتفق مع إشارة $(1-x)$ على $\mathbb{R}_+^*$ ، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

نجد من جدول تغيرات f أنَّ $f(x)\le 0$ أياً كان x من $\mathbb{R}_+^*$ ، أي $\ln x+1-x\le 0$. ومنه المتراجحة (1).

ملاحظة. كان بالإمكان إثبات هذه المتراجحة مباشرة اعتماداً على خاصة كون الخط البياني للتابع اللوغاريتمي يقع تحت مماسه في النقطة التي فاصلتها تساوي 1.

② a. في حالة $t>-1$ يكون $x=t+1>0$ وبالتعويض في (1)، فنحصل على $\ln(1+t)\le t$.

b. وكذلك يكون $x=\frac{1}{1+t}>0$ ، وبالتعويض في (1)، نحصل على $\ln\left(\frac{1}{1+t}\right)\le\frac{1}{1+t}-1$ ،

أي $-\ln(1+t)\le-\frac{t}{1+t}$ أو $\frac{t}{1+t}\le\ln(1+t)$ ، وتنتج (2) من المتراجحتين السابقتين.

❷ إحاطة المقدار $\ln(2)$

① نختار $t=\frac{1}{p}$ في المتراجحة (2)، فنحصل على

$$\frac{1}{p+1}\le\ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\le\frac{1}{p}$$

② a. نلاحظ أولاً أنّ u_n هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين $n+1$ و $2n$.

ينتج من ذلك وباستعمال الطرف الأيسر أي $\frac{1}{p+1} \leq \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$ من المتراجحة السابقة أنّ

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \\
& \quad\ \ {\scriptstyle p=n} \qquad\quad {\scriptstyle p=n+1} \qquad\quad {\scriptstyle p=2n-2} \qquad\quad {\scriptstyle p=2n-1} \\
&\leq \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln\frac{2n-1}{2n-2} + \ln\frac{2n}{2n-1} \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n}{2n-1}\right) \\
&= \ln\frac{2n}{n} = \ln 2
\end{aligned}$$

وبالمثل، بالاستفادة من الطرف الأيمن أي $\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$ من المتراجحة السابقة، وملاحظة أنّ $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$، ومن ثمّ فإنّ $u_n + \frac{1}{2n}$ هي مجموع n كسراً هي مقاليب الأعداد الواقعة بين n و $2n-1$. نجد

$$\begin{aligned}
u_n + \frac{1}{2n} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} \\
& \quad\ \ {\scriptstyle p=n} \qquad\quad {\scriptstyle p=n+1} \qquad\quad {\scriptstyle p=2n-2} \qquad\quad {\scriptstyle p=2n-1} \\
&\geq \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n+2}{n+1} + \cdots + \ln\frac{2n-1}{2n-2} + \ln\frac{2n}{2n-1} \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n-2} \times \frac{2n}{2n-1}\right) \\
&= \ln\frac{2n}{n} = \ln 2
\end{aligned}$$

وهكذا نكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $u_n \leq \ln 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$ في حالة $n \geq 1$.

b. يمكن كتابة المتراجحة السابقة بالصيغة $\ln 2 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq \ln 2$، وباستعمال مبرهنة الإحاطة نستنتج أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$ لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

c. نستعمل المتراجحة السابقة بوضع $n = 10$، فنحصل على $u_{10} \leq \ln 2 \leq u_{10} + \frac{1}{20}$، نستعمل آلة حاسبة لحساب $u_{10} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20}$، فنجد $0.668 \leq u_{10} \leq 0.669$ إذن $0.668 \leq \ln 2 \leq 0.669 + 0.05$، ومن ثَمّ $0.669 \leq \ln 2 \leq 0.719$.

نشاط 4 دراسة تابع

ليكن g التابع المعرّف على $[0,+\infty[$ وفق $g(0)=0$ و $g(x)=\dfrac{x}{x-\ln x}$ في حالة $x>0$.

وليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني المُمثّل للتابع g.

① تيقّن أنّ $g(x)$ معرّف في حالة $x>0$.

② a. أثبت أنّ g مستمرٌ عند الصفر.

b. ادرس قابلية اشتقاق g عند الصفر. وعيّن إن أمكن المماس للخط $\mathcal{C}$ عند مبدأ الإحداثيات.

③ a. ما نهاية g عند $+\infty$؟

b. احسب $g'(x)$ في حالة $x>0$، ثُمّ ادرس تغيرات g.

c. أعط معادلة للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 1.

الحل

① نعلم أن الخط البياني للتابع اللوغاريتمي $\ln$ يقع تحت مماسه في النقطة التي فاصلتها $x=1$ أي المستقيم الذي معادلته $y=x-1$، ومنه $\ln x \le x-1$ في حالة $x>0$ وهذا يُكافئ قولنا $x-\ln x \ge 1$ في حالة $x>0$. إذن مقام g لا ينعدم في حالة $x>0$ والتابع g معرّف إذن في هذه الحالة.

② a. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$. ومن جهة أخرى ولدينا $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ $g(0)=0$، فالتابع g مستمرٌ عند الصفر.

b. ليكن t تابع معدل تغير g عند الصفر، أي التابع المعرّف في حالة $x>0$ بالصيغة

$$t(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\frac{x}{x-\ln x}-0}{x}=\frac{1}{x-\ln x}$$

نلاحظ مباشرة أنّ $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=0$ فالتابع g اشتقاقي عند الصفر و $g'(0)=0$. ولأنّ $g(0)$ استنتجنا أنّ محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مماس للخط البياني للتابع g في المبدأ.

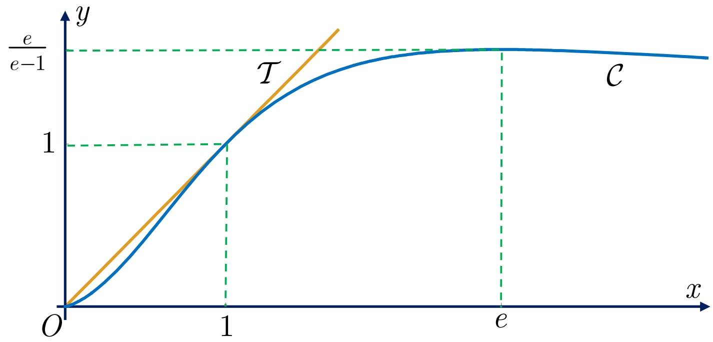
③ a. في حالة $x>0$ لدينا $g(x)=\dfrac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}$. ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$.

b. $g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$، وهو ينعدم عند $x=e$. وبهذا نجد الجدول الآتي بتغيرات g:

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

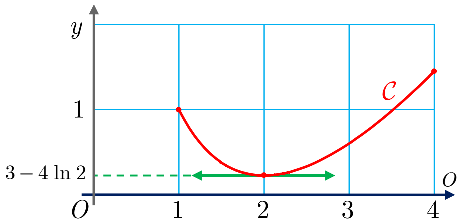
c. لتكن A النقطة من الخط $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 1، فيكون ترتيبها $1 = \dfrac{1}{1-0} = g(1)$ ، إذن إحداثيتا A هما $(1,1)$. أمّا معادلة المماس في A فهي $y = g(1) + g'(1)(x-1) = x$

ونجد في الشكل الآتي الخط البياني للتابع g والمماس $\mathcal{T}$:



تمرينات ومسائل

1 نتأمّل تابعاً f معرّفاً على المجال $I=[1,4]$ وفق $f(x)=ax+b+c\ln x$ حيث a و b و c أعداد حقيقية نهدف إلى تعيينها. نجد في الشكل المجاور الخط البياني لهذا التابع.



① أثبت أنَّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$.

② استفد من المعلومات المدونة على الشكل لإثبات أنَّ:

$$a+b=1 \quad \text{و} \quad 2a+c=0 \quad \text{و} \quad 2a+b+c\ln 2=3-4\ln 2.$$

③ جد قيم a و b و c ثم اكتب عبارة $f(x)$.

الحل

① f هو مجموع تابعين، أحدهما $x\mapsto ax+b$ وهو تابع اشتقاقي على $[1,4]$، والآخر $x\mapsto \ln x$ وهواشتقاقي على $[1,4]$ أيضاً. نستنتج أنَّ f اشتقاقي على $[1,4]$. ولدينا

$$f'(x)=a+c\times\frac{1}{x}=a+\frac{c}{x}.$$

② لدينا من الشكل:

- $f(1)=1$، إذن $1=a+b+c\ln(1)$، أي $a+b=1\cdots(1)$
- $f(2)=3-4\ln 2$، إذن $3-4\ln 2=2a+b+c\ln 2\cdots(2)$
- $f'(x)=a+\dfrac{c}{x}$ والمماس في النقطة $(2,1)$ أفقي، أي $f'(2)=0$، ومنه $a+\dfrac{c}{2}=0$ إذن $2a+c=0\cdots(3)$

③ بحل جملة المعادلات الثلاث نجد $(a,b,c)=(2,-1,-4)$ ومنه عبارة f :

$$f(x)=2x-1-4\ln x.$$

2 ليكن a و b عددين حقيقيين. في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=ax+b+\dfrac{1}{x}\ln x$. النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من $\mathcal{C}$، والمماس للخط البياني $\mathcal{C}$ في A يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$. استفد من هذه المعطيات لتعيّن a و b.

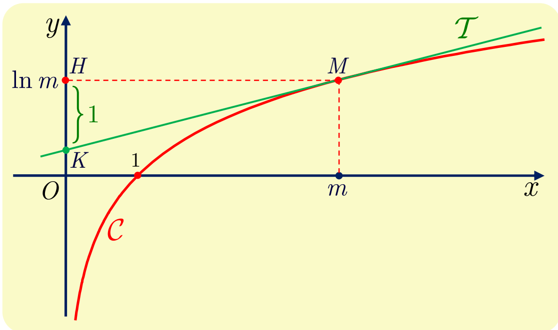
الحل

$A(1,0)$ نقطة من $\mathcal{C}$، إذن $f(1)=0$ إذن $a+b=0$. أما مشتق f فيعطى بالصيغة

$f'(x)=a+\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

ميل المماس في النقطة $A(1,0)$ يساوي ميل المستقيم الذي معادلته $y=3x+2$، أي $f'(1)=3$، إذن $a+1=3$ ومنها $a=2$. ومن العلاقة $a+b=0$ نحصل على $b=-2$.

3 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، رسمنا $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $\ln$. لتكن M نقطة من $\mathcal{C}$ فاصلتها m.



① جد، بدلالة m، معادلةً للمماس $\mathcal{T}$ للخط $\mathcal{C}$ في النقطة M.

② لتكن H مسقط M على محور التراتيب ولتكن K نقطة تقاطع المماس $\mathcal{T}$ مع هذا المحور.

a. أثبت أنَّ ترتيب النقطة K يساوي $\ln m-1$، أياً يكن $m>0$.

b. استنتج أنَّ $\overrightarrow{KH}=\vec{j}$.

c. استفد مما سبق لإعطاء طريقة عملية وبسيطة لرسم مماس للخط $\mathcal{C}$ من نقطة كيفية منه.

الحل

① إنّ $\mathcal{T}$ يقبل $y=\underbrace{\ln m}_{f(m)}+\underbrace{\dfrac{1}{m}}_{f'(m)}(x-m)$ أو $y=\dfrac{x}{m}+\ln m-1$ معادلة له.

② a. يقطع $\mathcal{T}$ محور التراتيب في النقطة التي فاصلتها 0 أي $K(0,\ln m-1)$.

b. لمّا كانت إحداثيا M هما $(m,\ln m)$ استنتجنا أنَّ $H(0,\ln m)$. ومن ثَمّ

$$\overrightarrow{KH}=\begin{bmatrix}0\\ \ln m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\ \ln m-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\vec{j}$$

c. لتكن M نقطة كيفية من الخط $\mathcal{C}$. ننشئ H المسقط القائم للنقطة M على محور التراتيب، ثُمّ نرسم K صورة H وفق الانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$. فيكون (KM) مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة M.

4 كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + \ln(m+1) = 0$ جذران مختلفان؟

الحل

المعادلة معرفة بشرط $m+1>0$. وهي في هذه الحالة تكافئ $(x-1)^2 = 1-\ln(m+1)$. فلها جذران حقيقيان مختلفان إذا وفقط إذا كان $1-\ln(m+1)>0$ أو $e-1>m$. ومنه علينا أن نختار m من المجال $]-1, e-1[$ ليكون للمعادلة المعطاة جذران حقيقيان مختلفان.

5 لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

① جد نهاية هذه المتتالية.

② نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

.a أثبت أنّ $S_n = \ln(n+1)$.

.b ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$؟

الحل

① $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 1$ ، إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 1 = 0$.

② .a لتكن $E(n)$ الخاصة $S_n = \ln(n+1)$.

الخاصة $E(1)$ محققة لأنّ $S_1 = u_1 = \ln 2 = \ln(1+1)$. لنفترض أنّ $E(n)$ محققة عندئذ

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$= \ln\left((n+1)\times\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln(n+2)$$

فالخاصة $E(n+1)$ محقّقة، ونكون قد أثبتنا بالتدريج أنّ $S_n = \ln(n+1)$ أياً كان $n\geq 1$.

② .b لأنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

6 أثبت أنَّ المستقيم الذي معادلته $y = x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع

$$f : x \mapsto x - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

في جوار $+\infty$. (ضع $X = \dfrac{1}{x}$).

الحل

نلاحظ أنّ

$$f(x)-(x-1)=1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1-\frac{\ln(1+X)}{X}$$

إذ وضعنا $X=\dfrac{1}{x}$. ولكن $\lim\limits_{x\to\infty}X(x)=0$ و $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ إذن

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-(x-1)\big)=\lim_{X\to 0}\left(1-\frac{\ln(1+X)}{X}\right)=1-1=0$$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

7 نتأمّل التابع f المعرف على $I=\mathbb{R}_+^*$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases} x^2(1-\ln x), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. واستنتج أنَّ f اشتقاقي عند الصفر.

الحل

نلاحظ أنّه في حالة $x>0$ لدينا

$$t(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x^2(1-\ln x)-0}{x}=x(1-\ln x)=x-x\ln x$$

ولأنّ $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$، استنتجنا $\lim\limits_{x\to 0}t(x)=0$، فالتابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0)=0$.

8 التوابع الآتية معرفة على $I=\mathbb{R}_+^*$. ادرس تغيرات كلٍ منها وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $f:x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ ② $f:x\mapsto x-x\ln x$

③ $f:x\mapsto x\ln x$ ④ $f:x\mapsto\dfrac{1-\ln x}{x}$

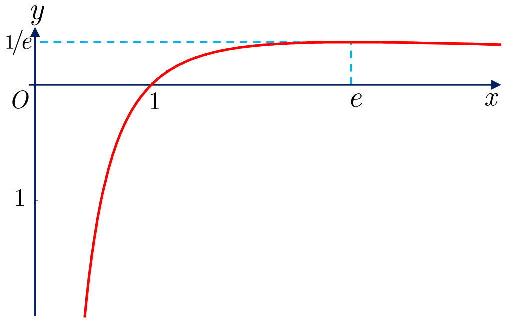
⑤ $f:x\mapsto x-\ln x$ ⑥ $f:x\mapsto x^2-8x+8+6\ln x$

الحل

① $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. نستنتج أنَّ المحورين الإحداثيين خطان مقاربان للخط $\mathcal{C}$.
- $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ينعدم f' فقط عند $x=e$.
- جدول تغيرات f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

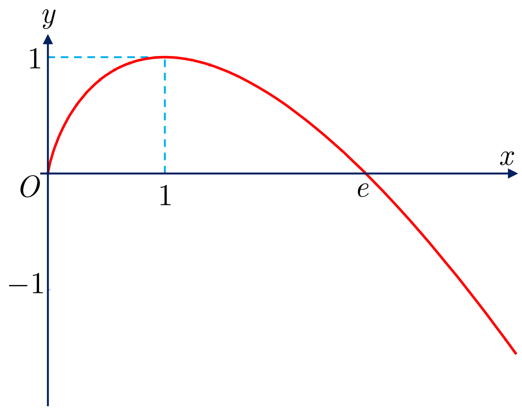


- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

② $f(x)=x-x\ln x$

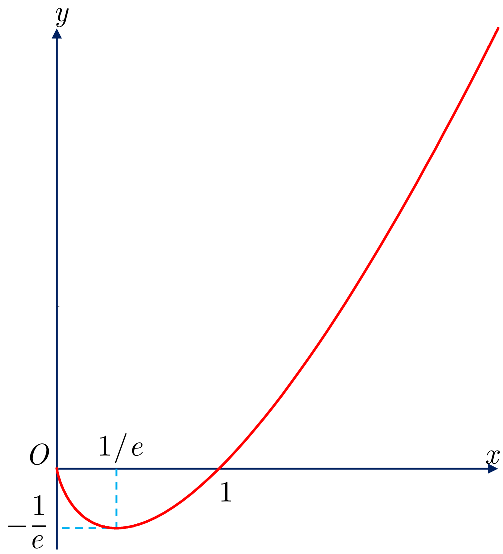
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$. و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ لأنّ $f(x)=x\left(1-\ln x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\ln x\right)=-\infty$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.
- $f'(x)=-\ln x$ ينعدم f' فقط عند $x=1$.
- جدول تغيرات f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

ملاحظة. دراسة المماس في المبدأ غير مطلوبة في السؤال. ولكنها نقطة مساعدة على الرسم، إذ يمكن تمديد التابع بالاستمرار عند الصفر بوضع $f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، وعندها نلاحظ أنّ نسبة التغير عند الصفر $t(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1-\ln x$ وهي تحقق $\lim\limits_{x\to 0} t(x)=+\infty$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر ولكن محور التراتيب مماس شاقولي لخطه البياني.



③ $f(x) = x\ln x$

- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f'(x) = \ln x + 1$ ينعدم f' فقط عند $x = 1/e$.
- جدول تغيرات f :

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-1/e$	$\nearrow$	$+\infty$

- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(1,0)$، المماس في المبدأ شاقولي.
- الخط البياني في الشكل المجاور.

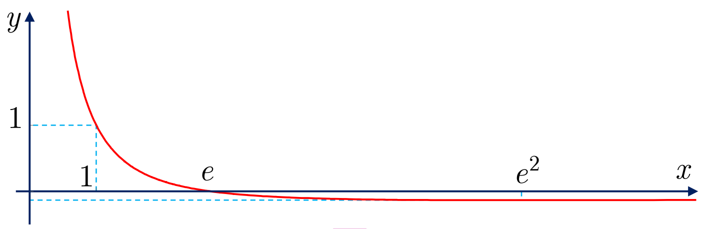
ملاحظة. دراسة المماس في المبدأ غير مطلوبة في السؤال. ولكنها نقطة مساعدة على الرسم، إذ يمكن تمديد التابع بالاستمرار عند الصفر بوضع $f(0) = 0 = \lim_{x\to 0} f(x)$ ، وعندها نلاحظ أنّ نسبة التغير عند الصفر $t(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \ln x$ وهي تحقق $\lim_{x\to 0} t(x) = -\infty$ فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر ولكن محور التراتيب مماس شاقولي لخطه البياني.

④ $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$

- $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ ، لأن $\lim_{x\to 0}(1-\ln x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$. وكذلك $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ لأنّ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ إذن محور الفواصل مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.
- $f'(x) = \dfrac{\ln x - 2}{x^2}$. وينعدم f' فقط عند $x = e^2$.
- جدول تغيرات f :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-1/e^2$	$\nearrow$	0

- نقاط مساعدة على الرسم: التقاطع مع محور الفواصل $(e,0)$.



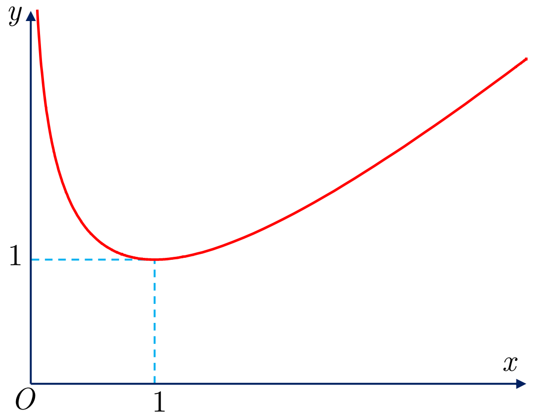
⑤ $f(x) = x - \ln x$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ لأنّ $f(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1$.

- $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ ، وينعدم f' فقط عند $x = 1$.
- جدول تغيرات f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



- الخط البياني في الشكل المجاور.

⑥ $f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6\ln x$

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$. إذن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \to +\infty}(x^2 - 8x + 8) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

- حساب المشق:

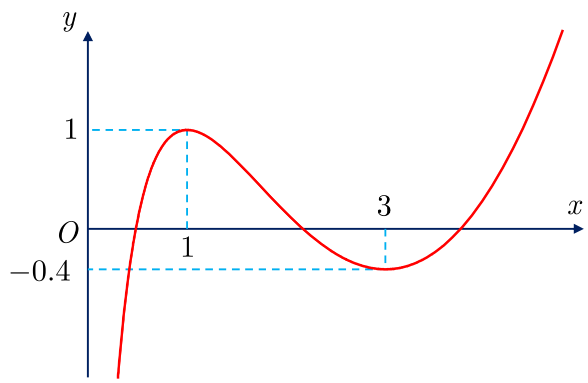
$$f'(x) = 2x - 8 + \frac{6}{x} = \frac{2(x^2 - 4x + 3)}{x} = \frac{2(x-1)(x-3)}{x}$$

ينعدم f' فقط عند $x = 1$ و $x = 3$.

- جدول تغيرات f :

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$6\ln 3 - 7$ ≈ -0.4	$\nearrow$	$+\infty$

- الخط البياني في الشكل الآتي:



ماذا نستنتج بشأن تقاطع هذا الخط مع محور الفواصل؟

9 في كلٍ مما يأتي، أثبت أنَّ التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'.

① $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ و $I =]e,+\infty[$.

② $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I =]1,+\infty[$.

الحل

① $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ و $I =]e,+\infty[$.

التابع اللوغاريتمي $x \mapsto \ln x$ اشتقاقي وموجبٌ تماماً على $I =]e,+\infty[$ المعطى، إذن يكون التابع $u : x \mapsto \ln(\ln x)$ اشتقاقياً على I ومشتقه $u'(x) = \dfrac{\ln' x}{\ln x} = \dfrac{1}{x \ln x}$. وهو أيضاً موجبٌ تماماً على I (لأنّ $x > e$ يقتضي $\ln x > \ln e = 1$ ومنه $u(x) = \ln(\ln x) > \ln 1 = 0$)، إذن يكون التابع $x \mapsto f(x) = \ln(u(x))$ اشتقاقياً على I ومشتقه $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}$.

② $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{\ln x}\right)$ و $I =]1,+\infty[$.

التابع $u : x \mapsto \dfrac{x+1}{\ln x}$ موجب تماماً على I واشتقاقي عليه ومشتقه

$$u'(x) = \frac{x\ln x - x - 1}{x \ln^2 x}$$

فالتابع $x \mapsto f(x) = \ln(u(x))$ اشتقاقي على $I =]1,+\infty[$. ومشتقه

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{x\ln x - x - 1}{x\ln^2 x} \times \frac{\ln x}{x+1} \\ &= \frac{x\ln x - x - 1}{x(x+1)\ln x} \end{aligned}$$

ملاحظة. يمكن أيضاً أن نكتب f بالصيغة $f(x) = \ln(x+1) - \ln(\ln x)$. ثُمّ نتابع الحل.

لنتعلّم البحث معاً

10 حساب لوغاريتمي

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحقّقان

$$\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{\ln a + \ln b}{2} \qquad (1)$$

احسب $\dfrac{a}{b}$.

نحو الحلّ

يؤكد النص على وجود عددين a و b يحققان العلاقة (1) (وليس مطلوباً حسابهما). بل حساب قيمة $\frac{a}{b}$. علينا إذن استبعاد اللوغاريتمات من العلاقة، ولهذا سنسعى للوصول إلى علاقة من النمط $\ln A = \ln B$، ومن ثم نستنتج أنَّ $A = B$.

1. أثبت أنَّ $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab}$.
2. استنتج أنَّ $a + b = 3\sqrt{ab}$، ومن ثم $a^2 + b^2 - 7ab = 0$ (2).

لاستنتاج قيمة $\frac{a}{b}$، يمكننا التفكير بالآتي:

- القول إنَّ a حلٌّ للمعادلة $x^2 - 7bx + b^2 = 0$ مما يسمح بحساب a بدلالة b. ثم استنتاج $\frac{a}{b}$ بالتقسيم على b.
- تسمية النسبة المجهولة $k = \frac{a}{b}$، فيكون $a = bk$ والسعي للحصول على مساواة لا تحوي إلا k. أثبت أنَّ $k^2 - 7k + 1 = 0$ ثم أكمل (لا تنسَ أنَّ $k > 0$).

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. لمّا كان $a > 0$ و $b > 0$، كان $\ln\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\ln(ab) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

2. العلاقة (1) تكافئ إذن $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln\sqrt{ab}$ أو $\frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$ وهي تُكافئ بعد الإصلاح والتربيع $(a+b)^2 = 9ab$ أو $a^2 - 7ab + b^2 = 0$، وهي العلاقة (2).

لتكن $k = \frac{a}{b}$ النسبة المطلوبة. نستنتج من (2) بعد تعويض $a = kb$ أنّ $(k^2 - 7k + 1)b^2 = 0$ ولكن b لا يساوي الصفر إذن $k^2 - 7k + 1 = 0$. لهذه المعادلة جذران موجبان هما $\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$، وهما القيمتان الممكنتان للنسبة $k = a/b$.

11 حلّ جملة معادلتين

a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ تماماً. حل في $\mathbb{R}^2$ جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} xy = a^2 & (1) \\ (\ln x)^2 + (\ln y)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2 & (2) \end{cases}$$

نحو الحلّ

إذا كان (x,y) حلاً للجملة، كان $x > 0$ و $y > 0$. (لماذا؟). يمكننا التفكير كمافي السابق بالسعي لاستبعاد اللوغاريتمات من المعادلة (2) وكتابها بالصيغة $\ln A = \ln B$ التي تقتضي $A = B$. عندها سنكون في مواجهة جملة معادلتين بالمجهولين x و y فقط. ولكن ليست هناك أية قاعدة تفيد في تبسيط $(\ln x)^2 + (\ln y)^2$ فهذه المحاولة عقيمة. يمكننا أيضاً التفكير بتعويض $y = \dfrac{a^2}{x}$ في المعادلة (2)، ولكن النتيجة ليست مشجعة.

لنفكر إذن بتحويل العلاقة (1) إلى العلاقة اللوغاريتمية $\ln xy = \ln a^2$، عندها سنحصل على جملة معادلتين بالمجهولين $\ln x$ و $\ln y$.

افترضْ أنَّ (x,y) حلٌّ للجملة، ثم تحقّق أنَّ $\ln x + \ln y = 2\ln a$.

نضع إذن $X = \ln x$ و $Y = \ln y$، ثم نحسب منهما x و y. كما نضع تبسيطاً للكتابة $\ln a = A$. (نذكّر أنّ حل المعادلة $\ln t = T$ هو $t = e^T$).

1. أثبت، وفق تلك الإجراءات، أنَّ $Y = 2A - X$ وأنَّ $4X^2 - 8AX + 3A^2 = 0$.
2. استنتج أنَّ X تقبل قيمتين $X_1 = \dfrac{A}{2}$ و $X_2 = \dfrac{3A}{2}$، ثم استنتج قيم Y الموافقة.
3. تحقّق أنَّ $(x = \sqrt{a}$ و $y = a\sqrt{a})$ أو $(x = a\sqrt{a}$ و $y = \sqrt{a})$.

وبالعكس تحقّق أنّ كلاً من $(x,y) = (a,a\sqrt{a})$ و $(x,y) = (a\sqrt{a},a)$ هو حلّ للجملة المعطاة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لدينا $x > 0$ و $y > 0$. نظراً إلى وجود المقدارين $\ln x$ و $\ln y$ في المعادلة (2). بأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة (1) نجد لها الصيغة المكافئة $\ln x + \ln y = 2\ln a$.

نضع $X = \ln x$ و $Y = \ln y$ و $\ln a = A$ فنكون بهذا الترميز أمام الجملة:

$$\begin{cases} X + Y = 2A & ① \\ X^2 + Y^2 = \dfrac{5}{2}A^2 & ② \end{cases}$$

من المعادلة ① نجد $Y = 2A - X$. نعوض في المعادلة ② فنحصل على

$$X^2 + (2A - X)^2 = \frac{5}{2}A^2$$

أو $4X^2 - 8AX + 3A^2 = 0$.

نلاحظ أنّ $4X^2-8AX+3A^2=(2X-A)(2X-3A)$ إذن تقبل الجملة المدروسة حلّين هما

$$(X,Y)=\left(\frac{3A}{2},\frac{A}{2}\right) \text{ و } (X,Y)=\left(\frac{A}{2},\frac{3A}{2}\right)$$

وبالعودة إلى x و y نجد الحلين

$$(x,y)=\left(a\sqrt{a},\sqrt{a}\right) \text{ و } (x,y)=\left(\sqrt{a},a\sqrt{a}\right)$$

12 مسألة وجود

أيوجد عددان موجبان تماماً ومختلفان يحقّقان $\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{a}{b}$ (1) ؟

نحو الحلّ

- الفكرة المفيدة في البحث عن عددين a و b، تعتمد على تجميع كل ما يتعلّق بالعدد a من جهة وكل ما يتعلّق بالعدد b من جهة أخرى. نبحث إذن عن a و b، بحيث $\frac{\ln b}{b}=\frac{\ln a}{a}$. هذا يوحي إلينا أن ندرس التابع f المعرَّف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. وتعود المسألة إلى البحث عن عددين مختلفين a و b يحققان $f(a)=f(b)$.
  1. ادرس تغيرات التابع f ونظّم جدولاً بها (النهايات عند طرفي مجموعة التعريف وجهة التغير).
  2. ارسم الخط البياني للتابع f.
- لندرس استناداً إلى جدول التغيرات أو بيانياً عدد حلول المعادلة $f(x)=m$. وذلك تبعاً لقيم m.
  1. ناقش عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ في حالة $m>1/e$، $m=1/e$، $0<m<1/e$ وأخيراً $m<0$.
  2. استنتج الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x)=m$ حلان مختلفان.
  3. استنتج أنّه أياً كان m من $]0,1/e[$، يوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a)=f(b)=m$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- المساواة (1) تكافئ $\frac{\ln b}{b}=\frac{\ln a}{a}$، يوحي لنا هذا بدراسة تغيرات التابع $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

- **النهايات.** $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to0}\ln x=-\infty$. وكذلك $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

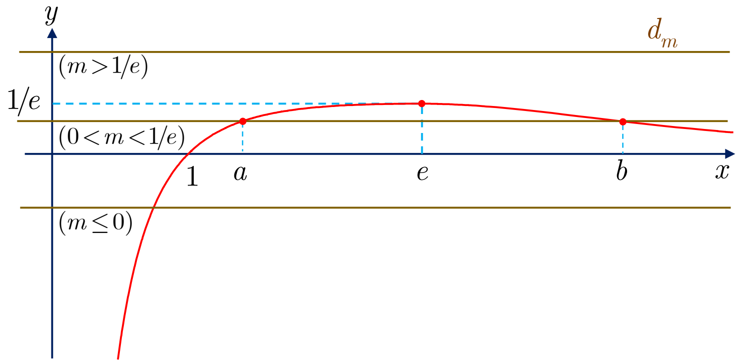
نستنتج أنّ المحورين الإحداثيين مستقيمان مقاربان للخط البياني للتابع.

- **المشتق.** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. وينعدم f' عند $x=e$.

• جدول التغيرات.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

• الخط البياني.



✌ لنرمز بالرمز $S(m)$ إلى مجموعة حلول المعادلة $f(x)=m$. نستنتج من الرسم البياني للتابع f ما يأتي:

❶ في حالة $m>\dfrac{1}{e}$ لدينا $S(m)=\varnothing$ ، فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الصفر .

❷ في حالة $m=\dfrac{1}{e}$ لدينا $S(m)=\{e\}$ فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الواحد.

❸ في حالة $0<m<\dfrac{1}{e}$ $S(m)=\{a,b\}$ حيث رمزنا بالرمز a إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]0,e[$ وبالرمز b إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]e,+\infty[$. فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي اثنين.

❹ في حالة $m\leq 0$ ، $S(m)=\{a\}$ حيث رمزنا بالرمز a إلى الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=m$ الذي ينتمي إلى المجال $]0,e[$. فعدد الحلول في هذه الحالة يساوي الواحد.

نستنتج أنَّ الشرط اللازم والكافي ليكون للمعادلة $f(x)=m$ حلاّن مختلفان هو $0<m<\dfrac{1}{e}$.

نستنتج أنّه أياً كان m من $]0,1/e[$ ، فيوجد عددان مختلفان a و b يحققان $f(a)=f(b)=m$.

13 إثبات متراجحة

أثبت أنَّ المتراجحة $\ln(x)\cdot\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ محققة، أيّاً يكن x من $]0,1[$.

نحو الحلّ

☝ توحي إلينا المتراجحة $\ln x\ln(1-x)\leq(\ln 2)^2$ أن ندرس التابع f المعرَّف على $]0,1[$ بالعلاقة $f(x)=\ln(x)\cdot\ln(1-x)$. أثبت أنَّ إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على المجال $]0,1[$.

✌ لندرس إذن التابع $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$ على $]0,1[$.

1. احسب $g'(x)$ واستنتج إشارة g على كل من $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ و $\left]\frac{1}{2},1\right[$.

2. استنتج دراسة تغيرات التابع f، وأثبت المتراجحة المطلوبة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

✌ في أغلب الحالات يؤول إثبات متراجحة إلى دراسة تغيّرات تابع. لندرس التابع f المعرَّف على المجال $]0,1[$ وفق $f(x)=\ln x\ln(1-x)$.

▪ نلاحظ أوّلاً أنّ الخط البياني للتابع f متناظر بالنسبة إلى المستقيم Δ الذي معادلته $x=\frac{1}{2}$، والنقطة $\frac{1}{2}$ هي منتصف المجال $]0,1[$، ومهما تكن x من $]0,1[$ يكن

$$f(1-x)=\ln(1-x)\ln x=\ln x\ln(1-x)=f(x)$$

إذن يكفي أن ندرس اطراد التابع f عندما تتحول قيم x في المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

▪ لدراسة اطّراد التابع f على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ نحسب المشتقّ فنجد:

$$f'(x)=\frac{1}{x}\ln(1-x)+\ln x\times\frac{-1}{1-x}=\frac{(1-x)\ln(1-x)-x\ln x}{x(1-x)}$$

المقام موجبٌ تماماً على مجال الدراسة، إذن إشارة $f'(x)$ تتفق مع إشارة $g(x)$ حيث g هو التابع المعرّف على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ بالعلاقة $g(x)=(1-x)\ln(1-x)-x\ln x$.

✌ دراسة إشارة $g(x)$.

1. نلاحظ أنّ إشارة g على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ ليست واضحة، فعلينا إذن دراسة التابع g لتعيينها. ولكن نلاحظ أنّ g اشتقاقي على $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ وأنّ:

$$g'(x)=-2-\ln(1-x)-\ln x=-\ln\left(e^2x(1-x)\right)$$

التابع g' ينعدم مرة واحدة في المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ عند ما $e^2x(x-1)=1$ أي عند

$$x=\alpha=\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-e^{-2}}\right)$$

وعليه يمكننا أن ننشئ جدول تغيرات g كما يأتي

x	0		α		$\frac{1}{2}$
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0

إذ استفدنا من كون $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ لنستنتج أنّ $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$. النتيجة المهمة هي أنّ g موجب تماماً على المجال $\left]0,\frac{1}{2}\right[$، أي إنّ $f'(x)=\dfrac{1}{x(1-x)}g(x)$ موجب تماماً على $\left]0,\frac{1}{2}\right[$، فالتابع f متزايدٌ

على المجال $]0,\frac{1}{2}]$. وبسبب تناظر الخط البياني للتابع f بالنسبة إلى المستقيم $x=\frac{1}{2}$ نستنتج أنّ f متناقص تماماً على $[\frac{1}{2},1[$ ، وأخيراً نلاحظ أنّ في حالة $x\in]0,1[$ لدينا

$$f(x)=-\frac{\ln(1-x)}{-x}\times x\ln x$$

ولكن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$
$$\lim_{x\to 0}x\ln x=0$$

إذن $\lim_{x\to 0}f(x)=0$ ، وبسبب التناظر لدينا أيضاً $\lim_{x\to 1}f(x)=0$ ، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln^2 2$	$\searrow$	0

ومنه

$$\forall x\in\ ]0,1[,\quad \ln x\cdot\ln(1-x)\le(\ln 2)^2$$

وهي المتراجحة المطلوبة.

قُدُماً إلى الأمام

14 حل كلّاً من المعادلتين الآتيتين:

① $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$

② $\ln|x-2|+\ln(x+4)=3\ln 2$

③ $\ln|2x+3|+\ln|x-1|=2\ln|x|$

الحل

① $\ln|x+2|+\ln|x-2|=0$.

المعادلة معرّفة على $I=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$. وهي تكافئ $|x-2||x+2|=1$ أو $|x^2-4|=1$. فإمّا أن يكون $x^2=5$ أو يكون $x^2=3$. فمجموعة حلول المعادلة المعطاة هي

$$S=\{-\sqrt{5},-\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{5}\}$$

② $\ln|x-2|+\ln(x+4)=3\ln 2$

المعادلة معرّفة على $I=]-4,2[\cup]2,+\infty[$. وهي تُكافئ على هذه المجموعة

$$|x-2|(x+4)=8$$

- فإما أن يكون $x > 2$ و $x^2 + 2x - 16 = 0$ ، ومنه $x = \sqrt{17} - 1$ (الجذر الآخر مرفوض لأنه سالب ولا يحقق $x > 2$).
- أو يكون $x < 2$ و $x^2 + 2x = 0$ ، ومنه $x = 0$ و $x = -2$.

نستنتج أنَّ مجموعة حلول ② هي $\left\{-2, 0, \sqrt{17} - 1\right\}$.

③ $\ln\left|2x + 3\right| + \ln\left|x - 1\right| = 2\ln|x|$

مجموعة المعادلة ③ هي $I = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}, 0, 1\}$. وهي تكافئ عندئذ $\left|2x^2 + x - 3\right| = x^2$

- فإما أن يكون $x^2 + x - 3 = 0$ ، ومنه $x \in \left\{\dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right\}$.
- أو يكون $3x^2 + x - 3 = 0$ ، ومنه $x \in \left\{\dfrac{-1 + \sqrt{37}}{6}, \dfrac{-1 - \sqrt{37}}{6}\right\}$.

نستنتج أنَّ مجموعة حلول ③ هي

$$\left\{\frac{-1 + \sqrt{37}}{6}, \frac{-1 - \sqrt{37}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right\}$$

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

① $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = 7 \\ 3\ln x - 5\ln y = 4 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 \\ \ln(xy) = 1 \end{cases}$

الحل

① هنا الجملة تكافئ $x > 0$ و $x^2 + y^2 = 10$ و $xy = 3$. إذن العددان x و y موجبان ومربع مجموعهما يساوي $(x + y)^2 = 10 + 2xy = 10 + 6 = 16$. إذن $x + y = 4$ و $xy = 3$. فالعددان x و y هما جذرا المعادلة $T^2 - 4T + 3 = 0$. فمجموعة حلول ① هي $\{(1,3), (3,1)\}$.

② نضع $\ln x = a$ و $\ln y = b$ فنحصل على الجملة $\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 3a - 5b = 4 \end{cases}$ وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد $(a,b) = (3,1)$ ومنه $(x,y) = (e^3, e)$ ، وهو الحل المطلوب.

③ نضع مجدداً $\ln x = a$ و $\ln y = b$ فنحصل على الجملة $\begin{cases} ab = -12 \\ a + b = 1 \end{cases}$ إذن a و b هما جذرا المعادلة $T^2 - T - 12 = 0$ أو $(T - 4)(T + 3) = 0$. إذن $(a,b) \in \{(4,-3), (-3,4)\}$ ومنه $(x,y) \in \{(e^4, e^{-3}), (e^{-3}, e^4)\}$ ، وهو الحل المطلوب.

16 حلّ كلاً من المعادلة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$ ، والمتراجحة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$.

مساعدة: ضع $X = \ln x$.

الحل

نضع $X=\ln x$ فتصبح

- المعادلة $X^2-2X-3=0$ أو $(X-3)(X+1)=0$. إذن $X\in\{-1,3\}$ ومنه $x\in\{e^{-1},e^3\}$.
- تصبح المتراجحة $X^2-2X-3\geq 0$ أي $X\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[3,+\infty\right[$، ومنه $x\in\left]0,\frac{1}{e}\right]\cup\left[e^3,+\infty\right[$.

17 ليكن $P(x)=2x^3+5x^2+x-2$.

① a. تحقّق أنّ $P(-1)=0$.

b. استنتج أن $P(x)$ يكتب بالصيغة $P(x)=(x+1)Q(x)$ حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية.

c. حل المتراجحة $P(x)\leq 0$.

② استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln x+\ln(2x+5)\leq\ln(2-x)$.

الحل

① a. هذا تعويض مباشر.

b. لمّا كان $P(-1)=0$ استنتجنا أنّ $P(x)$ يقبل القسمة الإقليدية على $x+1$ ويكون $Q(x)$ خارج هذه القسمة. وبإجراء القسمة نجد $Q(x)=2x^2+3x-2$، أي $P(x)=(x+1)(2x^2+3x-2)$.

c. بملاحظة أنَّ $Q(x)=(x+2)(2x-1)$، نستنتج أن $P(x)=(x+1)(x+2)(2x-1)$. وهذا يتيح لنا وضع جدول إشارة $P(x)$ كما يأتي :

x	$-\infty$		-2		-1		$1/2$		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومن ثم نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة $P(x)\leq 0$ هي $\left]-\infty,-2\right]\cup\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

② المتراجحة $2\ln x+\ln(2x+5)\leq\ln(2-x)$

تُكافئ المتراجحة المعطاة تحقّق الشروط

كافئ المتراجحة المعطاة تحقّق الشروط

$$\ln(x^2(2x+5))\leq\ln(2-x) \text{ و } 2x+5>0 \text{ و } x>0$$

أو

$$x^2(2x+5)\leq 2-x \text{ و } x>0$$

وأخيراً

$$P(x)\leq 0 \text{ و } x>0$$

واستناداً إلى دراستنا السابقة مجموعة الحلول المشتركة لهاتين المتراجحتين هي $\left]0,\frac{1}{2}\right]$.

18 ليكن f التابع المعرف على المجال $I =]-1,1[$ وفق $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.

① أثبت أنَّ f تابع فردي.

② a. أثبت أنَّ f اشتقاقي على I.

b. ادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$.

③ ارسم الخط البياني للتابع f.

الحل

① مجال التعريف $I =]-1,1[$ متناظر بالنسبة إلى الصفر. وفي حالة x من I لدينا

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$$

فالتابع f فردي.

② a. التابع $u : x \mapsto \dfrac{x+1}{1-x}$ موجب تماماً واشتقاقي على I، إذن $x \mapsto f(x) = \ln(u(x))$ اشتقاقي على I. ولدينا $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2}{1-x^2}$.

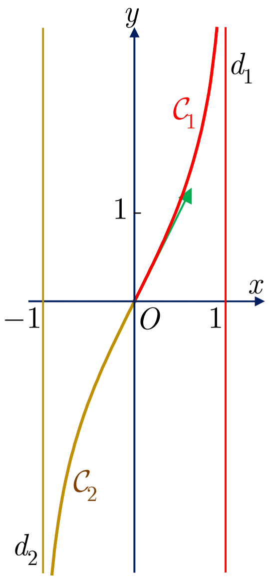
b. من الواضح أنّ $f(0) = 0$ و $f(x)$ يكتب على I بالصيغة المُكافئة

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

ولكن $\lim\limits_{x\to1} \ln(1-x) = \lim\limits_{t\to0^+} \ln t = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$. فالمستقيم d_1 الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وكذلك، من صيغة $f'(x)$، نرى أنّ f متزايد تماماً على المجال $[0,1[$، فللتابع f جدول التغيرات الآتي على $[0,1[$:

جدول بتغيرات f:

x	0		1
$f'(x)$	2	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



③ الخط البياني للتابع f.

المطلوب هو رسم الخط البياني للتابع f على مجموعة تعريفه I، وليكن هذا الخط $\mathcal{C}$. لكننا درسنا التابع على المجال $I_1 = [0,1[$، فلنرسم الخط البياني $\mathcal{C}_1$ للتابع f على المجال I_1 منطلقاً من المبدأ O ومتفقاً مع تزايد التابع ليقارب المستقيم d_1. ولما كان التابع f فردياً، كان خطه البياني $\mathcal{C}$ متناظراً بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات. فلرسم $\mathcal{C}$ يكفي أن نرسم $\mathcal{C}_2$، نظير $\mathcal{C}_1$ بالنسبة إلى المبدأ O، فيكون $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$.

19 ادرس في كل حالة مما يأتي تغيرات التابع f على المجال I، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $I =]1,+\infty[,\quad f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

② $I = \mathbb{R},\quad f(x) = \ln(1+x^2)$

③ $I =]0,+\infty[,\quad f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

الحل

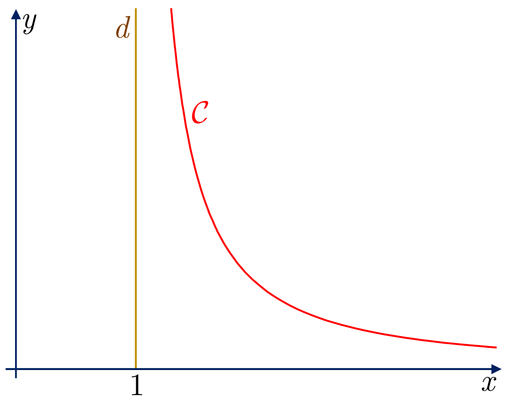
① التابع $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ ↦ x على $I =]1,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$، إذن المستقيم d الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$، إذن محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

- التابعان $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$ موجبان ومتزايدان تماماً على I، إذن كذلك يكون جداء ضربهما $x \mapsto x\ln x$، وهذا يقتضي أنّ f تابع متناقص تماماً على I. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert +\infty$	$\searrow$	0



الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

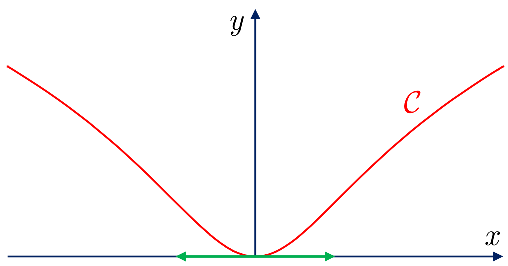
② التابع $f(x) = \ln(1+x^2)$ ↦ x على $I = \mathbb{R}$.

التابع f تابع زوجي، لأنّه معرّف على كامل $\mathbb{R}$ ويحقق $f(-x) = f(x)$ أياً كانت x.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$، و $f(0) = 0$.

- التابع $x \mapsto 1+x^2$ متزايد تماماً على $[0,+\infty[$ ويأخذ قيمه في $[1,+\infty[$، والتابع $x \mapsto \ln x$ متزايد تماماً على $[1,+\infty[$ إذن f تابع متزايد تماماً على $[0,+\infty[$. ولأنّ f زوجي استنتجنا جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



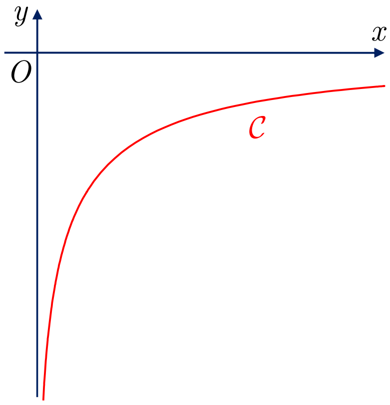
الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

لم نحسب المشتق لدراسة التغيرات، ولكن من المفيد ملاحظة أن كون f اشتقاقياً في المبدأ، وكون التابع زوجياً يجعلان المماس للخط البياني في المبدأ أفقياً. هذه الملاحظة تفيد في جعل الرسم أكثر دقة.

③ التابع $x \mapsto f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)$ على $I =]0,+\infty[$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ ، إذن نستنتج أنَّ المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ ، فمحور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.



- التابع $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ متزايد تماماً على I ويأخذ قيمه في $]0,1[$ ، والتابع $x \mapsto \ln x$ متزايد تماماً على $]0,1[$ إذن f تابع متزايد تماماً على I . ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0

الخط البياني للتابع f مبين جانباً.

20 في معلمٍ متجانس، $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I =]-1,+\infty[$ وفق $f(x) = \ln(x+1)$ و $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

① أثبت أنَّ $g(x) \le f(x)$ أياً يكن x من I .

② أثبت أنَّ $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

③ ادرس تغيرات كلٍ من f و g وارسم الخطين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ مستفيداً من رسم المماس المشترك.

الحل

① نتأمّل التابع h المعرّف على I بالصيغة $h(x) = f(x) - g(x)$. نلاحظ أنّ h اشتقاقي على I وأنّ $h'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{x}{(1+x)^2}$. إذن للتابع h جدول الاطراد الآتي

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه نستنتج أنّ $h(x) \ge h(0) = 0$ أياً كانت x من I . إذن $f(x) \ge g(x)$ أياً يكن x من I .

② باستعمال ترميز السؤال السابق نلاحظ أنّ $h(0) = h'(0) = 0$ هذا يبرهن أنّ $f(0) = g(0) = b$ و $f'(0) = g'(0) = a$ ، ومن ثَمّ فالمستقيم الذي معادلته $y = ax + b = x$ هو مماس مشترك للخطين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ في المبدأ.

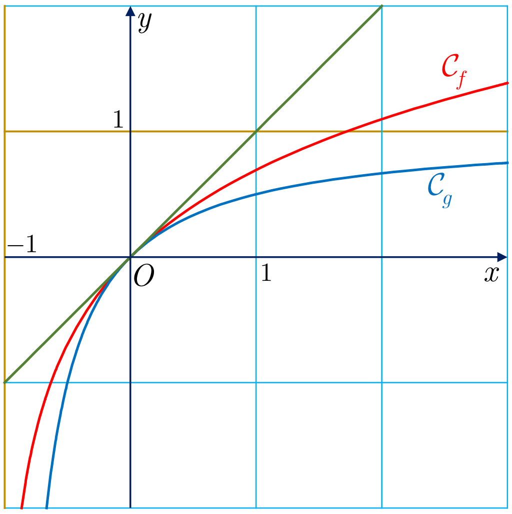
③ تغيرات f. التابع f تابع متزايد تماماً على I ويسعى إلى اللانهاية عند $+\infty$ وإلى $-\infty$ عند -1 فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_f$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	-1		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

تغيرات g. التابع g تابع متزايد تماماً (مشتقه موجب) على I ويسعى إلى 1 عند $+\infty$، فالمستقيم $y=1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_g$، وإلى $-\infty$ عند -1 فالمستقيم الذي معادلته $x=-1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}_g$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	-1		$+\infty$
$g(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	1

الرسم مبين في الشكل المجاور.



21 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]1,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x+1+2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① لمّا كان $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ و $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$ ، كان $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$. فالمستقيم Δ الذي معادلته $x=1$ مقارب شاقولي للخط $\mathcal{C}$ باتجاه التراتيب الموجبة. وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to1}f(x)=+\infty$.

يُكتب f على مجموعة تعريفه بالصيغة المكافئة : $f(x)=x+1+2\ln x-2\ln(x-1)$ مما يسهل عملية اشتقاقه لنجد

$$f'(x)=1+\frac{2}{x}-\frac{2}{x-1}=\frac{x^2-x-2}{x(x-1)}=\underbrace{\frac{x+1}{x(x-1)}}_{>0}(x-2)$$

إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $(x-2)$، لأنَّ الكسر موجب تماماً على المجال I.

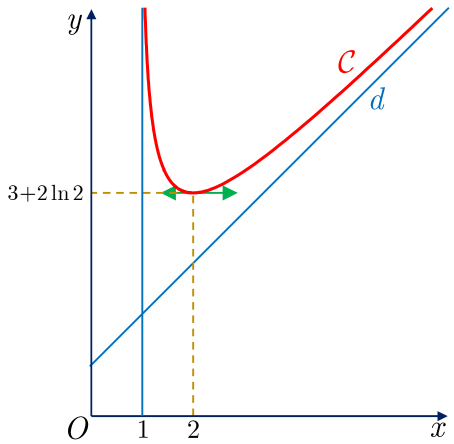
ومنه جدول التغيرات الآتي.

x	1			2		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$		$\searrow$	$\underset{\approx 4.4}{3+2\ln 2}$	$\nearrow$	$+\infty$

② لنتأمّل

$$h(x)=f(x)-(x+1)=2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.



③ وكذلك، لأنّ $\frac{x}{x-1}>1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x)>\ln 1=0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق المقارب d.

④ نرسم $\mathcal{C}$ مقارباً Δ باتجاه التراتيب الموجبة متفقاً مع تناقص التابع حتى النقطة $M\big(2,f(2)\big)$، ومن ثم نرسمه مقارباً d في جوار $+\infty$ ومتفقاً مع تزايد التابع.

22 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

① أثبت أنَّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

④ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

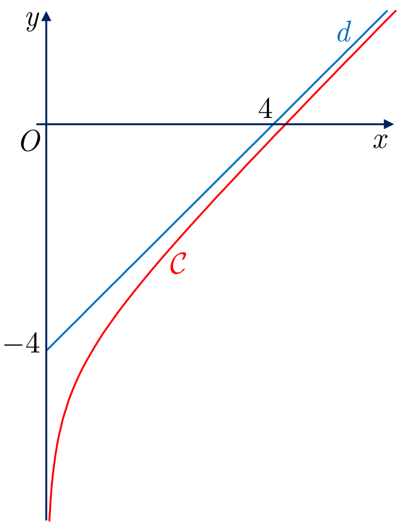
① التابع $x\mapsto\frac{x}{x+1}$ موجبٌ ومتزايد تماماً على I (لأنّ مشتقه $x\mapsto\frac{1}{(x+1)^2}$ موجبٌ تماماً)، وعليه يكون $x\mapsto\ln\frac{x}{1+x}$ متزايداً على I، لأنه تركيب تابعين متزايدين تماماً، وكذلك فإنّ $x\mapsto x-4$ تابع متزايدٌ تماماً على I. نستنتج إذن أنّ التابع f متزايدٌ تماماً.

② لنتأمّل

$$h(x)=f(x)-(x-4)=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=\ln 1=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ وكذلك، لأنّ $\frac{x}{x+1}<1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x)<\ln 1=0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت المقارب d.



④ لإنجاز الرسم يلزمنا استكمال جدول تغيرات f بحساب نهاية التابع عند طرفي مجموعة تعريفه. لمّا كان للتابع f مقارب مائل في جوار $+\infty$ معادلته $y=x-4$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-4)=+\infty$$

ومن جهة أخرى يُكتب f على I بالصيغة المكافئة :

$$f(x)=x-4-\ln(1+x)+\ln x$$

إذن $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-\infty$ لأنّ

$\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0}(x-4-\ln(1+x))=-4$.

ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الرسم المبيّن في الشكل المجاور.

23 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=x-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

② أثبت أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=x-\ln 2$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ ادرس الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

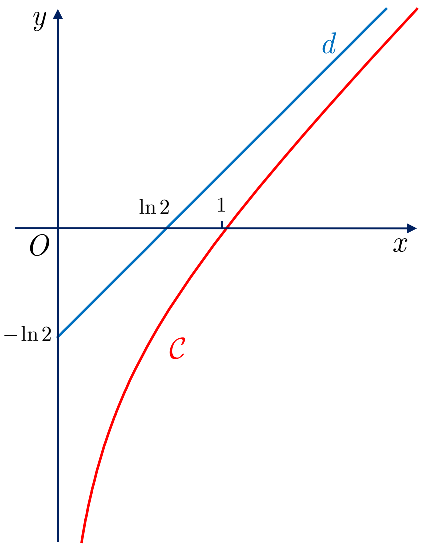
④ أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$.

⑤ ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim_{x\to0^+}\left(2+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ و $\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$. وكذلك فإنّ $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ لأنّ $\lim_{x\to\infty}\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=\ln 2$.

التابع $x\mapsto\frac{1}{x}$ متناقص تماماً على I ، ومن اطراد التابع اللوغاريتمي نستنتج أن $x\mapsto\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ متناقص تماماً، وعليه يكون f مجموع تابعين متزايدين تماماً هما $x\mapsto-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)$ و $x\mapsto x$ ، فهو إذن تابع متزايد تماماً على I . ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f .



x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\|-\infty\ \nearrow$	$+\infty$

② لنتأمّل

$$h(x)=f(x)-(x-\ln 2)$$
$$=\ln 2-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)=-\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$

لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)=\ln 1=0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y=x-\ln 2$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ وكذلك لأنّ $1+\frac{1}{2x}>1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x)<0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d.

④ التابع f تابعٌ مستمرٌ ومطّرد تماماً على مجموعة تعريفه، وهو يغير إشارته عليها فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α في I وعلاوة على ذلك

$$f(1)=1-\ln 3<1-\ln e=0 \quad \text{و} \quad f(2)=2-\ln 2.5>2-\ln e>0$$

إذن $\alpha\in\,]1,2[$.

⑤ الرسم مبين في الشكل المجاور.

24 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=\,]4,+\infty[$ وفق

$$f(x)=5-2x+3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$$

① أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=5-2x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② ادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ ومقاربه d.

③ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها. ثُمّ ارسم في معلمٍ واحدٍ المستقيم d ثم الخط البياني $\mathcal{C}$.

④ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α ، واحصره في مجال طوله يساوي 1.

الحل

① لنتأمّل :
$$h(x) = f(x) - (5-2x) = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) = 3\ln\left(1+\frac{5}{x-4}\right)$$

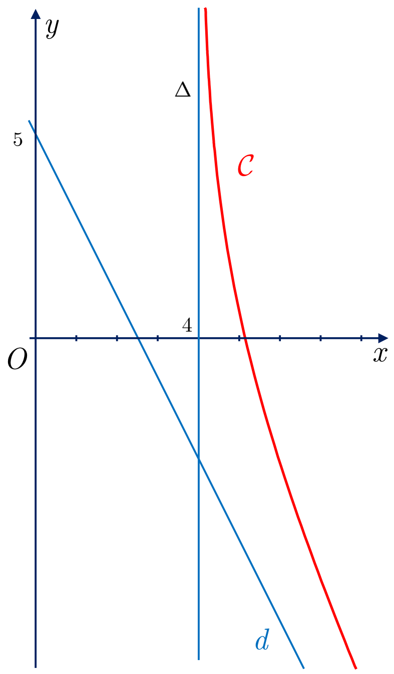
لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{5}{x-4}\right) = \ln 1 = 0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ ، فالمستقيم d الذي معادلته $y = 5-2x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

② وكذلك لأنّ $1+\dfrac{5}{x-4} > 1$ في حالة x من I استنتجنا أنّ $h(x) > 0$ على I والخطّ البياني $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق المقارب d.

③ لما كان $\lim\limits_{x\to4^+} \dfrac{x+1}{x-4} = +\infty$ و $\lim\limits_{X\to\infty} \ln X = +\infty$ ، استنتجنا أنَّ $\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = +\infty$ ، فالمستقيم Δ الموازي لمحور التراتيب والذي معادلته $x = 4$ مقارب لخط $\mathcal{C}$.

ولما كان $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-4}\right) = \ln 1 = 0$ ، و $\lim\limits_{x\to\infty} (5-2x) = -\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

لحساب $f'(x)$ ، نلاحظ أنّ $f(x) = 5-2x+3(\ln(x+1)-\ln(x-4))$ ، فيكون:



$$f'(x) = -2 + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-4} = -2 - \frac{15}{(x+1)(x-4)} < 0$$

فالتابع f متناقص تماماً وله جدول التغيرات الآتي:

x	4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

④ نجد في جدول تغيرات f أنَّ مجموعة قيم التابع f هي $\mathbb{R}$ ، والتابع متناقص تماماً فللمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد وليكن α ينتمي إلى المجال I. نحسب

$$f(5) = 3\ln 6 - 5 \approx 0.375$$
$$f(6) = 3\ln \tfrac{7}{2} - 7 \approx -3.34$$

إذن $5 < \alpha < 6$.

25 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]1,+\infty[$ وفق
$$f(x) = x + \ln(x^2-1)$$

① أثبت أنّ f متزايد تماماً على I.

② أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α.

③ أثبت أنّ $1 < \alpha < \sqrt{1+e^{-1}}$.

الحل

① التابع $x \mapsto x^2-1$ موجبٌ تماماً ومتزايدٌ تماماً على I، وعليه يكون التابع $x \mapsto \ln(x^2-1)$ متزايداً تماماً على I وعليه يكون f متزايداً تماماً على I بصفته مجموع تابعين متزايدين تماماً.

② لمّا كان $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ استنتجنا أنّ $f(I) =]-\infty,+\infty[$، فللمعادلة $f(x)=0$ حلٌّ وحيد α ينتمي إلى I.

③ المتراجحة الأولى أي $\alpha > 1$ واضحة لأنّ $\alpha \in I$. لإثبات المتراجحة الثانية نحسب :

$$f\left(\sqrt{1+e^{-1}}\right) = \sqrt{1+e^{-1}} + \ln e^{-1} = \sqrt{1+e^{-1}} - 1 = \frac{e^{-1}}{\sqrt{1+e^{-1}}+1} > 0 .$$

هذا يبرهن على أنّ $\alpha < \sqrt{1+e^{-1}}$ (لأنه لو افترضنا أنّ $\alpha \geq \sqrt{1+e^{-1}}$ لنتج من تزايد التابع f أنّ $0 = f(\alpha) \geq f(\sqrt{1+e^{-1}}) > 0$ وهذا تناقض). فنكون قد أثبتنا المتراجحة المطلوبة.

26 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعطى وفق : $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

② احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

③ أثبت أنَّ f متناقص تماماً على كلٍ من مجالي D_f.

④ ارسم في معلمٍ متجانس الخط البياني $\mathcal{C}$.

الحل

① التابع f عندما يكون $\dfrac{2x}{x-1} > 0$ وهذا يكافئ قولنا $x(x-1) > 0$. ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي خارج المجال $[0,1]$. إذن $D_f =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

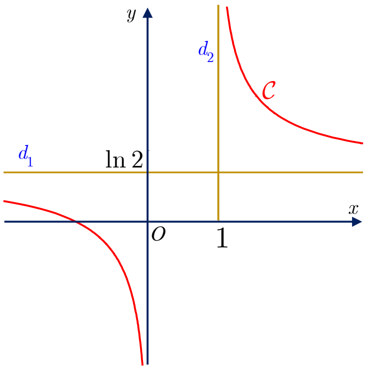
② حساب النهايات.

- لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x-1} = 2$، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$. نستنتج أنَّ المستقيم d_1 الموازي لمحور الفواصل والذي معادلته $y = \ln 2$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x}{x-1} = 0$، إذن $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.
- وأخيراً $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{x-1} = +\infty$، إذن $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_2 الموازي لمحور التراتيب والذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

③ دراسة اطراد f. نلاحظ أنّ : $f'(x) = \dfrac{x-1}{2x}\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1}{2x}\cdot\dfrac{-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{x(x-1)} < 0$، فالتابع f متناقص تماماً على كلٍّ من مجالي D_f.

④ لرسم الخط البياني $\mathcal{C}$، ننظم الجدول الآتي بتغيرات f:

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			$-$	
$f(x)$	$\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$



ونجد في الشكل المجاور الخط البياني للتابع f.

27 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف بالعلاقة $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)$.

① تحقّق أنَّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]1,3[$.

② أثبت أنَّ $(4-x) \in D_f$، أياً يكن $x \in D_f$.

③ a. احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x) + f(x)$.

b. استنتج أنَّ النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

④ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

⑤ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

⑥ ارسم الخط $\mathcal{C}$ في معلمٍ متجانس.

الحل

① التابع f عندما يكون $\dfrac{x-1}{3-x} > 0$ وهذا يكافئ قولنا $(x-3)(x-1) < 0$. ومجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجال $]1,3[$. إذن $D_f =]1,3[$.

② التابع $x \mapsto s(x) = 4 - x$ تابع متناقص تماماً ومنه $s\left(]1,3[\right) =]s(3), s(1)[=]1,3[$ أي إذا كان $x \in D_f$، كان $s(x) = (4-x) \in D_f$.

③ a.

$$\begin{aligned} f(4-x) + f(x) &= \ln\left(\frac{4-x-1}{3-4+x}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{3-x}{x-1} \times \frac{x-1}{3-x}\right) = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

b. تكون نقطةٌ $A(x_0, y_0)$ مركز تناظر الخط البياني لتابع f، إذا تحقق الشرطان:

☝ $x \in D_f \Rightarrow 2x_0 - x \in D_f$. هذا الشرط محقّق حيث $x_0 = 2$.

✌ $f(2x_0 - x) = 2y_0 - f(x)$. هذا الشرط محقّق أيضاً حيث $y_0 = 0$.

وبتحقيق f لهذين الشرطين تكون النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط $\mathcal{C}$.

④ $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{3-x}=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_1 الموازي لمحور التراتيب، والذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

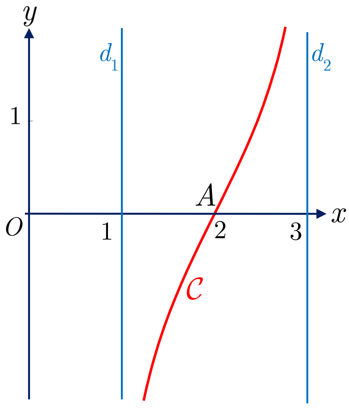
وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x-1}{3-x}=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ المستقيم d_2 الموازي لمحور التراتيب، والذي معادلته $x=3$ مقارب للخط $\mathcal{C}$.

⑤ دراسة تغيرات f:

$$f'(x)=\frac{\left(\dfrac{x-1}{3-x}\right)'}{\dfrac{x-1}{3-x}}=\frac{2}{(3-x)^2}\times\frac{3-x}{x-1}=\frac{2}{(x-1)(3-x)}$$

إشارة $(x-1)(3-x)$ موجبة تماماً على D_f . فالتابع f متزايد تماماً على D_f . ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	1		3
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖



⑥ الرسم المجاور يبين الخط البياني للتابع f . ولقد وضعنا عليه المقاربين ومركز التناظر.

28 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

① حساب نهايتي f المطلوبتين. لدينا

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+x}=1 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$$

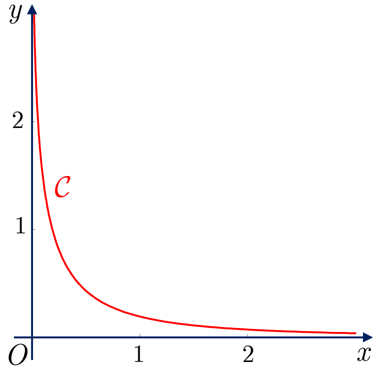
إذن $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. نستنتج أنَّ محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

② نلاحظ أنّ

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x(1+x)}=\frac{-1}{x(1+x)^2}$$

نستنتج أنّ $f'(x)$ سالب تماماً على $\mathbb{R}_+^*$.



وبناءً عليه ننظم الجدول الآتي بتغيرات التابع f:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

الرسم المجاور يبين الخط البياني للتابع f.

29 في كلٍ من الحالتين الآتيتين، ادرس التابع f على $I=\mathbb{R}_+^*$، وارسم خطه البياني $\mathcal{C}$.

① $f(x)=(x+1)\ln x$.

② $f(x)=\dfrac{1}{x}+x\ln x$.

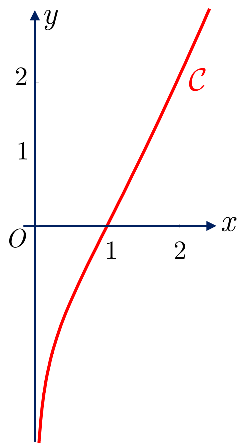
الحل

① دراسة $f(x)=(x+1)\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

- $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1\times(-\infty)=-\infty$. نستنتج أن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وكذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

- وعلى I لدينا $f'(x)=\ln x+1+\dfrac{1}{x}$، إشارة f' غير واضحة لذلك نسعى إلى دراسة اطراد المشتق، فنحسب $f''(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$، بهذا نجد جدول اطراد f' الآتي:



x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

يبين الجدول أنّ $f'(x)\geq 2>0$ على I، فالتابع f متزايد تماماً على I. وله جدول التغيرات الآتي:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- الرسم مبين في الشكل المجاور. نلاحظ أنّ النقطة $(1,0)$ نقطة من الخط البياني تساعد في الرسم.

② دراسة $f(x)=\dfrac{1}{x}+x\ln x$ على $\mathbb{R}_+^*$.

• لأنّ $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$ ، إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$. نستنتج أن محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

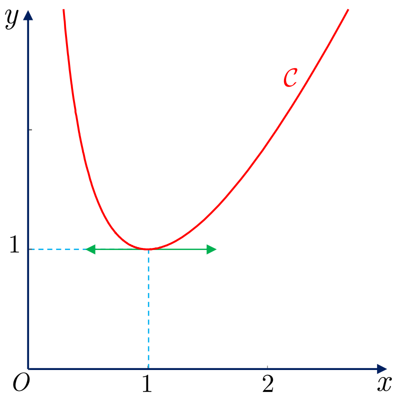
وكذلك $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}x\ln x=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$.

• وعلى I لدينا $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\ln x$ ، إشارة f' غير واضحة لذلك نسعى إلى دراسة اطراد المشتق، فنحسب على $\mathbb{R}_+^*$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x}>0$$

فالتابع f' تابعٌ متزايدٌ تماماً، ولأنّ $f'(1)=0$ استنتجنا جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	1	$\nearrow +\infty$



• الرسم مبين في الشكل المجاور.

30 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

① احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$. ما مقاربات الخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم الخط $\mathcal{C}$.

③ لتكن M_1 و M_2 و M_3 و M_4 النقاط المعرّفة كما يأتي:

- M_1 نقطة تقاطع $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل.
- M_2 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يمر بمبدأ الإحداثيات.
- M_3 نقطة من $\mathcal{C}$ مماسه منها يوازي محور الفواصل.
- M_4 نقطة من $\mathcal{C}$ ينعدم فيها المشتق الثاني للتابع f.

.a احسب فواصل هذه النقاط.

.b أثبت أنَّ تلك الفواصل هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية. ما أساسها؟

الحل

① • $\lim_{x\to0^+}(1+\ln x)=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ ، إذن $\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty$. نستنتج أنَّ محور التراتيب مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• وكذلك $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ، إذن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. نستنتج أنَّ محور الفواصل مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

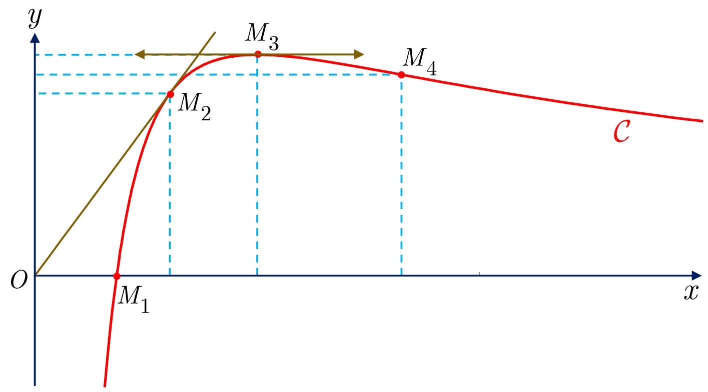
② يعطى مشتق f على المجال I بالعلاقة

$$f'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$$

ينعدم $f'(x)$ عند $x=1$. وإشارته تعاكس إشارة $\ln x$ ، نستنتج إذن جدول تغيرات f الآتي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

• رسم $\mathcal{C}$ مبين في الشكل الآتي.



③ a. يتقاطع $\mathcal{C}$ مع محور الفواصل في M_1 التي تحقق فاصلتها x_1 العلاقة $\ln x_1+1=0$ إذن $x_1=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

• لنرمز إلى فاصلة M_2 بالرمز x_2 ، فيكون ترتيبها $y_2=f(x_2)=\frac{1+\ln x_2}{x_2}$ ، ويكون ميل المماس عندها $f'(x_2)=\frac{-\ln x_2}{x_2^2}$ فمعادلته $y=y_2+f'(x_2)(x-x_2)$ أي

$$y=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_2}{{x_2}^2}(x-x_2)$$

يمر هذا المماس بالمبدأ، إذا حقَّقت النقطة $(0,0)$ معادلته أي $0=\frac{1+\ln x_2}{x_2}-\frac{\ln x_2}{{x_2}^2}(0-x_2)$ ، أي $2\ln x_2+1=0$ ، ومنه $x_2=e^{-1/2}=1/\sqrt{e}$. وهي فاصلة M_2.

- مماس $\mathcal{C}$ عند $M_3(x_3,y_3)$ يوازي محور الفواصل، إذن $f'(x_3)=0$. إذن $x_3=1$ ، وهي فاصلة M_3 .
- لتكن x_4 فاصلة M_4 . لدينا $f''(x)=\dfrac{2\ln x-1}{x^3}$ ، ينعدم $f''(x)$ عند حلول المعادلة $2\ln x=1$ ، ومنه $x_4=e^{1/2}=\sqrt{e}$. وهي فاصلة M_4 .

إذن فواصل (M_1,M_2,M_3,M_4) هي بالترتيب $x_1=\dfrac{1}{e}$ ، $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ، $x_3=1$ ، $x_4=\sqrt{e}$.

b. نستنتج (x_1,x_2,x_3,x_4) هي أربعة حدود متعاقبة من متتالية هندسية. أساسها يساوي $\sqrt{e}$ ، لأنّ $x_k=\dfrac{1}{e\sqrt{e}}e^{k/2}$ في حالة $k=1,2,3,4$.

31 ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ وفق $f(x)=-\dfrac{x}{2}+\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$ ، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① *a*. أثبت أنَّ $\dfrac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\dfrac{1}{4}$ ، أياً يكن x من D_f .

b. استنتج أنَّ النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط $\mathcal{C}$.

② ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه.

③ أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y=-\dfrac{1}{2}x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$. وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى مقاربه d .

④ ارسم في معلم واحد d ثم $\mathcal{C}$.

الحل

① *a*. لاحظ أنّه إذا كان x مختلفاً عن 0 و 1 كان كذلك المقدار $1-x$. وعليه إذا كان x عنصراً من D_f كان $1-x$ أيضاً عنصراً من D_f وأمكننا حساب

$$\begin{aligned}f(x)+f(1-x)&=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|-\frac{1-x}{2}+\ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right|\\&=-\frac{1}{2}+\ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right|\cdot\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ومنه المساواة المطلوبة.

b. ينتج من تحقّق الشرطين : (1) أياً كان x من D_f كان $1-x$ عنصراً من D_f ، و (2) أياً كان x من D_f كان $\dfrac{f(x)+f(1-x)}{2}=-\dfrac{1}{4}$ أنّ النقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للخط البياني للتابع f .

② تكفي الدراسة على كلٍّ من المجالين $\left]\frac{1}{2},1\right[$ و $]1,+\infty[$، ثُمَّ نتممها بالاستفادة من الخاصة التناظرية.

على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ لدينا $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{1-x}{x}$ إذن للتابع f الصيغة الآتية على هذا المجال

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \ln(1-x) - \ln x$$

ولدينا $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f. وكذلك فإنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}$$

وهو سالب تماماً على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$ لأنه يساوي مجموع ثلاثة مقادير سالبة تماماً. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f على المجال $\left]\frac{1}{2},1\right[$:

x	$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$-\frac{9}{2}$	$-$	‖
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

وعلى المجال $]1,+\infty[$ لدينا $\left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{x-1}{x}$ إذن للتابع f الصيغة الآتية على هذا المجال

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{x}{2} + \ln(x-1) - \ln x$$

ولدينا $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ فالمستقيم الذي معادلته $x = 1$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f.

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ لأنّ $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.

وكذلك فإنّ

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{2+x-x^2}{2(x-1)x} = \underbrace{\frac{(1+x)}{2(x-1)x}}_{>0}(2-x)$$

على المجال $]1,+\infty[$ ينعدم $f'(x)$ عند $x = 2$. ومنه جدول التغيرات الآتي لـ f على هذا المجال:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$		
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-\ln 2 - 1$ ≈ -1.7	$\searrow$	$-\infty$

③ لنلاحظ أنّ

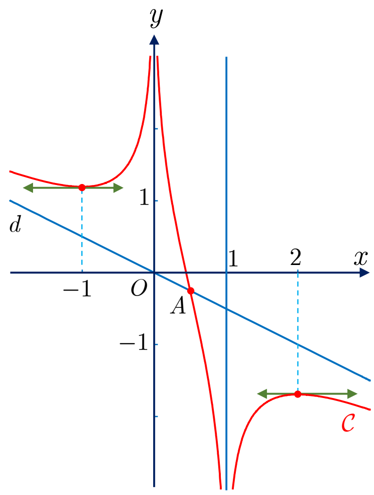
$$f(x) + \frac{x}{2} = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) = 0$ فالمستقيم d الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

وأخيراً $f(x)+\frac{x}{2}=0$ إذا وفقط كان $\left|1-\frac{1}{x}\right|=1$ وهذا يكافئ $x=\frac{1}{2}$. إذن يحافظ $f(x)+\frac{x}{2}$ على إشارة ثابتة على كل من المجالات $]-\infty,0[$ و $]0,\frac{1}{2}[$ و $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ ومنه

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$\mathcal{C}$		فوق d	$\Vert$	فوق d	$\vert$	تحت d	$\Vert$	تحت d	

④ نرسم $\mathcal{C}$ على كل من المجالين $]\frac{1}{2},1[$ و $]1,+\infty[$ ونستفيد من الخاصة التناظرية لنتمّ الرسم على كامل مجموعة التعريف.



32 ليكن f التابع المعرف على $D_f=\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ ، وليكن $\mathcal{C}$ خطه البياني في معلم متجانس.

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② لتكن A النقطة من الخط $\mathcal{C}$ التي فاصلتها 1.

a. جد معادلةً للمستقيم T_A المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة A.

b. ارسم في معلم واحد T_A ومقاربات $\mathcal{C}$ ، ثم $\mathcal{C}$.

③ لتكن B نقطة من الخط $\mathcal{C}$ فاصلتها u. أثبت أنَّ $u^3-1+2\ln u=0$ هو الشرط اللازم والكافي ليكون المماس T_B للخط $\mathcal{C}$ في النقطة B موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

④ a. حل المعادلة $u^3-1+2\ln u=0$.

b. استنتج أنَّ A هي النقطة الوحيدة من $\mathcal{C}$ يكون المماس فيها موازياً للمستقيم الذي معادلته $y=x$.

الحل

①

• لما كان $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$. إذن محور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

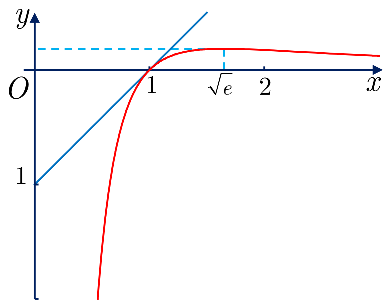
ولما كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$.

• لدراسة التغيرات نحسب المشتق :

$$f'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}.$$

ينعدم المشتق $f'(x)$ عندما $1-2\ln x=0$، أي في حالة $x=\sqrt{e}$. وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0



② معادلة المماس T_A في النقطة التي فاصلتها 1 أي $A(1,0)$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=x-1$.

ونجد في الشكل المجاور الرسم المطلوب.

③ معادلة المماس T_B في النقطة التي فاصلتها u هي $y=f(u)+f'(u)(x-u)$، وميله $f'(u)$.

يوازي هذا المماس المستقيم الذي معادلته $y=x$ إذا وفقط إذا كان ميله مساوياً الواحد أي إذا وفقط غذا تحقق الشرط $\frac{1-2\ln u}{u^3}=1$ وهذا يكافئ $u^3+2\ln u-1=0$.

④ a. لنتأمّل التابع $g(x)=x^3-1+2\ln x$، ولنلاحظ أنّه يساوي مجموع تابعين متزايدين تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ هما التابع $x\mapsto \ln x$ و $x\mapsto x^3-1$، فهو إذن تابعٌ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. من الواضح أنّ $g(1)=0$، (لأننا نعرف مسبقاً أنّ T_A يوازي منصف الربع الأوّل Δ، إذن $u=1$ حلٌّ للمعادلة المدروسة). وعليه لأنّ التابع g متزايدٌ تماماً كان الحلّ $u=1$ هو الحلّ الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

b. نستنتج مما سبق أنَّ المماس T_A للخط $\mathcal{C}$ في A هو المماس الوحيد الذي يوازي المستقيم Δ.

33 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\left[0,+\infty\right[$ وفق:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right), & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

① a. احسب نهاية $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ عندما تسعى x إلى الصفر؟ واستنتج أنَّ f اشتقاقي في $x=0$.

b. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c. ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② ليكن $\mathcal{T}$ مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها $x=1$ منه، جد معادلةً لهذا المماس.

③ نهدف هنا دراسة الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمماس $\mathcal{T}$. ولهذا نعرف التابع h على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بالعلاقة $h(x)=f(x)+x-\dfrac{1}{4}$. ادرس، إشارة $h''(x)$ لتستنتج إشارة $h'(x)$ ومن ثَمّ إشارة $h(x)$.

④ ارسم المماس $\mathcal{T}$ ومماسات $\mathcal{C}$ في نقاط تقاطعه مع محور الفواصل ثم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

① a. في حالة $x>0$، المقدار $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ هو معدل تغير f عند 0، نرمز إليه بالرمز $t(x)$، فيكون $t(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(x\ln x-\dfrac{3}{2}x\right)$.

نعلم أنَّ $\lim\limits_{x\to0} x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to0} x=0$، إذن $\lim\limits_{x\to0} t(x)=\dfrac{1}{2}(0-0)=0$. فالتابع f اشتقاقي عند $x=0$ و $f'(0)=0$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

c. وجدنا أنَّ $f'(0)=0$. وفي حالة $x>0$، لدينا:

$$f'(x)=x\ln x-x=x(\ln x-1)$$

إذن ينعدم $f'(x)$ في حالة $x=0$ وفي حالة $x=e$. ومنه جدول تغيرات f الآتي:

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^2/4$	$\nearrow$	$+\infty$

② معادلة $\mathcal{T}$ هي $y=f(1)+f'(1)(x-1)$ أي $y=\frac{1}{4}-x$.

③ نعرّف $h(x)=f(x)+x-\frac{1}{4}$ فيكون

$$h'(x)=x\ln x-x+1$$
$$h''(x)=\ln x$$

إذن للتابع h' جدول الاطراد الآتي

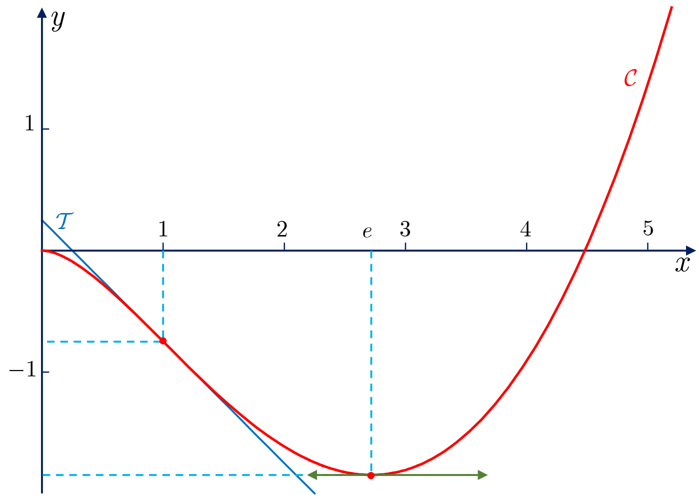
x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
$h''(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$h'(x)$	$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$

ومنه نستنتج أنَّ $h'(x)\geq 0$، إذن للتابع h جدول الاطراد الآتي

x	$0 \qquad 1 \qquad +\infty$
$h'(x)$	$+ \qquad +$
$h(x)$	$\nearrow \quad 0 \quad \nearrow$

ومن هذا الجدول نستنتج أنّ $\mathcal{C}$ يقع تحت المماس $\mathcal{T}$ على $]0,1[$، وأنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق المماس $\mathcal{T}$ على $]1,+\infty[$.

④ الرسم.



6

التابع الأسي

1. تعريف التابع الأسي النيبري
2. خواص التابع الأسي
3. دراسة التابع الأسي
4. نهايات مهمة تتعلّق بالتابع الأسي
5. دراسة التابع $x \mapsto a^x , (a > 0)$
6. معادلات تفاضلية بسيطة

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف وخواص التابع الأسي
- النهايات الأساسية المتعلقة بالتابع الأسي
- اطراد التابع الأسي واشتقاقيته
- اشتقاقيّة التابع الأسي
- حل معادلات ومتراجحات تحوي تابعاً أسياً
- دراسة توابع تضم التابع الأسي في علاقة ربطها.
- حل بعض المعادلات التفاضلية البسيطة من المرتبة الأولى بأمثال ثابتة.

تَدرَّبْ صفحة 186

① اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

❶ $A = e^{\ln 2} + e^{\ln 3}$ ❷ $B = e^{\frac{1}{2}\ln 16} + e^{\ln 3}$

❸ $C = \ln e^{-3} + e^{\ln 5}$ ❹ $D = e^{-\ln\frac{3}{2}} + e^{\ln\frac{1}{3}}$

الحل

❶ $A = 5$ ❷ $B = 7$

❸ $C = 2$ ❹ $D = 1$

② اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من العبارات الآتية، مبيّناً المجموعة التي تكون معرّفة عليها:

❶ $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x)$

❷ $B = e^{\ln(x-1)-\ln x} + \frac{1}{x}$

❸ $C = \ln(e^{1/x}) + e^{-\ln x}$

الحل

❶ على $]0,+\infty[$ لدينا $A = e^{\ln x} - \ln(2e^x) = -\ln 2$.

❷ على $]1,+\infty[$ لدينا $B = 1$.

❸ على $]0,+\infty[$ لدينا $C = \frac{2}{x}$.

③ حلّ المعادلات أو المتراجحات الآتية:

❶ $e^{3-x} = 1$ ❷ $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ ❸ $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$

❹ $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$ ❺ $\ln(e^x - 2) = 3$ ❻ $\ln(2-e^x) \geq 3$

❼ $e^{x^2-2} \leq e^{4-x}$ ❽ $(e^x - 1)(e^x - 4) < 0$ ❾ $e^{2x^2-1} \geq 3$

الحل

❶ $e^{3-x} = 1$ تكافئ $3 - x = \ln(1) = 0$ ومنه $x = 3$.

❷ $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ تكافئ $2x^2 + 3 = 7x$ أو $(x-3)(2x-1) = 0$ ومنه $x \in \{3, \frac{1}{2}\}$.

❸ $\frac{e^x}{1-2e^x} = 5$ تكافئ $e^x = \frac{5}{11}$ ومنه $x = \ln\left(\frac{5}{11}\right)$.

❹ $2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$ تكتب $\frac{2}{e^x} = \frac{1}{e^x+2}$ فهي تكافئ $e^x + 4 = 0$ وهذه مستحيلة لأنّ $e^x > 0$ أياً كانت قيمة x.

❺ $\ln(e^x-2)=3$ هذه تكافئ $e^x-2=e^3$ ومنه $x=\ln(2+e^3)$.

❻ $\ln(2-e^x)\geq 3$ هذه تكافئ $2-e^x\geq e^3$ أو $2-e^3\geq e^x$ وهذه مستحيلة لأنّ $2-e^3<0$.

❼ $e^{x^2-2}\leq e^{4-x}$ تُكافئ $x^2-2\leq 4-x$ أو $x^2+x-6\leq 0$ إذن $x\in[-3,2]$.

❽ $(e^x-1)(e^x-4)<0$ هذه تُكافئ $1<e^x<4$ أو $0=\ln 1<x<2\ln 2$.

❾ $e^{2x^2-1}\geq 3$ تكافئ $2x^2-1\geq\ln(3)$ ومنه $x\in\left]-\infty,-\sqrt{\frac{1+\ln(3)}{2}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{1+\ln(3)}{2}},+\infty\right[$

④ اشرح لماذا تتّفق إشارة $e^x-\frac{4}{e^x}$ مع إشارة (e^x-2). ثُمّ حل المتراجحة $e^x-\frac{4}{e^x}<0$.

الحل

لأنّ $e^x-\frac{4}{e^x}=(1+\frac{2}{e^x})(e^x-2)$ والمقدار $1+\frac{2}{e^x}$ موجبٌ تماماً. وعليه تكافئ المتراجحةُ $e^x-\frac{4}{e^x}<0$ المتراجحةَ $e^x<2$ أو $x<\ln 2$.

تَدرَّبْ صفحة 190

① أثبت صحة كلٍ من المساواتين الآتيتين على $\mathbb{R}$.

❶ $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$ ❷ $\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^{-x}}$

الحل

❶ نلاحظ أنّ $e^{-x}+1=\frac{1}{e^x}+1=\frac{e^x+1}{e^x}$ إذن $\frac{e^x+1}{e^{-x}+1}=e^x$ الطرفان موجبان وبأخذ اللوغاريتم نجد $\ln(e^x+1)-\ln(e^{-x}+1)=x$.

❷ لقد رأينا أنّ $e^{-x}+1=\frac{e^x+1}{e^x}$ وبأخذ مقلوب الطرفين نجد $\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^x}{e^x+1}$.

② اكتب بأبسط ما يمكن كلاً من الأعداد الآتية:

❶ $A=\ln\sqrt{e^5}$ ❷ $B=\frac{e}{e^{2+\ln 3}}$ ❸ $C=\frac{e^{2+\ln 8}}{e^{3+\ln 4}}$

❹ $D=\frac{e^{4x}}{e\times(e^x)^2}$ ❺ $E=(e^{2x})^3\times(e^{-x})^6$ ❻ $F=\frac{e^{3\pi}-e^{2\pi}}{e^{2\pi}-e^{\pi}}$

❼ $G=(32)^{\frac{3}{2}}$ ❽ $H=3^{\frac{-1}{\ln 3}}$ ❾ $I=\sqrt[6]{27}\times 3^{\frac{1}{2}}$

الحل

❶ $A=\frac{5}{2}$ ❷ $B=\frac{1}{3e}$ ❸ $C=\frac{2}{e}$

❹ $D=e^{2x-1}$ ❺ $E=1$ ❻ $F=e^{\pi}$

❼ $G=128\sqrt{2}$ ❽ $H=\frac{1}{e}$ ❾ $I=3$

③ أثبت أنَّ التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2$ تابعٌ ثابتٌ.

الحل

بفكّ التربيع أو باستعمال متطابقة فرق مربعين نجد $f(x)=4$ أياً كانت قيمة x.

④ حل المعادلات الآتية:

❶ $e^{2x}-5e^x+4=0$ ❷ $e^{2x}-e^x-6=0$

❸ $4e^{2x}-e^x+2=0$ ❹ $e^{-2x}-7e^{-x}+6=0$

الحل

❶ المعادلة تكتب بالشكل $(e^x-1)(e^x-4)=0$ إذن $x\in\{\ln 1,\ln 4\}$ أو $x\in\{0,2\ln 2\}$.

❷ المعادلة تكتب بالشكل $(e^x-3)(e^x+2)=0$ إذن أو $x=\ln 3$، لأنّ $e^x+2>0$ أياً كانت x.

❸ المعادلة تكتب بالشكل $(2e^x-1)^2+3e^x+1=0$ وهذه المعادلة مستحيلة لأنّ مجموع مقادير موجبة لا ينعدم إلاّ إذا انعدمت جميعها.

❹ المعادلة تكتب بالشكل $(e^{-x}-1)(e^{-x}-6)=0$ إذن $x\in\{0,-\ln 6\}$.

⑤ حل المتراجحات الآتية:

❶ $e^x-4e^{-x}\le 0$ ❷ $(e^x-2)e^x>2(e^x-2)$

❸ $e^{x+2}\ge \dfrac{3}{e^x}$ ❹ $e^{2x}-2e^{-x}-3<0$

❺ $e^{x+\ln 4}>\dfrac{2}{3}$ ❻ $e^x+4e^{-x}\le 5$

الحل

❶ بضرب الطرفين بالمقدار الموجب e^x نجد أنّ المتراجحة تكافئ $(e^x-2)(e^x+2)\le 0$ أو $e^x-2\le 0$ لأنّ $e^x+2>0$ دوماً. ومنه $x\in]-\infty,\ln 2]$.

❷ بإصلاح المتراجحة نجدها تكافئ $(e^x-2)^2>0$ ومنه $x\ne \ln 2$.

❸ المتراجحة $e^{x+2}\ge \dfrac{3}{e^x}$ تكافئ $e^{2x+2}\ge 3$ أو $2x+2\ge \ln 3$ أي $x\ge \frac{1}{2}\ln 3-1$.

❹ بضرب الطرفين بالمقدار الموجب e^x ووضع $X=e^x$ تأخذ المتراجحة الصيغة المُكافئة $X^3-3X-2<0$ ولكنّ X^3-3X-2 كثير حدود من الدرجة الثالثة، ونظرة سريعة تبيّن لنا أنّ كلّاً من $X=2$ و $X=-1$ جذرٌ له فهو يقبل القسمة على $(X-2)(X+1)$ وهذا يتيح لنا تحليله لنجد $X^3-3X-2=(X+1)^2(X-2)$. إذن المتراجحة المعطاة تكافئ $(e^x+1)^2(e^x-2)<0$ ولكنّ المقدار $(e^x+1)^2$ موجب تماماً، إذن هي تُكافئ $e^x-2<0$ أو $x<\ln 2$.

❺ $e^{x+\ln 4}>\frac{2}{3}$ تكافئ $x>-\ln 6$.

❻ المتراجحة $e^x+4e^{-x}\le 5$ تكافئ $(e^x-1)(e^x-4)\le 0$ ومنه $x\in[0,2\ln 2]$.

تَدرَّبْ صفحة 194

① ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\exp\left(\frac{1}{2}-x^2\right)$.

❶ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج معادلة كل مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.

❷ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها. أشر إلى قيمة حديّة للتابع.

❸ اكتب معادلةً للمماس d للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي ينعدم فيها $f'(x)$.

❹ جد إحداثيات النقطتين اللتين ينعدم فيهما $f''(x)$، واكتب معادلتي المماسين d_1 و d_2 فيهما.

❺ ادرس وضع الخط البياني $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى كلٍّ من d و d_1 و d_2.

❻ ارسم d و d_1 و d_2 ثم ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

❶ لمّا كان $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)=-\infty$ و $\lim_{u\to-\infty} e^u=0$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f.

❷ نلاحظ أنّ $f'(x)=-2x\,e^{\frac{1}{2}-x^2}$. إذن إشارة f' تعاكس إشارة x على $\mathbb{R}$، ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	0

إذن يبلغ f قيمة حديّة كبرى شاملة (أومحلية) عند $x=0$.

❸ لمّا كان $f(0)=\sqrt{e}$ و $f'(0)=0$ استنتجنا أنّ $y=\sqrt{e}$ هي معادلة المماس d في النقطة التي ينعدم عندها f'.

❹ هنا $f''(x)=2(2x^2-1)e^{\frac{1}{2}-x^2}$ إذن $f''(x)=0$ يكافئ $x\in\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. ونلاحظ أنّ

- لمّا كان $f(\frac{1}{\sqrt{2}})=1$ و $f'(\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{2}$ استنتجنا أنّ $y=2-\sqrt{2}\,x$ هي معادلة المماس d_1 في النقطة التي فاصلتها $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- ولمّا كان $f(\frac{-1}{\sqrt{2}})=1$ و $f'(\frac{-1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}$ استنتجنا أنّ $y=2+\sqrt{2}\,x$ هي معادلة المماس d_2 في النقطة التي فاصلتها $x=\frac{-1}{\sqrt{2}}$.

❺ لما كان $f(x)\le\sqrt{e}$ على $\mathbb{R}$ استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d.

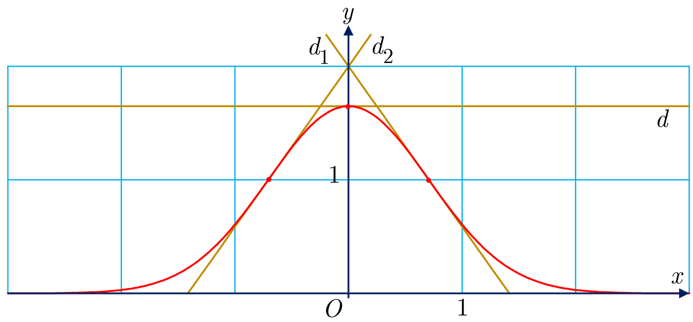
▪ ليكن $g(x)=f(x)-\left(2-\sqrt{2}\,x\right)$. نلاحظ أنّ $g''(x)=f''(x)$ ، إذن إشارة g'' معروفة. وكذلك نلاحظ أنّ $g'(x)=-2\sqrt{e}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{e^{x^2}}+\sqrt{2}$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)=\sqrt{2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x)=\sqrt{2}$ لأنّ $\lim\limits_{X\to\infty}\frac{X}{e^X}=0$. ومنه جدول تغيرات g' الآتي

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g''(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g'(x)$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

نلاحظ من الجدول أنّ g' موجب على كامل $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلاّ عند $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. إذن g تابعٌ متزايدٌ على $\mathbb{R}$ ولأنّ $g(\frac{1}{\sqrt{2}})=0$ استنتجنا أنّ $g(x)<0$ على $\left]-\infty,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ وأنّ $g(x)>0$ على $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$. إذن يقع $\mathcal{C}$ تحت d_1 على $\left]-\infty,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ وفوقه على $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$.

ونبرهن بالمثل، أو بالاستفادة من كون التابع المدروس زوجياً، أنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق d_2 على $\left]-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ وتحته على $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$.

❻ تتيح الدراسة السابقة رسم $\mathcal{C}$ بدقة:



② f و g هما التابعان المعرّفان على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ و $g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ ، و h هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $h=\frac{g}{f}$. احسب كلّاً من $f'(x)$ و $g'(x)$. وأثبت أنّ $h'=\frac{1}{f^2}$.

الحل

بحساب بسيط نلاحظ أنّ $f'(x)=g(x)$ و $g'(x)=f(x)$ وأخيراً

$$f'(x)=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=\frac{f^2(x)-g^2(x)}{f^2(x)}$$

ولكن $f^2(x)-g^2(x)=1$ أياً كانت x (تدرب ③ صفحة 190) إذن $h'=\frac{1}{f^2}$.

تَدرَّبْ صفحة 199

① ادرس نهاية كلٍّ من التابعين f و g عند حدود مجموعة تعريفه.

❶ $f(x) = \ln x - e^x$ ❷ $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

الحل

❶ التابع $x \mapsto f(x) = \ln x - e^x$ معرّف على $]0, +\infty[$.

- عند $+\infty$ لدينا حالة عدم تعيين نزيلها بإخراج e^x خارج قوسين فنكتب

$$f(x) = e^x \left(\frac{\ln x}{e^x} - 1 \right) = e^x \left(\frac{\ln x}{x} \cdot \frac{x}{e^x} - 1 \right)$$

الآن لدينا $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

- عند الصفر الأمر سهل لأنّ $\lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$ و $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ إذن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

❷ التابع $x \mapsto g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ معرّف على $\mathbb{R}$.

- عند $-\infty$ لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$.
- عند $+\infty$، لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X - 1}{X + 1} = 1$ إذن نستنتج أنّ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1$.

② ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (3 - x)e^x$.

❶ ادرس تغيرات f.

❷ اكتب معادلة d مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها تعدم $f''(x)$.

❸ ارسم في معلمٍ واحد المماس d ثم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

❶ التابع $x \mapsto f(x) = (3 - x)e^x$ معرّف على $\mathbb{R}$.

- ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$، أمّا في جوار اللانهاية السالبة فنكتب $f(x) = -e^3 X e^X$ حيث $X = x - 3$. ولكن $\lim\limits_{x \to -\infty} (x - 3) = -\infty$ وكذلك فإنّ $\lim\limits_{x \to -\infty} X e^X = 0$ إذن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. نستنتج أن محور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.
- نلاحظ أنّ $f'(x) = (2 - x)e^x$، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

❷ نلاحظ أنّ $f''(x) = (1-x)e^x$، وهو ينعدم فقط عند $x = 1$. ولدينا $f(1) = 2e$ و $f'(1) = e$ إذن معادلة المماس d الذي يمس $\mathcal{C}$ في النقطة $x = 1$ هي $y = e(x+1)$.

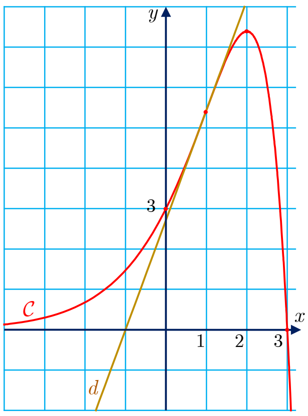
ملاحظة. مع أنّه غير مطلوب في صيغة السؤال، قد يرغب المرء بدراسة الوضع النسبي للخط البياني $\mathcal{C}$ والمماس d، فنضع

$$h(x) = f(x) - e(x+1) = 3e^x - e - x(e^x + e)$$

من غير الواضح كيف نعين إشارة h. وخاصّة أنّ اشتقاقه يُبقي على الحد xe^x في صيغة المشتق، يمكننا إذن أن نفكّر بإخراج أمثال x وهو $(e^x + e)$ خارج قوسين وبخاصة أنّ هذا المقدار موجب ولا يؤثر في تعيين إشارة h فنكتب إذن $h(x) = (e^x + e)g(x)$ وقد عرّفنا

$$g(x) = \frac{3e^x - e}{e^x + e} - x$$

وهنا نحسب: $g'(x) = \dfrac{4e \cdot e^x}{(e^x + e)^2} - 1 = -\dfrac{(e^x - e)^2}{(e^x + e)^2}$ فنستنتج أنّ g' سالب على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلا عند $x = 1$. إذن التابع g متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ولكن $g(1) = 0$ (هذه نتيجة معروفة بالنسبة إلينا لأنّ h يمثّل الفرق بين التابع والمماس في النقطة التي فاصلتها 1، فلا بد للفرق أن ينعدم عند $x = 1$).



إذن $g(x) > 0$ على $]-\infty, 1[$، و $g(x) < 0$ على $]1, +\infty[$. وعليه يقع $\mathcal{C}$ فوق المماس d على المجال $]-\infty, 1[$، ويقع تحته على $]1, +\infty[$.

❸ الرسم مبين في الشكل المجاور.

③ جد نهاية كلٍّ من التوابع الآتية عند a:

❶ $f(x) = (2-x)^{\frac{3}{x-1}}, \quad a = 1$

❷ $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{3}}, \quad a = +\infty$

❸ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x}, \quad a = 0$

❹ $f(x) = 2xe^{-x}, \quad a = +\infty$

❺ $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x - 1}, \quad a = +\infty, -\infty$

❻ $f(x) = e^{2x} - e^x + 3, \quad a = +\infty, -\infty$

❼ $f(x) = \ln(e^x + 2) \quad a = +\infty, -\infty$

❽ $f(x) = 2x - 1 + e^{-x} \quad a = -\infty$

❾ $f(x) = \dfrac{1}{x}(e^x - 1) \quad a = 0, +\infty$

❿ $f(x) = e^{1/x} \quad a = +\infty, 0, -\infty$

الحل

❶ نضع $u(x) = x - 1$ ونحسب

$$\ln f(x) = -3\frac{\ln(1-u)}{-u}$$

ولكن لدينا $\lim_{x\to 1} u(x) = 0$ و $\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1-u)}{-u} = 1$. إذن $\lim_{x\to 1} \ln f(x) = -3$ وأخيراً $\lim_{x\to 1} f(x) = e^{-3}$.

❷ نضع $u(x) = \frac{3}{x+1}$ ونحسب

$$\ln f(x) = -\frac{\ln(1-u)}{-u}$$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ و $\lim_{u\to 0} \frac{\ln(1-u)}{-u} = 1$. إذن $\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = -1$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1}$.

❸ $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

❹ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

❺ واضح أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ ، أمّا عند $+\infty$ فنكتب

$$f(x) = e\cdot\frac{e^{x-1}}{x-1} - \frac{1}{x-1}$$

لنستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

❻ هنا $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$ وضوحاً. أمّا عند $+\infty$ فنكتب

$$f(x) = e^x(e^x - 1) + 3$$

لنستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

❼ هنا $\lim_{x\to-\infty} (e^x + 2) = 2$ و $\lim_{x\to+\infty} (e^x + 2) = +\infty$ إذن

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(2)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

❽ نكتب $f(x) = e^{-x}\cdot(2xe^x - e^x + 1)$ لنستنتج أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

❾ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

❿ $f(x) = e^{1/x}$. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$.

تَدرَّبْ صفحة 203

① بسّط كتابة كل من العددين $A = 3^{-\frac{1}{\ln 3}}$ و $B = 2^{\frac{1}{\ln 4}}$.

الحل

$A = e^{-1}$ و $B = \sqrt{e}$.

② حل في كل حالة المعادلة أو المتراجحة المعطاة:

❶ $7^{x-1} = 3^x$ ❷ $3^x = 4^{2x+1}$ ❸ $3^x > 4$

❹ $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$ ❺ $5^{-x} < 5^{2x}$ ❻ $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$

الحل

❶ $x = \frac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}$ ❷ $x = \frac{2\ln 2}{\ln 3 - 4\ln 2}$ ❸ $x > \frac{2\ln 2}{\ln 3}$

❹ $x < -\frac{2\ln 2}{\ln 3}$ ❺ $x > 0$ ❻ $x < -1$

③ فيما يأتي حل كلاً من المعادلات والمتراجحات المعطاة:

❶ $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$، و $4^x + 2^{x+1} - 3 \leq 0$.

❷ $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 = 0$، و $2^{x+1} - 10 \times 2^x + 12 \geq 0$.

❸ $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} = 7$، و $3^{x+1} + 2 \times 3^{-x} \geq 7$.

الحل

❶ بوضع $X = 2^x$ تصبح المعادلة $X^2 + 2X - 3 = 0$ أو $(X+3)(X-1) = 0$، ولكنّ العدد $X = 2^x$ موجبٌ إذن تكافئ المعادلة المعطاة $X = 1$ أو $x = 0$.

أمّا المتراجحة $(X+3)(X-1) \leq 0$ فتكافئ $X \leq 1$ أي $2^x \leq 1$ أو $x \in]-\infty, 0]$.

❷ بوضع $X = 2^x$ تصبح المعادلة $2X - 10X + 12 = 0$ أو $X = \frac{3}{2}$، إذن تكافئ المعادلة المعطاة $x = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$. أمّا المتراجحة فتصبح $X \leq \frac{3}{2}$ أي $x \leq \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$.

❸ بوضع $X = 3^x$ تصبح المعادلة $3X + \frac{2}{X} = 7$ أو $X \in \{2, \frac{1}{3}\}$، إذن تكافئ المعادلة المعطاة $x \in \left\{\frac{\ln 2}{\ln 3}, -1\right\}$. أمّا المتراجحة فتصبح $3X^2 - 7X + 2 \geq 0$ (لأنّ $X = 3^x > 0$)، ومنه $x \in]-\infty, -1] \cup [\frac{\ln 2}{\ln 3}, +\infty[$.

④ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2^{x^2-2x}$.

❶ ادرس تغيرات f.

❷ اكتب معادلة d مماس الخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها تعدم $f'(x)$.

❸ ارسم في معلمٍ واحدٍ المماس d ثم الخط $\mathcal{C}$.

الحل

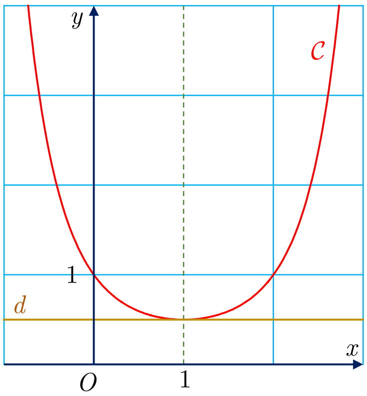
❶ التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة $f(x)=e^{(\ln 2)(x^2-2x)}$. ولأنّ

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)=+\infty$$

استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

علاوة على ذلك لدينا $f'(x)=(2\ln 2)(x-1)e^{(\ln 2)(x^2-2x)}$ ومنه

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$



❷ النقطة التي ينعدم عندها المشتق الأوّل تمثّل قيمة محلية صغرى للتابع f، فالمماس عندها أفقي ومعادلته $y=\frac{1}{2}$.

❸ الرسم. يوحي لنا الرسم الأوّلي وكأنّ الخط البياني يقبل المستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تناظر. ويمكننا التيقن من ذلك بملاحظة $f(1-h)=f(1+h)$ أيّاً كانت قيمة h.

⑤ جد التابع المشتق لكلٍ من التوابع الآتية:

❶ $f(x)=x^x$ ❷ $f(x)=3^{x^2}$ ❸ $f(x)=\pi^{\ln x}$.

الحل

❶ $f'(x)=(1+\ln x)x^x$ ❷ $f'(x)=(2\ln 3)x3^{x^2}$ ❸ $f'(x)=(\ln\pi)x^{\ln\pi-1}$.

⑥ حل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين:

$$3^x\times 3^y=9 \qquad (1)$$
$$3^x+3^y=4\sqrt{3} \qquad (2)$$

الحل

بوضع $a=3^x$ و $b=3^y$ نستنتج أنّ a و b هما جذرا المعادلة $T^2-4\sqrt{3}T+9=0$ إذن

$$(a,b)\in\left\{(\sqrt{3},3\sqrt{3}),(3\sqrt{3},\sqrt{3})\right\}$$

ومنه $(x,y)\in\left\{(\frac{1}{2},\frac{3}{2}),(\frac{3}{2},\frac{1}{2})\right\}$.

⑦ إذا علمت أنَّ $a>0$ و $b>0$، فهل صحيح أنَّ $a^{\ln b}=b^{\ln a}$؟

الحل

هذا صحيح لأنّ كلا المقدارين يساوي $e^{(\ln a)(\ln b)}$.

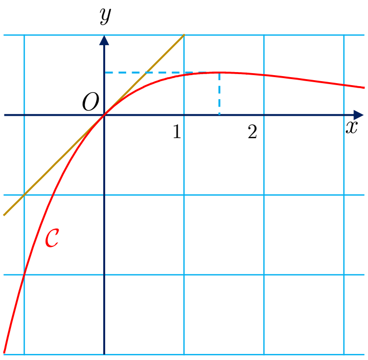
⑧ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x \cdot 2^{-x}$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

الحل

التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة $f(x) = x \cdot e^{-(\ln 2)x}$. ولدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} Xe^{-X} = 0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيم مقارب في جوار $+\infty$.

علاوة على ذلك لدينا $f'(x) = (1-(\ln 2)x)2^{-x}$ ومنه

x	$-\infty$		$\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e\ln 2}$	$\searrow$	0



وهذا يتيح لنا رسم الخط البياني المطلوب، وهو يمر بالمبدأ حيث مماسه هو منصف الربع الأوّل.

الرسم مبين جانباً.

⑨ ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 4^x - 2^{x+2}$.

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

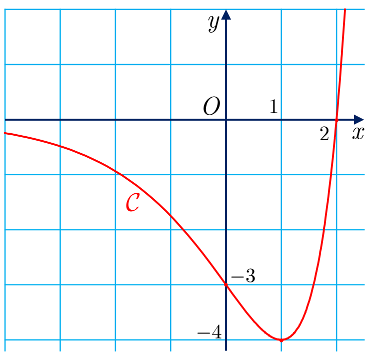
التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة

$$f(x) = 2^x(2^x - 4) = e^{(2\ln 2)x} - 4 \cdot e^{(\ln 2)x} \ .$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ فمحور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيم مقارب في جوار $-\infty$. وكذلك لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

علاوة على ذلك لدينا $f'(x) = 2(\ln 2) \cdot 2^x(2^x - 2)$ وهو ينعدم فقط عند $x = 1$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$



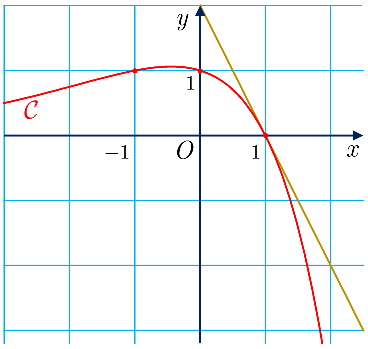
وهذا يتيح لنا رسم الخط البياني المطلوب، وهو يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $x = 2$.

⑩ ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(1-x)\times 2^x$. ادرس تغيرات f وارسم خطه البياني.

الحل

التابع معرّف على $\mathbb{R}$، وله الصيغة المُكافئة $f(x)=(1-x)\cdot e^{(\ln 2)x}$. ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} Xe^X=0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب في جوار $-\infty$. علاوة على ذلك لدينا $f'(x)=(\ln 2-1-(\ln 2)x)2^x$ ومنه

x	$-\infty$		$1-\frac{1}{\ln 2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e\ln 2}$	$\searrow$	$-\infty$



وهذا يتيح لنا رسم الخط البياني المطلوب جانباً، وهو يمر بالنقطة $(1,0)$ حيث مماسه هو المستقيم الذي معادلته $y=2-2x$.

تَدرَّبْ صفحة 205

① حلّ المعادلات التفاضلية الآتية:

❶ $y'=3y$ ❷ $y'+2y=0$

❸ $3y'=5y$ ❹ $2y'+3y=0$

الحل

❶ $y=ke^{3x}$ ❷ $y=ke^{-2x}$ ❸ $y=ke^{\frac{5}{3}x}$ ❹ $y=ke^{-\frac{3}{2}x}$

② في كلّ حالة عيّن حل المعادلة التفاضلية الذي يحقق الشرط المعطى:

❶ $y'=2y$، والحل f يحقق الشرط $f(0)=1$.

❷ $y'+5y=0$، والخط البياني $\mathcal{C}$ للحل يمر بالنقطة $A(-2,1)$.

❸ $y'+2y=0$، وميل المماس في النقطة التي فاصلتها -2 من الخط البياني للحل يساوي $\frac{1}{2}$.

الحل

❶ $f(x)=e^{2x}$ ❷ $f(x)=e^{-5(x+2)}$ ❸ $f(x)=-\dfrac{1}{4}e^{-2(x+2)}$

③ حلّ المعادلات التفاضلية الآتية:

❶ $y'=2y+1$ ❷ $y+3y'=2$

❸ $2y'=y-1$ ❹ $2y+3y'-1=0$

الحل

❶ $y=-\frac{1}{2}+ke^{2x}$ ❷ $y=2+ke^{-x/3}$ ❸ $y=1+ke^{x/2}$ ❹ $y=\frac{1}{2}+ke^{-2x/3}$

أنشطة

نشاط 1 إحاطة العدد النيبري e

نهتمّ في هذا النشاط بإحاطة العدد النيبري e باستعمال متتاليات، ونهتم بسرعة تقارب هذه المتتاليات.

❶ إحاطة العدد e

ليكن f التابع المعرّف على $]-1,+\infty[$ بالصيغة $f(x)=\ln(1+x)-x$.

① ادرس تغيرات التابع f، واستنتج أنّ $\ln(1+x)\le x$ في حالة $x>-1$.

② ليكن n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2.

a. تحقّق أنّ $\dfrac{1}{n}$ عنصر من $]0,1[$، وأنّ $\dfrac{-1}{1+n}$ عنصر من $]-1,0[$.

b. بالاستفادة من نتيجة ① استنتج أنّ

- $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\le\dfrac{1}{n}$ ومن ثمّ $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\le e$.
- $\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\le-\dfrac{1}{n+1}$ ومن ثمّ $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\ge\dfrac{1}{n+1}$، وأخيراً $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\ge e$. إذن

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\qquad(*)$$

③ ليكن n عدداً طبيعياً موجباً تماماً. وليكن g و h التابعين المعرّفين على $[0,1]$ وفق

$$g(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)$$
$$h(x)=g(x)+e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}$$

a. ادرس اطراد كلٍّ من التابعين g و h على $[0,1]$، واستنتج أنّ $h(1)\ge1\ge g(1)$.

b. استنتج أنّ

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le e\le1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n\cdot(n!)}\qquad(**)$$

❷ تطبيق

لنتأمّل المتتاليتين $(u_n)_{n\ge1}$ و $(v_n)_{n\ge1}$ الآتيتين: $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ و $v_n=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$.

① أثبت أنّ $0\le e-u_n\le\dfrac{u_n}{n}\le\dfrac{3}{n}$ بالاعتماد على $(*)$.

② استنتج من $(**)$ أنّ $0\le e-v_n\le\dfrac{1}{n(n!)}$. أيُّ المتتاليتين أفضل لحساب تقريب للعدد e؟

الحل

❶ ① هذا سؤال تقليدي، ومررنا به سابقاً، نترك تفاصيله إلى القارئ.

② باختيار $x=\frac{1}{n}$ في المتراجحة $\ln(1+x)\leq x$ نستنتج أنّ $\ln(1+\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}$ أي $\ln((1+\frac{1}{n})^n)\leq 1$ ومنه $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e$. ثُمّ باختيار $x=\frac{-1}{n+1}$ في المتراجحة نفسها نجد $\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\leq-\frac{1}{n+1}$ وهذا يُكافئ $\ln(\frac{n}{n+1})\leq-\frac{1}{n+1}$ أو $\frac{1}{n+1}\leq-\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ أي $1\leq\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ومن ثَمّ $e\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. فنكون قد أثبتنا صحة $(*)$.

③ نلاحظ أولاً أنّ

$$\begin{aligned}
g'(x)&=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)'-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\\
&=e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)-e^{-x}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)\\
&=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}
\end{aligned}$$

إذن $g'(x)$ سالب على المجال $[0,1]$ فالتابع g متناقصٌ على المجال $[0,1]$.

من ناحية أخرى، لأنّ $h(x)=g(x)+e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}$ استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}
h'(x)&=g'(x)-e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}+\frac{(n+1)x^n}{n(n!)}e^{-x}\\
&=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}-e^{-x}\frac{x^{n+1}}{n(n!)}+\frac{(n+1)x^n}{n(n!)}e^{-x}\\
&=\frac{x^ne^{-x}}{n(n!)}\left(-n-x+n+1\right)=\frac{x^ne^{-x}}{n(n!)}(1-x)
\end{aligned}$$

إذن $h'(x)$ موجبٌ على المجال $[0,1]$ فالتابع h متزايدٌ على المجال $[0,1]$. إذن

$$h(1)\geq h(0)=1=g(0)\geq g(1)$$

وتنتج المتراجحة $(**)$ من $h(1)\geq 1\geq g(1)$ بضرب الطرفين بالعدد e.

❷ ① نستنتج من $(*)$ أنّ $0\leq e-u_n\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}u_n$. وتنتج المتراجحة المطلوبة من ملاحظة أنّ $u_n\leq e<3$ أو أنّ $u_n\leq e\leq\left(1+\frac{1}{5}\right)^6<3$.

② هذه مجرد عملية طرح، ولكن النتيجة مهمة؛ فإذا أردنا حساب e لثلاثة أرقام بعد الفاصلة أي بخطأ أصغر تماماً من 10^{-3} علينا حساب u_{3000}، في حين يكفي أن نحسب v_6 لنحصل على المطلوب. إذن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ أسرع تقارباً من $(u_n)_{n\geq1}$ نحو العدد e.

تمرينات ومسائل

1 في كلٍ من الحالات الآتية، احسب التابع المشتق للتابع f على المجموعة I المشار إليها.

① $I = \mathbb{R},\quad f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

② $I =]0,+\infty[,\quad f(x) = e^{-x}\ln x$

③ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}$

④ $I = \mathbb{R}\setminus\{0\}\quad f(x) = \dfrac{1}{x}e^x$

⑤ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = \dfrac{e^x - 1}{1 + e^{-x}}$

⑥ $I = \mathbb{R}\setminus\{0\},\quad f(x) = xe^{1/x}$

⑦ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = \ln(1 + e^x)$

⑧ $I =]0,+\infty[,\quad f(x) = e^{x\ln x}$

⑨ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = (\sin x + \cos x)e^x$

⑩ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$

الحل

① $f'(x) = (x^2 - 2)e^x$

② $f'(x) = e^{-x}\left(\dfrac{1}{x} - \ln x\right)$

③ $f'(x) = -(x^2 - 3x + 2)e^{-x}$

④ $f'(x) = \dfrac{x-1}{x^2}e^x$

⑤ $f'(x) = \dfrac{(e^{3x} + e^x + 2)}{\left(e^x + 1\right)^2}$

⑥ $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}e^{1/x}$

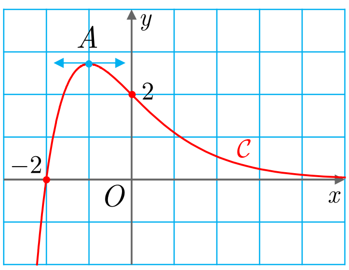
⑦ $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

⑧ $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

⑨ $f'(x) = 2e^x\cos x$

⑩ $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$

2 $\mathcal{C}$ هو الخط البياني لتابعٍ f معرفٍ على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ ، حيث a و b عددان حقيقيان. اعتماداً على ما تجد في الشكل:



① احسب قيمة كلٍ من a و b.

② احسب $f'(x)$ ، واستنتج إحداثيتي النقطة A الموافقة للقيمة الكبرى للتابع f.

③ أثبت أنّ محور الفواصل مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

الحل

① من الشكل نلاحظ أنّ $f(-2)=0$ و $f(0)=2$. ومنه $a=1$ و $b=2$.

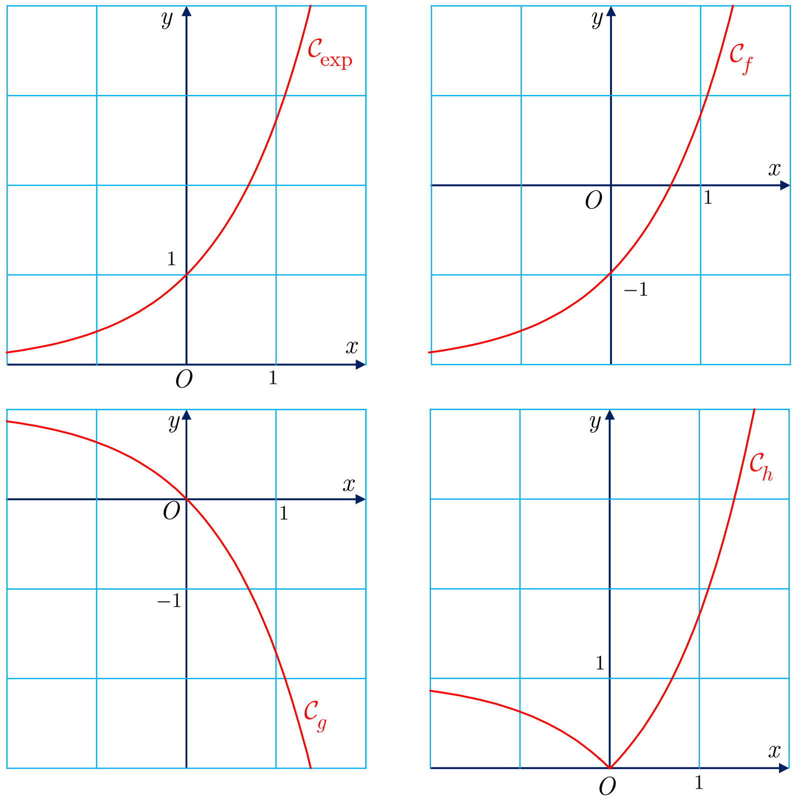
② لدينا $f(x)=(x+2)e^{-x}$ ومنه $f'(x)=-(x+1)e^{-x}$. والتابع يبلغ قيمة حدية كبرى عند $x=-1$ تساوي $f(-1)=e$.

③ هذا واضحٌ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ يقتضي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

3 ارسم الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع الأسي $\exp$. ثُمّ استنتج رسم الخط البياني لكلٍ من التوابع الآتية:

① $f: x\mapsto e^x-2$ ② $g: x\mapsto 1-e^x$ ③ $h: x\mapsto |1-e^x|$

الحل



4 ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

① ما نهاية f عند كلٍ من طرفي مجموعة تعريفه؟

② ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

③ g هو التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$. أثبت أنَّ $g(x)=f(-x)$ ، ثم استنتج رسم الخط البياني للتابع g انطلاقاً من $\mathcal{C}$.

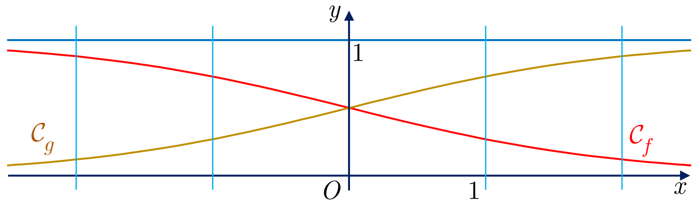
الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

② نستنتج مما سبق أنّ $\mathcal{C}$ يقبل محور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيماً مقارباً في جوار $+\infty$ ، والمستقيم الذي معادلته $y = 1$ مستقيماً مقارباً في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك التابع الأسي متزايدٌ تماماً ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+$ والتابع $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}_+$ إذن f تابعٌ متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}$، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0

③ واضحٌ أنّ $g(x) = f(-x)$ أياً كانت قيمة x إذن $\mathcal{C}_g$ هو نظير $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى محور التراتيب. ومنه الرسم البياني المبين أدناه.



5 في الحالات الآتية بيّن أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ يقبل مُقارباً مائلاً d، عيّنه وادرس الوضع النسبي لهذا الخط بالنسبة إلى d.

① $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$ ② $f(x) = x + 1 + 4e^{-x}$ ③ $f(x) = x + 2 + xe^{x}$

الحل

① نلاحظ أنّ $g(x) = f(x) - (x-1) = e^{-2x}$ يحقّق $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أياً كانت x، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

② نلاحظ أنّ $g(x) = f(x) - (x+1) = 4e^{-x}$ يحقّق $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أياً كانت x، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

③ نلاحظ أنّ $g(x) = f(x) - (x+2) = xe^{x}$ يحقّق $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = x + 2$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ إشارة $g(x)$ تماثل إشارة x، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع فوق d على $]0,+\infty[$، ويقع تحته على $]-\infty,0[$.

6 بيّن أنّ الخطّ البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f(x) = \ln(3+e^x)$ يقبل خطين مقاربين أحدهما أفقي والآخر مائل يُطلب تعيينهما.

الحل

لمّا كان $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(3)$ ، فالمستقيم الذي معادلته $y = \ln(3)$ مستقيم مقارب أفقي للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$.

أمّا في جوار $+\infty$ ، فيكون العدد 3 صغيراً جداً أمام e^x ومن ثمّ نتوقّع أن يكون $\ln(e^x+3)$ قريباً من $\ln(e^x) = x$ ، وللتأكد من صحة توقعنا نتأمّل الفرق $g(x) = f(x) - x$ فنلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(e^x+3) - x = \ln(e^x+3) - \ln(e^x) \\ &= \ln\left(\frac{e^x+3}{e^x}\right) = \ln\left(1+3e^{-x}\right) \end{aligned}$$

ولمّا كان $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln(1) = 0$ ، إذن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

7 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{2e^x-3}{e^x+1}$.

① لماذا المستقيمان d_1 الذي معادلته $y = 2$ و d_2 الذي معادلته $y = -3$ مقاربان للخط $\mathcal{C}$؟

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

④ ادرس وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$ م ارسم في معلم متجانس d_1 و d_2 و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}$.

الحل

① نعلم أنّ $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{X\to+\infty} \frac{2X-3}{X+1} = 2$ ، اعتماداً على خاصة نهاية تابع مركّب نستنتج أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ ، فالمستقيم d_1 الذي معادلته $y = 2$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وكذلك لأنّ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$ ، فالمستقيم d_2 الذي معادلته $y = -3$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

② نلاحظ بسهولة أنّ $f'(x) = \dfrac{5e^x}{(e^x+1)^2}$ وهو موجب دوماً، فالتابع f متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2

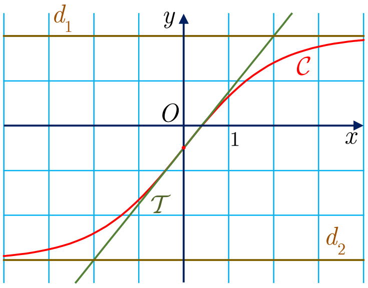
③ يتقاطع $\mathcal{C}$ مع محور التراتيب في النقطة $(0,-\frac{1}{2})$، وميل المماس عندها $f'(0)=\frac{5}{4}$ إذن معادلة المماس $\mathcal{T}$ في نقطة التقاطع مع محور التراتيب هي $y=-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x$.

④ لنتأمّل الفرق $g(x)=f(x)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}x\right)$ فنلاحظ أنّ

$$g(x)=\frac{5}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}-\frac{x}{2}\right)$$

ومنه

$$g'(x)=\frac{5}{2}\left(\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

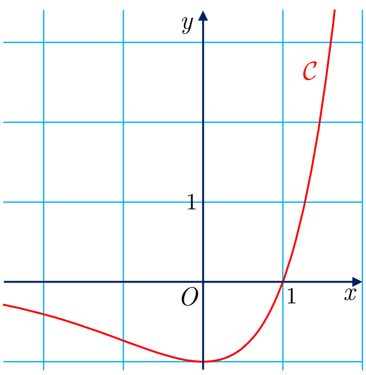


إذن g' سالب على $\mathbb{R}$، والتابع g متناقص تماماً عليها. ولكن $g(0)=0$. إذن $g(x)>0$ على $]-\infty,0[$ و $g(x)<0$ على $]0,+\infty[$. فالخط البياني $\mathcal{C}$ يكون فوق المماس $\mathcal{T}$ على $]-\infty,0[$ وتحته على $]0,+\infty[$.

8 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(x-1)e^x$. ادرس نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه، وادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثُمّ ارسم $\mathcal{C}$.

الحل

- ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، أمّا في جوار اللانهاية السالبة فنكتب $f(x)=e\,X\,e^X$ حيث $X=x-1$. ولكن $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$ وكذلك $\lim\limits_{x\to-\infty}Xe^X=0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.
نستنتج أن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.



- نلاحظ أنّ $f'(x)=xe^x$ ، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المبين جانباً.

9 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^x-x$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② بيّن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=-x$ مقارب للخط $\mathcal{C}$؟

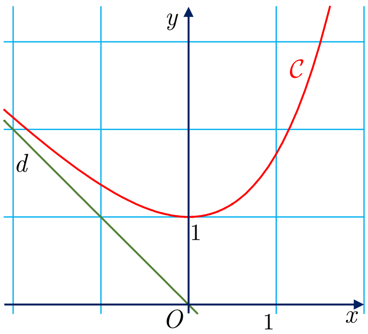
③ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثم ارسم d و $\mathcal{C}$.

الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} e^x = +\infty$ ، وكذلك لأنّ $f(x) = e^x(1 - xe^{-x})$ و $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

② بوضع $g(x) = f(x) + x = e^x$ نلاحظ أنّ $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = -x$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أيّاً كانت x، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

③ نلاحظ أنّ $f'(x) = e^x - 1$ وهو ينعدم فقط عند $x = 0$، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المبين جانباً.

10 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{e^x + 1}$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② أثبت أنَّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$.

③ أثبت أنَّ المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$.

④ ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

⑤ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

⑥ ادرس وضع $\mathcal{C}$ بالنسبة إلى $\mathcal{T}$. ثُم ارسم في معلم متجانس d و d' و $\mathcal{T}$ و $\mathcal{C}$.

الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، وكذلك نجد $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

② بوضع $g(x) = f(x) - (x - 1) = \dfrac{4}{e^x + 1}$ نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. إذن المستقيم d الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $+\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $g(x) > 0$ أيّاً كانت x، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً فوق d.

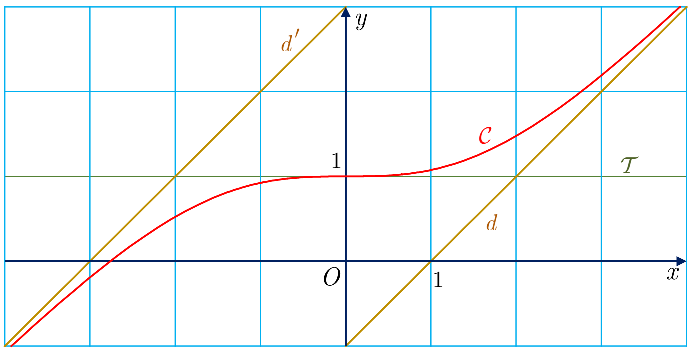
③ بوضع $h(x) = f(x) - (x + 3) = -\dfrac{4e^x}{e^x + 1}$ نلاحظ أنّ $\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$. إذن المستقيم d' الذي معادلته $y = x + 3$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ في جوار $-\infty$. وعلاوة على ذلك، لأنّ $h(x) < 0$ أيّاً كانت x، استنتجنا أنّ $\mathcal{C}$ يقع دوماً تحت d'.

④ نلاحظ أنّ $\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} = f'(x) = 1 - 4\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ وهو ينعدم فقط عند $x=0$، دون أن يغير إشارته الموجبة. وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

⑤ واضحٌ أنّ $f(0)=1$ و $f'(0)=0$. إذن معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب هي $y=1$.

⑥ التابع f متزايدٌ تماماً ويحقق $f(0)=1$، إذن $f(x)<1$ في حالة $x<0$ و $f(x)>1$ في حالة $x>0$. وهذا يبرهن أنّ $\mathcal{C}$ يقع تحت $\mathcal{T}$ على $]-\infty,0[$ وفوقه على $]0,+\infty[$، ومنه الرسم المبين.



11 ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^x - x - 2$.

① جد نهاية f عند أطراف مجموعة تعريفه.

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.

③ استنتج من ② أنَّ للمعادلة $f(x)=0$ جذرين، أحدهما يساوي الصفر.

④ نرمز إلى الجذر الآخر للمعادلة $f(x)=0$ بالرمز α . أثبت أنَّ $-2<\alpha<-1$.

⑤ ادرس إشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x .

الحل

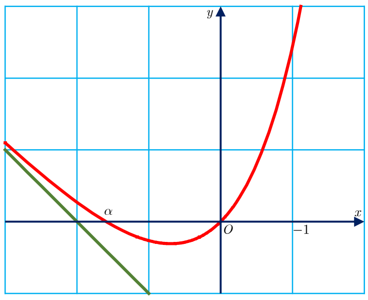
① لمّا كان $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. وكذلك لأنّ $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ استنتجنا من المساواة $f(x) = e^x(2 - xe^{-x}) - 2$ أنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

② نلاحظ أنّ $f'(x) = 2e^x - 1$ وهو ينعدم فقط عند $x = -\ln 2$، وهذا يتيح لنا كتابة جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

.

③ نستنتج من جدول التغيرات أنّ التابع متناقص تماماً على $]-\infty, -\ln 2[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد α ينتمي إلى $]-\infty, -\ln 2[$ للمعادلة $f(x) = 0$. وبالمثل نرى أنّ التابع f متزايدٌ تماماً على $]-\ln 2, +\infty[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد β ينتمي إلى $]-\ln 2, +\infty[$ للمعادلة $f(x) = 0$. وأخيراً لمّا كان $f(0) = 0$ استنتجنا أنّ $\beta = 0$.



④ نلاحظ أنّ $f(-1) = 2e^{-1} - 1 < 0$ و $f(-2) = 2e^{-2} > 0$، إذن $-2 < \alpha < -1$.

⑤ التابع f تابعٌ مستمرٌ ينعدم فقط عند 0 و α، فهو يحافظ على إشارة ثابتة على كل مجال من $\mathbb{R} \setminus \{\alpha, 0\}$، وتحديداً لدينا

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+\infty$

لنتعلّم البحث معاً

12 مماسات مشتركة

ليكن $\mathcal{C}_E$ و $\mathcal{C}_L$ الخطان البيانيان للتابعين الأسي $\exp$ واللوغاريتمي $\ln$ بالترتيب. أيَقبل هذان الخطان مماسات مشتركة ؟

نحو الحلّ

☝ لنرسم الخطين $\mathcal{C}_E$ و $\mathcal{C}_L$ ثم لنتأملهما. كم مماساً مشتركاً لهذين الخطين برأيك؟ حاول أن ترسم مماسين مشتركين أترى غيرهما ؟

✌ لنتأمّل مماساً T_E يمس $\mathcal{C}_E$ في النقطة $A(a, e^a)$، ومماساً T_L يمس $\mathcal{C}_L$ في النقطة $B(b, \ln b)$، $b > 0$. ثم لنبحث عن الشروط على a و b التي يجب أن يحققاها كي ينطبق المستقيمان T_E و T_L.

1. اكتب بالصيغة $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ معادلةً للمستقيم T_E وأخرى للمستقيم T_L.
2. أثبت إذن أنَّ العبارتين الآتيتين متكافئتان:

❶ المستقيمان T_E و T_L منطبقان ❷ $b = e^{-a}$ و $e^{-a} = \dfrac{a-1}{a+1}$

يبقى علينا معرفة إن كان ثمة عدد حقيقي a يحقّق $\frac{a-1}{a+1} = e^{-a}$. لا تُحل هذه المعادلة جبرياً.

هذا يدفعنا للتفكير بدراسة التابع f المعرف على $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ وفق $f(x) = e^{-x} - \frac{x-1}{x+1}$.

1. ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها.
2. استنتج أنَّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّين فقط a_1 و a_2 .
3. أثبت أنّ

$$f(-x) + \frac{x+1}{x-1} \cdot e^x f(x) = 0 \quad \text{في حالة} \quad x \notin \{1,-1\}$$

ثُمّ بين أنّ $a_1 = -a_2$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

هذه محاولة مطلوبة من القارئ، الهدف منها إعطاء فكرة عمّا نريد البحث عنه.

1. معادلة T_E هي $y = e^a + e^a(x-a)$ أو $e^a x - y + e^a(1-a) = 0$. ومعادلة T_L هي $y = \ln b + \frac{1}{b}(x-b)$ أو $\frac{1}{b}x - y + \ln b - 1 = 0$.

2. وعليه ينطبق المستقيمان T_L و T_E إذا تناسبت أمثالهما، أي إذا تحقق الشرطان

$$e^a = \frac{1}{b} \quad \text{و} \quad e^a(1-a) = \ln b - 1$$

ولكنّ المساواة الأولى تقتضي $\ln b = -a$ فتصبح الثانية $(a+1)e^{-a} = a-1$ ولأنّ $a = -1$ ليس حلاً لهذه المعادلة استنتجنا أنّ المستقيمين T_L و T_E ينطبقان إذا وفقط إذا تحقق الشرطان:

$$e^{-a} = \frac{a-1}{a+1} \quad \text{و} \quad b = e^{-a}.$$

1. من الواضح أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ فالخط البياني للتابع f يقبل مقارباً المستقيم الذي معادلته $y = -1$ في جوار $+\infty$. وكذلك

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$$

فالمستقيم الذي معادلته $x = -1$ مستقيم مقارب شاقولي للخط البياني للتابع f . وعلاوة على ذلك لدينا

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

فالتابع f' سالبٌ دوماً، ومنه جدول التغيرات الآتي:

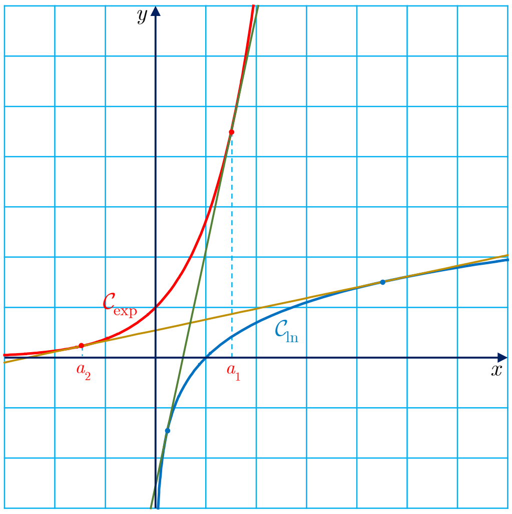
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

2. نستنتج من جدول التغيرات أنّ التابع متناقص تماماً على $]-\infty,-1[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد a_1 ينتمي إلى $]-\infty,-1[$ للمعادلة $f(x)=0$. وبالمثل نرى أنّ التابع f متناقصٌ تماماً على $]-1,+\infty[$ ويغير إشارته على هذا المجال فيوجد جذر وحيد a_2 ينتمي إلى $]-1,+\infty[$ للمعادلة $f(x)=0$. إذن تقبل المعادلة $f(x)=0$ حلين هما a_1 و a_2 .

3. نفترض أنّ $x \notin \{-1,1\}$ ونحسب

$$f(-x)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^x f(x)=\left(e^x-\frac{-x-1}{-x+1}\right)+\frac{x+1}{x-1}\cdot e^x\left(e^{-x}-\frac{x-1}{x+1}\right)$$
$$=e^x-\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+1}{x-1}-e^x=0$$

وعليه نستنتج من كون $f(a_1)=0$ –وبالاستفادة من المساواة السابقة– أنّ $f(-a_1)=0$ ولكن $-a_1\in]-1,+\infty[$ لأنّ $a_1<-1$ ، وعلى هذا، كلٌّ من a_2 و $-a_1$ جذر للمعادلة $f(x)=0$ في المجال $]-1,+\infty[$ ، ولأننا أثبتنا أنّ لهذه المعادلة جذرٌ وحيدٌ في هذا المجال استنتجنا أنّ $a_2=-a_1$.



13 تابع القوّة

ليكن α عدداً حقيقياً غير معدوم. نهدف إلى دراسة التابع P_α المعرّف على $]0,+\infty[$ بالصيغة $P_\alpha(x)=x^\alpha$.

نحو الحلّ

☝ تذكّر أنّ $P_\alpha(x)=e^{\alpha\ln x}$ فالتابع P_α من النمط $x\mapsto e^{u(x)}$ حيث $u(x)=\alpha\ln x$.

1. عيّن، تبعاً لإشارة α، جهة اطراد التابع u، واستنتج جهة اطراد P_α .
2. ادرس تبعاً لإشارة α نهاية P_α عند طرفي مجموعة تعريفه. وبيّن أنّه في حالة $\alpha>0$ يمكننا أن نعرّف $P_\alpha(0)=0$ فنحصل على تابع مستمرّ على $[0,+\infty[$ في هذه الحالة.

لندرس اشتقاقية التابع P_α.

1. أثبت أنّ P_α اشتقاقي على $]0,+\infty[$ وأنّ $P'_\alpha = \alpha P_{\alpha-1}$ أو كما جرت العادة أن نكتب $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. نفترض أنّ $0 < \alpha < 1$. وأنّنا عرّفنا في هذه الحالة $P_\alpha(0) = 0$. احسب نهاية نسبة التغير $x \mapsto t(x) = \dfrac{P_\alpha(x) - P_\alpha(0)}{x}$ عند الصفر. ماذا تستنتج ؟
3. أعد السؤال السابق في حالة نفترض أنّ $1 < \alpha$.

أثبت $P_\alpha \circ P_\beta = P_{\alpha\beta}$. وبوجه خاص $P_{1/\alpha}$ هو التقابل العكسي للتابع P_α. في حالة عدد طبيعي موجب تماماً n نسمّي التابع $P_{1/n}$ تابع الجذر من المرتبة n، ونرمز عادة إلى $x^{1/n}$ بالرمز $\sqrt[n]{x}$، فيكون $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ التقابل العكسي للتابع $x \mapsto x^n$ المعرّفين على المجال $]0,+\infty[$.

مقارنة تابع القوّة بالتابعين الأسّي واللوغاريتمي.

1. أثبت أنّه في حالة $\alpha > 0$ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^\alpha \ln x\right) = 0$.
2. أثبت أنّه في حالة $\alpha > 0$ يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^\alpha e^{-x}\right) = 0$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. التابع اللوغاريتمي متزايدٌ تماماً إذن في حالة $\alpha > 0$ يكون $x \mapsto \alpha \ln x$ متزايداً تماماً، ومن ثَمّ يكون $P_\alpha : x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ متزايداً تماماً. أمّا في حالة $\alpha < 0$ فيكون $x \mapsto \alpha \ln x$ متناقصاً تماماً، ومن ثَمّ يكون $P_\alpha : x \mapsto e^{\alpha \ln x}$ متناقصاً تماماً أيضاً.

2. في حالة $\alpha < 0$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha \ln x = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} \alpha \ln x = +\infty$ ومن ثَمّ

$$\lim_{x\to+\infty} P_\alpha(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} P_\alpha(x) = +\infty$$

و في حالة $\alpha > 0$ لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha \ln x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} \alpha \ln x = -\infty$ ومن ثَمّ

$$\lim_{x\to+\infty} P_\alpha(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0} P_\alpha(x) = 0$$

فإذا عرّفنا في هذه الحالة $P_\alpha(0) = 0$ كان $\lim\limits_{x\to 0} P_\alpha(x) = P_\alpha(0) = 0$ وصار P_α مستمراً على $[0,+\infty[$ في هذه الحالة.

1. التابع $u : x \mapsto u(x) = \alpha \ln x$ اشتقاقي على $]0,+\infty[$ إذن التابع $x \mapsto e^{u(x)}$ أيضاً اشتقاقي على المجال ذاته ومشتقه

$$P'_\alpha(x) = u'(x)e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x}e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{-\ln x}e^{\alpha \ln x} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln x} = \alpha P_{\alpha-1}(x)$$

2. في حالة $0 < \alpha < 1$ لدينا

$$t(x) = \frac{P_\alpha(x) - P_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1}$$

ولأنّ $\alpha - 1 < 0$ نستنتج أنّ $\lim_{x\to 0} t(x) = +\infty$ ، فالتابع ليس اشتقاقياً في هذه الحالة عند الصفر، ولكن لخطه البياني مماس شاقولي في النقطة $(0,0)$.

3. أمّا في حالة $\alpha > 1$ فلدينا

$$t(x) = \frac{P_\alpha(x) - P_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1}$$

ولأنّ $\alpha - 1 > 0$ نستنتج أنّ $\lim_{x\to 0} t(x) = 0$ ، فالتابع P_α في هذه الحالة اشتقاقي عند الصفر ومشتقه معدوم عند الصفر. أي تبقى العلاقة $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ صحيحة في هذه الحالة على $[0,+\infty[$.

في حالة $x > 0$ لدينا

$$P_\alpha(P_\beta(x)) = \exp\Big(\alpha \ln(e^{\beta \ln x})\Big) = \exp\Big(\alpha\beta \ln x\Big) = P_{\alpha\beta}(x)$$

وهي تكتب بالصيغة المألوفة $(x^\beta)^\alpha = x^{\alpha\beta}$.

في حالة $\alpha > 0$ لدينا $\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln x}{x^\alpha}$ ، ولكن $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$ و $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.

وكذلك لأنّ $x^\alpha \ln x = -\frac{\ln t}{t^\alpha}$ حيث $t = \frac{1}{x}$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = -\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$.

ومن جهة أخرى نعلم أنّ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ إذن في حالة $\alpha > 0$ لدينا أيضاً $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/\alpha}}{x} = +\infty$ ،

ولأنّ $\lim_{X\to+\infty} P_\alpha(X) = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{x/\alpha}}{x}\right)^\alpha = +\infty$ وهذا يكافئ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.

أو $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$.

قُدُماً إلى الأمام

14 حل كلاً من المعادلات أو المتراجحات الآتية:

① $\frac{e^{-x} - 1}{e^x - 1} = -2$

② $4e^{2x} + e^{-2x} \le 5$

③ $e^{3x+1} + 4e^{2x+1} - 5e^{x+1} = 0$

④ $e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2 = 0$

⑤ $e^x + \frac{e}{e^x} = 1 + e$

⑥ $e^{3x} - (e^2 - 1)e^{2x} = e^{x+2}$

⑦ $\frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} < \frac{e^x - 2}{e^x + 2}$

الحل

① $x = -\ln 2$

② $x \in \,]-\ln 2, 0[$

③ $x = 0$

④ $x = \{1, 1+\ln 2\}$

⑤ $x \in \{0, 1\}$

⑥ $x = 2$

⑦ $x > \ln 3$

15 في كل حالة آتية، جد الحل المشترك لجملة المعادلتين.

① $\begin{cases} e^x - \dfrac{1}{e}e^y = 1 \\ 2e^x + e^y = 4 + e \end{cases}$ ② $\begin{cases} e^{4x}e^y = \dfrac{1}{e^2} \\ xy = -2 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3e^x - e^{y+3} - 2e^2 = 0 \end{cases}$

الحل

① $(x,y) = (\ln 2, 1)$ ② $(x,y) \in \{(-1,2),\{\frac{1}{2},-4\}$ ③ $(x,y) = (2,-1)$

16 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

① a. بيّن أنّ التابع f فردي، ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

b. اكتب معادلة المماس d للخط $\mathcal{C}$ في المبدأ، وادرس الوضع النسبي للخط $\mathcal{C}$ والمستقيم d.

② a. ليكن m عدداً حقيقياً. أثبت أنَّ للمعادلة $f(x) = m$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$. ليكن α هذا الحل.

b. أثبت أن المعادلة $f(x) = m$ تكافئ $e^{2x} - 2m\,e^x - 1 = 0$، ثم استنتج أنَّ $\alpha = \ln(m + \sqrt{m^2+1})$.

الحل

① a. التابع معرّف على كامل $\mathbb{R}$، لدينا $f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x)$،

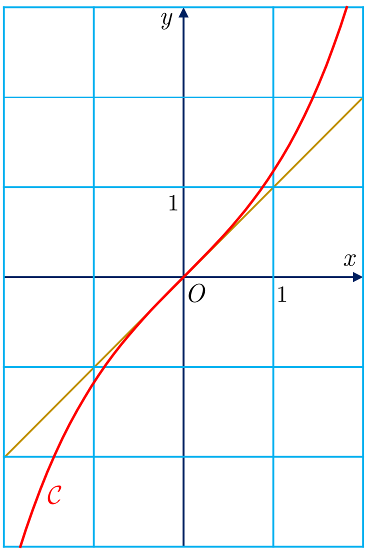
فالتابع فردي. وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ.

ولأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ استنتجنا أنّ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

من ناحية أخرى، لدينا $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ وهو موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$، فالتابع f متزايدٌ تماماً وله جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



ونجد في الشكل المجاور خطه البياني $\mathcal{C}$.

① b. لمّا كان $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ ، استنتجنا أنّ معادلة المماس في المبدأ هي $y=x$ ، وإذا عرّفنا $g(x)=f(x)-x$ استنتجنا أنّ

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}-2\right)$$
$$=\frac{1}{2e^{x}}\left(e^{2x}-2e^{x}-1\right)=\frac{(e^{x}-1)^{2}}{2e^{x}}$$

هذا يبرهن أنّ التابع $g'(x)$ موجبٌ على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلا عند $x=0$. فالتابع g متزايدٌ تماماً، ولأنّ $g(0)=0$ استنتجنا أنّ إشارة $g(x)$ تتفق مع إشارة x . فالخط البياني $\mathcal{C}$ يقع فوق المماس في المبدأ على $]0,+\infty[$ وتحته على $]-\infty,0[$.

② a. لمّا كان f مستمراً ومتزايداً تماماً على $\mathbb{R}$ وكان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ ، استنتجنا أنّ $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ ، فمهما كانت قيمة m من $\mathbb{R}$ كان للمعادلة $f(x)=m$ حلٌّ في $\mathbb{R}$ وهذا الحل وحيدٌ لأنّ التابع f مطردٌ تماماً. ليكن α هذا الحل.

② b. المعادلة $f(x)=m$ تكافئ $e^{x}-e^{-x}=2m$ أو $e^{2x}-2me^{x}-1=0$ وأخيراً

$$e^{x}\in\{m-\sqrt{m^{2}+1},m+\sqrt{m^{2}+1}\}$$

ولكن $m-\sqrt{1+m^{2}}\leq 0$ فلا يمكن أن يكون مساوياً للمقدار الموجب تماماً e^{x}، إذن لا بدّ أن يكون $e^{x}=m+\sqrt{m^{2}+1}$ أو $x=\ln(m+\sqrt{m^{2}+1})$. هذا يبرهن أنّ $\alpha=\ln(m+\sqrt{m^{2}+1})$.

ملاحظة: يسمى هذا التابع: تابع الجيب الزائدي hyperbolic sine ورمزه sinh .

17 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ وفق $f(x)=e^{x}+\ln|x|$. وليكن g التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x)=x\,e^{x}+1$.

① ادرس تغيرات g واستنتج إشارة $\dfrac{g(x)}{x}$ على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

② ادرس تغيرات f وارسم الخط $\mathcal{C}$.

③ أثبت أنَّ المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلّين مختلفين أياً يكن m من $\mathbb{R}$.

الحل

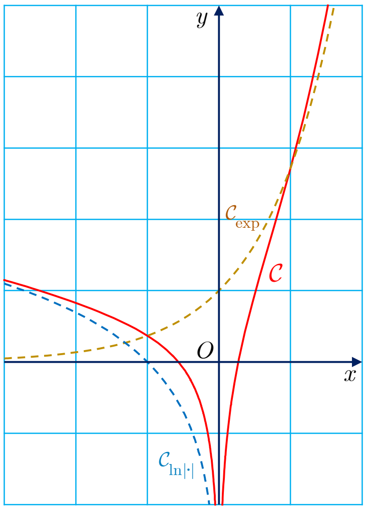
① لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$. وكذلك نلاحظ أنّ $g'(x)=e^{x}(x+1)$ إذن إشارة $g'(x)$ تتفق مع إشارة $(x+1)$ ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع g :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

إذن التابع g موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ينتج من ذلك أنّ إشارة $\dfrac{g(x)}{x}$ تتفق مع إشارة x على $\mathbb{R}^{*}$.

② هنا لدينا $f(x)=e^x+\ln(x)$ في حالة $x>0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. ومن ناحية أخرى، لدينا $f(x)=e^x+\ln(-x)$ في حالة $x<0$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ أيضاً.

أمّا عند الصفر، فلدينا $\lim\limits_{x\to0}\ln|x|=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$. فمحور التراتيب الذي معادلته $x=0$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f .



نلاحظ أيضاً أنّ

$$f'(x)=\begin{cases} e^x+\dfrac{1}{x} & : \ x>0 \\ e^x+\dfrac{-1}{-x} & : \ x<0 \end{cases}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ أياً كانت x من $\mathbb{R}^*$. ولقد درسنا سابقاً إشارة هذا المقدار لنجد:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty \ \| \ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ومنه الخط البياني المبين في الرسم المجاور.

③ نستنتج من جدول التغيرات أنّ $f(]-\infty,0[)=\mathbb{R}$ ، والتابع f مستمرٌ ومتناقصٌ تماماً على $]-\infty,0[$. إذن مهما كان m فللمعادلة $f(x)=m$ حلٌّ وحيدٌ a في المجال $]-\infty,0[$. وبالمثل نستنتج من جدول التغيرات أنّ $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ ، والتابع f مستمرٌ ومتزايدٌ تماماً على $]0,+\infty[$. إذن مهما كان m فللمعادلة $f(x)=m$ حلٌّ وحيدٌ b في المجال $]0,+\infty[$. وعليه، مهما كان m من $\mathbb{R}$ فللمعادلة $f(x)=m$ حلّان حقيقيان أحدهما موجبٌ تماماً والآخر سالبٌ تماماً.

18 ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع f المعرف وفق $f(x)=\ln(e^{2x}-e^x+1)$.

① تحقّق من كلٍ من المقولات الآتية:

a. f معرّف على $\mathbb{R}$.

b. يكتب $f(x)$ بالصيغة $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

c. المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مقارب مائل للخط $\mathcal{C}$.

d. الخط $\mathcal{C}$ يقبل مماساً وحيداً Δ موازياً محور الفواصل.

② ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

③ اكتب معادلة المماس $\mathcal{T}$ للخط البياني $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 منه.

④ ارسم كلّاً من d و Δ و $\mathcal{T}$ ، ثم ارسم $\mathcal{C}$ في المعلم ذاته.

الحل

① a. نلاحظ أنّ $e^{2x}-e^{x}+1=(e^{x}-\frac{1}{2})^{2}+\frac{3}{4}>0$ فالمقدار $e^{2x}-e^{x}+1$ موجب تماماً مهما كانت قيمة x، والتابع f معرّف على كامل $\mathbb{R}$.

① b. لأنّ $e^{2x}-e^{x}+1=e^{2x}(1-e^{-x}-e^{-2x})$ إذن $f(x)=2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

① c. بوضع $g(x)=f(x)-2x=\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\ln(1)=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$. نستنتج أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.

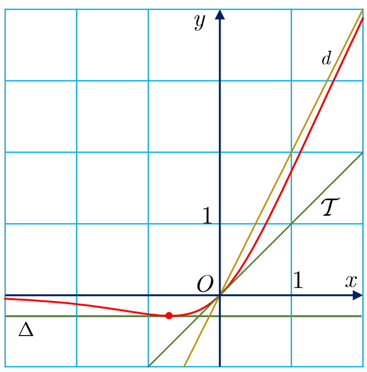
① d. نجد بحساب بسيط أنّ $f'(x)=\dfrac{e^{x}(2e^{x}-1)}{e^{2x}-e^{x}+1}$ إذن $f'(x)=0$ إذا وفقط إذا كان $e^{x}=\frac{1}{2}$ أو $x=-\ln 2$.

② لمّا كان $f(x)=2x+g(x)$ حيث g معرّف في ① c. استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. ولقد وجدنا أنّ المستقيم d الذي معادلته $y=2x$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $+\infty$.
ولأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln(1)=0$، إذن محور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f في جوار $-\infty$.
علاوة على ما سبق، لقد رأينا أنّ $f'(x)$ يحافظ على إشارة ثابتة على كل من المجالين $]-\infty,-\ln 2[$ و $]-\ln 2,+\infty[$، ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

③ هنا $f(0)=0$ و $f'(0)=1$ إذن معادلة المماس $\mathcal{T}$ في النقطة التي فاصلتها 0 هي $y=x$.

④ الرسم.



19 ليكن f التابع المعرف على المجال $\mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = e^{-x}(3+\ln x)$.

① ادرس تغيرات $g : x \mapsto e^x f'(x)$.

② استنتج دراسة تغيرات f .

الحل

① نلاحظ أنّ $g(x) = e^x f'(x) = -3 - \ln x + \dfrac{1}{x}$. ولدينا

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x\to +\infty} g(x) = -\infty$$

فمحور التراتيب الذي معادلته $x = 0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع g . ومن ناحية أخرى، نلاحظ أنّ g يساوي مجموع تابعين متناقصين تماماً على $\mathbb{R}_+^*$ هما $x \mapsto -3 + \dfrac{1}{x}$ و $x \mapsto -\ln x$ ، فالتابع g متناقصٌ تماماً على $\mathbb{R}_+^*$. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع g .

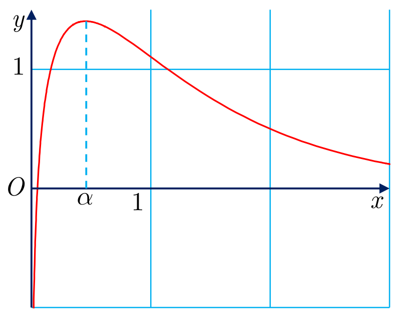
x	0		$+\infty$
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

نلاحظ بوجه خاص أنّ التابع المستمر g متناقص تماماً ويغير إشارته على المجال $]0,+\infty[$ ، فيوجد حلّ وحيد α للمعادلة $g(x) = 0$ ويكون $g(x) > 0$ على $]0,\alpha[$ و $g(x) < 0$ على $]\alpha,+\infty[$. وكذلك نلاحظ أنّ $g(0.4) \approx 0.416 > 0$ و $g(0.5) \approx -0.307 < 0$ إذن $\alpha \in]0.4, 0.5[$ ، ويمكن أن نعتبر $\alpha \approx 0.45$.

② لدراسة f نلاحظ أولاً أنّ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ فمحور التراتيب الذي معادلته $x = 0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f . ومن ناحية أخرى $f(x) = 3e^{-x} + \dfrac{x}{e^x}\cdot\dfrac{\ln x}{x}$ ونعلم أنّ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ و $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مستقيم مقارب للخط البياني للتابع f .

ومن ناحية أخرى، $f'(x) = e^{-x} g(x)$ ، وكنا قد درسنا إشارة g في الطلب السابق، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0



حيث $f(\alpha) \approx 1.4$. ونلاحظ أنّ الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f يقطع محور الفواصل عند $(e^{-3},0)$. ومنه الرسم البياني للتابع f .

20 ادرس تغيرات التابع f المعرف على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ بالصيغة $f(x)=\exp\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ وارسم خطه البياني.

الحل

- لمّا كان

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x}{1-x}=-1 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{1-x}=-1 \text{ و } \lim_{x\to1^-}\frac{1+x}{1-x}=+\infty \text{ و } \lim_{x\to1^+}\frac{1+x}{1-x}=-\infty$$

استنتجنا أنّ

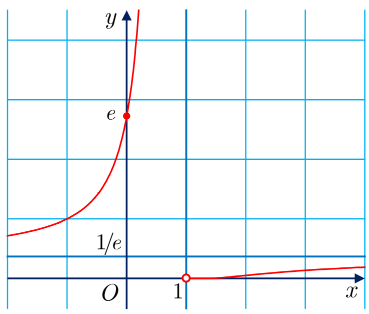
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=e^{-1} \text{ و } \lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{-1} \text{ و } \lim_{x\to1^-}f(x)=+\infty \text{ و } \lim_{x\to1^+}f(x)=0$$

نستنتج أنّ المستقيم الأفقي الذي معادلته $y=e^{-1}$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f. وكذلك أنّ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$، وأخيراً أنّ النقطة $(1,0)$ نقطة مقاربة.

- من ناحية أخرى التابع $x\mapsto\dfrac{1+x}{1-x}$ متزايدٌ تماماً على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ وعليه يكون التابع f متزايداً تماماً على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$، لأنّ التابع الأسي متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x			1		
$f(x)$	e^{-1} $\nearrow$ $+\infty$		‖	0 $\nearrow$ e^{-1}	

- الرسم:



21 ليكن $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\ln(e^{-x}+1)$.

① a. جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. هل يقبل الخط $\mathcal{C}$ مقاربات غير مائلة؟

b. أثبت أنَّ $f(x)=-x+\ln(e^{x}+1)$.

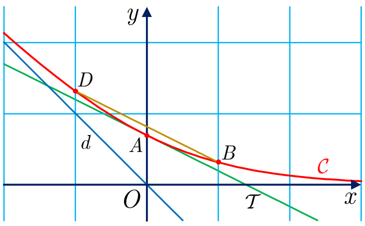
c. استنتج أنَّ الخط $\mathcal{C}$ يقبل مقارباً مائلاً، وليكن d، في جوار $-\infty$.

② ادرس تغيرات f ونظِّم جدولاً بها، ثُمّ ارسم في معلمٍ واحد d ثم $\mathcal{C}$.

③ نرمز إلى نقاط $\mathcal{C}$ التي فواصلها 0 و 1 و -1 على التوالي بالرموز A و B و D. أثبت أنَّ مماس $\mathcal{C}$ في A يوازي المستقيم (BD).

الحل

① لمّا كان $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ استنتجنا أنّ $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ln(1) = 0$ فالخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f يقبل محور الفواصل الذي معادلته $y = 0$ مقارباً أفقياً. وكذلك $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ إذن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. ولكن $e^{-x}+1 = e^{-x}(1+e^{x})$ إذن $f(x) = -x + \ln(1+e^{x})$ ، ومنه $\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)+x\big) = \ln(1) = 0$. هذا يبرهن أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = -x$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f في جوار $-\infty$.



② التابع $x \mapsto e^{-x} = \frac{1}{e^{x}} + 1$ تابعٌ متناقصٌ تماماً، والتابع اللوغاريتمي متزايدٌ تماماً إذن التابع f متناقص تماماً. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

③ ميل المماس $\mathcal{T}$ في النقطة $A(0,\ln(2))$ يساوي $f'(0) = -\frac{1}{2}$. وميل المستقيم (BD) يساوي

$$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{2}\ln\frac{e^{-1}+1}{e+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2}$$

ولمّا كان للمستقيمين $\mathcal{T}$ و (BD) الميل نفسه استنتجنا توازيهما: $\mathcal{T} \parallel (BD)$.

22 محل هندسي

نتأمّل التابعين $f_1 : x \mapsto e^{x}$ و $f_2 : x \mapsto e^{-x}$ ، وخطاهما البيانيان $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في معلمٍ متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. يقطع المستقيم المرسوم من $A(m,0)$ موازياً محور التراتيب الخطين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في M و N . بالترتيب.

① ارسم $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

② نرمز بالرمزين T_1 و T_2 إلى مماسي $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$ في M و N بالترتيب. اكتب معادلةً لكل من T_1 و T_2 . واستنتج أنَّ T_1 و T_2 متعامدان.

③ أثبت أنَّ إحداثيتي P ، نقطة تقاطع T_1 و T_2 ، هما $\left(m - \frac{e^{m}-e^{-m}}{e^{m}+e^{-m}}, \frac{2}{e^{m}+e^{-m}}\right)$.

④ لتكن النقطة I منتصف القطعة $[MN]$.

a. احسب، بدلالة m ، إحداثيي النقطة I .

b. جد Γ المحل الهندسي للنقطة I عندما تتحول m في $\mathbb{R}$.

c. ارسم مجموعة النقاط I في المعلم الذي رسمت فيه الخطين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

⑤ a. احسب، بدلالة m، مركبات الشعاعين $\overrightarrow{IP}$ و $\overrightarrow{AP}$.

b. استنتج أنَّ المستقيم (IP) مماس للخط Γ في النقطة I، وأنَّ الطول AP ثابت.

الحل

① تذكّر أنّ $\mathcal{C}_2$ نظير $\mathcal{C}_1$ بالنسبة إلى محور التراتيب.

② إحداثيّتا M هما (m, e^m) وإحداثيّتا N هما (m, e^{-m}).

- معادلة المماس T_1 للخط $\mathcal{C}_1$ في M هي $y = e^m + e^m(x - m)$.
- معادلة المماس T_2 للخط $\mathcal{C}_2$ في N هي $y = e^{-m} - e^{-m}(x - m)$.

وعلى الخصوص ميل T_1 يساوي e^m وميل T_2 يساوي $-e^{-m}$ وجداء ضرب هذين الميلين يساوي -1، فالمماسان متعامدان.

③ إذا كانت $P(x,y)$ هي نقطة تقاطع المستقيمين T_1 و T_2 كان

$$\begin{cases} y = e^m + e^m(x - m) \\ y = e^{-m} - e^{-m}(x - m) \end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد

$$y_P = \frac{2}{e^m + e^{-m}} \quad \text{و} \quad x_P = m - \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$$

④ لمّا كانت I منتصف $[MN]$ استنتجنا أنّ

$$y_I = \frac{e^m + e^{-m}}{2} \quad \text{و} \quad x_I = m$$

وعليه عندما تتحوّل m في $\mathbb{R}$ ترسم I الخطّ البياني Γ للتابع $x \mapsto g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

التابع g زوجي، إذن Γ متناظرٌ بالنسبة إلى محور التراتيب، وكذلك فإنّ $g'(x)$ موجب على $]0,+\infty[$ فالتابع g متزايدٌ تماماً على $[0,+\infty[$. أمّا رسم g فبسيط استناداً إلى رسم الخطين البيانيين $\mathcal{C}_1$ و $\mathcal{C}_2$.

⑤ نجد بحساب بسيط أنّ

$$\overrightarrow{AP} = \left(x_P - x_M, y_p - y_M\right) = \left(-\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, \frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)$$

$$\overrightarrow{IP} = \left(x_P - x_I, y_p - y_I\right) = \left(-\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}, -\frac{(e^m - e^{-m})^2}{2(e^m + e^{-m})}\right)$$

نحسب من $\overrightarrow{IP}$ ميل المستقيم (IP) فنجد

$$\frac{(e^m - e^{-m})^2}{2(e^m + e^{-m})} \cdot \frac{e^m + e^{-m}}{e^m - e^{-m}} = \frac{e^m - e^{-m}}{2}$$

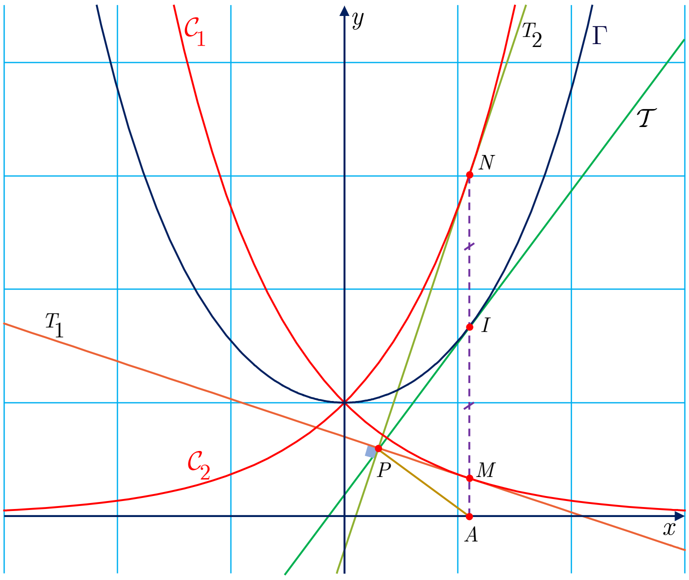
أمّا ميل المماس T للمنحني Γ في النقطة I التي فاصلتها m فيساوي $g'(m) = \dfrac{e^m - e^{-m}}{2}$،

نستنتج أنّ كلا المستقيمين (IP) و T يمران بالنقطة I ولهما الميل نفسه $\dfrac{e^m - e^{-m}}{2}$ فهما منطبقان.

ومن جهة أخرى نحسب

$$AP^2 = \left(\frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}\right)^2 + \left(\frac{2}{e^m + e^{-m}}\right)^2 = \frac{e^{2m} + 2 + e^{-2m}}{(e^m + e^{-m})^2} = 1$$

فنجد أنّ طول AP يبقى ثابتاً عندما تتحوّل m.



23 ابحث عن نهاية كلٍّ من المتتاليات $(u_n)_{n\geq 0}$ الآتية:

❶ $u_n = \dfrac{e^{-n}+1}{e^{-n}+3}$ ❷ $u_n = \dfrac{e^{2n}}{(1+n)^2}$ ❸ $u_n = \ln(2+e^{-n})$

❹ $u_n = e^{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}$ ❺ $u_n = n(e^{1/n}-1)$ ❻ $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

الحل

❶ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{1}{3}$ ❷ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ ❸ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ln(2)$

❹ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e$ ❺ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$ ❻ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^2$

24 المشتق من المرتبة n

ليكن f التابع المعرف وفق $f(x)=(x^2+x-1)e^x$. ولتكن $f^{(1)}=f'$ و $f^{(2)}=f''$ و $f^{(3)}$ و $\cdots$ و $f^{(n)}$ المشتقات المتوالية للتابع f $(n\geq 1)$.

① احسب $f^{(1)}(x)$ و $f^{(2)}(x)$.

② .a أثبت أنَّ $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ مع $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=b_n+a_n$.

.b استنتج أنَّ a_n و b_n أعداد عادية.

③ في هذا السؤال نريد كتابة a_n و b_n بدلالة n .

.a أثبت أنَّ المتتالية (a_n) حسابية. استنتج كتابة a_n بدلالة n .

.b تحقّق من أنَّ $b_n=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1$ (أياً يكن $n\geq 1$) ثم استنتج كتابة b_n بدلالة n .

الحل

① هذا حساب بسيط :

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^2+x-1)e^x\\ f^{(1)}(x)&=(x^2+3x)e^x\\ f^{(2)}(x)&=(x^2+5x+3)e^x\end{aligned}$$

② الخاصة $E(n)$ هي :

"يوجد عددان a_n و b_n يحققان $f^{(n)}(x)=(x^2+a_nx+b_n)e^x$ أياً كان x ".

يبيّن ما سبق أنّ $E(1)$ صحيحة حيث $a_1=3$ و $b_1=0$ ، وكذلك $E(2)$ صحيحة حيث $a_2=5$ و $b_2=3$. وإذا افترضنا أنّ $E(n)$ صحيحة استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)&=\left(f^{(n)}\right)'(x)=(x^2+a_nx+b_n)(e^x)'+(x^2+a_nx+b_n)'e^x\\ &=(x^2+a_nx+b_n)e^x+(2x+a_n)e^x\\ &=\left(x^2+(a_n+2)x+(a_n+b_n)\right)e^x\\ &=(x^2+a_{n+1}x+b_{n+1})e^x\end{aligned}$$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً حيث $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=a_n+b_n$. وهذا يثبت صحة الخاصة $E(n)$ أياً كانت قيمة n .

لنضع $\tilde{E}(n)$ دلالة على الخاصّة " a_n و b_n عددان عاديان ".

وجدنا سابقاً أنّ $(a_1,b_1)=(3,0)$ فالخاصة $\tilde{E}(1)$ صحيحة. وإذا افترضنا أنّ $\tilde{E}(n)$ صحيحة، استنتجنا من المساواتين $a_{n+1}=a_n+2$ و $b_{n+1}=a_n+b_n$ أنّ $\tilde{E}(n+1)$ صحيحة أيضاً، فالخاصة $\tilde{E}(n)$ صحيحة أياً كانت قيمة n .

③ نستنتج من المساواة $a_{n+1} - a_n = 2$ أنّ المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها 2 وحدها a_1 يساوي 3. إذن من $a_n - a_1 = 2(n-1)$ نستنتج أنّ $a_n = 2n+1$.

ونستنتج من المساواة $b_{n+1} = b_n + a_n$ أياً كانت n أنّ

$$\begin{aligned} b_2 - b_1 &= a_1 \\ b_3 - b_2 &= a_2 \\ b_4 - b_3 &= a_3 \\ &\vdots \\ b_n - b_{n-1} &= a_{n-1} \end{aligned}$$

وبالجمع نجد $b_n - b_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. ولكن $b_1 = 0$ ومن ثَمّ

$$\begin{aligned} b_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = (n-1)\frac{a_1 + a_{n-1}}{2} \\ &= (n-1)\frac{3+2n-1}{2} = n^2 - 1 \end{aligned}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

25 معادلة تفاضلية

① لتكن (E) المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = 0$. عيّن جميع حلول (E).

② لتكن (E') المعادلة التفاضلية $2y' + 3y = x^2 + 1$.

a. عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية f يُحقّق المعادلة (E').

b. بيّن أنّه إذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان $g - f$ حلاً للمعادلة (E)، وبرهن بالعكس، أنّه إذا كان $g - f$ حلاً للمعادلة (E) كان g حلاً للمعادلة (E').

c. استنتج جميع حلول المعادلة التفاضلية (E').

الحل

① الشكل القانوني لهذه المعادلة هو $y' = -\frac{3}{2}y$ وحلولها هي التوابع $x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

② يكون $x \mapsto ax^2 + bx + c$ حلاً للمعادلة (E') إذا وفقط إذا، مهما كان x من $\mathbb{R}$ كان

$$2(ax^2 + bx + c)' + 3(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$

أو $(3a-1)x^2 + (3b+4a)x + 2b + 3c - 1 = 0$. وهذا يكافئ $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{9}, c = \frac{17}{27}$. إذن كثير الحدود $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{17}{27}$ هو حلٌّ للمعادلة (E').

نعلم من جهة أولى أنّ

$$2f'(x) + 3f(x) = x^2 + 1 \qquad (*)$$

فإذا كان g حلاً للمعادلة (E') كان

$$2g'(x) + 3g(x) = x^2 + 1 \qquad (**)$$

وبطرح المساواتين $(*)$ و $(**)$ طرفاً من طرف نجد $2(g-f)'(x)+3(g-f)(x)=0$ أي إنّ الفرق $g-f$ حلٌّ للمعادلة (E).

وبالعكس، إذا كان $g-f$ حلاً للمعادلة (E) كان $2(g-f)'(x)+3(g-f)(x)=0$ أي

$$2g'(x)+3g(x)=2f'(x)+3f(x)=x^2+1$$

أي إنّ g حلٌّ للمعادلة (E').

إذن g حلٌّ للمعادلة (E') إذا وفقط إذا كان $g-f$ حلّاً للمعادلة (E) أي إذا وجد k في $\mathbb{R}$ بحيث $g(x)-f(x)=ke^{-\frac{3}{2}x}$ أي إنّ مجموعة حلول المعادلة (E') هي

$$\left\{x\mapsto \tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{4}{9}x+\tfrac{17}{27}+ke^{-\frac{3}{2}x} : k\in\mathbb{R}\right\}$$

26 نتأمّل المعادلة التفاضلية (E) : $y'+3y=2e^{-x}$.

① عيّن العدد a ليكون التابع $x\mapsto ae^{-x}$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E).

② ليكن a العدد الذي وجدناه في ①، وليكن g تابعاً اشتقاقياً على $\mathbb{R}$. نعرّف التابع $h:x\mapsto g(x)-ae^{-x}$ أثبت أنّ التابع g حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E)، إذا وفقط إذا كان h حلاً للمعادلة التفاضلية (F) : $y'+3y=0$.

③ حلّ المعادلة التفاضلية (F)، واستنتج مجموعة حلول (E).

الحل

① يكون $x\mapsto ae^{-x}$ حلاً للمعادلة (E) إذا وفقط إذا، مهما كان x من $\mathbb{R}$ كان

$$(ae^{-x})'+3(ae^{-x})=2e^{-x}$$

أو $a=1$.

② لنحسب:

$$h'(x)+3h(x)=(g(x)-e^{-x})'+3(g(x)-e^{-x})=g'(x)+3g(x)-2e^{-x}$$

إذن g حلٌّ للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كان h حلّاً للمعادلة (F) : $y'+3y=0$.

③ ولكن مجموعة حلول المعادلة (F) هي $\{x\mapsto ke^{-3x} : k\in\mathbb{R}\}$. إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي $\{x\mapsto e^{-x}+ke^{-3x} : k\in\mathbb{R}\}$.

27 ليكن n عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 2.

① .a حلّ المعادلة التفاضلية (1) الآتية: $y'-\dfrac{1}{n}y=0$.

.b نتأمّل المعادلة التفاضلية (2) الآتية: $y'-\dfrac{1}{n}y=-\dfrac{x+1}{n(n+1)}$. عيّن عددين a و b ليكون التابع $x\mapsto g(x)=ax+b$ المعرّف على $\mathbb{R}$ حلاً للمعادلة (2).

c. ❶ أثبت أنّه ليكون تابع h معرّف على $\mathbb{R}$ حلاً للمعادلة (2) يلزم ويكفي أن يكون $h-g$ حلاً للمعادلة (1).

❷ استنتج من ذلك حلول المعادلة (2).

❸ ومن بينها عيّن تلك الحلول f التي تحقق $f(0)=0$.

② نتأمّل التابع f_n المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f_n(x)=1+\dfrac{x}{n+1}-e^{x/n}$.

a. ادرس إشارة f'_n، واستنتج جدول تغيرات التابع f_n. أثبت على الخصوص أنّ التابع f_n يبلغ قيمة كبرى M موجبة تماماً يطلب تعيينها.

b. أثبت أنّ الخط البياني $\mathcal{C}_n$ للتابع f_n يقبل مُقارباً مائلاً d_n. أعطِ معادلةً للمستقيم d_n. وارسم كلاً من d_2 و $\mathcal{C}_2$.

الحل

① a. حلول (1) هي $x\mapsto ke^{x/n}$ حيث k من $\mathbb{R}$.

① b. يكون $x\mapsto g(x)=ax+b$ حلاً للمعادلة (2) إذا تحقق، مهما كانت قيمة x المساواة

$$(ax+b)'-\frac{1}{n}(ax+b)=-\frac{x+1}{n(n+1)}$$

ومنه $a=\frac{1}{n+1}$ و $b=1$. فالتابع $x\mapsto g(x)=\frac{x}{n+1}+1$ حلٌّ للمعادلة التفاضلية (2).

① c. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}(h-g)'(x)-\frac{1}{n}(h-g)(x)&=h'(x)-\frac{1}{n}h(x)-\left(g'(x)-\frac{1}{n}g(x)\right)\\&=h'(x)-\frac{1}{n}h(x)+\frac{x+1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

وهذا يبرهن أنّ h حلّ للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كان $h-g$ حلاً للمعادلة (1)، ولكن حلول الأخيرة معروفة وقد وجدناها في ① a. إذن h حلّ للمعادلة (2) إذا وفقط إذا وجد عدد k من $\mathbb{R}$ يحقق $h(x)-g(x)=ke^{x/n}$ مهما كانت قيمة x. أي إنّ مجموعة حلول (2) هي

$$\left\{x\mapsto \tfrac{1}{n+1}x+1+ke^{x/n}\ :\ k\in\mathbb{R}\right\}$$

والحل الوحيد الذي ينعدم عند الصفر هو التابع الموافق لقيمة $k=-1$ أي

$$x\mapsto f(x)=\frac{x}{n+1}+1-e^{x/n}$$

② لدراسة التابع f_n نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f_n(x)=-\infty$، ولأنّ

$$f_n(x)=1+e^{x/n}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{x}{n}\cdot e^{-x/n}-1\right)$$

نستنتج من $\lim\limits_{X\to\infty}Xe^{-X}=0$ أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{n}e^{-x/n}=0$ ومن ثَمّ $\lim\limits_{x\to\infty}f_n(x)=-\infty$.

ومن جهة أخرى $f_n'(x)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}e^{x/n}$ وهو ينعدم فقط في حالة $x=\alpha_n=n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ ومنه جدول التغيرات الآتي

x	$-\infty$		α_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$		$-$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f_n(\alpha_n)$	$\searrow$	$-\infty$

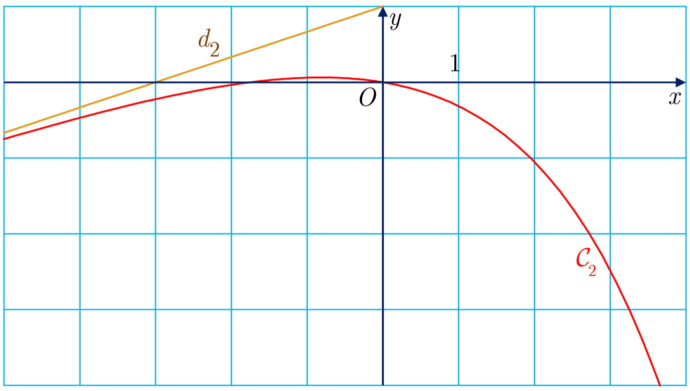
فالتابع f_n يبلغ قيمة كبرى $M=f(\alpha_n)$ على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أنّ $0<\frac{n}{n+1}<1$ إذن $\alpha_n<0$ ولكن التابع f_n متناقصٌ تماماً على المجال $[\alpha_n,+\infty[$ إذن $M=f(\alpha_n)>f_n(0)=0$ فالقيمة الكبرى M موجبة تماماً، كما هو مطلوب. وأخيراً نلاحظ أنّ

$$M=\frac{1}{n+1}+\frac{n}{n+1}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

وأخيراً بوضع $h(x)=f_n(x)-\left(\frac{x}{n+1}+1\right)=-e^{x/n}$، نرى أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0$ فنستنتج أنّ المستقيم d_n الذي معادلته $y=\dfrac{x}{n+1}+1$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}_n$ للتابع f_n في جوار $-\infty$، والخط $\mathcal{C}_n$ يقع دوماً تحت d_n لأنّ $h(x)<0$ على $\mathbb{R}$.

وفيما يأتي نجد الرسم البياني لكل من d_2 و $\mathcal{C}_2$.



7

التكامل والتوابع الأصلية

1 التوابع الأصلية

2 بعض قواعد حساب التوابع الأصلية

3 التكامل المحدّد وخواصه

4 التكامل المحدّد وحساب المساحة

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف التوابع الأصلية، والتمكن من بعض طرائق حسابها
- صلة التوابع الأصلية بمفهوم التكامل المحدّد
- بعض طرائق حساب التكامل المحدّد، وخصوصاً التكامل بالتجزئة
- التكامل المحدّد وحساب المساحة وتطبيقات أخرى

تَدرَّبْ صفحة 222

① في كلّ من الحالات الآتية، تحقّق أنَّ F تابع أصلي للتابع f على المجال I.

❶ $f(x) = \tan^2 x$ $\quad F(x) = \tan x - x,$ $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,$

❷ $f(x) = \cos x - x\sin x$ $\quad F(x) = x\cos x,$ $\quad I = \mathbb{R},$

❸ $f(x) = \dfrac{2(x^4-1)}{x^3}$ $\quad F(x) = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2,$ $\quad I = \left]0,+\infty\right[,$

❹ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2(x-1)^2}$ $\quad F(x) = \dfrac{-1}{x(x-1)},$ $\quad I = \left]0,1\right[,$

❺ $f(x) = \ln x$ $\quad F(x) = x\ln x - x,$ $\quad I = \left]0,+\infty\right[,$

❻ $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ $\quad F(x) = \ln(\ln x),$ $\quad I = \left]1,+\infty\right[,$

❼ $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ $\quad F(x) = x - \ln(1+e^x),$ $\quad I = \mathbb{R},$

❽ $f(x) = \sqrt{e^x}$ $\quad F(x) = 2\sqrt{e^x},$ $\quad I = \mathbb{R},$

الحل

هذا تمرين بسيط يكفي في كل حالة حساب F' والتيقّن أنّه يساوي f.

② في كلّ من الحالات الآتية، تحقّق أنَّ F و G تابعان أصليان للتابع f نفسه على المجال I.

❶ $F(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ $\quad G(x) = \dfrac{x^2+7x-5}{x-1},$ $\quad I = \left]1,+\infty\right[,$

❷ $F(x) = \tan^2 x$ $\quad G(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\quad I = \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[,$

❸ $F(x) = \dfrac{2x^2-3x+7}{4x-5}$ $\quad G(x) = \dfrac{-4x^2+2x-9}{10-8x},$ $\quad I = \left]\frac{5}{4},+\infty\right[,$

❹ $F(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad G(x) = \dfrac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$ $\quad I = \mathbb{R},$

❺ $F(x) = \sin^2 x$ $\quad G(x) = 2-\cos^2 x,$ $\quad I = \mathbb{R},$

الحل

هذا تمرين بسيط يكفي في كل حالة حساب F' و G' والتيقّن أنّهما متساويان.

③ أيكون التابعان F و G الآتيان تابعين أصليين للتابع f ذاته على $\mathbb{R}$؟

$F(x)=\sin(3x)-2\sin x$ و $G(x)=\sin x-3\sin^3 x$.

الحل

إذا افترضنا أنّ F و G تابعان أصليان للتابع f ذاته وجب أن يكون

$$\begin{aligned} F'(x) &= 3\cos(3x)-2\cos x &= f(x)\\ G'(x) &= \cos x-9\sin^2 x\cos x &= f(x)\end{aligned}$$

وعلى الخصوص يجب أن يكون $F'(\frac{\pi}{6})-G'(\frac{\pi}{6})=0$ وهذا غير صحيح لأننا نجد بحساب بسيط أنّ $F'(\frac{\pi}{6})-G'(\frac{\pi}{6})=-\frac{3\sqrt{3}}{8}\neq 0$. إذن الجواب هو لا.

تَدرَّبْ صفحة 227

① في كلٍّ من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f:x\mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $f(x)=8x^3+6x^2-2x+3$, $I=\mathbb{R}$,

❷ $f(x)=\dfrac{1}{x^4}$, $I=]0,+\infty[$,

❸ $f(x)=\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{3}{x^2}$, $I=]-\infty,0[$,

❹ $f(x)=\dfrac{1}{1-2x+x^2}$, $I=]1,+\infty[$,

❺ $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x^2+x)^2}$, $I=]-\infty,-1[$,

❻ $f(x)=\dfrac{4x-2}{\sqrt{x^2-x}}$, $I=]1,+\infty[$,

❼ $f(x)=\dfrac{5}{4x-3}$, $I=]-\infty,\frac{3}{4}[$,

❽ $f(x)=\dfrac{3x+1}{2x}$, $I=]0,+\infty[$,

❾ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$, $I=]-\infty,2[$

❿ $f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-1}$, $I=]\frac{1}{2},+\infty[$,

الحل

❶ $F(x) = 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x$

❷ $F(x) = -\dfrac{1}{3x^3}$

❸ $F(x) = \dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{3}{x}$

❹ $F(x) = -\dfrac{1}{x-1}$

❺ $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+x}$

❻ $F(x) = 4\sqrt{x^2 - x}$

❼ $F(x) = \dfrac{5}{4}\ln(3-4x)$

❽ $F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\ln x$

❾ $F(x) = x + 3\ln(2-x)$

❿ $F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}\cdot\ln(2x-1)$

② في كلٍّ من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $f(x) = \cos^2 3x$, $I = \mathbb{R}$,

❷ $f(x) = \cos^4 x$, $I = \mathbb{R}$,

❸ $f(x) = \cos 3x \cdot \cos x$, $I = \mathbb{R}$,

❹ $f(x) = \cot^2 x$, $I =]0,\pi[$,

❺ $f(x) = \tan x$, $I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$,

❻ $f(x) = \cot x$, $I =]0,\pi[$,

❼ $f(x) = \sqrt{(2x-1)^3}$, $I =]\frac{1}{2}, +\infty[$,

❽ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}$, $I =]-\infty, \frac{3}{2}[$,

❾ $f(x) = x\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^2}$, $I = \mathbb{R}$,

❿ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}$, $I =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$,

الحل

❶ $F(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{12}\sin(6x)$

❷ $F(x) = \dfrac{3x}{8} + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{1}{32}\sin(4x)$

❸ $F(x) = \dfrac{1}{4}\sin(2x) + \dfrac{1}{8}\sin(4x)$

❹ $F(x) = -x - \cot(x)$

❺ $F(x) = -\ln(-\cos x)$

❻ $F(x) = \ln(\sin x)$

❼ $F(x) = \dfrac{1}{5}(2x-1)^{5/2}$

❽ $F(x) = -\sqrt{3-2x}$

❾ $F(x) = \dfrac{3}{10}(x^2+1)^{5/3}$

❿ $F(x) = -\sqrt{3-x^2}$

تَدرَّبْ صفحة 235

① احسب التكاملات الآتية:

❶ $I = \int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 2x}\ dx$

❷ $J = \int_{-1}^{2} x\left|x - 1\right| dx$

❸ $K = \int_{0}^{1} \left(e^{2x} - e^{-2x}\right) dx$

❹ $L = \int_{-2}^{-1} \frac{2x - 1}{x - 1} dx$

❺ $M = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan x\, dx$

❻ $N = \int_{0}^{\pi/4} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

الحل

❶ نلاحظ أنّ $2 - 2\cos 2x = 4\sin^2 x$ ولكن $\sin x < 0$ عندما $\frac{2\pi}{3} < x < 2\pi$ إذن في هذه الحالة لدينا

$$I = \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-2\sin x)dx = \Big[2\cos x\Big]_{3\pi/2}^{2\pi} = 2$$

❷ إشارة $|x-1|$ ثابتة على كل من المجالين $]-\infty,1[$ و $]1,+\infty[$ ، إذن استناداً إلى علاقة شال نكتب

$$\begin{aligned} J &= \int_{-1}^{1} x\left|x-1\right|dx + \int_{1}^{2} x\left|x-1\right|dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x - x^2)dx + \int_{1}^{2} (x^2 - x)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

❸ $K = -1 + \frac{e^2 + e^{-2}}{2}$.

❹ بكتابة $\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$ نجد $L = 2 - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

❺ $M = \frac{1}{2}\ln(3)$.

❻ لاحظ أنّ $(\cos x + \sin x)' = \cos x - \sin x$ ومنه $N = \frac{1}{2}\ln(2)$.

② احسب التكاملات الآتية باستعمال التكامل بالتجزئة.

❶ $I = \int_1^e x \ln x \, dx$

❷ $J = \int_0^\pi (x-1)\cos x \, dx$

❸ $K = \int_0^1 (x+2)e^x \, dx$

❹ $L = \int_0^{\pi/3} x \sin(3x) \, dx$

❺ $M = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$

❻ $N = \int_0^\pi e^x \sin x \, dx$

مساعدة: احسب M و N في آن معاً.

الحل

❶ $$I = \int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \frac{e^2+1}{4}$$

❷ $$J = \int_0^\pi (x-1)\cos x\,dx = \Big[(x-1)\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = -2$$

❸ $$K = \int_0^1 (x+2)e^x\,dx = \Big[(x+2)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = 2e-1$$

❹ $$L = \int_0^{\pi/3} x\sin(3x)\,dx = \left[x\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi/3} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3}\cos(3x)\,dx = \frac{\pi}{9}$$

❺ و ❻ هنا لدينا

$$M = \int_0^\pi e^x\cos x\,dx = \Big[\cos x\, e^x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\sin x)e^x\,dx = -e^\pi - 1 + N$$

$$N = \int_0^\pi e^x\sin x\,dx = \Big[\sin x\, e^x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (\cos x)e^x\,dx = -M$$

إذن $M = -\frac{1+e^\pi}{2}$ و $N = \frac{1+e^\pi}{2}$.

③ جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = x\cdot\cos x$

❷ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = x\cdot\sin 2x$

❸ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = x^2\cdot e^x$

❹ $I = \left]0,+\infty\right[,\quad f(x) = x^2\cdot\ln x$

❺ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = x^2\cdot\sin 2x$

❻ $I = \mathbb{R},\quad f(x) = x^2\cdot\cos 3x$

الحل

❶ لمّا كان $\int_0^x t\cos t\,dt = \Big[t\sin t\Big]_0^x - \int_0^x \sin t\,dx = x\sin x + \cos x - 1$ استنتجنا أنّ التابع $x \mapsto F(x) = x\sin x + \cos x$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x\cos x$ على $\mathbb{R}$.

❷ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{2}x\cos(2x)$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x\sin(2x)$ على $\mathbb{R}$.

❸ هنا نكتب

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2e^t\,dt &= \Big[t^2\,e^t\Big]_0^x - \int_0^x 2te^t\,dx\\ &= x^2e^x - 2\left(\Big[t\,e^t\Big]_0^x - \int_0^x e^t\,dx\right)\\ &= x^2e^x - 2\big(xe^x - e^x + 1\big) = (x^2-2x+2)e^x - 2\end{aligned}$$

فنستنتج أنّ التابع $x \mapsto F(x) = (x^2-2x+2)e^x$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

❹ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2\ln x$ على $]0,+\infty[$.

❺ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{2}x\sin(2x) - \frac{1}{4}(2x^2-1)\cos(2x)$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2\sin(2x)$.

❻ $x \mapsto F(x) = \frac{1}{27}(9x^2-2)\sin(3x) + \frac{2}{9}x\cos(3x)$ هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto x^2\cos(3x)$.

④ جد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto f(x)$ على المجال I.

❶ $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-1}, \quad I =]1,+\infty[$

❷ $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}, \quad I =]-\infty,-2[$

❸ $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-6} \quad I =]-2,3[$

❹ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x}, \quad I =]-1,0[$

❺ $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-x-2} \quad I =]2,+\infty[$

❻ $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x+2)^2} \quad I =]-\infty,-2[$

ملاحظة: التكامل الأخير ليس من النوع الذي درسناه بل هو أبسط من ذلك!

الحل

❶ $F(x) = 2\ln(x-1) - \ln(x+1)$.

❷ $F(x) = \frac{1}{2}\ln(2-x) + \frac{1}{4}\ln(x^2-4)$.

❸ $F(x) = \frac{3}{5}\ln(3-x) + \frac{2}{5}\ln(x+2)$.

❹ $F(x) = 3\ln(x+1) - \ln(-x)$.

❺ $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{8}{3}\ln(x-2) + \frac{1}{3}\ln(x+1)$.

❻ $F(x) = \dfrac{5}{x+2} + \log\big((x+2)^2\big)$.

أنشطة

نشاط 1 حساب مساحة سطح مستو

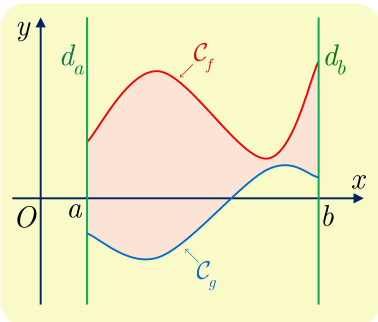
❶ مساحة السطح المحصور بين منحنيين

لنتأمّل الخطين البيانيَّيْن $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ للتابعين $f : x \mapsto e^{x}$ و $g : x \mapsto e^{-x}$ المعرّفين على $\mathbb{R}$.

① ارسم الخطين البيانيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

② احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي. (ناقش تبعاً لإشارة λ).

نقبل عموماً أنّه إذا كان $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ الخطين البيانيين لتابعين مستمرين f و g على مجال I، وكان a و b عددين من I يحقّقان $a < b$. عندئذ $\int_a^b |f - g|$ يساوي مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم d_a الذي معادلته $x = a$ والمستقيم d_b الذي معادلته $x = b$.
يتطلّب هذا الحساب دراسة إشارة الفرق $f - g$ على $[a, b]$.



❷ منحن ومقارب مائل

ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $f(x) = x(1 + e^{-x})$. وليكن $\mathcal{C}_f$ الخط البياني المُمثّل للتابع f. الهدف من هذا النشاط دراسة مساحة السطح المحصور بين الخط البياني $\mathcal{C}_f$ ومُقاربه.

① a. ادرس نهايات التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$. واكتب جدول تغيرات f. (استعمل f'' لدراسة إشارة المشتق f').

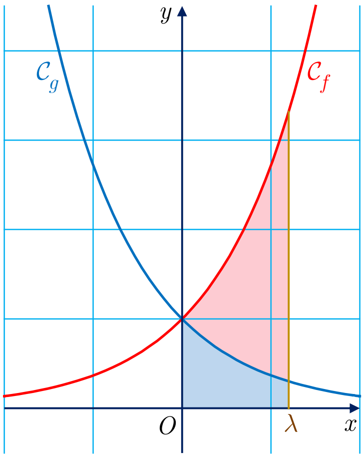
b. تحقّق أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y = x$ مستقيم مُقارب للخط $\mathcal{C}_f$ في جوار $+\infty$. وادرس وضع $\mathcal{C}_f$ بالنسبة إلى المقارب Δ.

c. ارسم Δ و $\mathcal{C}_f$.

② a. ليكن λ عدداً حقيقياً موجباً تماماً. احسب $\mathcal{A}(\lambda)$ مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و Δ والمستقيم الذي معادلته $x = \lambda$.

b. ما نهاية $\mathcal{A}(\lambda)$ عندما تسعى λ إلى $+\infty$؟

الحل



❶ لنرمز بالرمز $\mathcal{A}(\lambda)$ إلى مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ والمستقيم الذي معادلته $x=\lambda$. في حالة $\lambda>0$ يقع $\mathcal{C}_f$ فوق $\mathcal{C}_g$ على المجال $[0,\lambda]$ ومن ثَمّ

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_0^\lambda e^x dx-\int_0^\lambda e^{-x}dx=e^\lambda+e^{-\lambda}-2$$

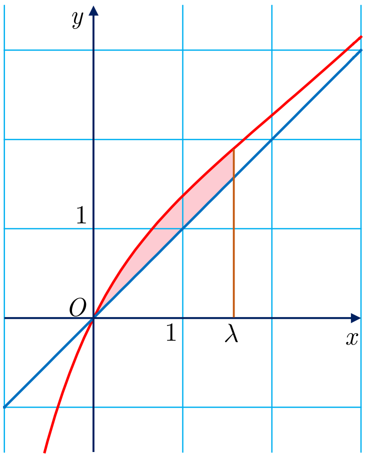
في حالة $\lambda<0$ يقع $\mathcal{C}_g$ فوق $\mathcal{C}_f$ على المجال $[\lambda,0]$ ومن ثَمّ

$$\mathcal{A}(\lambda)=\int_\lambda^0 e^{-x}dx-\int_\lambda^0 e^x dx=e^\lambda+e^{-\lambda}-2$$

إذن أياً كانت $\lambda\in\mathbb{R}$ كان $\mathcal{A}(\lambda)=e^\lambda+e^{-\lambda}-2$.

❷ هنا $f(x)=x(1+e^{-x})$.

① .a لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$. وكذلك لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. ونجد بحساب بسيط أنّ $f'(x)=1+e^{-x}-xe^{-x}$. ليس من السهل تعيين إشارة $f'(x)$ مباشرة لذلك نتأمّل مشتقه $f''(x)=(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$. إذن f' متناقصٌ تماماً على $]-\infty,2[$ ومتزايدٌ تماماً على $]2,+\infty[$، فهو يبلغ قيمة حدية صغرى تساوي $f'(2)=1-e^{-2}>0$ عند $x=2$. نستنتج إذن أنّ f' موجبٌ تماماً على كامل $\mathbb{R}$، ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

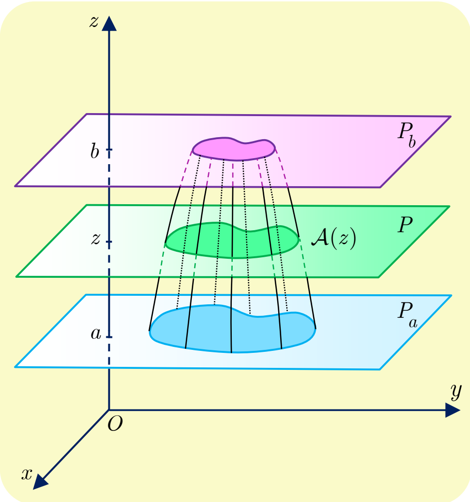
① .b لنضع $g(x)=f(x)-x=xe^{-x}$ نعلم أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f. ولأنّ إشارة g تماثل إشارة x استنتجنا أنّ الخط البياني $\mathcal{C}$ يقع فوق المقارب Δ على $]0,+\infty[$ ويقع تحته على $]-\infty,0[$.

② لدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda)&=\int_0^\lambda(f(x)-x)dx=\int_0^\lambda xe^{-x}dx\\&=\left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda+\int_0^\lambda e^{-x}dx=1-(\lambda+1)e^{-\lambda}\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\mathcal{A}(\lambda)=1$.

نشاط 2 حساب حجم مجسم

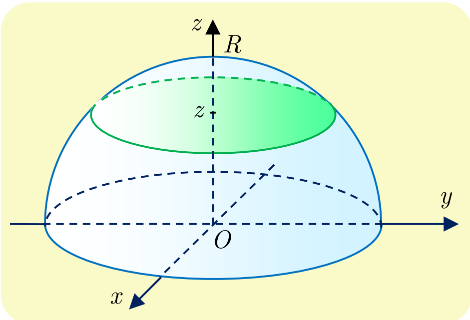


ليكن $\mathbb{S}$ مجسماً يحدّده مستويان P_a و P_b معادلتاهما بالترتيب $z=a$ و $z=b$ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نرمز بالرمز $\mathcal{V}$ إلى حجم هذا المجسم، وبالرمز $\mathcal{A}(z)$ إلى مساحة مقطع هذا المجسم بالمستوي P الذي يوازي كلاً من P_a و P_b وراقمه يساوي z $(a \le z \le b)$. نقبل أنّ $\mathcal{V}$ يُحسب بالعلاقة:

$$\mathcal{V}=\int_a^b \mathcal{A}(z)\,dz \qquad (*)$$

نجد فيما يأتي عدداً من الأمثلة على استعمال هذه العلاقة.

❶ حجم كرة نصف قطرها R

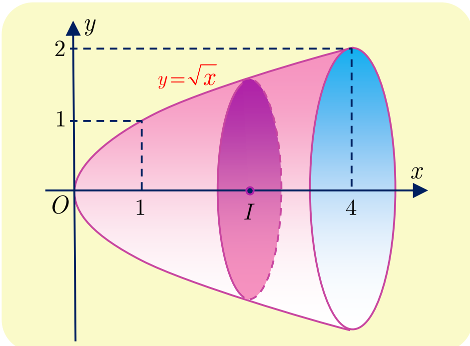


يكفي حساب حجم نصف الكرة ثمّ نضرب الناتج بالعدد 2.

① اشرح باستعمال رموز الشكل، لماذا $\mathcal{A}(z)=\pi(R^2-z^2)$ ؟

② استنتج مجدداً العبارة $\mathcal{V}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

❷ حجم مجسم دوراني



نجد في الشكل المجاور الخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f المعطى على المجال $[0,4]$ بالصيغة $f(x)=\sqrt{x}$. عندما يدور $\mathcal{C}$ دورة كاملة حول محور الفواصل، يولّد مجسماً دورانياً $\mathcal{S}$.

① ما طبيعة مقطع هذا المجسم بمستوٍ عمودي على محور الفواصل ويمر بالنقطة $I(x,0)$ $(0 \le x \le 4)$؟

② عبّر عن $\mathcal{A}(x)$، مساحة هذا المقطع، بدلالة x.

③ استنتج $\mathcal{V}$ حجم المجسم $\mathcal{S}$.

الحل

❶ ① استناداً إلى الشكل، وعملاً بمبرهنة فيثاغورث، يكون نصف قطر القرص $\sqrt{R^2-z^2}$ فمساحته تساوي $\mathcal{A}(z)=\pi(R^2-z^2)$.

② وعليه يعطى حجم الكرة $\mathcal{V}=2\int_0^R \pi(R^2-z^2)dz=2\pi\left[R^2z-\frac{1}{3}z^3\right]_0^R=\dfrac{4\pi}{3}R^3$.

❷ المقطع دائرة نصف قطرها $\sqrt{x}$، ومن ثمّ تعطى مساحتها بالصيغة $\mathcal{A}(x)=\pi x$. أمّا حجم المجسّم فيساوي $\mathcal{V}=\int_0^4 \mathcal{A}(x)dx=8\pi$. وندعو القارئ ليقارن نتيجة هذه النشاط بنتيجة النشاط 2 من الوحدة الرابعة.

تمرينات ومسائل

1 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $I=\left]0,+\infty\right[,\quad f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}$

② $I=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[,\quad f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-2x}}$

③ $I=\left]1,+\infty\right[,\quad f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$

④ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=(2x-1)^3$

⑤ $I=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right[,\quad f(x)=\dfrac{1}{(1-3x)^2}$

⑥ $I=\left]-1,3\right[,\quad f(x)=\dfrac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}$

الحل

① $F(x)=x+\dfrac{1}{x}+3\ln x$

② $F(x)=-2\sqrt{1-2x}$

③ $F(x)=2\sqrt{x^2-1}$

④ $F(x)=\dfrac{1}{8}(2x-1)^4$

⑤ $F(x)=\dfrac{1}{3(1-3x)}$

⑥ $F(x)=-\dfrac{1}{2(x^2-2x-3)}$

2 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $I=\mathbb{R},\quad f(x)=\cos x(\sin^2 x-3\sin x)$

② $I=\left]4,+\infty\right[,\quad f(x)=\dfrac{1}{x-4}$

③ $I=\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\quad f(x)=\dfrac{2}{\cos^2 x}-1$

④ $I=\left]-\infty,4\right[,\quad f(x)=\dfrac{1}{x-4}$

⑤ $I=\mathbb{R},\quad f(x)=2e^{3x-1}$

⑥ $I=\left]-1,+\infty\right[,\quad f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$

الحل

① $F(x)=\dfrac{\sin^3(x)}{3}+\dfrac{3\cos^2(x)}{2}$

② $F(x)=\ln(x-4)$

③ $F(x)=2\tan(x)-x$

④ $F(x)=\ln(4-x)$

⑤ $F(x)=\dfrac{2}{3}e^{3x-1}$

⑥ $f(x)=2x-3\ln(x+1)$

3 في كلٍّ من الحالات الآتية، هاتِ تابعاً أصلياً F للتابع f على مجالٍ I يطلب تحديده ويحقق الشرط المعطى.

① $F(1)=0,\quad f(x)=\dfrac{2}{x^2}+x$ ② $F(0)=0,\quad f(x)=\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

③ $F(\frac{\pi}{2})=0,\quad f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$ ④ $F(\frac{\pi}{2})=0,\quad f(x)=\sin x\cdot\cos^2 x$

⑤ $F(1)=1,\quad f(x)=\dfrac{-1}{3-x}$ ⑥ $F(0)=0,\quad f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$

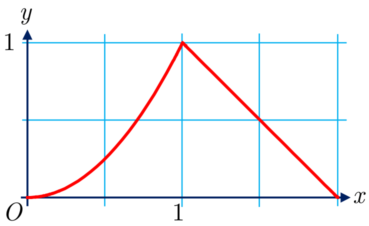
الحل

① $x>0,\quad F(x)=\dfrac{x^3+3x-4}{2x}$ ② $x>-\frac{1}{2},\quad F(x)=\dfrac{x}{2x+1}$

③ $x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\dfrac{1}{4}\left(-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\right)$ ④ $x\in\mathbb{R},\quad F(x)=-\dfrac{1}{3}\cos^3(x)$

⑤ $x<3,\quad F(x)=\ln(3-x)+1-\ln 2$ ⑥ $x\in]-1,1[,\quad F(x)=\dfrac{x^2}{2(1-x^2)}$

4 نرمز عادة بالرمز $\min(a,b)$ إلى أصغر العددين a و b.



تحقّق أنّ الخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع f المعرّف على المجال $[0,2]$ بالصيغة $f(x)=\min(x^2,2-x)$، هو الخط المرسوم في الشكل المجاور. احسب التكامل $\int_0^2 f(x)dx$، وقلْ ماذا يمثل هذا العدد ؟

احسب بالمثل $\int_0^2 g(x)dx$ و $\int_0^1 h(x)dx$ في حالة

$$g(x)=1-|1-x| \quad \text{و} \quad h(x)=\min(x^2,(x-1)^2)$$

بعد رسم خطيهما البيانيين على مجال المُكاملَة.

الحل

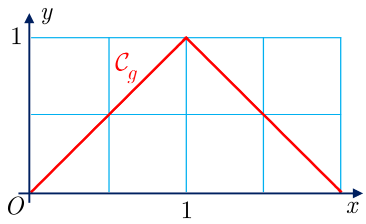
لاحظ أنّ المتراجحة $x^2\le 2-x$ تكافئ $(x+2)(x-1)\le 0$ أي $x\in[-2,1]$. إذن في حالة x من $[0,2]$ يكون $x^2\le 2-x$ على $[0,1]$ ويكون $2-x\le x^2$ في حالة $x\in[1,2]$ ومنه نرى أنّ

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : \ 0\le x\le 1 \\ 2-x & : \ 1\le x\le 2 \end{cases}$$

إذن $$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[-\frac{(2-x)^2}{2}\right]_1^2=\frac{5}{6}$$

وهو يمثل مساحة السطح المحصور بين الخط البياني للتابع f ومحور الفواصل.

وبالمثل في حالة $g(x) = 1 - \left|1-x\right|$ على المجال $[0,2]$ نجد

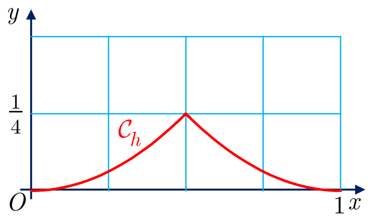


$$g(x) = \begin{cases} x & : \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & : \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ومنه

$$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 (2-x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{(2-x)^2}{2}\right]_1^2 = 1$$

وكذلك في حالة $h(x) = \min(x^2,(x-1)^2)$ على المجال $[0,1]$ نجد



$$h(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (1-x)^2 & : \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ومنه

$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^{1/2} x^2dx + \int_{1/2}^1 (1-x)^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \left[-\frac{(1-x)^3}{3}\right]_{1/2}^1 = \frac{1}{12}$$

5 احسب التكاملات الآتية:

① $I = \int_2^{-1} (x^2-4x+3)\,dx$

② $I = \int_2^{-1} (x-2)(x^2-4x+3)\,dx$

③ $I = \int_1^2 \left(t^2+t-\frac{1}{t}\right)dt$

④ $I = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$

⑤ $I = \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+2}dx$

⑥ $I = \int_0^{\pi} \sin(x+\frac{\pi}{4})\,dx$

⑦ $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x-3}{x}dx$

⑧ $I = \int_0^1 te^{t^2-1}dt$

⑨ $I = \int_0^2 \sqrt{2x+1}\,dx$

⑩ $I = \int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

الحل

① $I = -6$

② $I = \frac{63}{4}$

③ $I = \frac{23}{6} - \ln(2)$

④ $I = 2$

⑤ $I = \frac{1}{4}\ln(6)$

⑥ $I = \sqrt{2}$

⑦ $I = 1 + \ln(8)$

⑧ $I = \frac{e-1}{2e}$

⑨ $I = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

⑩ $I = \ln\left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)$

6 ليكن f التابع المعرف على $D = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ وفق $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x + 1}{x+3}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c}{x+3}$، أياً يكن x من D.

② احسب $J = \int_2^0 f(x)\,dx$.

الحل

① بإجراء قسمة إقليدية للبسط على المقام نجد مباشرة $4x^2 - 5x + 1 = (x+3)\,(4x-17) + 52$

ومنه

$$f(x) = 4x - 17 + \frac{52}{x+3}$$

② إذن

$$J = \Big[2x^2 - 17x \; + 52\ln(3+x)\Big]_2^0 = 26 + 52\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

7 ليكن f التابع المعرف على $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ وفق $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

① جد الأعداد a و b و c التي تحقق $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$، أياً يكن x من D.

② احسب $J = \int_{-3}^0 f(x)\,dx$.

الحل

① الأسهل هنا أن نضع $X = x - 1$ متحولاً جديداً فيكون

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{(X+1)^2}{X^2} = 1 + \frac{2}{X} + \frac{1}{X^2} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

② إذن

$$J = \left[x + 2\ln(1-x) - \frac{1}{x-1}\right]_{-3}^0 = \frac{15}{4} - 4\ln(2)$$

8 أثبت أنّ $\dfrac{1}{1+e^x} = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$، واستنتج قيمة $I = \int_0^1 \dfrac{1}{1+e^x}dx$.

الحل

إثبات المساواة الأولى تحقُّقٌ مباشرٌ، ومنه

$$I = \Big[x - \ln(1+e^x)\Big]_0^1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

9 باستعمال صيغتي $\sin^2 a$ و $\cos^2 a$ بدلالة $\cos 2a$، أو بأية طريقة تراها مناسبة اكتب $\sin^4 x$ بدلالة $\cos 2x$ و $\cos 4x$، ثُمّ احسب $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^4 x\, dx$.

الحل

لدينا $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$ ومنه $\sin^4 x = \frac{1}{4}\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)$، ولكن نعلم أيضاً أنّ $\cos^2 2x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)$ إذن

$$\sin^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x \qquad (*)$$

ومنه نستنتج أنّ

$$I = \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi/8} = \frac{3\pi}{64} + \frac{1-4\sqrt{2}}{32}$$

ملاحظة: يمكن الوصول إلى $(*)$ بالاستفادة من علاقة أويلر:

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{4ix}}{16}$$
$$= \frac{2\cos 4x - 8\cos 2x + 6}{16} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

10 احسب التكاملات الآتية باستعمال تكامل بالتجزئة.

① $I = \int_1^e (x-1)\ln x\, dx$

② $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x^2-1)e^x\, dx$

③ $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}\, dx$

④ $I = \int_1^2 (t-2)e^{2t}\, dt$

الحل

① $I = \frac{1}{4}(e^2-3)$

② $I = 1 - 2\ln^2(2) + 3\ln^2(3) - 2\ln(\frac{27}{4})$

③ $I = 3 - \frac{5}{e}$

④ $I = -\frac{1}{4}e^2(e^2-3)$

لنتعلّم البحث معاً

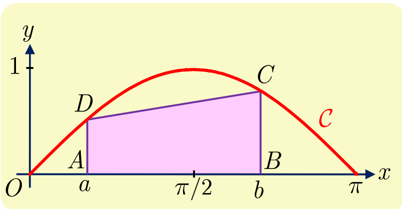
11 إثبات متراجحة

نفترض أنَّ a و b عددان حقيقيان وأنّ $0 \le a < b \le \pi$. أثبت صحة المتراجحة $\cos a - \cos b \ge \frac{1}{2}(b-a)\sin b$.

نحو الحلّ

قد نفكر في دراسة تابع، كأنْ نفترض b ثابتاً ونبرهن أنَّ التابع g المعرف وفق الصيغة الآتية موجب على المجال $[0,b]$: $g(x)=\cos x-\cos b-\frac{1}{2}(b-x)\sin b$، ولكن سرعان ما نقتنع أنّ هذا الطريق لا يؤدي إلى إثبات سهل للمتراجحة فإشارة المشتق الأوّل ليست سهلة التعيين.

ولكنّ المقدار $\cos a-\cos b$ يدفعنا إلى التفكير بالتكامل $\cos a-\cos b=\int_b^a f(t)\,dt$ حيث $f(t)=\cos' t=-\sin t$ أو $\cos a-\cos b=-\int_b^a \sin t\,dt=\int_a^b \sin t\,dt$.



1. ليكن $\mathcal{C}$ الخط البياني للتابع $x\mapsto \sin x$ على المجال $[0,\pi]$. برّر كون $\int_a^b \sin t\,dt$ هو مساحة منطقة عليك تحديدها. نرمز إلى تلك المساحة بالرمز $\mathcal{A}$. علل كون $\mathcal{A}$ أكبر من مساحة شبه المنحرف $ABCD$ المبيّن في الشكل.
2. احسب مساحة شبه المنحرف $ABCD$ وتحقّق أنها أكبر من $\frac{1}{2}(b-a)\sin b$.
3. تيقّن أنّ المتراجحة صحيحة في حالة $a=0$ و $b=\pi$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

نلاحظ أنّ $\int_a^b \sin t\,dt$ يمثل $\mathcal{A}$ مساحة السطح الذي يعينه الخط البياني للتابع sin ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ بالترتيب، وهذا السطح يحوي شبه المنحرف $ABCD$ المبين في الرسم، إذن $\mathcal{A}$ أكبر أو يساوي مساحة $ABCD$.

ولكن $AD=\sin a$ و $BC=\sin b$ والارتفاع AB يساوي $(b-a)$ إذن مساحة شبه المنحرف $ABCD$ تساوي $(b-a)\frac{\sin a+\sin b}{2}$. وهذا أكبر من $\frac{1}{2}(b-a)\sin b$ لأنّ $\sin a\geq 0$. نستنتج مما سبق أنّ $\mathcal{A}\geq\frac{1}{2}(b-a)\sin b$. ولكن

$$\mathcal{A}=\int_a^b \sin t\,dt=\cos a-\cos b$$

فنكون قد أثبتنا صحة المتراجحة $\cos a-\cos b\geq\frac{1}{2}(b-a)\sin b$.

لاحظ أنّه في حالة $a=0$ تصبح المتراجحة $1-\cos b\geq\frac{1}{2}b\sin b$ وهي تكافئ $\tan\frac{b}{2}\geq\frac{b}{2}$ التي أثبتنا صحتها سابقاً. أمّا في حالة $b=\pi$ فتؤول المتراجحة إلى المتراجحة المعروفة $\cos a+1\geq 0$.

12 البحث عن تابعٍ أصلي

ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = e^{2x}\sin x$. عيّن تابعاً أصلياً F للتابع f .

نحو الحلّ

- التابع المدروس مستمر فله تابع أصلي، ولكننا لا نتعرّف على صيغته بين الصيغ المألوفة لدينا، لذلك نسعى لكتابته بالشكل $F(x) = \int_0^x e^{2t}\sin t\,dt$ ، آملين أن تفيدنا مُكاملة بالتجزئة لأنّ للتابع المُكامل شكل جداء ضرب.

أثبت أنّ

$$F(x) = \int_0^x e^{2t}\sin t\,dt = \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt$$

- التكامل في الطرف الأيمن يشبه التكامل المطلوب ولكن استبدل فيه تابع التجيب بتابع الجيب. ومنه تأتي فكرة إجراء مُكاملة بالتجزئة ثانية، إذ نتوقّع أن يظهر التابع F مجدداً.

1. أثبت أنّ $\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F(x)$

2. استنتج عبارة F .

- طريقة ثانية. قد يخطر لنا أن نقحم المشتقات المتتالية للتابع f ونبحث عن علاقة بين f و f' و f'' .

1. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.
2. جد العددين الحقيقيّين a و b اللذين يحقّقان $f(x) = af'(x) + bf''(x)$.
3. استنتج عبارة $F(x)$ حيث F تابعٌ أصلي للتابع f .

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

ليكن $F(x) = \int_0^x e^{2t}\sin t\,dt$ ، بإجراء مكاملة بالتجزئة نجد

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_0^x e^{2t}\sin t\,dt &= \left[\frac{e^{2t}}{2}\sin t\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2t}}{2}\cos t dt\\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\int_0^x e^{2t}\cos t\,dt\\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{2t}}{2}\cos t\right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{2t}}{2}(-\sin t)dt\right)\\
&= \frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\int_0^x e^{2t}\sin t dt
\end{aligned}$$

إذن

$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}F(x)$$

ومنه

$$F(x)=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+\frac{1}{5}$$

طريقة ثانية. نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x}\sin x\\ f'(x) &= e^{2x}(\cos x+2\sin x)\\ f''(x) &= e^{2x}(4\cos x+3\sin x)\end{aligned}$$

إذن $4f'(x)-f''(x)=5e^{2x}\sin x=5f(x)$ ومنه نستنتج أنّ

$$f=\frac{4}{5}f'-\frac{1}{5}f''=\left(\frac{4}{5}f-\frac{1}{5}f'\right)'$$

إذن

$$x\mapsto\frac{4}{5}f(x)-\frac{1}{5}f'(x)=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)$$

هو تابع أصلي للتابع f.

12 البحث عن تابعٍ أصلي

ليكن التابع f المعرفعلى $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(1+x+x^2+x^3)e^{-x}$. أيوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F:x\mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$؟

نحو الحلّ

التحليل: لنفترض وجود كثير الحدود P هذا.

1. أثبت أنّ كون F تابعاً أصلياً للتابع f يقتضي أن يكون

$$P'(x)-P(x)=1+x+x^2+x^3 \qquad (*)$$

2. لماذا يجب أن يكون $\deg P=3$؟

3. بوضع $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ عيّن اعتماداً على $(*)$ الأمثال a و b و c و d.

التركيب: أثبتنا أنّه إذا كان P موجوداً فمن الواجب أن يكون له الصيغة التي وجدناها أعلاه. وبالعكس تحقّق أنّ التابع F الذي وجدته تابعٌ أصلي للتابع f على $\mathbb{R}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لنفترض وجود كثير حدود P بحيث يكون $F : x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f عندئذ من $F' = f$ نستنتج أنّ $\big(P'(x) - P(x)\big)e^{-x} = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-x}$ أي

$$P'(x) - P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

ولكن درجة P' أصغر تماماً من درجة P فدرجة الطرف الأيسر تساوي درجة P في حين درجة الطرف الأيمن تساوي 3. إذن لا بدّ أن يكون $\deg P = 3$. هذا يجعلنا نفترض أنّ

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

وبالتعويض في $(*)$ نجد

$$-ax^3 + (3a - b)x^2 + (2b - c)x + c - d = x^3 + x^2 + x + 1$$

تتحقّق العلاقة $(*)$ إذا تحققت الشروط

$$c - d = 1, 2b - c = 1, 3a - b = 1, a = -1$$

أي $d = -10, c = -9, b = -4, a = -1$.

وبالعكس، نتيقن مباشرة أنّ

$$\left((-x^3 - 4x^2 - 9x - 10)e^{-x}\right)' = f(x).$$

الجواب إذن: نعم يوجد تابع كثير الحدود P بحيث يكون $F : x \mapsto P(x)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$.

قُدُماً إلى الأمام

13 في كل حالة من الحالات الآتية، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على المجال I:

① $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{(2x^2 - 2x + 1)^3}$، $I = \mathbb{R}$

② $f(x) = \cot x$، $I = \left]-\pi, 0\right[$

③ $f(x) = \dfrac{1 - x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$، $I = \mathbb{R}$

④ $f(x) = \dfrac{1}{\sin(2x)}$، $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

⑤ $f(x) = (1 - 2x)^4$، $I = \mathbb{R}$

⑥ $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \times e^{-\frac{2}{x}}$، $I = \mathbb{R}_+^*$

⑦ $f(x) = 2e^{2-3x}$، $I = \mathbb{R}$

⑧ $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x^2}$، $I = \mathbb{R}_+^*$

⑨ $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$، $I = \mathbb{R}_+^*$

⑩ $f(x) = \dfrac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}$، $I = \left]-1, +\infty\right[$

الحل

① $I = \mathbb{R},\quad F(x) = \dfrac{1}{4(2x^2-2x+1)^2}$ | ② $I =]-\pi, 0[,\quad f(x) = \ln(-\sin(x))$

③ $I = \mathbb{R},\quad F(x) = -\sqrt{x^2-2x+2}$ | ④ $I =]0, \frac{\pi}{2}[,\quad f(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\tan x)$

⑤ $I = \mathbb{R},\quad F(x) = \dfrac{1}{10}(2x-1)^5$ | ⑥ $I = \mathbb{R}_+^*,\quad f(x) = \dfrac{e^{-2/x}}{2}$

⑦ $I = \mathbb{R},\quad F(x) = -\dfrac{2}{3}e^{2-3x}$ | ⑧ $I = \mathbb{R}_+^*,\quad f(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$

⑨ $I = \mathbb{R}_+^*,\quad F(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x}$ | ⑩ $I =]-1, +\infty[,\quad f(x) = x\sqrt{x+1}$

14 في كل من الحالات الآتية احسب التكامل المعطى.

① $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x}{x-1}\,dx$ | ② $I = \displaystyle\int_{0}^{2} \frac{4x-5}{2x+1}\,dx$

③ $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{2x}{x^2-9}\,dx$ | ④ $I = \displaystyle\int_{0}^{3} \frac{x+2}{(x+1)^4}\,dx$

⑤ $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x^3-3x-4}{x-2}\,dx$ | ⑥ $I = \displaystyle\int_{1}^{2} \frac{8x^2-4}{4x^2-1}\,dx$

الحل

① $I = 2 - \ln(3)$ | ② $I = 4 - \frac{7}{2}\ln(5)$

③ $I = -\ln\left(\frac{8}{5}\right)$ | ④ $I = \frac{51}{64}$

⑤ $I = \frac{23}{3} - 6\ln(2)$ | ⑥ $I = 2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{5}\right)$

15 في كل من الحالات الآتية جد تابعاً أصلياً للتابع f مستفيداً من العلاقة $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

① $f(x) = \cos^3 x$ ② $f(x) = \sin x + \sin^3 x$ ③ $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos^2 x$

الحل

① هنا

$$f(x) = \cos^3 x = (1 - \sin^2 x)\sin' x = \left(\sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x\right)'$$

إذن $F : x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ هو تابع أصلي للتابع $f : x \mapsto \cos^3 x$.

② هنا

$$f(x) = \sin x + \sin^3 x = (\cos^2 x - 2)\cos' x = (\tfrac{1}{3}\cos^3 x - 2\cos x)'$$

إذن $F : x \mapsto \frac{1}{3}\cos^3 x - 2\cos x$ هو تابع أصلي للتابع $f : x \mapsto \sin x + \sin^3 x$.

③ هنا

$$f(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x=(\cos^4 x-\cos^2 x)\cos' x=(\tfrac{1}{5}\cos^5 x-\tfrac{1}{3}\cos^3 x)'$$

إذن $F:x\mapsto \frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$ هو تابع أصلي للتابع $f:x\mapsto \sin^3 x\cdot\cos^2 x$.

16 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=\sin^4 x$.

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$. واكتب $f(x)$ بدلالة $f''(x)$ و $\cos 4x$.

② استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل

① لدينا

$$\begin{aligned} f(x)&=\sin^4 x\\ f'(x)&=4\sin^3 x\cos x\\ f''(x)&=12\sin^2 x\cos^2 x-4\sin^4 x\\ &=3\sin^2 2x-4f(x)=3\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}-4f(x)\end{aligned}$$

②نستنتج مما سبق أنّ

$$f(x)=\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}f''(x)=\left(\frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}f'(x)\right)'$$

إذن $F:x\mapsto \frac{3}{8}x-\frac{3}{32}\sin 4x-\sin^3 x\cos x$ هو تابع أصلي للتابع $f:x\mapsto \sin^4 x$.

17 ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=x^3e^{2x}$ ، جد تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$ بالصيغة $F(x)=P(x)e^{2x}$ ، حيث P تابع كثير حدود.

الحل

باتباع أسلوب التمرين 12 نبحث عن F بالصيغة $F(x)=(ax^3+bx^2+cx+d)e^{2x}$. الشرط $F'=f$ يُكافئ : $(3ax^2+2bx+c)+2(ax^3+bx^2+cx+d)=x^3$ أو

$$(2a-1)x^3+(2b+3a)x^2+2(c+b)x+2d+c=0$$

وعليه يكفي أن نختار $a=\dfrac{1}{2},b=-\dfrac{3}{4},c=\dfrac{3}{4},d=-\dfrac{3}{8}$. لنجد أنّ

$$x\mapsto F(x)=\tfrac{1}{8}(4x^3-6x^2+6x-3)e^{2x}$$

تابع أصلي للتابع $x\mapsto f(x)=x^3e^{2x}$.

18 نريد حساب $I=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$. احسب $J=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ ، ثُمّ $I+J$ ، واستنتج I .

الحل

من جهة أولى

$$J=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}I+J&=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx+\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx\\&=\int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

إذن $I=\frac{1}{2}\left(1-\ln 2\right)$.

19 نريد حساب $I=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$. احسب $J=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ ، ثُمّ $I+J$ ، واستنتج I .

الحل

من جهة أولى

$$J=\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx=\left[\frac{1}{2}\ln(1+2\sin x)\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{2}\ln 3$$

ومن جهة ثانية

$$\begin{aligned}I+J&=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx+\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx\\&=\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x+\cos x}{1+2\sin x}dx=\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx=1\end{aligned}$$

إذن $I=1-\frac{1}{2}\ln 3$.

20 ليكن التابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=e^{2x}\cos x$.

① احسب $f'(x)$ و $f''(x)$.

② عيّن عددين a و b يحققان المساواة $f(x)=af'(x)+bf''(x)$ أياً كان x .

③ استنتج تابعاً أصلياً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

الحل

① لدينا

$$f(x) = e^{2x}\cos x$$
$$f'(x) = e^{2x}(2\cos x - \sin x)$$
$$f''(x) = e^{2x}(3\cos x - 4\sin x)$$

② علينا حذف الحد الذي يحوي $\sin x$ من صيغتي $f'(x)$ و $f''(x)$ فنجد

$$4f'(x) - f''(x) = e^{2x}(5\cos x) = 5f(x)$$

③ نستنتج إذن أنّ $f(x) = \left(\frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x)\right)'$ وهذا يبرهن أنّ

$$x \mapsto F(x) = \frac{4}{5}f(x) - \frac{1}{5}f'(x) = \frac{1}{5}e^{2x}\left(2\cos x + \sin x\right)$$

هو تابع أصلي للتابع $x \mapsto f(x) = e^{2x}\cos x$ على $\mathbb{R}$.

21 F و G تابعان أصليّان للتابعين $f : x \mapsto \cos(\ln x)$ و $g : x \mapsto \sin(\ln x)$ على $]0,+\infty[$، ينعدمان عند $x = 1$. انطلاقاً من الصيغتين

$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)\,dt \quad \text{و} \quad F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt$$

① أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أنَّ:

$$G(x) = x\sin(\ln x) - F(x) \quad \text{و} \quad F(x) = x\cos(\ln x) - 1 + G(x).$$

② استنتج عبارتي $F(x)$ و $G(x)$.

الحل

① من جهة أولى

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)dt = \Big[t\cos(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x t(-\sin(\ln t))\frac{1}{t}dt$$
$$= x\cos(\ln x) - 1 + \int_1^x \sin(\ln t)dt = x\cos(\ln x) - 1 + G(x)$$
$$G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)dt = \Big[t\sin(\ln t)\Big]_1^x - \int_1^x t(\cos(\ln t))\frac{1}{t}dt$$
$$= x\sin(\ln x) - \int_1^x \cos(\ln t)dt = x\sin(\ln x) - F(x)$$

إذن

$$\begin{cases} F(x) - G(x) = x\cos(\ln x) - 1 \\ F(x) + G(x) = x\sin(\ln x) \end{cases}$$

② وبالحل المشترك لجملة المعادلتين السابقتين نجد

$$F(x)=\tfrac{1}{2}(x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)-1)$$
$$G(x)=\tfrac{1}{2}(x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)+1)$$

22 إثبات متراجحة

① تيقّن أنّه في حالة $0<x<a$ يكون $\frac{1}{1+a}\le\frac{1}{1+x}\le 1$.

② استنتج أنّ $\frac{a}{1+a}\le\ln(1+a)\le a$ في حالة $a>0$.

الحل

① التابع $x\mapsto x+1$ متزايدٌ على $\mathbb{R}_+$، فيكون $g:x\mapsto\frac{1}{1+x}$ متناقصاً على $\mathbb{R}_+$، وينتج من ذلك أنّه في حالة $0<x<a$ لدينا $g(a)\le g(x)\le g(0)$ وهي المتراجحة المطلوبة.

② إذن في حالة $a>0$ لدينا

$$\int_0^a\frac{1}{1+a}dx\le\int_0^a\frac{1}{1+x}dx\le\int_0^a dx$$

أي $\frac{a}{1+a}\le\ln(1+a)\le a$.

23

فيما يأتي، ارسم الخط البياني $\mathcal{C}$ الذي يُمثّل التابع f، ثُمّ احسب مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.

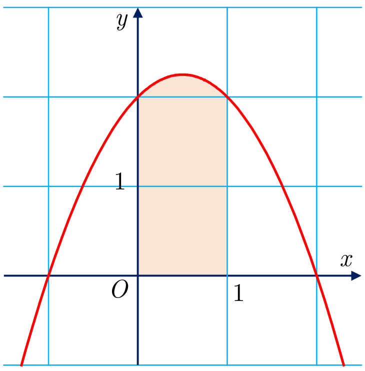
① $a=0,\quad b=1,\quad f(x)=2+x-x^2$

② $a=1,\quad b=4,\quad f(x)=\dfrac{6}{(2x+1)^2}$

③ $a=0,\quad b=\frac{\pi}{4},\quad f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

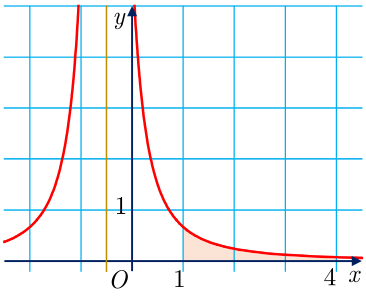
④ $a=-1,\quad b=\ln 2,\quad f(x)=(x+1)e^{-x}$

الحل



① الخط البياني للتابع f قطع مكافئ فتحته نحو الأسفل ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $x=\frac{1}{2}$، وخطه البياني $\mathcal{C}$ يقطع محور الفواصل عند $x=2$ و $x=-1$. وعلى المجال $[0,1]$ يقع الخط البياني للتابع f فوق محور الفواصل. إذن مساحة السطح المطلوب تساوي $\int_0^1(2+x-x^2)dx=\frac{13}{6}$.

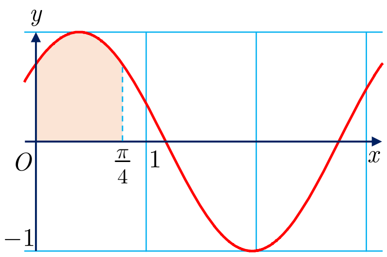
② هنا التابع f معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$، ويحقّق $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني، وكذلك فإنّ $\lim_{x\to-1/2} f(x)=+\infty$ ، فالمستقيم الذي معادلته $x=-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$.



وأخيراً نجد بحساب بسيط للمشتق أنّ f متناقص تماماً على كل من المجالين $]-\infty,-\frac{1}{2}[$ و $]-\frac{1}{2},+\infty[$. وهو موجب على كامل مجموعة الدراسة. إذن مساحة السطح المطلوب تساوي $\int_1^4 \frac{6}{(1+2x)^2}dx=\frac{2}{3}$.

③ هنا التابع f تابع دوري ويقبل العدد π دوراً. فتكفي دراسته على المجال $[0,\pi]$. المشتق $f'(x)=-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ ينعدم على مجال الدراسة فقط عند $x=\frac{\pi}{8}$ و $x=\frac{5\pi}{8}$، وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{5\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

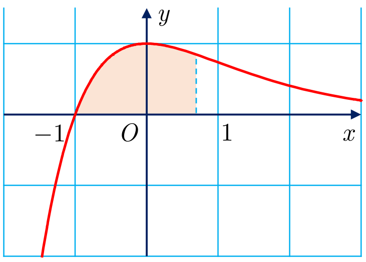


التابع f موجبٌ على المجال $[0,\frac{\pi}{4}]$. إذن مساحة السطح المطلوب تساوي $\int_0^{\pi/4}\cos(2x-\frac{\pi}{4})dx=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

④ هنا التابع f معرّف على $\mathbb{R}$، ويحقّق $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ مستقيم مقارب للخط البياني.

أمّا المشتق فيعطى بالصيغة $f'(x)=-xe^{-x}$ فإشارته تعاكس إشارة x، وهذا يتيح لنا وضع جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

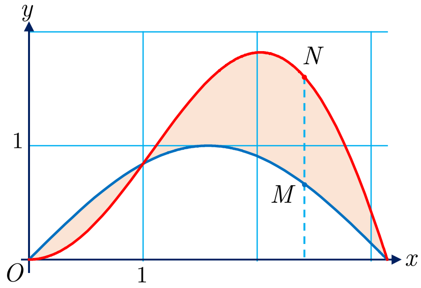


الخط البياني للتابع f يقع فوق محور الفواصل على المجال $]-1,+\infty[$، إذن مساحة السطح المطلوب تساوي

$$\int_{-1}^{\ln 2}(x+1)e^{-x}dx=\left[-(x+1)\,e^{-x}\right]_{-1}^{\ln 2}+\int_{-1}^{\ln 2}e^{-x}dx=e-1-\frac{1}{2}\ln 2.$$

24 ارسم في جملة متجانسة الخطين البيانيين للتابعين $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto x\sin x$ على المجال $[0,\pi]$. ما مساحة السطح المحصور بين هذين الخطين على المجال $[0,\pi]$.

الحل



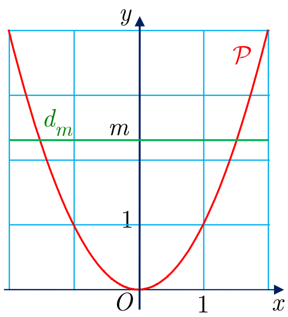
الخط البياني للتابع $x \mapsto \sin x$ على المجال $[0,\pi]$ معروف. ويوافق أية نقطة $M(x,\sin x)$ من هذا الخط نقطة $N(x,x\sin x)$ من الخط البياني للتابع $x \mapsto x\sin x$. النقطة N تقع تحت M في حالة $0 < x < 1$ وتقع فوقها في حالة $1 < x < \pi$. هذه الملاحظة تفيد في إعطاء الرسم المبين في الشكل المجاور.

إذن مساحة السطح المطلوب تساوي

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_0^\pi \left|\sin x - x\sin x\right| dx = \int_0^\pi \left|1-x\right| \sin x dx \\
&= \int_0^1 (1-x)\sin x\, dx + \int_1^\pi (x-1)\sin x\, dx \\
&= \Big[(1-x)(-\cos x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \cos x\, dx + \Big[(x-1)(-\cos x)\Big]_1^\pi + \int_1^\pi \cos x\, dx \\
&= \pi - \Big[\sin x\Big]_0^1 + \Big[\sin x\Big]_1^\pi = \pi - 2\sin(1)
\end{aligned}$$

25 ليكن $\mathcal{P}$ الخط البياني للتابع $x \mapsto x^2$ مرسوماً على المجال $[-2,2]$. المستقيم d_m الذي معادلته $y = m$ $(0 \le m \le 4)$ يقسم داخل جزء القطع المكافئ $\mathcal{P}$ إلى منطقتين.

عند أية قيمة للوسيط m تتساوى مساحتا هاتين المنطقتين؟



الحل

لتكن $\mathcal{A}(m)$ مساحة الجزء من داخل القطع الذي يحدّه المستقيم d_m. يقطع d_m القطع في النقطتين اللتين فاصلتاها $-\sqrt{m}$ و $\sqrt{m}$. وعليه

$$\mathcal{A}(m) = \int_{-\sqrt{m}}^{\sqrt{m}} (m - x^2)dx = \frac{4}{3} m\sqrt{m}$$

يتحقّق الشرط المعطى عند قيمة m التي تحقّق $\mathcal{A}(m) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(4)$، وهذا يكافئ $m = 2\sqrt[3]{2}$.

26 ليكن f الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=(2-x)e^x$. وليكن $\mathcal{C}$ خطّه البياني في جملة متجانسة.

① ادرس تغيرات f وارسم $\mathcal{C}$.

② ليكن $\mathcal{C}_1$ الجزء من الخط البياني $\mathcal{C}$ المحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=2$ ، وليكن $\mathcal{S}$ السطح المحصور بين $\mathcal{C}_1$ ومحور الفواصل. احسب مساحة $\mathcal{S}$.

③ عندما يدور السطح $\mathcal{S}$ حول محور الفواصل فإنّه يولّد مجسماً دورانياً حجمه $\mathcal{V}$.

.a عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $G:x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto(f(x))^2$.

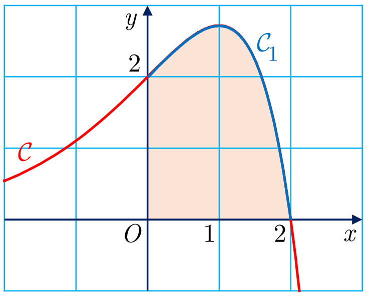
.b استنتج قيمة $\mathcal{V}$.

الحل

① لدينا من جهة أولى $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ ، ومن جهة ثانية $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ لأنّ $\lim_{X\to\infty} Xe^{-x}=0$ و $f(x)=e^2Xe^{-X}$ حيث $X=2-x$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}$ للتابع f في جوار $-\infty$.

وكذلك $f'(x)=(1-x)e^x$. ومنه جدول التغيرات الآتي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$



ونلاحظ على الخصوص أنّ $\mathcal{C}$ يتقاطع مع محور الفواصل في $(2,0)$. ومنه الرسم البياني المرافق.

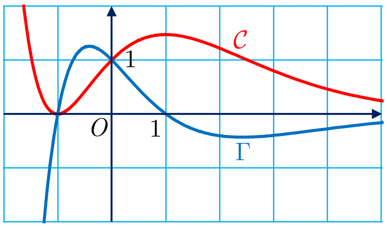
② لدينا : $\mathcal{A}(\mathcal{S})=\int_0^2(2-x)e^x dx=\left[(2-x)e^x\right]_0^2+\int_0^2 e^x dx=e^2-3$.

③ يكون $G:x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{2x}$ تابعاً أصلياً للتابع $x\mapsto(f(x))^2=(x^2-4x+4)e^{2x}$ إذا وفقط إذا تحقّق أياً كانت x المساواة: $2(ax^2+bx+c)+(2ax+b)=(x^2-4x+4)$ أو

$$(2a-1)x^2+2(b+a+2)x+2c+b-4=0$$

إذن نأخذ $a=\frac{1}{2},b=-\frac{5}{2},c=\frac{13}{4}$ ، نستنتج أنّ $x\mapsto G(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right)e^{2x}$ هو تابع أصلي للتابع $x\mapsto(f(x))^2$. إذا رمزنا بالرمز $\mathcal{A}(x)$ إلى مساحة مقطع المجسم الدوراني المدروس بالمستوي العمودي على محور الدوران المار بالنقطة التي فاصلتها x استنتجنا أنّ $\mathcal{A}(x)=\pi(f(x))^2$ إذن حجم المجسم المدروس يساوي

$$\mathcal{V}=\int_0^2\pi(f(x))^2dx=\left[\pi G(x)\right]_0^2=\frac{\pi(e^4-13)}{4}$$



27 مسألة مركّبة

❶ في معلم متجانس رسمنا الخطّين البيانيّين $\mathcal{C}$ و Γ لتابعين اشتقاقيين على $\mathbb{R}$. نعلم أنّ أحدهما مشتقٌّ للآخر، لذلك يمكن أن نرمز إليهما g و g'.

① بيّن مُعلّلاً أيُّ هذين الخطّين هو الخط البياني للتابع g وأيُّهما لمشتقه.

② ما ميل المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 ؟

❷ نتأمّل المعادلة التفاضلية : $(E) : y' + y = 2(x+1)e^{-x}$

① أثبت أنّ $f_0 : x \mapsto (x^2 + 2x)e^{-x}$ هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E).

② لتكن (E') المعادلة التفاضلية $y' + y = 0$. أثبت أنّ «f حلٌّ للمعادلة (E)» يُكافئ «$u = f - f_0$ حلٌّ للمعادلة (E')». ثُمّ حلّ (E') واستنتج صيغة $f(x)$ عندما يكون f حلاً للمعادلة (E).

③ إذا علمتَ أنّ التابع g من الجزء ❶ هو حلٌّ للمعادلة (E)، فأعطِ صيغة $g(x)$ بدلالة x.

④ عيّن h حلّ المعادلة (E) الذي يقبل مماساً أفقياً عند $x = 0$.

❸ ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

① ادرس التابع وضع جدولاً بتغيراته، مبيّناً نهاياته عند $+\infty$ و $-\infty$.

② ليكن $\mathcal{C}'$ الخط البياني الذي يمثّل f في معلم متجانس. اكتب معادلة للمماس T للخط $\mathcal{C}'$ في النقطة Ω التي فاصلتها -1. وارسم $\mathcal{C}'$ و T.

③ عيّن الأعداد a و b و c حتّى يكون التابع $F : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ تابعاً أصلياً للتابع f على $\mathbb{R}$. ثُمّ احسب $A(\alpha)$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل و $\mathcal{C}'$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = \alpha$.

الحل

❶ ① لو افترضنا جدلاً أنّ Γ هو الخط البياني للتابع g لوجدنا g يبلغ قيمة عظمى محلياً عند نقطة من المجال $]-1,0[$، ولوجب أن ينعدم مشتقه عندها، أي وجب أن يقطع الخط البياني للمشتق $\mathcal{C}$ محور الفواصل في نقطة من هذا المجال وهذا يناقض الرسم المعطى. إذن لا بدَّ أن يكون $\mathcal{C}$ هو الخط البياني للتابع g، و Γ هو الخط البياني للتابع g'.

② نقرأ من الرسم أنّ ميل المماس للخط $\mathcal{C}$ في النقطة التي فاصلتها 0 يساوي الواحد أي $g'(0) = 1$.

❷ ① نلاحظ أنّ

$$f_0(x) + f_0'(x) = (x^2 + 2x)e^{-x} + (2x+2)e^{-x} - (x^2 + 2x)e^{-x} = 2(x+1)e^{-x}$$

إذن f_0 هو حلٌّ للمعادلة التفاضلية (E).

② نلاحظ أنّ

$$u(x)+u'(x)=f(x)+f'(x)-f_0(x)-f_0'(x)=f(x)+f'(x)-2(x+1)e^{-x}$$

إذن $u(x)+u'(x)=0$ يكافئ $f(x)+f'(x)-2(x+1)e^{-x}=0$. أي يكون $u=f-f_0$ حلاً للمعادلة التفاضلية (E') إذا وفقط إذا كان f حلاً للمعادلة التفاضلية (E). ولكن لأي حلّ للمعادلة التفاضلية (E') الصيغة $u(x)=ke^{-x}$ حيث k ثابتٌ حقيقي. إذن $f(x)=(x^2+2x+k)e^{-x}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

③ التابع g هو حلّ للمعادلة التفاضلية (E)، فهو من الصيغة $g(x)=(x^2+2x+\lambda)e^{-x}$ حيث يتعيّن الثابت λ بالشرط $g(0)=1$ ومنه $\lambda=1$. إذن $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

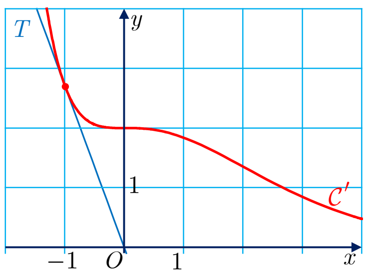
④ التابع g هو أيضاً حلّ للمعادلة التفاضلية (E)، فهو من الصيغة $h(x)=(x^2+2x+\mu)e^{-x}$ حيث يتعيّن الثابت μ بالشرط $h'(0)=0$. ولكن من (E) لدينا $h(0)+h'(0)-2=0$، أي $\mu=h(0)=2$، ومنه $h(x)=(x^2+2x+2)e^{-x}$.

❸ ① لمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x+2)=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. ومن جهة أخرى، لأنّ $\lim\limits_{x\to\infty}x^ne^{-x}=0$ أياً كانت $n\geq 0$، استنتجنا أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. فمحور الفواصل الذي معادلته $y=0$ هو مستقيم مقارب للخط البياني $\mathcal{C}'$ للتابع f. ومن جهة أخرى

$$f'(x)=(2+2x)e^{-x}-f(x)=-x^2e^{-x}$$

وهو موجب على $\mathbb{R}$ ولا ينعدم إلا في حالة $x=0$. ومنه جدول التغيرات الآتي للتابع f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0



② لدينا $f(-1)=e$ و $f'(-1)=-e$، إذن معادلة المماس T للخط $\mathcal{C}'$ في النقطة Ω التي فاصلتها -1 هي $y=-ex$.

③ إنّ مشتق $F:x\mapsto(ax^2+bx+c)e^{-x}$ يساوي f إذا وفقط إذا كان

$$(a+1)x^2+(2+b-2a)x+2+c-b=0$$

أياً كانت قيمة x، وهذا يكافئ $a=-1,b=-4,c=-6$. إذن $F:x\mapsto(-x^2-4x-6)e^{-x}$ هو تابع أصلي للتابع f.

$$\mathcal{A}(\alpha)=\int_0^\alpha f(x)dx=F(\alpha)-F(0)=6-(\alpha^2+4\alpha+6)e^{-\alpha}$$

وهي النتيجة المطلوبة. لاحظ بوجه خاص أنّ $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathcal{A}(\alpha)=6$.

1

الأشعة في الفراغ

1. عموميات
2. الارتباط الخطّي لثلاثة أشعّة
3. المعلم في الفراغ
4. المسافة في الفراغ
5. مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

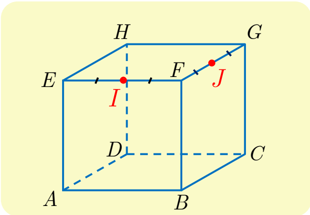
- الارتباط الخطي لثلاثة أشعة.
- اختيار معلم مناسب في الفراغ واستعماله في حل مسائل هندسية مختلفة.
- حساب المسافة في الفراغ، وصيغتها في معلم متجانس.
- حساب مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ، الخاصة التجميعية، وتطبيقات ذلك في حل بعض مسائل الهندسية المختلفة.

الأشعة في الفراغ

تدرّبْ ص16

① $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $[EF]$، J منتصف $[FG]$.

❶ في كلٍّ من الحالات التالية، بيّن إذا كانت النقطة M المعرّفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب. وعلِّلْ إجابتك.



1. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$.
2. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
3. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$.
4. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$.
5. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB}\right)$.

الحل

1. نعم لأن $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$. ومنه $M = F$.
2. نعم، M تنطبق على G لأنّ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}$.
3. نعم، M تنطبق على E لأنّ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE}$.
4. لا، لأنّ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$ تقتضي أنّ $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG}$. إذن G منتصف $[CM]$ فلا يمكن أن تكون M رأساً من رؤوس المكعب.
5. نعم، M تنطبق على B لأنّ

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{AB}$$

❷ في كلٍّ من الحالات الآتية، حدِّدْ موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة.

1. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$.
2. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$.
3. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$.

الحل

1. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ}$ ومنه N تنطبق على J .
2. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$ ومنه $N = J$.
3. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$ ومنه $N = I$.

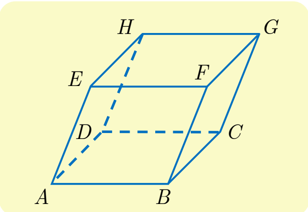
❸ في كلٍّ من الحالات الآتية، عبِّرْ عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاعٍ واحد (قد يكون مضروباً بعدد) وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً.

1. $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BA}$.
2. $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}$.
3. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.
4. $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{JF}$.

الحل

1. $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BJ}$.
2. $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$.
3. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AI}$.
4. $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{JF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{GF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$

② $ABCDEFGH$ متوازي سطوح.



❶ أثبت صحة المساواة الشعاعية، في كل من الحالات الآتية:

1. $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}=\vec{0}$.
2. $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.
3. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.
4. $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}$.

الحل

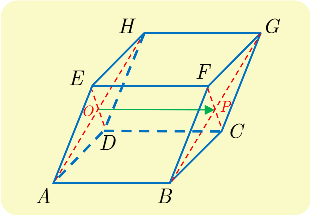
1. استناداً إلى علاقة شال نجد $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BE}=\vec{0}$.
2. استناداً إلى علاقة شال نجد $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CF}$ وبما أن $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ نجد $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.
3. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{EB}$ وبطريقة مماثلة لما سبق نجد $\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$
4. لدينا $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FA}$ كما أن $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AD}$ واستناداً إلى علاقة شال نجد

$$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FD}$$

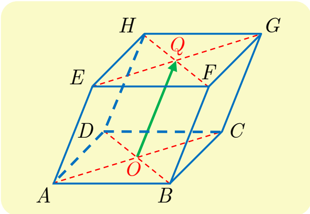
❷ وضِّعْ النقاط P و Q و R بحيث يكون:

1. $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$
2. $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.
3. $\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

الحل

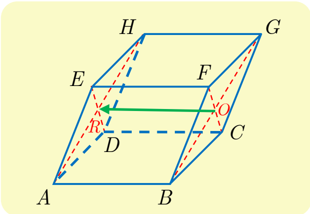


1. لتكن O مركز الوجه $ADHE$، عندئذ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}$ ومنه P هي صورة O وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AB}$ أي P هي مركز الوجه $ACGF$.



2. لتكن O مركز الوجه $ABCD$، عندئذ $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AE}$ ومنه Q هي صورة O وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي Q هي مركز الوجه $EFGH$.

3. لدينا

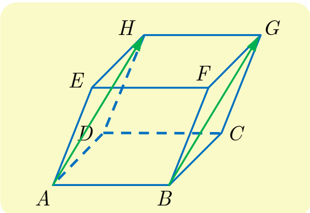


$$\begin{aligned}\overrightarrow{CR} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CO}\end{aligned}$$

لتكن O مركز الوجه $BCGF$، عندئذ تكون R صورة O وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CD}$ أي R هي مركز الوجه $ADHE$.

3 عيّن شعاعاً يساوي $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$ وأثبت أنَّ هذا الشعاع يرتبط خطيّاً بالشعاع $\overrightarrow{AH}$.

الحل



استناداً إلى علاقة شال نجد $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$ و لأن $BCGF$ متوازي الأضلاع وجدنا

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$$

أي $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$ يرتبط خطيّاً بالشعاع $\overrightarrow{AH}$.

4 أوجد شعاعاً يساوي $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}$ وأثبت أنَّ هذا الشعاع يرتبط خطيّاً بالشعاع $\overrightarrow{DF}$.

الحل

بما أن الشكل $FBCG$ متوازي أضلاع فإن $\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FC}$ وبما أنَّ بما أن كل وجه من أوجه متوازي السطوح هو متوازي أضلاع فإنَّ $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ ومنه

$$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD} = -\overrightarrow{DF}$$

أي $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FB}$ يرتبط خطيّاً بالشعاع $\overrightarrow{DF}$.

تَدرُّبٌ ص 20

① A و B و C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. أتكون الأشعّة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطيّاً؟

الحل

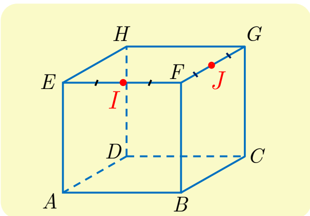
نعم لأنها تقع في مستوٍ واحد، كما إن $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ وضوحاً.

② A و B و C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. E نقطة تحقّق $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ ، و F نقطة تحقق $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. أتقعُ النقاط A و B و C و E و F في مستوٍ واحد؟

الحل

من العلاقة $\overrightarrow{BE} = 4\overrightarrow{BC}$ نجد أن النقاط B و C و E على استقامة واحدة ومنه E تقع في المستوي (ABC)، و من العلاقة $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ نجد أن النقاط A و E و F على استقامة واحدة ومنه F تقع في المستوي (ABE) أي المستوي (ABC) و النقاط A و B و C و E و F في مستوٍ واحد.

③ $ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$.



❶ أتنتمي النقطة J إلى المستوي (ABI)؟

❷ أتقعُ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AJ}$ في مستوٍ واحد؟

الحل

❶ لا، J لا تقع في الوجه $(ABFE)$ وهو نفسه المستوي (ABI).

❷ لا، وإلا انتمت J إلى المستوي (ABI).

④ $ABCD$ رباعي وجوه. و M هي النقطة المحققة للعلاقة

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

عبِّر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$. واستنتج أنَّ M تنتمي إلى المستوي (ABC).

الحل

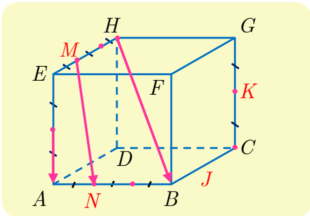
بالاستفادة من علاقة شال لدينا $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

إذن M تنتمي إلى المستوي (ABC).

⑤ $ABCDEFGH$ مكعب. فيه M نقطة تُحقّق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ ، و N نقطة تُحقّق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

❶ أثبت أنَّ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.

❷ أَتكون الأشعة $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطياً ؟



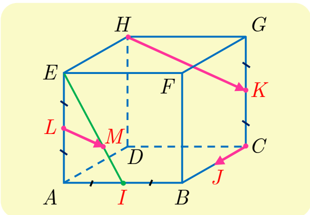
الحل

❶ بالاستناد إلى علاقة شال نجد

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$= \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{EA} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA}$$

❷ $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{EA}$ إذن $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{EA}$ فالأشعة $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيّاً.

⑥ $ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K و L هي بالترتيب منتصفات $[AB]$ و $[BC]$ و $[CG]$ و $[AE]$. ولتكن M النقطة المحققة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$.



❶ لماذا M هي مركز ثقل المثلث AEB؟

❷ أَتكون الأشعة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيّاً ؟

الحل

❶ $[EI]$ متوسط في في المثلث EAB، والعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$ تنص على أنّ النقط M تقسم هذا المتوسط بنسبة $1 : 2$ إذن M هي نقطة تلاقي متواسطات المثلث EAB، أو مركز ثقله.

❷ $[BL]$ متوسط آخر في المثلث EAB. إذن

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{HG}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK}$$

فالأشعة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطياً لأنّ الشعاعين $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطان خطياً، أو

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK} + 0\,\overrightarrow{CJ}$$

تدرّبْ ص24

① نتأمّل النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ و $D(-2,5,1)$ و $E(3,9,2)$ و $F(8,13,3)$ ،
في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ.

❶ احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[CD]$ و $[EF]$.

❷ احسب مركّبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EF}$.

❸ عيّن إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.

❹ جد مركّبات كلٍّ من الشعاعين :

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} \quad \text{و} \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF}$$

الحل

❶ منتصف $[AB]$ هو $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2},2,\dfrac{5}{2}\right)$

منتصف $[CD]$ هو $\left(\dfrac{x_C+x_D}{2},\dfrac{y_C+y_D}{2},\dfrac{z_C+z_D}{2}\right) = \left(-1,\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

منتصف $[EF]$ هو $\left(\dfrac{x_E+x_E}{2},\dfrac{y_E+y_F}{2},\dfrac{z_E+z_F}{2}\right) = \left(\dfrac{11}{2},11,\dfrac{5}{2}\right)$

❷ وكذلك

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{EF} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

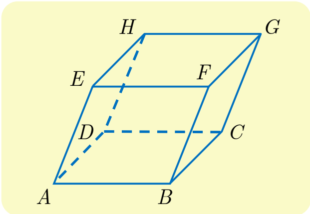
❸ يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$ فإذا وضعنا $K(x,y,z)$
كتبت المساواة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$ بالشكل $(-x,-2-y,2-z) = (-1,-6,1)$ ومنه $K(1,4,1)$.

❹

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} = 3\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF} = 2\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -3.5 \\ 5.5 \end{bmatrix}$$

② في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ. نعطى إحداثياتِ أربعٍ من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً، وهي



$A(2,1,-1)$ و $B(1,3,-1)$ و $C(-3,2,0)$ و $E(3,-1,3)$.

جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.

الحل

- لما كان $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$ استنتجنا أنّ

$$\begin{bmatrix}x_D\\y_D\\z_D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\\z_C-z_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}$$

أي $D(-2,0,0)$.

- ولما كانت النقاط F و G و H تنتج بالترتيب من النقاط B و C و D بإجراء انسحاب شعاعه $\overrightarrow{AE}=(1,-2,4)$ استنتجنا أنّ

$$\begin{bmatrix}x_F\\y_F\\z_F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_B\\y_B\\z_B\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_G\\y_G\\z_G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\4\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}x_H\\y_H\\z_H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\\4\end{bmatrix}$$

أي $F(2,1,3)$ و $G(-2,0,4)$ و $H(-1,-2,4)$.

③ لدينا، في معلمٍ للفراغ، النقاط $A(3,0,-1)$ و $B(-2,3,2)$ و $C(1,2,-2)$.

❶ جد إحداثيات النقطة I منتصف $[AB]$.

❷ جد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة إلى C.

❸ جد إحداثيات النقطة M التي تحقّق العلاقة $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$.

❹ جد إحداثيات النقطة N التي تحقّق العلاقة $\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{NC}$.

الحل

❶ $$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

❷ D نظيرة I بالنسبة إلى C، أي $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CD}$ ومنه

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OI}$$

وهي تكتب باستعمال المركّبات كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2.5 \\ -4.5 \end{bmatrix}$$

أي $D(1.5, 2.5, -4.5)$.

❸ من $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ وباستعمال علاقة شال نستنتج أنّ $\overrightarrow{OM} = -4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$.

إذن

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أي $M(-13, 12, 2)$

❹ $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$ أي $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} = 2\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{ON}\right)$ أو $\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}$. ومنه

$$\begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

إذن $N(-1, 4, -3)$

④ لدينا النقطتان $A\left(2, 3, -2\right)$ و $B\left(5, -1, 0\right)$. جِدْ، **إنْ أمكن**، في كل حالة، إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة.

❶ $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$ ❷ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

❸ $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ❹ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

الحل

❶ $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$ تكافئ $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$ ومنه

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \\ -6 \end{bmatrix}$$

أي $M(-4, 11, -6)$.

❷ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ تكافئ $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$ وهذا تناقض، إذن لا يوجد M تحقق هذه المساواة.

❸ $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ تكافئ، $-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ أو $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$. فهي المعادلة ❶ ذاتها، وحلها $M(-4, 11, -6)$.

❹ لدينا $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ فالمعادلة تكافئ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$ أو $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$، ولأن $A \neq B$ كانت مجموعة الحلول خالية.

⑤ أيمكن تعيين a و b لتقع النقاط $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة ؟

الحل

حتى تقع النقاط M و B و A على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطين خطياً، أي أن يوجد عدد حقيقي k غير معدوم يحقق $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{AB}$، تكافئ هذه المساواة

$$(a-3, b-2, 1) = k(1,-1,1)$$

ومنه $k=1$ و $b=1$ و $a=4$.

⑥ أيمكن تعيين a ليكون الشعاعان $\vec{u}(2,a,5)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطين خطّياً ؟

الحل

يكون الشعاعان مرتبطين خطياً إذا وجد عدد حقيقي k يحقق $\vec{v} = k.\vec{u}$ أي $(1,-2,a) = (2k, ka, 5k)$ ومنه نحصل على جملة المعادلات $2k = 1 ...①$ و $-2 = ka ...②$ و $a = 5k ...③$ ، من ① نجد $k = \frac{1}{2}$ ، نعوض في ② نجد $a = -4$ وهذه النتائج لا تحقق ③ إذن لا يمكن تعيين a ليكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّياً.

⑦ في كلٍّ من الحالات الآتية، بيّن إذا كانت النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

❶ $A(3,-1,2)$, $B(0,2,4)$, $C(2,0,-3)$,
❷ $A(-4,1,3)$, $B(-2,0,5)$, $C(0,-1,7)$,
❸ $A(1,-1,0)$, $B(1,-1,4)$, $C(1,-1,-3)$,

الحل

حتى تكون النقاط A و B و C على استقامة واحدة يجب أن يكون الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطياً.

❶ $\overrightarrow{AB} = (-3,3,2)$ و $\overrightarrow{BC} = (2,-2,-7)$ المركبات غير متناسبة إذن لا تقع النقاط على استقامة واحدة.

❷ $\overrightarrow{AB} = (2,-1,2)$ ، $\overrightarrow{BC} = (2,-1,2)$، نلاحظ أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ إذن B منتصف $[AC]$ والنقاط واقعة على استقامة واحدة.

❸ $\overrightarrow{AB} = (0,0,4)$، $\overrightarrow{BC} = (0,0,-7)$ ، نلاحظ أن $\overrightarrow{BC} = -\frac{7}{4}\overrightarrow{AB}$ والنقاط واقعة على استقامة واحدة.

تَدرَّبْ ص27

① احسب نظيم $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في كل من الحالات الآتية:

❶ $\vec{u}\left(2,-2,3\right)$ و $\vec{v}\left(4,-4,-2\right)$ و $\vec{w}\left(4,1,-2\right)$.

❷ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ و $\vec{v}=\vec{i}+5\vec{k}$ و $\vec{w}=\sqrt{2}\,\vec{i}-\sqrt{3}\,\vec{j}+\vec{k}$.

الحل

❶

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{17}$$
$$\|\vec{v}\|=\sqrt{9^2+(-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{36}=6$$
$$\|\vec{w}\|=\sqrt{4^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{21}$$

❷

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2+0}=\sqrt{13}$$
$$\|\vec{v}\|=\sqrt{1+0+25}=\sqrt{26}$$
$$\|\vec{w}\|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{6}$$

② فيما يأتي، بيّن هل المثلث ABC قائم ؟ هل هو متساوي الساقين ؟ هل هو متساوي الأضلاع ؟

❶ في حالة $A(1,3,-1)$ و $B(3,6,-2)$ و $C(0,4,0)$.

❷ في حالة $A(1,3,-2)$ و $B(2,-1,0)$ و $C(6,-3,-1)$.

الحل

❶ $AB=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$ و $AC=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ و $BC=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}$. والمثلث قائم في A حسب عكس فيثاغورث وغير متساوي الساقين وغير متساوي الأضلاع لأن أضلاعه مختلفة في الطول.

❷ لدينا $AB=\sqrt{21}$ و $AC=\sqrt{62}$ و $BC=\sqrt{21}$. والمثلث غير قائم لأنه لا يحقق عكس فيثاغورث ولكنه متساوي الساقين حيث $AB=BC$ وغير متساوي الأضلاع .

③ لدينا النقطتان $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$. بيِّن أيُّ النقاط C أو D أو E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$، في حالة $C(-2,5,-2)$ و $D(1,1,-3)$ و $E(3,2,1)$.

المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مجموعة النقاط التي تبعد عن طرفيها المسافة نفسها.

الحل

لدينا $AC = BC = \sqrt{59}$ أي C متساوية البعد عن طرفي القطعة $[AB]$ فهي واقعة في المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

وكذلك $AD = BD = \sqrt{21}$ أي D متساوية البعد عن طرفي القطعة $[AB]$ فهي واقعة في المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

وأخيراً $AE = \sqrt{8}$ و $BE = 2$ إذن $AE \neq BE$، والنقطة E لا تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

④ نتأمّل النقاط $A(1,1,\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$ و C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O. أثبت أنَّ المثلث ABC مثلّثٌ قائم ومتساوي الساقين.

الحل

نلاحظ أنّ $OA = OB = 2$ وأنّ

$$AB^2 = \left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 2 = 8 = OA^2 + OB^2$$

إذن OAB مثلث قائم في O ومتساوي الساقين. ولأنّ C نظيرة A بالنسبة إلى O استنتجنا أنّ B تقع على محور $[AC]$ فالمثلث ABC مثلث متساوي الساقين رأسه B. وهو قائم لأنّ $OA = OB = OC$. (المتوسط يساوي نصف طول الضلع المقابل) إذن ABC قائم ومتساوي الساقين.

⑤ نتأمّل النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(2,8,-1)$ و $C(7,3,-1)$ و $D(1,-3,3)$ و $E(5,3,3)$. أثبت أنَّ B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A .

الحل

نحسب الأطوال AB و AC و AD و AE، فنجدها جميعاً تساوي 5 . فهي تقع على الكرة التي مركزها A ونصف قطرها 5.

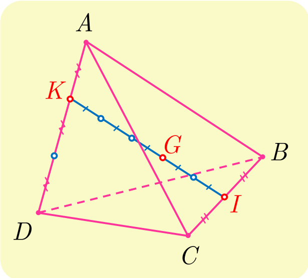
تَدرَّبْ ص 31

① بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور، عيّن الأعداد الأربعة a و b و c و d ليتحقق ما يأتي :

❶ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,a) و (D,d).

❷ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,b) و (C,c).

❸ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,a) و (B,b) و (C,c) و (D,d).



الحل

❶ من الرسم نجد أن $\overrightarrow{KD}+2\overrightarrow{KA}=\vec{0}$ إذن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(D,1)$.

ومنه نستنتج أنّ $a=2d\neq 0$.

❷ I منتصف $[BC]$ فهي I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$. إذن $c=b\neq 0$.

❸ G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(K,2)$ إذن $\frac{c+b}{3}=\frac{a+d}{2}$ ومنه $9d=4b$.

فإذا اخترنا $d=4$ مثلاً كي لا نحصل على أوزان كسرية، وجدنا $(a,b,c,d)=(8,9,9,4)$، وبالطبع أي حل آخر ينتج عن ضرب جميع هذه الأوزان بالعدد غير المعدوم نفسه هو حلٌّ مقبول.

② عين مركز ثقل المثلث ABC، في حالة $A\left(-4,-1,2\right)$ و $B\left(-2,1,0\right)$ و $C\left(6,3,-5\right)$.

الحل

مركز ثقل المثلث ABC هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ ومنه

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}=0$$
$$y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}=1$$
$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=-1$$

ومنه $G(0,1,-1)$.

③ لدينا ثلاث نقاط في الفراغ A و B و C.

❶ أثبت وجود نقطة وحيدة M تُحقّق $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

❷ ما القول عن M عندما تكون A و B و C على استقامة واحدة ؟

❸ ما القول عن الرباعي $ACBM$ عندما لا تقع A و B و C على استقامة واحدة؟

الحل

❶ الشرط $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ يكافئ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB}$. إذن M هي صورة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$.

❷ إذا انتمت A إلى المستقيم (BC) انتمت صورتها M وفق الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ إلى المستقيم (BC) نفسه، ومن ثم وقعت النقاط M و A و B و C على استقامة واحدة.

❸ نستنتج من العلاقة $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB}$ عندما لا تقع النقاط A و B و C على استقامة واحدة أنّ $ACBM$ متوازي الأضلاع.

④ ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي1. لتكن I و J و K و L النقاط المعرفة بالعلاقات : $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AJ}=k\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{CK}=k\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{CL}=k\overrightarrow{CB}$.

❶ أثبت أنَّ $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$ واستنتج أنَّ النقاط الأربع I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد.

❷ ما طبيعة الشكل الرباعي $IJKL$؟

الحل

❶ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}=-k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}=k(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=k\overrightarrow{BD}...①$

$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{CK}=-k\overrightarrow{CB}+k\overrightarrow{CD}=k(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})=k\overrightarrow{BD}...②$

من ①و ② نجد $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{LK}$ أي $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ أي إن المستقيم (IJ) يوازي (LK) النقاط الأربع I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد.

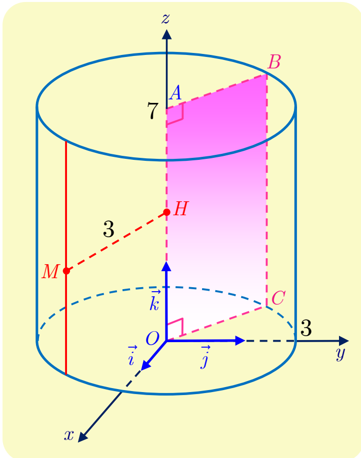
❷ بما أن $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{LK}$ فإن الشكل $IJKL$ متوازي أضلاع.

أنشطة

نشاط 1 معادلة أسطوانة ومعادلة مخروط

❶ معادلة أسطوانة

لتكن A النقطة التي إحداثياتها $(0,0,7)$ في معلم متجانس معطى في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نتأمل **الأسطوانة المولّدة** من دوران الضلع $[BC]$ من المستطيل $OABC$ حول المستقيم (OA) حيث $AB = 3$. ولتكن M نقطة متحولة من الأسطوانة، و H مسقطها القائم على القطعة المستقيمة $[OA]$.



① نفترض أنّ $M(x,y,z)$. ما إحداثيات النقطة H؟ أثبت أنَّ إحداثيات M تُحقّق العلاقتين:

$x^2+y^2=9$ و $0 \le z \le 7$.

② بالعكس، إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطةً من الفراغ تُحقق إحداثياتها $x^2+y^2=9$ و $0 \le z \le 7$. فأثبت أنَّ $MH = 3$، واستنتج أنَّ M تقع على الأسطوانة.

النتيجة: معادلة هذه الأسطوانة هي $x^2+y^2=9$ و $0 \le z \le 7$.

③ أيُّ النّقاط الآتية تقع على الأسطوانة $D(3,0,3)$ و $E(\sqrt{3},\sqrt{6},4)$ و $F(1,3,1)$؟

④ a. جد معادلة للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{j})$ وقاعدتها الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

b. أعد السؤال ④ a. في حالة مركز قاعدة الأسطوانة هو النقطة $Q(0,8,0)$.

⑤ جد معادلة الأسطوانة التي محورها $(O,\vec{i})$ ومركز قاعدتها $T(3,0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

⑥ صِفْ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققّ إحداثياتها العلاقات

$x^2+y^2=25$ و $1 \le z \le 4$.

الحل

① إن احداثيات H هي $(0,0,z)$ لأنها نقطة من المحور OZ. عندما تتحول M على سطح الأسطوانة فإن المسافة MH تبقى ثابتة وقيمتها (3)، وهذا يكافئ $\sqrt{x^2+y^2+0^2}=3$ أو $x^2+y^2=9$ وبما أن M نقطة من الأسطوانة المولدة بالضلع $[BC]$ فإن H نقطة من المسقط القائم لـ $[BC]$ على OZ أي H نقطة من $[OA]$ وبالتالي $z_O \leq z \leq z_A$ وهذا يكافئ أن $0 \leq z \leq 7$.

② لتكن النقطة $M(x,y,z)$ من الفراغ تحقق $x^2+y^2=9$ و $0 \leq z \leq 7$. إنّ مسقط M على OZ هو $H(0,0,z)$ ويحقق $MH^2=x^2+y^2+0=9$ أي $MH=3$ وبالتالي فإن M تقع الضلع $[BC]$ من المستطيل $OABC$ حيث $B=(x,y,7)$ و $C(x,y,0)$، في أحد أوضاعه عندما يدور حول (OA). إذن M نقطة من الأسطوانة، وأن معادلة الأسطوانة هي $x^2+y^2=9$ و $0 \leq z \leq 7$.

③ النقطة D تحقق $x_D^2+y_D^2=9+0=9$ وتحقق $0 \leq z_D=3 \leq 7$ ومنه فإن D تقع على الأسطوانة (لأنها تحقق معادلة الأسطوانة) .

النقطة E تحقق $x_E^2+y_E^2=6+3=9$ كما إن $0 \leq z_E=4 \leq 7$ وبالتالي E تقع على الأسطوانة .

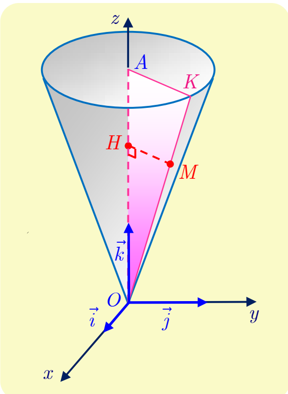
النقطة F لا تقع على الأسطوانة لأن $x_F^2+y_F^2 \neq 9$.

④ a. معادلة الأسطوانة هي $x^2+z^2=4$.

b. معادلة الأسطوانة هي $x^2+z^2=4$.

⑤ معادلة الأسطوانة هي $y^2+z^2=6$.

⑥ مجموعة النقاط M هي أسطوانة محورها OZ ونصف قطرها (5) ومركزي قاعدتيها هما $O(0,0,1)$ و $O'(0,0,4)$.



❷ معادلة مخروط

لتكن A النقطة التي إحداثياتها $(0,0,5)$ في معلم متجانس معطى في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. لنتأمل المخروط المولّد من دوران الضلع $[OK]$ من المثلث OAK حول (OA) مع $AK=2$.

① لتكن M نقطة من المخروط، و H مسقطها القائم على القطعة $[OA]$.

a. أثبت أنَّ $\frac{MH}{OH}=\frac{2}{5}$ ، ثمَّ $MH^2=\frac{4}{25}OH^2$.

b. اكتب المساواة السابقة بدلالة إحداثيات M ولتكن (x,y,z). وأثبت أنّه إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطةً من المخروط، كان $x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$ و $0 \leq z \leq 5$.

② بالعكس، لتكن $M(x,y,z)$ نقطةً من الفراغ تُحقق إحداثياتها العلاقات

$x^2+y^2-\dfrac{4}{25}z^2=0$ و $0\le z\le 5$.

أثبت أنه إذا كان $z\neq 0$، كان $\dfrac{MH}{OH}=\dfrac{2}{5}$. واستنتج أنَّ M تقع على المخروط. لا تنسَ حالة $z=0$.

النتيجة : معادلة هذا المخروط هي $x^2+y^2-\dfrac{4}{25}z^2=0$ مع $0\le z\le 5$.

③ عيّن من بين النقاط الآتية، تلك التي تقع على المخروط، مبرّراً إجابتك :

$Q(2,0,5)$ و $R(-2,1,5)$ و $S(1,1,3)$ و $T\left(2,2\sqrt{3},10\right)$

④ اكتب معادلةً للمخروط الذي رأسه O ومحوره $\left(O,\vec{i}\right)$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها 3.

الحل

① .a المثلثان OAK و OHM متشابهان وبالتالي فإن أضلاعهما متناسبة ومنه $\dfrac{OH}{OA}=\dfrac{MH}{AK}$ وهذا يكافئ $\dfrac{OH}{5}=\dfrac{MH}{2}$ وتكافئ $\dfrac{2}{5}=\dfrac{MH}{OH}$ وبالتالي $MH=\dfrac{2}{5}OH$ ومن ثم $MH^2=\dfrac{4}{25}OH^2$

.b إذا فرضنا $M(x,y,z)$ فإن $H(0,0,z)$ ومنه $OH^2=z^2$ ، $MH^2=x^2+y^2$ وبالتالي فالعلاقة $MH^2=\dfrac{4}{25}OH^2$ تكافئ $x^2+y^2=\dfrac{4}{25}z^2$ وتكافئ $x^2+y^2-\dfrac{4}{25}z^2=0$ مع $0\le z\le 5$

② لدينا $M(x,y,z)$ و $H(0,0,z)$ و $O(0,0,0)$ ومنه $MH=\sqrt{x^2+y^2}$ و $OH=z$ (لأن $z\ge 0$) وبالتالي عندما $0<z<5$ فإن $\dfrac{2}{5}=\dfrac{\frac{2}{5}z}{z}=\dfrac{\sqrt{\frac{4}{25}z^2}}{z}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=\dfrac{MH}{OH}$ وبالتالي فإن $\dfrac{AK}{OA}=\dfrac{MH}{OH}$ أو $\dfrac{OH}{OA}=\dfrac{MH}{AK}$ وبالتالي فلابد أن النقطة M تقع على الضلع $[OK]$ وهذا يعني أنها تقع على المخروط .

وفي حالة $z=0$ فإن H تنطبق على O وهذا بدوره يعني انطباق M على O و O هي نقطة من المخروط وضوحاً. نستنتج أنَّ معادلة المخروط هي $x^2+y^2-\dfrac{4}{25}z^2=0$ مع $0\le z\le 5$

③ نلاحظ أن $0\le z_Q=5\le 5$ و ${x_Q}^2+{y_Q}^2-\dfrac{4}{25}{z_Q}^2=0$ ومنه Q نقطة من المخروط ، بينما R و S و T لا تقع على المخروط .

④ معادلة المخروط هي $y^2+z^2-\dfrac{9}{16}x^2=0$ مع $0\le x\le 4$.

تمرينات ومسائل

1 $ABCD$ رباعي وجوه. فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$ و O منتصف $[IJ]$.

① املأ الفراغ : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\cdots+\overrightarrow{CD}$. واستنتجْ أنَّ

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

② بسِّطْ كلّاً من $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$ و $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$. استنتج أنَّ

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$$

③ لماذا $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ و $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$؟ استنتجْ أنَّ

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

④ لتكن K منتصف $[AD]$، و L منتصف $[BC]$. أثبت أنّ $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
استنتج أنَّ $ILJK$ متوازي أضلاع.

الحل

① استناداً إلى علاقة شال نجد $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}$، وبتطبيقها مرة ثانية نجد $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}$ ومنه $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

② إنّ $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{BD}$ وبجمع العلاقتين طرفا لطرف نجد:

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$

فينتج $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$.

③ هذه قاعدة متوازي الأضلاع في جمع الأشعة ومنه نستنتج

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}=2(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ})=\vec{0}$$

④ $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ وبالمثل نجد $\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. إذن $\overrightarrow{LJ}=\overrightarrow{IK}$ والرباعي $ILJK$ متوازي الأضلاع.

2 $ABCD$ رباعي وجوه. وضِّعْ على شكلٍ النقاط الآتية:

① I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$.

② J مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(C,2)$ و $(D,1)$.

③ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,1)$.

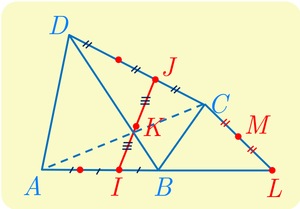
④ L مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$.

⑤ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$.

⑥ N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ و $(D,1)$.

الحل

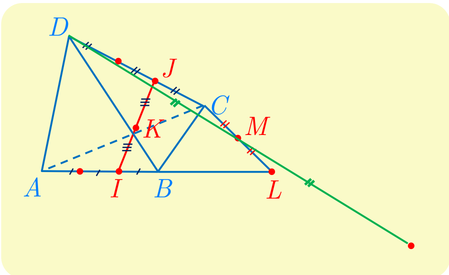
① بما أنّ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,2)$ فيتحقق $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



② بما أنّ J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,1)$ و $(C,2)$ فيتحقق $\overrightarrow{JD}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{DJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$.

③ بما أنّ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(D,1)$ و $(C,2)$ و $(A,1)$ و $(B,2)$ فينتج أنّ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(J,3)$ **(حسب الخاصة التجميعية)** ومنه K منتصف $[JI]$.

④ بما أنّ L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-2)$ فيتحقق $\overrightarrow{LA}-2\overrightarrow{LB}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{AL}=2\overrightarrow{AB}$.



⑤ بما أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ فينتج أنّ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(L,-1)$ و $(C,-1)$ **(حسب الخاصة التجميعية)** ومنه M منتصف $[CL]$.

⑥ بما أنّ N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ و $(D,1)$ فينتج أنّ N مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(M,-2)$ و $(D,1)$ ومنه $\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DM}$.

3 في المقولات الآتية، بيّن الصحيح من الخطأ معللاً إجابتك.

① ABC مثلّث. مهما كانت D من الفراغ كانت الأشعة $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطة خطياً.

② $ABCD$ رباعي الوجوه. لتكن I النقطة المعرّفة بالعلاقة $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$. عندئذ تقع I على أحد حروف رباعي الوجوه.

③ نتأمّل الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$. نفترض أنّ أي شعاعين منها ليسا مرتبطين خطياً، عندها تكون الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطة خطياً.

④ النقاط $A(5,1,3)$ و $B(2,-\sqrt{5},-2)$ و $C(3,-3,3)$ **متساوية البعد عن** $K(2,0,1)$.

⑤ النقاط $C(4,0,0)$ و $D(0,-2,0)$ و $E(1,2,6)$ و $F(5,1,1)$ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة التي طرفيها $A(4,-2,2)$ و $B(2,2,0)$.

الحل

① المقولة خطأ، فإذا كانت D في المستوي (ABC) كانت الأشعة مرتبطة خطياً، أما إذا كانت D خارج المستوي (ABC) كانت الأشعة غير مرتبطة خطياً.

② المقولة صحيحة لأنّه بالاستفادة من علاقة شال ومن العلاقة المعطاة نجد

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IB} &= 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}}_{\vec{0}} = \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

إذن I منتصف الحرف BD.

③ المقولة خطأ إذا قد تقع النقطة D في المستوي ABC وعندها تكون الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيّاً.

④ المقولة صحيحة ، لنحسب الأطوال AK, BK, CK فنجد $AK=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$ و $BK=\sqrt{0+5+9}=\sqrt{14}$ و $CK=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$ إذن النقطة K متساوية البعد عن النقاط A و B و C .

⑤ المقولة ليست صحيحة ، لأنّ أي نقطة من المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ تكون متساوية البعد عن طرفيها، ولكن $\overrightarrow{EA}(3,-4,-4)$ ومنه $EA=\sqrt{9+16+16}=\sqrt{41}$، ولدينا $\overrightarrow{EB}(1,0,-6)$ ومنه $EB=\sqrt{1+0+36}=\sqrt{37}$. إذن $EA\neq EB$.

لنتعلّم البحث معاً

4 إثبات وقوع نقاط في مستوٍ واحد

نتأمّل، في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط الآتية :

$A(2,0,1)$ و $B(1,-2,1)$ و $C(5,5,0)$ و $D(-3,-5,6)$ و $E(3,1,2)$.

أثبت انتماء النقاط A و B و C و D إلى مستوٍ واحد $\mathcal{P}$، وتبيّن إذا كانت النقطة E تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$.

نحو الحلّ

غيرُ مجدٍ هنا رسمُ شكل. إذ تكمن الفائدة الوحيدة من الرسم في العمل على إظهار نقاط تقع على استقامة واحدة. ولكن قد تبدو النقاط في شكلٍ فراغي على استقامة واحدة دون أن تكون كذلك. في حين تدعونا معرفة إحداثيات النقاط المفروضة إلى التعامل مع المسألة **تحليلياً**.

يتعلق الأمرُ بمعرفة إذا كانت النقاط A و B و C و D واقعةً في مستوٍ واحد. لهذا، نتحرّى وجود شعاعين غير مرتبطين خطياً من بين الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$.

1. احسب مركّبات كلٍّ من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$.
2. استنتج أنَّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، على سبيل المثال، غير مرتبطين خطياً.

✌ استناداً إلى المبرهنة 4، يؤول إقرار انتماء نقطة D إلى المستوي (ABC)، إلى وجود عددين حقيقيين a و b يحققان $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

1. اكتب المساواة الشعاعية السابقة بلغة الإحداثيات، وتحقّق أنك ستحصل على جملةٍ من ثلاث معادلات خطيّة بالمجهولين a و b هي:

$$\begin{cases} -a + 3b = -5 \\ -2a + 5b = -5 \\ -b = 5 \end{cases}$$

2. لحل مثل هذه الجملة من المعادلات، اختر جملة من معادلتين من هذه المعادلات الثلاث وحلها. هل العددان a و b اللذان وجدتهما حلولٌ للمعادلة الثالثة؟ أكمل.
3. تصرَّف بالمثل مع النقطة E.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

نلاحظ أن

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-2,0) \text{ و } \overrightarrow{AC} = (3,5,-1) \text{ و } \overrightarrow{AD} = (-5,-5,5)$$

نلاحظ أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما ليست متناسبة إذن A و B و C ليست على استقامة واحدة فهي تعين مستوياً (ABC) وتكون D نقطة من المستوي (ABC) اذا فقط واذا وجد عددان a و b يحققان $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ أي

$$(-5,-5,5) = a(-1,-2,0) + b(3,5,-1)$$

أي $(-5,-5,5) = (-a+3b, -2a+5b, -b)$ ومنه

$$\begin{cases} -a + 3b = -5 & ① \\ -2a + 5b = -5 & ② \\ -b = 5 & ③ \end{cases}$$

ومنه $b = -5$ وبالتعويض في ① نجد $a = -10$ ونلاحظ أن حل المعادلتين ① و ③ يحقق المعادلة ② إذن $\overrightarrow{AD} = -10\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$ وبالتالي فالأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً والنقاط A و B و C و D تقع في مستو واحد.

لنبحث الآن عن عددين α و β بحيث يكون $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ أي

$$(1,1,1) = \alpha(-1,-2,0) + \beta(3,5,-1)$$

ومنه

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 1 & ① \\ -2\alpha + 5\beta = 1 & ② \\ -\beta = 1 & ③ \end{cases}$$

من ③ تكون $\beta = -1$ وبالتعويض في ② نجد $\alpha = -3$ ونلاحظ أن الحل الناتج $(\alpha = -3, \beta = -1)$ لا يحقق المعادلة ① ومنه فالأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ غير مرتبطة خطياً والنقطة E لا تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$.

5 إثبات تقاطع مستقيمين

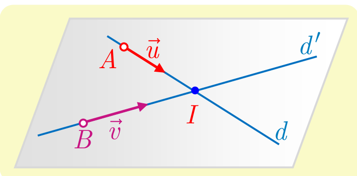
في معلمٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطتان $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$، والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$. d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجَّه بالشعاع $\vec{u}$، و d' هو المستقيم المار بالنقطة B والموجَّه بالشعاع $\vec{v}$. أثبت أنَّ المستقيمين d و d' متقاطعان، ثمَّ عيّن I نقطة تقاطعهما.

نحو الحلّ

ليس مفيداً، هنا، رسمُ شكل بالنقاط والأشعة والمستقيمات المفترضة. إذ قد يبدو مستقيمان في الفراغ متقاطعين، دون أن يكونا كذلك، لأنهما غير واقعين في مستوٍ واحد.

يتعلّق الأمر بإثبات تقاطع مستقيمين من الفراغ، إذن يجب إثبات أنّهما غير متوازيين ويقعان في مستوٍ واحد. وتدعونا معرفة إحداثيات النقاط ومركّبات الأشعة إلى التعامل مع المسألة **تحليلياً**.

1. أثبت أنَّ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.
2. ما قولك بشأن المستقيمين d و d'؟



يبقى إثبات وقوع المستقيمين d و d' في مستوٍ واحد. المستقيم d والنقطة B يعينان مستوياً $\mathcal{P}$ طالما B لا تقع على d. فلإثبات أنَّ d و d' يقعان في مستوٍ واحد، يكفي إثبات أنَّ الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطيّاً.

1. تحققْ، بذكر المبرهنة ذات الصلة، أنَّ المسألة تؤول إلى إثبات وجود عددين حقيقيين a و b يحققان $\overrightarrow{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
2. اكتب المساواة السابقة بلغة الإحداثيات، فتحصل على جملةٍ من ثلاث معادلات خطيّة بمجهولين.

3. اختر اثنتين من المعادلات الثلاث التي حصلت عليها، ثم حل الجملة المؤلّفة منهما. أيكون العددان الحقيقيان a و b اللذان وجدتهما حلولاً للمعادلة الثالثة؟ أتممْ.

لحساب إحداثيات $I(x,y,z)$، نقطة تقاطع المستقيمين d و d'. نسعى، بالتعامل شعاعياً، إلى التوثّق من أنَّ I تقع على كلٍّ من d و d'.

1. تحقّق من وجود عددين حقيقيين α و β يحققان $\overrightarrow{AI} = \alpha\vec{u}$ و $\overrightarrow{BI} = \beta\vec{v}$.
2. اكتب هاتين المساواتين بلغة الإحداثيات لتستنتج α و β ومن ثمَّ إحداثيات النقطة I.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

1. الشعاعان $\vec{u}(1,0-2)$ و $\vec{v}(2,1-3)$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة.
2. لما كان الشعاعان غير مرتبطين خطياً كان المستقيمان d و d' غير متوازيين.

النقطة B لا تقع على المستقيم d فرضاً، فالمستقيم d والنقطة B يعينان مستوياً $\mathcal{P}$. ولكي نثبت أن d و d' يقعان في مستوٍ واحد، نثبت أنّ الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

1. لنثبت أنّه يوجد عددان حقيقان a و b يحققان : $\overrightarrow{AB}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}$.
2. العلاقة الشعاعية تكافئ : $(0,-2,-2)=a(1,0-2)+b(2,1-3)$. ومنه جملة المعادلات

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 0+\ \ b=-2 \\ -2a-3b=-2 \end{cases}$$

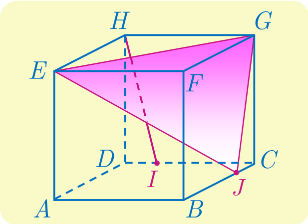
3. بالحل المشترك للمعادلتين الأولى والثانية نجد $b=-2$ و $a=4$، وبالتعويض في المعادلة الثالثة نجد أنها محققة. إذن يقع المستقيمان d و d' في مستوٍ واحد. وهما متقاطعان في نقطة I لأننا أثبتنا أنّ d و d' غير متوازيين .

لحساب إحداثيات $I(x,y,z)$، نستفيد من انتماء النقطة I إلى كلٍ من d و d' .

1. **لأنّ** $I\in d$ **يوجد عدد حقيقي** α **يحقق** $\overrightarrow{AI}=\alpha\cdot\vec{u}$. **ولأن** $I\in d'$ **يوجد عدد حقيقي** β **يحقق** $\overrightarrow{BI}=\beta\cdot\vec{v}$.
2. نستنتج إذن أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\alpha\vec{u}-\beta\vec{v}$ وهذا يقتضي أن يكون $\alpha=4$ و $\beta=2$ استناداً إلى الفقرة السابقة. إذن $\overrightarrow{AI}=4\vec{u}$. أو $(x-3,y+1,z-1)=4(1,0,-2)$. ومنه نجد أن $I(7,-1,-7)$.

6 التوازي في الفراغ

لنتأمّل المكعب $ABCDEFGH$. النقطة I من الحرف $[CD]$ تُحقّق المساواة $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$، والنقطة J من $[BC]$ تحقّق المساواة $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. أثبت أنَّ المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ).



نحو الحلّ

- لا يُظهرُ الشكل مستقيماً من المستوي (EGJ) موازياً (HI). إذ لو كان مستقيمٌ من المستوي (EGJ) موازياً (HI)، لتأكّد لنا أنَّ المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ). لنفكرْ إذن بالتعامل مع المسألة تحليلياً. نختار $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ معلماً للفراغ، لأنّه من السهل تعيين إحداثيات نقاط الشكل في هذا المعلم. عيّن في هذا المعلم إحداثيات النقاط G,E,J,I,H.
- لإثبات أنَّ المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ)، باستعمال الأشعة، يكفي، على سبيل المثال، إثبات أنَّ الأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ واقعة في مستوٍ واحد.

1. أثبت أنَّ هذا يقودنا إلى إثبات وجود عددين حقيقيين x و y يُحقّقان $\overrightarrow{HI} = x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{EJ}$
2. اكتب هذه المساواة الشعاعية بلغة الإحداثيات: ستحصل على جملةٍ من ثلاث معادلات بمجهولين.
3. اختر اثنتين من المعادلات الثلاث التي حصلت عليها، ثم حل الجملة المؤلّفة منهما. هل العددان الحقيقيان x و y اللذان وجدتهما حلول للمعادلة الثالثة؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

حلٌّ آخر

فيما سبق، لم نسعَ إلى إظهار مستقيمٍ في المستوي (EGJ) يوازي (HI)، فلجأنا إلى التعامل مع الإحداثيات. ولكنّ دراسة تقاطع المكعب مع المستوي (EGJ)، تظهرُ مستقيماً من هذا القبيل.

المستويان (EFG) و (ABC) متوازيان، والمستوي (EGJ) يقطعهما بفصلين مشتركين متوازيين.

1. ارسم الفصل المشترك للمستويين (EGJ) و (ABC)، ولتكن K نقطة تقاطعه مع (AB).
   بيّن لماذا $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ ؟ أثبت أنّ $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{HI}$.
2. ماذا تستنتج بشأن المستقيمين (HI) و (EK)؟ وكذلك بشأن المستقيم (HI) والمستوي (EGJ) ؟

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

نختار $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ معلماً في الفراغ ، فنجد إحداثيات النقاط G,E,J,I,H :

$$G(1,1,1), E(0,0,1), J(1,\tfrac{3}{4},0), I(\tfrac{1}{4},1,0), H(0,1,1)$$

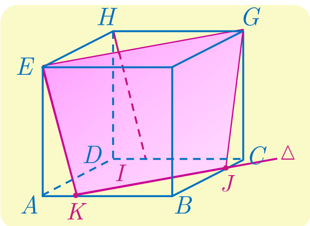
1. لنثبت أنّ الأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$ واقعة في مستوٍ واحد ، أي نثبت وجود عددين x و y يحققان العلاقة ① $\overrightarrow{HI}=x\,\overrightarrow{EG}+y\,\overrightarrow{EJ}$.

2. لدينا $\overrightarrow{HI}(\frac{1}{4},0,-1)$ و $\overrightarrow{EG}(1,1,0)$ و $\overrightarrow{EJ}(1,\frac{3}{4},-1)$ وبالتعويض في العلاقة ① نجد:

$$\begin{cases} x+y &= \frac{1}{4} \qquad (1)\\ x+\frac{3}{4}y &= 0 \qquad (2)\\ 0-y &= -1 \qquad (3)\end{cases}$$

3. وبحل المعادلتين الأولى والثانية نجد أنّ $y=1$ و $x=-\frac{3}{4}$ ومن المعادلة الثالثة لدينا $y=1$ وهذا يوافق الحل الناتج، إذن أصبح لدينا $\overrightarrow{HI}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{EJ}$ فالأشعة $\overrightarrow{EJ}$ و $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{HI}$ تقع في مستوٍ واحد ومنه (EGJ) يوازي (HI).

حلٌّ آخر:

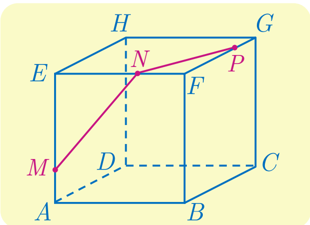


1. المستويان (EFG) و (ABC) متوازيان قطعناهما بمستوٍ (EGJ) فهو يحدد عليهما فصلين مشتركين متوازيين. وبالتالي (EG) يوازي Δ، حيث Δ مستقيم مار من J ويوازي (EG) أي يوازي (AC) ، ومنه Δ يقطع AB في نقطة K حيث $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

لدينا إذن $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE}$ ، إذن $\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{DI}-\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{EK}$.

2. نستنتج إذن أنّ $(HI)\parallel(EK)$، ولكنّ (EK) محتوى في المستوي (EJK) ومنه (HI) يوازي (EGJ).

7 مقطعُ مكعب بمستوٍ



$ABCDEFGH$ مكعب. M و N و P ثلاث نقاط من الأحرف $[AE]$ و $[EF]$ و $[FG]$ بالترتيب، كما في الشكل المجاور. يُطلب إيجاد مقطع المكعب بالمستوي (MNP).

نحو الحلّ

نريد تعيين تقاطع المستوي (MNP) مع وجوه المكعب. ولكن بمَ نبدأ؟ نعلمُ أنّه عندما يقطع المستوي (MNP) وجهين متقابلين من المكعب، وهما في مستويين متوازيين، يكون الفصلان المشتركان الناتجان متوازيين.

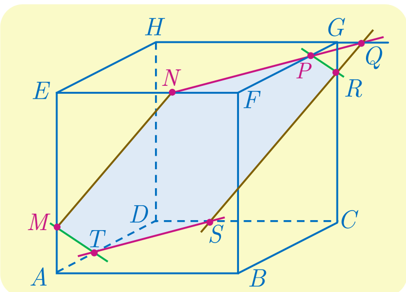
1. أيُّ وجه من وجوه المكعب يتقاطع مع (MNP) ويوازي (MN)؟
2. أيُّ وجه من وجوه المكعب يتقاطع مع (MNP) ويوازي (NP)؟
3. أيَّ وجه تختار إذن لتتعامل معه؟

لنبدأ، على سبيل المثال، بالبحث عن تقاطع المستوي (MNP) مع الوجه $(DCGH)$. لإيجاد الفصل المشترك لهذين المستويين، يكفي إيجاد نقطة مشتركة بينهما. لنبحث إذن عن نقطة من هذا القبيل.

1. لماذا نقطة تقاطع (PN) و (HG) ملائمة؟ ارمزْ إلى تلك النقطة بالرمز Q.
2. المستقيم المار بالنقطة Q موازياً المستقيم (MN)، يقطع (CG) في R ويقطع (DC) في S. حدِّدْ الفصل المشترك للمستوي (MNP) والوجه $(DCGH)$.

1. لِماذا يفيد المستقيم المار بالنقطة S موازياً (PN)، في تحديد الفصل المشترك للمستوي (MNP) والوجه $(ABCD)$؟ لتكن T نقطة تقاطعه مع $[AD]$.
2. ما الفصل المشترك للمستوي (MNP) مع كلٍّ من الوجهين $(BCGF)$ و $(ADHE)$؟

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.



الحل

1. (MNP) يقطع $(DCGH)$ بفصل مشترك يوازي MN.
2. (MNP) يقطع $(ABCD)$ بفصل مشترك يوازي NP.
3. نختار مثلاً $(DCGH)$.

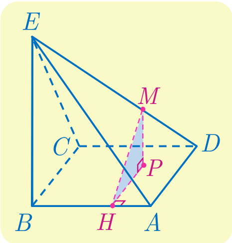
لتعيين الفصل المشترك للمستويين (MNP) و $(DCGH)$ نحتاج إلى نقطة مشتركة بينهما. لتكن Q نقطة تقاطع المستقيمين (HG) و (PN) فهي نقطة مشتركة بين المستويين (MNP) و $(DCGH)$. فيكون الفصل المشترك المطلوب هو المستقيم المار بالنقطة Q ويوازي (MN)، وهو يقطع (CG) في R، ويقطع (CD) في S، فالفصل المشترك هو (SR).

S نقطة مشتركة بين المستويين (MNP) و $(ABCD)$ فالمستقيم المار بالنقطة S موازياً (NP) هو الفصل المشترك للمستويين السابقين فيقطع (AD) في T، فالفصل المشترك هو (ST).

2. الفصل المشترك للمستويين (MNP) و $(BCGF)$ هو المستقيم (PR).

الفصل المشترك للمستويين (MNP) و $(ADHE)$ هو المستقيم (MT).

8 حسابُ مسافة



$ABCDE$ هرمٌ رأسه E وقاعدته مربع. $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$، $EB = 4\sqrt{2}$ و $AB = 4$. M نقطة من القطعة $[ED]$ تُحقّق $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$. لتكن P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$ و H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB). احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$.

نحو الحلّ

☝ تدعونا مختلف أوضاع التعامد والتساوي في الشكل إلى التعامل تحليلياً مع هذا التمرين. يحضرنا، هنا، المعلم المتجانس $(B;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\overrightarrow{BA} = 4\vec{i}$ و $\overrightarrow{BC} = 4\vec{j}$ و $\overrightarrow{BE} = 4\sqrt{2}\vec{k}$.

1. جد، في هذا المعلم، إحداثيات كلٍّ من النقطتين D و E.
2. حدِّد إحداثيات النقطة M.

✌ P هي المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$، فتُستنتج إحداثيات P، بسهولة، من إحداثيات النقطة M. وبالمثل، تُستنتج إحداثيات النقطة H من إحداثيات P.

1. حدِّد إحداثيات كلٍّ من النقطتين P و H.
2. احسب طول $[MH]$.

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝ لدينا المعلم المتجانس $(B;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عندئذٍ تكون:

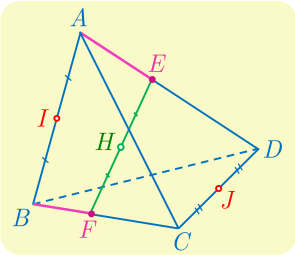
1. إحداثيات $D(4,4,0)$ و $E(0,0,4\sqrt{2})$.
2. نفترض النقطة $M(x,y,z)$ من ED تحقق $3\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DE}$ ومنه

$3(x-4,y-4,z-0)=(-4,-4,4\sqrt{2})$ فينتج $z=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ و $y=\frac{8}{3}$ و $x=\frac{8}{3}$ ومنه $M\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

✌ 1. P هي المسقط القائم للنقطة M على $(ABCD)$ إذن $P\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},0\right)$ فيكون $H\left(\frac{8}{3},0,0\right)$.

2. حسب فيثاغورث في المثلث MPH القائم في P ، حيث $MP=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ و $PH=\frac{8}{3}$ نجد

$$MH = \sqrt{\frac{64}{9}+\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$



9 $ABCD$ رباعي وجوه، و a عددٌ حقيقي. I و J هما، بالترتيب، منتصفا $[AB]$ و $[CD]$. E و F نقطتان تحقّقان، العلاقتين: $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC}$. وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

أثبت أنَّ I و J و H تقع على استقامة واحدة.

نحو الحلّ

نهدف إلى إثبات وقوع ثلاث نقاط من الفراغ على استقامة واحدة. تدعونا الفرضيات التي تحدد نقاط الشكل إلى استعمال مركز الأبعاد المتناسبة أداةً للإثبات. يكفي إذن، على سبيل المثال، إثبات أنَّ H هي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين I و J. وقد أسندنا إليهما ثقلين مناسبين.

1. تيقّن أنَّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a)$ و (D,a)، وأنَّ F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-a)$ و (C,a).
2. بالاستفادة من الخاصّة التجميعيّة، أثبت أنَّ H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-a)$ و $(B,1-a)$ و (C,a) و (D,a).
3. استنتج أنَّ النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لإثبات أنّ النقاط I و J و H على استقامة واحدة ، يكفي أن نثبت أنّ H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين I و J وقد أسند لها ثقلين مناسبين.

1. من الفرض لدينا $\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$ ومنه $(1-a)\overrightarrow{EA}+a\overrightarrow{ED}=\vec{0}$، إذن E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a)$ و (D,a).

ومن الفرض لدينا $\overrightarrow{BF}=a\,\overrightarrow{BC}$ ومنه $(1-a)\overrightarrow{FB}+a\overrightarrow{FC}=\vec{0}$، إذن F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-a)$ و (C,a).

2. ولما كان H منتصف $[FE]$ كان H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,1)$ و $(F,1)$. وحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-a)$ و $(B,1-a)$ و (C,a) و (D,a).

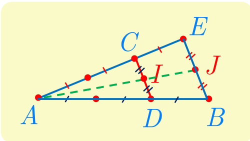
3. ولما كان I منتصف $[AB]$ كان I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-a)$ و $(B,1-a)$ ولما كان J منتصف $[CD]$ كان J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,a) و (C,a). وحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-a)$ و $(B,1-a)$ و (C,a) و (D,a)، هي نفسها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2a)$ و $(J,2a)$، فالنقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة وهو المطلوب.

10 A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة من الفراغ. و D و E نقطتان تحققان:
$3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$.

① أثبت أنَّ النقاط A و B و C و D و E تقع في مستوٍ واحد.

② لتكن I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$. أثبت أنَّ A و I و J تقع على استقامة واحدة.

الحل



① لدينا $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ إذن النقاط A و B و D تقع على استقامة واحدة ومنه D تقع على المستقيم (AB) المحتوى في (ACB). وبالمثل من العلاقة $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$ نجد أن E تقع على المستقيم (AC) المحتوى في (ACB). وبالتالي النقاط A و B و C و D و E تقع في مستوٍ واحد هو (ACB).

② I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$، إذن

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AE} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \tfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\right) = \tfrac{4}{3}\overrightarrow{AJ} \end{aligned}$$

ومنه $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$، فالنقاط أنَّ A و I و J تقع على استقامة واحدة.

11 $ABCD$ رباعي وجوه. و E و F و G هي نظائر A بالنسبة إلى منتصفات $[BC]$ و $[CD]$ و $[DB]$ بالترتيب.

① أثبت أنَّ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$.

② استنتج أنَّ للقطعتين $[DE]$ و $[FB]$ المنتصف نفسه.

③ أثبت أنَّ المستقيمات (BF) و (DE) و (CG) متلاقية في نقطة واحدة.

الحل

① استناداً إلى خواص متوازي الأضلاع $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. ومنه باستعمال علاقة شال:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DF}$$

② إذن $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DF}$، والرباعي $BEFD$ متوازي الأضلاع، فقطراه $[DE]$ و $[FB]$ متناصفان.

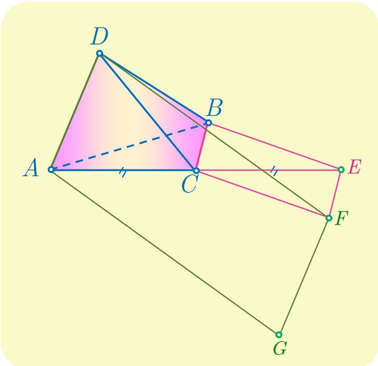
③ نجد بالمثل أنّ $[DE]$ و $[CG]$ متناصفان.

12 $ABCD$ رباعي وجوه. و E هي نظيرة A بالنسبة إلى C، و F و G هما النقطتان اللتان تجعلان $EBCF$ و $FDAG$ متوازيي الأضلاع.

① أثبت أنَّ $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$.

② استنتج أنَّ $\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$، ثُمَّ أنَّ النقاط B و C و D و G تقع في مستوٍ واحد.

الحل



① عملاً بالفرض يمكن أن نكتب

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG}\end{aligned}.$$

② لدينا $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{DC}$ لأن C منتصف $[AE]$ واستناداً إلى ① نجد

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DG} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} \\ &= 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

أي كُتب الشعاع $\overrightarrow{DG}$ عبارة خطية بدلالة الشعاعين $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DB}$ فالنقاط B و C و D و G تقع في مستوٍ واحد.

13 نتأمّل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$.

① أثبت أنَّ النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.

② عند أية قيمة للوسيط m تنتمي النقطةُ $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC)؟

③ ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد؟

الحل

① لدينا في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا $\overrightarrow{AB}(-2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$ ، فالشعاعان غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة، والنقاط A و B و C ليست على استقامةٍ واحدة ، فهي تشكل مستوياً.

② تنتمي $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC) إذا وجد عددان حقيقيان a و b يحققان العلاقة :

$\overrightarrow{AM} = a\cdot\overrightarrow{AB} + b\cdot\overrightarrow{AC}$، أي $(m-3,-1,2) = a(-2,0,-1) + b(0,-1-3)$ ومنه

$$\begin{cases} m-3 = -2a \\ -1 = -b \\ 2 = -a-3b \end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد $b=1$ ، و $a=-5$ ومن ثَمَّ $m=13$.

③ تقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد إذا وجد عددان حقيقيان α و β يحققان العلاقة $\overrightarrow{AD} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB} + \beta \cdot \overrightarrow{AC}$ ومنه

$$\begin{cases} x-3=-2\alpha & ① \\ y-2=-\beta & ② \\ 2=-\alpha-3\beta & ③ \end{cases}$$

وبالحل المشترك نجد $\beta=-y+2$ و $\alpha=\dfrac{-x+3}{2}$ وبالتعويض في ③ نجد $x+6y=19$.

14 مجموعة نقاط

لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققُ إحداثياتها العلاقة : $x-2y+3z-5=0$.

① أثبت أنَّ النقاط $A(7,1,0)$ و $B(5,0,0)$ و $C(2,0,1)$ تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{E}$.

② أثبت أنَّ النقاط A و B و C تحدِّد مستوياً $\mathcal{P}$.

③ .a أثبت أنَّ مركّبات الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $(2y-3z,y,z)$.

.b استنتج أنَّ $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$. ماذا يمكنك أن تستنتج من ذلك؟

④ بالعكس، أثبت أنَّ أية نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي $\mathcal{P}$ تحقق المعادلة:

$$x-2y+3z-5=0$$

ما هي المجموعة $\mathcal{E}$؟

الحل

① مجموعة النقاط $\mathcal{E}$ هي نقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقة $x-2y+3z-5=0$.
نلاحظ أنّ إحداثيات النقاط A و B و C تحقق العلاقة المعطاة، إذن النقاط A و B و C هي نقاط من المجموعة $\mathcal{E}$.

② لما كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}(-2,-1,0)$ و $\overrightarrow{AC}(-5,-1,1)$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة، كانت النقاط A و B و C غير واقعة على استقامةٍ واحدة ، فهي تحدد مستوياً $\mathcal{P}$.

③ .a من جهة أولى $\overrightarrow{BM}=(x-5,y,z)$، ولأنّ النقطة M من $\mathcal{E}$ فإنّ $x-2y+3z-5=0$ ومنه $x-5=2y-3z$، إذن $\overrightarrow{BM}=(2y-3z,y,z)$.

.b لما كان $(2y-3z,y,z)=y(2,1,0)+z(-3,0,1)$، كان $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$. ومنه نستنتج أنّ النقاط A و B و C و M تقع في مستوٍ واحد $\mathcal{P}$.

④ وبالعكس. إذا كانت النقطة M تقع في المستوي $\mathcal{P}$، يوجد عددان حقيقيان α و β يحققان العلاقة: $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$. ولدينا $\overrightarrow{AM}=(x-7,y-1,z)$، إذن

$$(x-7,y-1,z)=\alpha(-2,-1,0)+\beta(-5,-1,1)$$

هذا يكافئ

$$\begin{cases} x-7=-2\alpha-5\beta & ① \\ y-1=-\alpha-\beta & ② \\ z=\beta & ③ \end{cases}$$

بحساب α و β من المعادلتين الأخيرتين ثمّ بالتعويض في الأولى نجد $x-7=2(y+z-1)-5z$ أو $x-2y+3z-5=0$، إذن M تنتمي إلى $\mathcal{E}$. وهكذا نكون قد أثبتنا أنّ $\mathcal{P}=\mathcal{E}$.

15 نتأمّل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيم d المارّ بالنقطة $A(2,0,5)$ والموجَّه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$، والمستقيم d' المارّ بالنقطة $B(2,2,-1)$ والموجَّهٌ بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$. هل d و d' متقاطعان؟ في حالة الإيجاب، أوجد نقطة تقاطعهما.

الحل

الشعاعان $\vec{u}(2,5,-1)$ و $\vec{v}(1,2,1)$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة، إذن المستقيمان d و d' غير متوازيين ، لنرى هل يقعان في مستوٍ واحد ؟ يقع المستقيمان d و d' في مستوٍ واحد إذا وجد عددان حقيقيان α و β يحققان $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$، أي $(0,2,-6)=\alpha(2,5,-1)+\beta(1,2,1)$ وهذا يكافئ

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 & ① \\ 5\alpha+2\beta=2 & ② \\ -\alpha+\beta=-6 & ③ \end{cases}$$

بحل المعادلتين ① و ③ نجد $\alpha=2$ و $\beta=-4$ ، وبتعويض هذه النتائج في المعادلة ② نجدها محققة إذن $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}-4\vec{v}$، والمستقيمان d و d' يقعان في مستوٍ واحد وغير متوازيين، فهما متقاطعان في نقطة I. تُحقّق $\overrightarrow{AI}=a\cdot\vec{u}$ و $\overrightarrow{BI}=b\cdot\vec{v}$، إذن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=a\vec{u}-b\vec{v}$، ولكن وجدنا أنّ هذه المساواة تقتضي أن يكون $a=2$ و $b=4$. ومن المساواة $\overrightarrow{AI}=2\cdot\vec{u}$ نستنتج أنّ إحداثيات $I(x,y,z)$ تحقق $(x-2,y,z-5)=(4,10,-2)$، أي $I(6,10,3)$.

16 جِدْ على محور الفواصل نقطةً C متساوية البُعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$.

الحل

لأنّ النقطة C تقع على محور الفواصل كانت $C(x,0,0)$. ولأنّ C متساوية البعد عن النقطتين A و B كان $CA=CB$ ومنه $CA^2=CB^2$ أي $(x-2)^2+1+9=x^2+25+1$. ومنه $x=-3$ ، فإحداثيات C هي $(-3,0,0)$.

17 ليكن α عدداً حقيقياً، ولنتأمّل النقاط الثلاث $A(3,1,-3)$ و $B(-1,5,-3)$ و $C(-1,1,\alpha)$. أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين، أيّاً كان α. أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع ؟

الحل

لدينا

$$\begin{aligned} CB &= \sqrt{0^2+4^2+(-3-\alpha)^2} &&= \sqrt{25+\alpha^2+6\alpha} \\ CA &= \sqrt{4^2+0+(3-\alpha)^2} &&= \sqrt{25+\alpha^2+6\alpha} \end{aligned}$$

وهكذا نجد أنه مهما تكن α من $\mathbb{R}$ فإن $CA = CB$ والمثلث متساوي الساقين رأسه C.

حتى يكون هذا المثلث متساوي الأضلاع يجب أن يكون $CB = AB$ أي

$$\sqrt{25+\alpha^2+6\alpha} = \sqrt{4^2+4^2+0}$$

وبالإصلاح نجد $\alpha^2+6\alpha-7=0$ ولهذه المعادلة حلان $\alpha=1$ و $\alpha=-7$. إذن يمكن أن يكون المثلث متساوي الأضلاع عند قيمتين للعدد الحقيقي α.

18 نتأمّل النقطتين $A(2,1,0)$ و $B(-1,4,2)$.

① أوجد نقطةً متساوية البعد عن A و B.

② أوجد العدد الحقيقي λ الذي يجعل النقطة $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A و B.

③ أثبت أنَّ « $M(x,y,z)$ نقطةٌ من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ » إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط « $3x-3y-2z+8=0$ ».

الحل

① خذ N منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ أي $N\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1\right)$.

② انطلاقاً من $CB^2 = CA^2$ نجد $2^2+3^2+(\lambda-2)^2 = 1^2+0+\lambda^2$ أي $\lambda = 4$.

③ أي نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ تكون متساوية البعد عن طرفيها وبالعكس إذا كانت M متساوية البعد عن A و B فإنها تقع على المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ وبالتالي $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذا وفقط إذا تحقق $BM = AM$ أي $BM^2 = AM^2$ ومنه

$$(x+1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+z^2$$

وبإصلاح المعادلة نجد

$$3x-3y-2z+8=0.$$

19 بُعد نقطة عن مستقيم

نتأمّل النقاط $A(2,3,0)$ و $B(2,3,6)$ و $M(4,-1,2)$. نهدف إلى حساب بُعد M عن المستقيم (AB).

① أثبت أنَّ M لا تقع على المستقيم (AB).

② أثبت أنَّ لكلِّ نقطة K من المستقيم (AB) إحداثيات من النمط $(2,3,z)$.

③ احسب MK^2 بدلالة z.

④ عند أية قيمة للعدد z يكون MK أصغر ما يمكن؟ حدِّدْ إذن بُعد M عن (AB).

الحل

① لدينا $\overrightarrow{MB}(2,-4,-4)$ و $\overrightarrow{MA}=(2,-4,2)$ نلاحظ أن $\frac{-4}{2}\neq\frac{-4}{-4}=\frac{2}{2}$ فالشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ غير مرتبطان خطياً، ولا تقع النقاط A و M و B على استقامة واحدة ، أي لا تقع M على المستقيم (AB).

② K نقطة من المستقيم (AB)، إذا وفقط إذا كانت مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-t)$ و (B,t) حيث t عدد حقيقي ما. فإذا كانت (x,y,z) إحداثيات K كان

$$(x,y,z)=(1-t)(2,3,0)+t(2,3,6)=(2,3,6t)$$

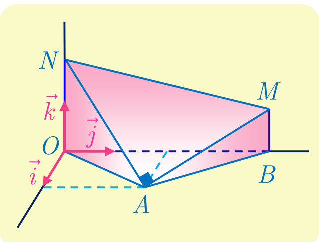
أي إنّ إحداثيات K من الصيغة $(2,3,z)$.

③ لدينا

$$MK^2=(4-2)^2+(-4)^2+(2-z)^2=(z-2)^2+20$$

④ أصغر قيمة للمسافة MK هي $2\sqrt{5}$ ويبلغها عندما $z=2$. وعليه بعد M عن المستقيم (AB) يساوي $d=2\sqrt{5}$.

20 المسافات وحجم هرم



m و n عددان حقيقيان موجبان يُحقّقان $n>m>0$. نتأمّل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$ و $B(0,6,0)$ و $M(0,6,m)$ و $N(0,0,n)$ في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عيّن m و n ليكون المثلث MAN قائماً في A وحجمُ المجسَّم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$.

الحل

لنحسب أطوال أضلاع المثلث NAM . لدينا

$$\begin{aligned} NA^2 &= 3+9+n^2 &&= n^2+12 \\ MA^2 &= 3+9+m^2 &&= m^2+12 \\ NM^2 &= 0+36+(m-n)^2 &&= 36+(m-n)^2 \end{aligned}$$

يكون المثلث NAM قائماً في A ، إذا تحقق الشرط $NM^2 = NA^2 + MA^2$ وهذا يكافئ:

$$m \cdot n = 6 \qquad ①$$

ولما كان حجم الهرم يساوي $5\sqrt{3}$ فإنّ $V = \frac{1}{3} \cdot S(OBMN) \cdot h = 5\sqrt{3}$ ولكن

$$S(OBMN) = \frac{m+n}{2} \cdot 6 = 3(m+n)$$

ومنه $5\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 3(m+n) \cdot \sqrt{3}$ أي

$$m + n = 5 \qquad ②$$

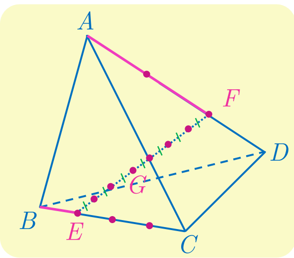
وبحل ① و ② حلاً مشتركاً نجد $m=2$ و $n=3$.

21 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$ ، ونقطتين E و F معرفتين وفق $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

أثبت أنَّ G ، مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$ ، يقع على $[EF]$.

ثُمّ عيِّن النقطة G على $[EF]$.

الحل



إنّ E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3)$ و $(C,1)$ لأنّ $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. و F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(D,2)$ لأنّ $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

إذن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,4)$ و $(F,3)$ ، ومنه G يقع على (EF) و $\overrightarrow{EG} = \frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$.

22 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. ونقطتين I و J معرفتين وفق $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{JC} = 2\overrightarrow{JD}$.

① أيمكن أن تنطبق إحدى النقطتين I و J على الأخرى؟

② أثبت أنه، أياً كانت النقطة M من الفراغ، كان :

$$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MI} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}$$

③ جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right\|$$

الحل

① لدينا $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ ومنه $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{IB}$ أي $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BA}$، وبطريقة مماثلة نجد أن $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{JD}$.
لو افترضنا أنّ $I=J$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{CD}$، وبالجمع نجد $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$، أو $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$ وأخيراً $2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}$. إذن تقع النقاط A و B و C و D في مستو واحد وهذا خُلفٌ. وعليه لا يمكن أن تتطبق النقطتان I و J.
② لما كانت B منتصف $[IA]$ كانت مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,1)$ و $(A,1)$ ومنه $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MB}$ إذن $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$، وكذلك D هي منتصف $[JC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(C,1)$ و $(J,1)$ ومنه $\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MD}$ إذن $\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MC}$.
③ لدينا $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG}$ حيث G مركز ثقل المثلث BCD. إذن

$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{GA}$$

ومنه، الشرط

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$$

يكافئ $\left\|3\overrightarrow{GA}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|$ أي $\left\|\overrightarrow{GA}\right\|=\left\|\overrightarrow{MG}\right\|$ ومنه تحقق M الشرط المعطى إذا وفقط إذا انتمت إلى الكرة التي مركزها G ونصف قطرها $\left\|\overrightarrow{GA}\right\|$.

23 لدينا في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتان $A(2,-1,2)$ و $B(-2,1,-2)$. نقرن بكل نقطة $M(x,y,z)$، من الفراغ، المقدار $f(M)=MA^2+MB^2$.
① احسب $f(M)$ بدلالة x و y و z.
② أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $f(M)=18$ مؤلفة من نقطة واحدة.
③ أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقّق $f(M)=30$ كرةٌ مركزها O. أوجد نصف قطرها.
④ أثبت أنَّه، وفق شرط على العدد الحقيقي k، مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M)=k$ هي كرة مركزها O.

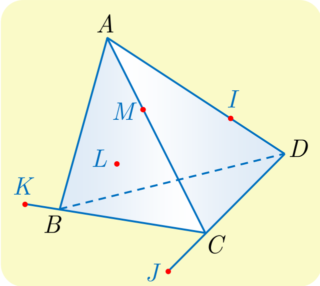
الحل

① لدينا $MA^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$ و $MB^2=(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$
ومنه $f(M)=MA^2+MB^2=2x^2+2y^2+2z^2+18$
② $f(M)=18$ إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+z^2=0$ أي $(x,y,z)=(0,0,0)$.
③ $f(M)=30$ إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+z^2=6$ أي إذا وفقط إذا انتمت M إلى الكرة التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

④ $f(M)=k$ إذا وفقط إذا كان $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(k-18)$ ومنه عندما $k>18$ نجد أن مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M)=k$ هي كرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{\frac{1}{2}(k-18)}$.

24 نتأمّل رباعي الوجوه $ABCD$.

① M نقطةٌ من الحرف $[AC]$. جد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوي (BCD).

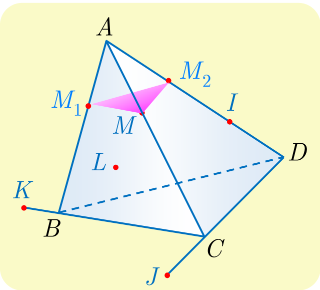


② I نقطةٌ من الحرف $[AD]$، و J نقطةٌ من المستقيم (CD)، و K نقطةٌ من المستقيم (BC). عيّن مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (IJK).

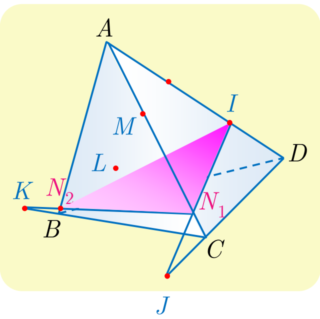
③ L نقطةٌ من المستوي (ABD). أوجد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (KJL).

الحل

① ليكن $\mathcal{P}$ المستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوي (BCD) فيكون الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و (ACD) موازياً للمستقيم (CD) وكذلك يكون الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و (ABC) موازياً للمستقيم (BC). ننشئ من M مستقيمين (MM_1) يوازي (BC) و (MM_2) يوازي (CD) فيكون $\mathcal{P}$ المستوي الذي يعينه المستقيمان المتقاطعان (MM_1) و (MM_2). والمقطع المطلوب هو المثلث MM_1M_2.

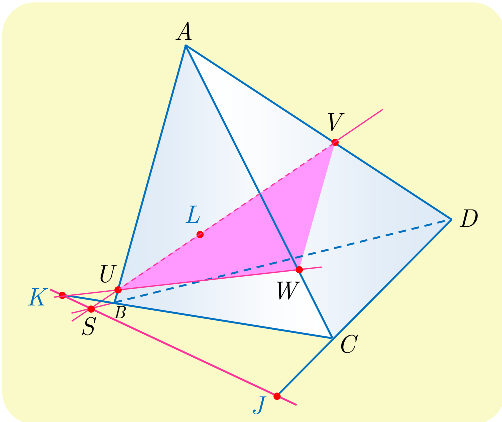


② ليكن $\mathcal{Q}$ المستوي (IJK). النقطة I تنتمي إلى المستقيم (AD) المحتوى في المستوي (ACD)، والنقطة J تنتمي إلى المستقيم (CD) المحتوى في المستوي (ACD)، إذن المستقيم (IJ) محتوى في (ACD)، وهو، وضوحاً، محتوى في $\mathcal{Q}$. إذن (IJ) هو الفصل المشترك للمستويين (ACD) و $\mathcal{Q}$.



المستقيم (IJ) يقطع (AC) في N_1. ونجد بالمماثلة أنّ (KN_1) هو الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $\mathcal{Q}$. وهذا الفصل المشترك يقطع (AB) في N_2. وهكذا يكون مقطع رباعي الوجوه مع $\mathcal{Q}$ هو المثلث (IN_1N_2).

③ ليكن $\mathcal{R}$ المستوي (LKJ).



- لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين (BD) و (KJ) من المستوي (BCD).

النقطة S تنتمي إلى (JK) المحتوى في $\mathcal{R}$، و S تنتمي إلى (BD) المحتوى في (ABD) وكذلك تنتمي L إلى كل من $\mathcal{R}$ و (ABD). فالمستقيم (SL) هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{R}$ و (ABD).

- المستقيم (SL) يقطع (AB) و (AD) في U و V بالترتيب.
- المستقيم (KU) هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{R}$ و (ABC)، وهذا المستقيم يقطع (AC) في W.
- المثلث UVW هو مقطع $\mathcal{R}$ ورباعي الوجوه $ABCD$.

25 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$، والنقاط I و J و K و L منتصفات $[AE]$ و $[BG]$ و $[EG]$ و $[AB]$ بالترتيب. والنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$.

① أثبت أنَّ M تنتمي إلى $[IJ]$ وعيِّن موضعها على هذه القطعة.

② أثبت أنَّ M تنتمي إلى $[KL]$ وعيِّن موضعها على هذه القطعة.

③ استنتج أنَّ I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد وعيِّن طبيعة الرباعي $ILJK$.

الحل

① M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(G,1)$ و $(E,1)$ ولأن I منتصف $[AE]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(E,1)$، و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1)$ و $(G,1)$، فتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,2)$ و $(J,2)$ إذن M منتصف $[IJ]$.

② لأن K منتصف $[BG]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(B,1)$ و $(G,1)$ ، و L مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,1)$ و $(B,1)$، ومنه M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,2)$ و $(J,2)$ إذن M منتصف $\left[KL\right]$.

③ ومنه يتلاقى المستقيمان (IJ) و (KL) M فالنقاط I و J و K و L تقع في مستو واحد، والشكل $ILJK$ متوازي أضلاع لأن قطريه متناصفان.

2

الجداء السلمي في الفراغ

1. الجداء السلمي في المستوي (تذكرة)
2. الجداء السلمي في الفراغ
3. التعامد في الفراغ
4. المعادلة الديكارتية لمستوٍ

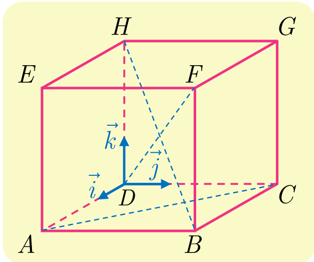
نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف الجداء السلمي، وصيغه المختلفة، في المستوي وفي الفراغ.
- استعمال الجداء السلمي في إثبات التعامد.
- الشعاع الناظم على مستو.
- المعادلة الديكارتية لمستو.

2

انطلاقة نشطة

الحساب في المكعّب. نهدف إلى التعبير بصيغة تحليلية عن التعامد في الفراغ. لنتأمّل مكعباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه يساوي 3. ولنتأمّل المعلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المشار إليه في الشكل.



① اكتب إحداثيات جميع رؤوس المكعب.

② a. علّل تعامد المستقيمين (AB) و (FG).

b. عيّن (x,y,z) مركّبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ و (x',y',z') مركّبات الشعاع $\overrightarrow{FG}$.

c. احسب المقدار $xx'+yy'+zz'$.

③ a. علّل تعامد المستقيمين (AC) و (BF).

b. عيّن (x,y,z) مركّبات الشعاع $\overrightarrow{AC}$ و (x',y',z') مركّبات الشعاع $\overrightarrow{BF}$.

c. احسب المقدار $xx'+yy'+zz'$.

④ a. ارسم الرباعي $DBFH$ بالأبعاد الحقيقية. أيكون المستقيمان (DF) و (HB) متعامدين؟

b. عيّن (x,y,z) مركّبات الشعاع $\overrightarrow{DF}$ و (x',y',z') مركّبات الشعاع $\overrightarrow{HB}$.

c. احسب المقدار $xx'+yy'+zz'$.

⑤ a. ليكن I مركز الوجه $EFGH$. ما إحداثيات I ؟

b. لتكن (x,y,z) مركّبات الشعاع $\overrightarrow{DF}$ المحسوبة سابقاً، احسب (x',y',z') مركّبات الشعاع $\overrightarrow{BI}$.

c. احسب المقدار $xx'+yy'+zz'$، ماذا تقترح ؟

⑥ a. وضّع I على الشكل المرسوم في ④ a..

b. لإثبات تعامد (DF) و (BI)، تؤول المسألة إلى مسألة في المستوي. باختيار معلم متجانس في المستوي (DBF)، أعط إحداثيات نقاط الشكل، واحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DF}$، ماذا تستنتج؟

الحل

① إحداثيات رؤوس المكعب :

$D(0,0,0)$, $A(3,0,0)$, $B(3,3,0)$, $C(0,3,0)$

$H(0,0,3)$, $E(3,0,3)$, $F(3,3,3)$, $G(0,3,3)$

② a. لأنّ المجسم مكعب، استنتجنا مباشرة أنّ الحرف FG عمودي على الوجه $(ABFE)$، ومنه $(FG)\perp(AB)$.

b. $\overrightarrow{FG}(-3,0,0)$ و $\overrightarrow{AB}(0,3,0)$.

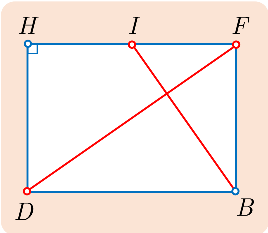
c. $xx'+yy'+zz'=(0)(-3)+(3)(0)+(0)(0)=0$

③ a. $\left.\begin{array}{l}AB\perp BF\\ BC\perp BF\end{array}\right\}$ إذن $(BF)\perp(ABCD)$، ومن ثَمّ $(AC)\perp(BF)$.

b. $\overrightarrow{BF}(0,0,3)$ و $\overrightarrow{AC}(-3,3,0)$.

c. $xx'+yy'+zz'=(-3)(0)+(3)(0)+(0)(3)=0$

④ a. الرباعي $DBFH$ مستطيل فقطراه $[BH]$ و $[DF]$ غير متعامدين.



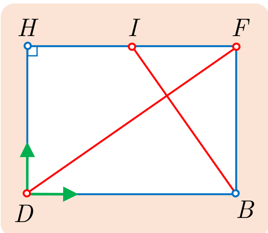
b. $\overrightarrow{HB}(3,3,-3)$ و $\overrightarrow{DF}(3,3,3)$.

c. $xx'+yy'+zz'=(3)(3)+(3)(3)+(3)(-3)=9$

⑤ a. مركز الوجه $EFGH$ منتصف $[FH]$، وبالتالي $I(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3)$.

b. $\overrightarrow{DF}(3,3,3)$ و $\overrightarrow{BI}(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2},3)$.

c. $xx'+yy'+zz'=(3)(-\frac{3}{2})+(3)(-\frac{3}{2})+(3)(3)=0$



⑥ a. الرسم مبين في الشكل المجاور.

b. لنختر المعلم المتجانس $(D,\vec{u},\vec{v})$ حيث

$\overrightarrow{DB}=3\sqrt{2}\,\vec{u}$ و $\overrightarrow{DH}=3\vec{v}$.

فتكون الإحداثيات النقاط المهمة في هذا المعلم هي :

$D(0,0),\ B(3\sqrt{2},0),\ I(\frac{3\sqrt{2}}{2},3),\ F(3\sqrt{2},3)$

إذن $\overrightarrow{DF}(3\sqrt{2},3)$ و $\overrightarrow{BI}(-\frac{3\sqrt{2}}{2},3)$ ومنه $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DF}=0$، فالشعاعان متعامدان.

تَدرَّبْ صفحة 50

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j})$.

① احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$ و $\vec{w}\cdot\vec{u}$ في الحالتين :

❶ $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ و $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{i}+5\vec{j}$ و $\vec{w}=\frac{1}{3}\vec{i}-2\vec{j}$.

❷ $\vec{u}(2,-1)$ و $\vec{v}(-\frac{1}{2},3)$ و $\vec{w}(5,2)$.

الحل

❶ $$\vec{w}\cdot\vec{u}=\frac{20}{3},\quad \vec{v}\cdot\vec{w}=-\frac{59}{6},\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=-14,$$

❷ $$\vec{w}\cdot\vec{u}=8,\quad \vec{v}\cdot\vec{w}=\frac{7}{2},\quad \vec{u}\cdot\vec{v}=-4,$$

② أعطِ في الحالتين الآتيتين معادلة المستقيم المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم d :

❶ $A(5,3)$ و $d:2x+5y-5=0$. ❷ $A(-1,2)$ و $d:x-3y+2=0$.

الحل

❶ تنتمي $M(x,y)$ إلى d' إذا وفقط إذا كان الشعاع $\overrightarrow{AM}$ عمودياً على d أي مرتبطاً خطياً مع الشعاع $\vec{n}(2,5)$ الناظم على d، وهذا يكافئ الارتباط الخطي للشعاعين $\begin{bmatrix}x-5\\y-3\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ أي

$$d':5x-2y-19=0$$

❷ بمثل ما سبق نجد $d':3x+y+1=0$.

③ أثبت في حالة أربع نقاط A و B و C و D من المستوي أنّ:

$$2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=AB^2-BC^2+CD^2-DA^2$$

الحل

نستفيد من الخاصة $\vec{u}^2-\vec{v}^2=(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$. فنجد

$$\begin{aligned}AB^2-BC^2&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\\CD^2-DA^2&=(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})&=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})\end{aligned}$$

وبالجمع بعد ملاحظة أنّ $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}$ نجد

$$\begin{aligned}AB^2-BC^2+CD^2-DA^2&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA})\\&=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{BD})=2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

④ أعطِ في الحالتين الآتيتين بُعد النقطة A عن المستقيم d :

❶ $A(-2,4)$ و $d : 2x+y-5=0$. ❷ $A(-\sqrt{2},2)$ و $d : \sqrt{2}x-3y-1=0$.

الحل

بتطبيق دستور بُعد نقطة عن مستقيم في المستوي نجد :

❶ $$\operatorname{dist}(A,d)=\frac{|-4+4-5|}{\sqrt{4+1}}=\sqrt{5}$$

❷ $$\operatorname{dist}(A,d)=\frac{|-2-6-1|}{\sqrt{2+9}}=\frac{9}{\sqrt{11}}$$

تَدرَّبْ صفحة 53

① نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. احسب $\vec{u}\cdot\vec{v}$ و $\vec{v}\cdot\vec{w}$ و $\vec{w}\cdot\vec{u}$ في الحالتين :

❶ $\vec{u}(1+\sqrt{2},\sqrt{3},0)$ و $\vec{v}(1-\sqrt{2},0,-1)$ و $\vec{w}(0,-\sqrt{3},1)$.

❷ $\vec{u}(\frac{2}{3},-\frac{1}{6},\frac{1}{2})$ و $\vec{v}(\frac{1}{2},-2,\frac{2}{3})$ و $\vec{w}(1,0,1)$.

الحل

نطبق عبارة الجداء السلمي في الفراغ : $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'$:

❶ $$\left.\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=-1\\ \vec{v}\cdot\vec{w}&=-1\\ \vec{w}\cdot\vec{u}&=-3\end{aligned}\right\}$$

❷ $$\left.\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}&=1\\ \vec{v}\cdot\vec{w}&=\tfrac{7}{6}\\ \vec{w}\cdot\vec{u}&=\tfrac{7}{6}\end{aligned}\right\}$$

② إذا علمتَ أنّ نظيم $\vec{u}$ يساوي 5 ونظيم $\vec{v}$ يساوي 3 وأنّ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$ فاحسب المقادير الآتية:

❶ $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ ❷ $\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

❸ $(2\vec{u})\cdot(\vec{v}-3\vec{u})$ ❹ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})$

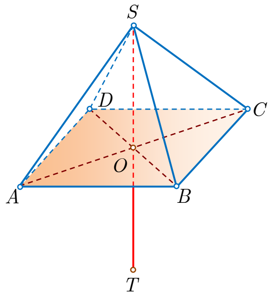
الحل

❶ $$\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2+\vec{u}\cdot\vec{v}=25-4=21$$

❷ $$\vec{v}\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}^2=-4-9=-13$$

❸ $$2\vec{u}\cdot(\vec{v}-3\vec{u})=2\vec{u}\cdot\vec{v}-6\vec{u}^2=2(-4)-6(25)=-158$$

❹ $$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-3\vec{v})=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}-3\vec{v}^2=25-2(-4)-3(9)=6$$

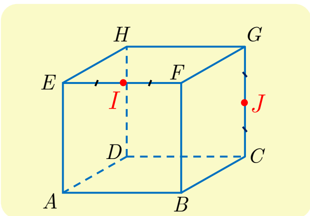


③ نتأمّل هرماً $S-ABCD$ قاعدته مربّع ورأسه S. وطول كل حرف من حروفه وأضلاع قاعدته يساوي a. احسب $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}$ و $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}$ و $\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}$.

الحل

الهرم منتظم وأطوال جميع أحرفه وأحرف قاعدته a، نلاحظ أولاً أن SAB متساوي الأضلاع، وأنّ SAC قائم الزاوية في S ومتساوي الساقين لأنه طبوق على BAC إذن

$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\|\overrightarrow{SA}\|\cdot\|\overrightarrow{SB}\|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}$$
$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=\|\overrightarrow{SA}\|\cdot\|\overrightarrow{SC}\|\cdot\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC})=0$$
$$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{SA}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AC})=a\times\sqrt{2}a\times\cos\frac{3\pi}{4}=-a^2$$



④ $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a. فيه I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[CG]$. احسب $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ}$ و $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD}$.

الحل

$$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{EA}=0,\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{FC}=0,\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{GJ}=0,$$
$$\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{IE}=-EI^2=-\frac{a^2}{4}$$
$$\overrightarrow{JH}\cdot\overrightarrow{JD}=(\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GH})\cdot(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{JG}\cdot\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{CD}$$
$$=-\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}+a^2=\frac{3}{4}a^2$$

تَدرَّبْ صفحة 56

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① بيّن فيما يأتي بيّن إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين أوعيّن الوسيط α ليكونا كذلك.

❶ $\vec{u}\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\vec{v}\left(-\frac{2}{5},2,3\right)$,

❷ $\vec{u}\left(\sqrt{2},1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\right)$, $\vec{v}\left(-\sqrt{2},1,1\right)$,

❸ $\vec{u}\left(2,-\frac{1}{2},5\right)$, $\vec{v}\left(-\frac{2}{5},3,\alpha\right)$,

❹ $\vec{u}\left(\sqrt{3},\frac{1}{3},2\right)$, $\vec{v}\left(\alpha,2\alpha,\frac{1}{2}\right)$,

الحل

❶ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2\neq0$، فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متعامدين.

❷ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$، فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

❸ $\vec{u}\cdot\vec{v} = -\dfrac{23}{10}+5\alpha$، ويتعامد $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = \dfrac{23}{50}$.

❹ $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(\sqrt{3}+\dfrac{3}{2}\right)\alpha+1$، يتعامد $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha = \dfrac{-3}{3\sqrt{3}+2}$.

② نتأمّل النقطتين $A(2,-5,1)$ و $B(0,2,6)$. والمستقيم d المار بالنقطة $C(-2,3,1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u} = -4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$. أثبت أنّ d عمودي على المستقيم (AB).

الحل

يتعامد المستقيم d مع المستقيم (AB) إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. في حالتنا $\overrightarrow{AB}(-2,7,5)$ و $\vec{u}(-4,1,-3)$ وبالتالي $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB} = 8+7-15=0$، فالمستقيمان (AB) و d متعامدان.

③ أطوال الأشعّة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ هي بالترتيب 6 و 8 و 10. أيكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين؟

الحل هنا $\vec{u}\perp\vec{v}$ لأنّ

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}(100-36-64)=0$$

④ نتأمّل شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$، ونفترض أنّ $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان. أثبت أنّ للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الطول نفسه.

الحل من الفرض لدينا $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=0$ ومنه $\vec{u}^2-\vec{v}^2=0$ أي $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$.

تَدرَّبْ صفحة 59

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي المار بالنقطة A ويقبل الشعاع $\vec{n}$ شعاعاً ناظماً:

❶ $\vec{n}(1,-1,0),\quad A(1,0,5)$ ❷ $\vec{n}(2,-3,-1),\quad A(\sqrt{2},-2,5)$

❸ $\vec{n}(\frac{2}{3},4,-1),\quad A(\frac{1}{2},3,-1)$ ❹ $\vec{n}(\sqrt{3},2,0),\quad A(0,-3,0)$

الحل

إذا كان الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على المستوي المار بالنقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ ، فإن معادلة المستوي هي : $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

❶ $x-y=1$

❷ $2x-3y-z=2\sqrt{2}+1$

❸ $2x+12y-3z=40$

❹ $\sqrt{3}x+2y=-6$

② في كل من الحالات الآتية اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ المار بالنقطة A موازياً المستوي $\mathcal{P}$:

❶ $A(1,0,1)$ ، $\mathcal{P} : 2x - y + 3z = 4,$ ❷ $A(0,0,0)$ ، $\mathcal{P} : z = 2,$

❸ $A(0,3,0)$ ، $\mathcal{P} : x + y = 5,$ ❹ $A(-1,2,-3)$ ، $\mathcal{P} : 5x - 3y + 4z = 8,$

الحل

معادلة أي مستوٍ $\mathcal{Q}$ يوازي $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ هي من الصيغة:

$$ax + by + cz + e = 0$$

فنعين e من شرط المرور بالنقطة A. وهكذا نجد:

❶ $\mathcal{Q} : 2x - y + 3z = 5,$ ❷ $\mathcal{Q} : z = 0,$

❸ $\mathcal{Q} : x + y = 3,$ ❹ $\mathcal{Q} : 5x - 3y + 4z = -23,$

③ ادرس تعامد كل زوج من المستويات الآتية:

$\mathcal{P} : 7x + 3y - z - 1 = 0$ و $\mathcal{Q} : 6x - 11y - 9z - 5 = 0$ و $\mathcal{R} : 2x - 3y + 5z + 4 = 0$

الحل

يتعامد مستويان إذا تعامد شعاع ناظم على الأول مع شعاع ناظم على الثاني: نعين أشعة ناظمة :

$$\vec{n}_{\mathcal{P}}(7,3,-1), \quad \vec{n}_{\mathcal{Q}}(6,-11,-9), \quad n_{\mathcal{R}}(2,-3,5)$$

ونرى أنّ $\vec{n}_{\mathcal{Q}} \cdot \vec{n}_{\mathcal{P}} = 18 \neq 0$ فالمستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ غير متعامدين. و $\vec{n}_{\mathcal{Q}} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}} = 0$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}} \cdot \vec{n}_{\mathcal{R}} = 0$ إذن $\mathcal{Q} \perp \mathcal{R}$ و $\mathcal{P} \perp \mathcal{R}$.

④ في كل من الحالات الآتية بيّن إذا كان المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعين.

❶ $\mathcal{Q} : x - y + z - 3 = 0$ ، $\mathcal{P} : x - y + z = 0,$

❷ $\mathcal{Q} : 4x + 2y + z + 5 = 0$ ، $\mathcal{P} : 2x + y + 5 = 0,$

الحل

يتوازى مستويان إذا كان شعاع ناظم على أحدهما شعاعاً ناظماً على الآخر أيضاً، وفي غير هذه الحالة يكونان متقاطعين.

❶ هنا $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,-1,1), \vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,-1,1)$ فالشعاعان الناظمان مرتبطان خطياً، والمستويان متوزيان وغير منطبقين لأنّ $\mathcal{P}$ يمر بالمبدأ ولا يفعل ذلك $\mathcal{Q}$.

❷ هنا $\vec{n}_{\mathcal{P}}(4,2,1), \vec{n}_{\mathcal{Q}}(2,1,0)$ فالشعاعان الناظمان غير مرتبطين خطياً، والمستويان متقاطعان.

⑤ احسب بُعد النقطة $A(5,-3,4)$ عن المستوي $\mathcal{P} : 2x - y + 3z - 5 = 0$. وكذلك احسب بعد النقطة $B(2,2,5)$ عن المستوي $\mathcal{Q} : y - z = 0$

الحل

هذا تطبيق مباشر لدستور المسافة:

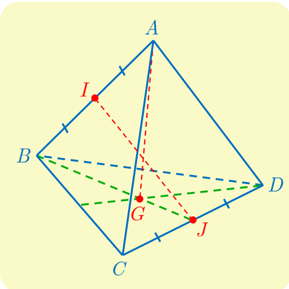
$$\text{dist}(A,\mathcal{P}) = \frac{|2(5)-(3)+3(4)-5|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{20}{\sqrt{14}}$$
$$\text{dist}(B,\mathcal{Q}) = \frac{|2-5|}{\sqrt{0+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

أنشطة

نشاط 1 خواص رباعي الوجوه المنتظم

رباعي الوجوه المنتظم هو مجسّم له أربعة وجوه كل منها مثلث متساوي الأضلاع. نسمّي حرفين متقابلين كل حرفين لا يشتركان برأس.

❶ خواص عامة



ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم ولنضع $AB=a$.

① نهدف إلى إثبات أنّ كل حرفين متقابلين متعامدان، وأنّ المستقيم الواصل بين منتصفي حرفين متقابلين عمودي على كل منهما.

a. احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

b. أثبت تعامد المستقيمين (AB) و (CD).

c. ماذا تستنتج بشأن المستقيمين (AC) و (BD) والمستقيمين (AD) و (BC)؟

d. ليكن I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. تيقّن أنّ $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$، واستنتج أنّ المستقيم (IJ) عمودي على كل من المستقيمين (AB) و (CD).

② في رباعي الوجوه $ABCD$، الارتفاع النازل من A هو المستقيم المار بالنقطة A عمودياً على المستوي (BCD).

a. ليكن G مركز ثقل المثلث BCD. احسب $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$، واستنتج أنّ (AG) هو الارتفاع النازل من A.

b. عيّن بقيّة الارتفاعات في رباعي الوجوه $ABCD$.

③ نسمي مركز رباعي الوجوه المنتظم $ABCD$ النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسندنا إليها الأمثال ذاتها: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

a. أثبت أنّ النقاط A و O و G تقع على استقامة واحدة واحسب AG و AO.

b. أثبت أنّ O هو منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.

c. احسب الأطوال OB و OI.

d. أثبت أنّ النقطة O متساوية البعد عن جميع رؤوس رباعي الوجوه.

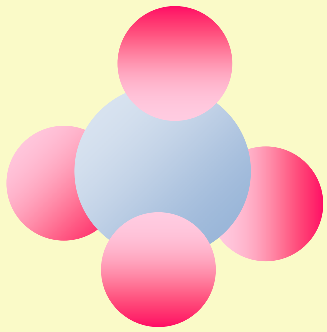
④ نهدف إلى حساب الزاوية الهندسية $\widehat{AOB}$.

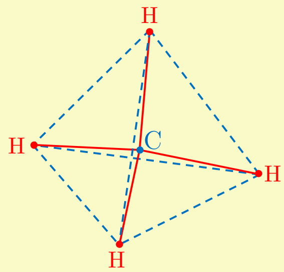
a. احسب $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ بأسلوبين أحدهما بكتابة $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})$.

b. استنتج قيمة تقريبية للزاوية $\widehat{AOB}$ بالدرجات. وبين أنّ $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD}=\widehat{DOA}$.

❷ تطبيق في الكيمياء

نجد أدناه تمثيلاً لجزيئة الميثان. تقع نوى ذرات الهيدروجين الأربع H على رؤوس رباعي وجوه منتظم. تقع نواة ذرّة الكربون C داخل رباعي الوجوه على المسافة نفسها من كلّ واحدة من رؤوس رباعي الوجوه أي في مركزه. لتبسيط تمثيل جزيئة الميثان، نستعمل المخطّط المبين أدناه، حيث مثّلنا الروابط بخطوط متّصلة وحروف رباعي الوجوه بخطوط متقطّعة لنتذكّرها. هذا المخطّط هو الصيغة الستيريوكيميائية للميثان. أتاحت قياسات تحديد طول الروابط $\mathrm{C-H}$ بمقدار $1.09\times10^{-10}\ \mathrm{m}$.





① أعطِ تقريباً لقياس الزاوية بين رابطتين من النوع $\mathrm{C-H}$.

② عيّن طول حرف رباعي الوجوه أي المسافة بين ذرتي هيدروجين.

❶ خواص عامة

① a. ABC مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$. ونجد بالمثل

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$$

b. لنثبت أنّ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ نحسب الجداء السلمي فنجد:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0$$

c. تؤدي رؤوس رباعي الوجوه المنتظم دوراً متناظرً إذن نجد بالمثل أن $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$.

d. في الحقيقة لدينا $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{IJ}$. فإذا استفدنا مما سبق وجدنا

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+0=0$$

وكذلك $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$ إذن (IJ) عمودي على كل من (AB) و (CD).

② .a لدينا :

$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CD}=0+0=0$$
$$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{BD}=0+0=0$$

إذن $\overrightarrow{AG}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{CD}$، فالمستقيم (AG) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (CBD) إذن هو عمودي على (CBD)، وعليه (AG) هو الارتفاع النازل من A في الهرم.

.b نستنتج من التحليل السابق أن ارتفاعات رباعي الوجوه المنتظم هي المستقيمات التي تصل كل رأس بمركز ثقل الوجه المقابل لهذا الرأس.

③ النقطة O مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوس رباعي الوجوه وقد أسند إليها الأمثال ذاتها :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

.a لأنّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ فإن النقطة O هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(G,3)$ عملاً بالخاصة التجميعية، ويكون $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ ومنه النقاط A,O,G تقع على استقامة واحدة.

لمّا كان $3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ لأنّ G مركز ثقل المثل BCD استنتجنا أنّ

$$\begin{aligned}9\overline{AG}^2&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\\&=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\\&=a^2+a^2+a^2+2\cdot\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{a^2}{2}+2\cdot\frac{a^2}{2}=6a^2\end{aligned}$$

إذن $AG=\frac{\sqrt{6}}{3}a$، وعليه $AO=\frac{3}{4}AG=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

.b لما كانت I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$، و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$ وجدنا أن O مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$. فيكون O منتصف $[IJ]$.

.c رباعي الوجوه المنتظم متناظر بالنسبة إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ إذن $OB=OA$.

وجدنا أنّ $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{IO}=2\overrightarrow{IJ}$ وعليه

$$\begin{aligned}16\overline{IO}^2&=(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=\overline{AB}^2+4\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+4\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=a^2+4a^2+a^2-4\times\frac{a^2}{2}+2\times 0-4\times\frac{a^2}{2}=2a^2\end{aligned}$$

إذن $OI=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

d. لأنّ رباعي الوجوه المدروس منتظم، فإنّ رؤوسه تؤدي أدواراً متماثلة، وعليه فإنّ

$$OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

④ a. إن

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} &= (\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})\\ &= (\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{IA})\\ &= OI^2 - IA^2 = \frac{2a^2}{16}-\frac{a^2}{4} = -\frac{2a^2}{16}\end{aligned}$$

ومن جهة أخرى

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA\cdot OB\cdot\cos\widehat{AOB} = \frac{6}{16}a^2\cos\widehat{AOB}$$

إذن $\cos\widehat{AOB} = \frac{-1}{3}$.

b. تكون القيمة التقريبية للزاوية $\angle AOB \approx 109.47°$. ومن تطابق المثلثات AOB, BOC, COD, AOD نستنتج أنّ

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle AOD.$$

❷ تطبيق في الكيمياء

a. الزاوية المطلوبة تنطبق على الزاوية $\angle AOB \approx 109.47°$.

طول الرابطة $\mathrm{C-H}$ يساوي الطول $OA = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ الذي حسبناه آنفاً إذن

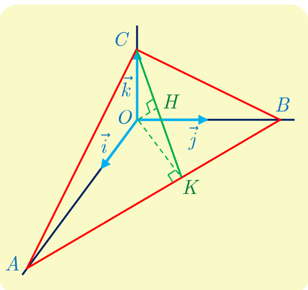
$$a = \frac{4}{\sqrt{6}}1.09\times10^{-10} \approx 1.78\times10^{-10}\ \mathrm{m}$$

وهذا يمثل المسافة بين ذرتي هيدروجين.

نشاط 2 استعمال معلم

❶ رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة

نتأمّل رباعي الوجوه $OABC$ ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O، أي إنّ المستقيمات (OA) و (OB) و (OC) متعامدة مثنى مثنى. لنفترض إضافة إلى ذلك أنّ $OC = 1$ و $OB = 2$ و $OA = 3$. نرمز بالرمز H إلى المسقط القائم للنقطة O على المستوي (ABC).



① نريد إثبات أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC. لنختر إذن معلماً متجانساً $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ بوضع $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ و $\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ و $\vec{k}=\overrightarrow{OC}$.

.a احسب إحداثيات H.

.b احسب $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}$ واستنتج أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (OCH).

.c احسب $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BH}$ واستنتج أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

②.a أثبت أنّ المسقط القائم لكل من النقطتين C و O على المستقيم (AB) هو النقطة K ذاتها، واحسب إحداثيات K.

.b أعط تقريباً لقياس الزاوية $\widehat{OKC}$.

الحل

① نريد إثبات أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات في المثلث ABC

.a حساب (x,y,z) إحداثيات H. استناداً إلى الفرض (OH) عمودي على جميع مستقيمات المستوي ABC. إذن $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{HC}=0$ ومنه

$$3x=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})=\overrightarrow{OH}^2$$
$$2y=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB})=\overrightarrow{OH}^2$$
$$z=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC})=\overrightarrow{OH}^2$$

فإذا عرّفنا $k=\overrightarrow{OH}^2$ وهو عدد موجب تماماً كان لدينا

$$z=2y=3x=k$$

وكان

$$k=x^2+y^2+z^2=k^2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+1\right)$$

إذن $k=\frac{36}{49}$ و $(x,y,x)=\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$.

.b لدينا $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ و $\overrightarrow{OC}(0,0,1)$ فينتج أن $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ و $\overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$ فينتج أن $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

إذن المستقيم (AB) عمودي على كل من (OC) و (OH) فهو عمودي على المستوي (OCH).

.c هنا $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ و $\overrightarrow{CH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},-\frac{13}{49}\right)$ إذن $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

وكذلك $\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$ و $\overrightarrow{BH}\left(\frac{12}{49},\frac{-80}{49},\frac{36}{49}\right)$ إذن $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

نستنتج من ذلك أنّ $(AB)\perp(HC)$ و $(AC)\perp(BH)$ فالنقطة H هي نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلث (ABC).

②a. رأينا أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (OCH) لتكن K نقطة تقاطعهما. عندئذ تكون K هي المسقط القائم لأي نقطة من نقاط المستوي (OCH) على المستقيم (AB) وعلى الخصوص K هي المسقط القائم لكل من النقطتين O و C على (AB).

تتعين النقطة K بالاستفادة من خاصتين :

- النقاط A,K,B تقع على استقامة واحدة. إذن يوجد ثابتٌ t يحقق $\overrightarrow{AK}=t\overrightarrow{AB}$.
- الشعاعان $\overrightarrow{OK}$ و $\overrightarrow{AB}$ متعامدان إذن $\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

لذلك نكتب $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ ونحسب

$$\begin{aligned}0&=\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=-OA^2+tAB^2=-9+t(9+4)=13t-9\end{aligned}$$

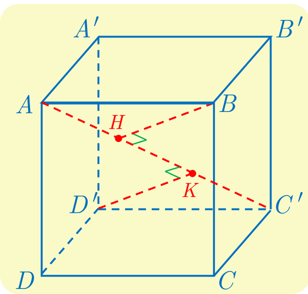
إذن $t=\dfrac{9}{13}$ و المساواة $\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$ تعطينا إحداثيات K

$$K=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{9}{13}\begin{bmatrix}0-3\\2-0\\0-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12/13\\18/13\\0\end{bmatrix}$$

أو $K\left(\frac{12}{13},\frac{18}{13},0\right)$.

②b. ومنه نستنتج أنّ $OK=\sqrt{\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{18}{13}\right)^2}=\left(\frac{6}{13}\right)\sqrt{4+9}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$ ومن ثَمّ لأن المثلث KOC قائم في O نجد $\tan\widehat{OKC}=\dfrac{OC}{OK}=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$، ونجد باستعمال الآلة الحاسبة $\widehat{OKC}\approx 31°$.

❷ بعض خواص المكعب



ليكن $ABCDA'B'C'D'$ مكعّباً طول حرفه a. النقطة H هي المسقط القائم للرأس B على المستقيم (AC'). نريد إثبات أنّ النقطة H هي أيضاً المسقط القائم لكلٍّ من A' و D على المستقيم (AC').

سنستعمل المعلم المتجانس $\left(D';\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ حيث

$$\overrightarrow{D'A'}=a\vec{k} \text{ و } \overrightarrow{D'C'}=a\vec{j} \text{ و } \overrightarrow{D'D}=a\vec{i}$$

① اكتب في هذا المعلم إحداثيات رؤوس المكعب.

② لحساب (x,y,z) إحداثيات النقطة H:

a. اكتب بدءاً من المساواة $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC'}=0$، علاقة بين x و y و z و a.

b. اكتب علاقة بين بين x و y و z و a و λ حيث λ معرّفة بالعلاقة $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AC'}$. واستنتج قيمة λ ثُمّ احداثيات H.

③ لإثبات أنّ المسقط القائم للنقطة A' على (AC') هي النقطة H ذاتها، يكفي أن نثبت أنّ $(A'H)$ عمودي على (AC'). أثبت تعامد الشعاعين $\overrightarrow{A'H}$ و $\overrightarrow{AC'}$.

④ أثبت أنّ المسقط القائم للنقطة D على (AC') هي النقطة H ذاتها.

⑤ لتكن K المسقط القائم للنقطة D' على (AC').

a. ماذا تقول عن الطول $C'K$ ؟

b. حدّد موقع K على المستقيم (AC').

c. ما هي النقاط الأخرى من المكعب التي مسقطها القائم على (AC') هي النقطة K ذاتها.

الحل

① المعلم المفترض $(D';\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متجانس. إحداثيات رؤوس المكعب في هذا المعلم

$$D'(0,0,0)\,,\, D(a,0,0)\,,\, C(a,a,0)\,,\, C'(0,a,0)$$
$$A'(0,0,a)\,,\, A(a,0,a)\,,\, B(a,a,a)\,,\, B'(0,a,a)$$

②a. لدينا $\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$ و $\overrightarrow{BH}(x-a,y-a,z-a)$ والشرط $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC'}=0$ يُكافئ :

$$x-y+z-a=0 \qquad (*)$$

②b. من الفرض لدينا $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AC'}$ ومنه $(x-a,y,z-a)=\lambda(-a,a,-a)$ أي

$$z=a-\lambda a,\quad y=\lambda a,\quad x=a-\lambda a$$

نعوض في العلاقة $(*)$ فنجد $-3a\lambda=-a$ ومنه $\lambda=\frac{1}{3}$، ينتج إحداثيات $H(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$.

③ لدينا $\overrightarrow{A'H}(\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a,-\frac{1}{3}a),\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$ إذن $\overrightarrow{A'H}\cdot\overrightarrow{AC'}=0$ ومنه $\overrightarrow{A'H}\perp\overrightarrow{AC'}$، فالمستقيمان (AC') و $(A'H)$ متعامدان. إذن H هي المسقط القائم للنقطة A' على (AC')

④ لدينا $\overrightarrow{DH}(-\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a),\overrightarrow{AC'}(-a,a,-a)$ إذن $\overrightarrow{DH}\cdot\overrightarrow{AC'}=0$ ومنه $\overrightarrow{DH}\perp\overrightarrow{AC'}$، فالمستقيمان (AC') و (DH) متعامدان. إذن H هي المسقط القائم للنقطة D على (AC').

⑤ مركز المكعب O هو مركز تناظر للشكل، والتناظر المركزي S_O يحافظ على المسافات والتعامد. لمّا كان $S_O(B)=D'$ و $S_O(A)=C'$ كان $S_O(H)=K$. نستنتج أنّ $AH=KC'$، ولأنّ $O(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$ استنتجنا إحداثيات النقطة K من كون O منتصف KH : $K(\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a,\frac{1}{3}a)$. بسبب التناظر نجد أنّ K هي أيضاً مسقط النقطتين B' و C على (AC').

تمرينات ومسائل

1 نُعطى معلماً متجانساً في المستوي.

① بيّن أزواج الأشعة المتعامدة من بين الأشعة الآتية:

$\vec{u}(2,5)$ و $\vec{v}(-2,-5)$ و $\vec{w}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{5}\right)$ و $\vec{t}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{5}\right)$ و $\vec{s}\left(2,-\frac{4}{5}\right)$.

② في الحالتين الآتيتين اكتب معادلة لمحور القطعة المستقيمة $[AB]$:

❶ $A(4,1)$، $B(-1,2)$

❷ $A(-5,3)$، $B(-2,\frac{1}{3})$

③ نتأمّل النقاط $A(-5,2)$ و $B(1,-1)$ و $C(-3,3)$ و $E\left(-\frac{9}{4},-1\right)$. أتكون النقطة E متساوية البُعد عن المستقيمات التي تؤلّفها أضلاع المثلث ABC؟

الحل

① نلاحظ أولاً أنّ $\vec{v}=-\vec{u}$ و $\vec{t}=-\vec{w}=\frac{1}{4}\vec{s}$، ولأنّ $\vec{t}\cdot\vec{v}=0$، نرى أنّ أي شعاع من بين $\{\vec{u},\vec{v}\}$ عمودي على أي شعاع من بين $\{\vec{t},\vec{w},\vec{s}\}$ وهناك ستة أزواج.

② محور القطعة المستقيمة هو العمود المقام على القطعة من منتصفها، وهو أيضاً مجموعة النقاط المتساوية البعد عن طرفي القطعة المستقيمة.

❶ هنا $\overrightarrow{AB}(-5,1)$ شعاع ناظم على المحور، والنقطة $N(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ هي منتصف $[AB]$ فتكون معادلة المحور : $-5x+y+6=0$.

❷ إذا كانت $M(x,y)$ نقطة من محور $[AB]$ حيث $A(-5,3),B(-2,\frac{1}{3})$ كان $AM=BM$ ومنه:

$$(x+5)^2+(y-3)^2=(x+2)^2+(y-\tfrac{1}{3})^2$$

وبإصلاح المساواة نجد معادلة المحور $54x-48y+269=0$.

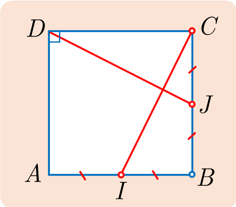
③ معادلة المستقيم (AB) : $m_{AB}=\dfrac{3}{-6}=-\dfrac{1}{2}$ وهو يمر بالنقطة B إذن $x+2y+1=0$، ومنه بُعد النقطة E عن المستقيم (AB) يساوي $\dfrac{13}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\left|-\frac{9}{4}-2+1\right|}{\sqrt{1+4}}=L_1$

معادلة المستقيم (AC) : $m_{AC}=\dfrac{1}{2}$ وهو يمر بالنقطة C إذن $x-2y+9=0$، ومنه بُعد النقطة E عن المستقيم (AC) يساوي $\dfrac{35}{4\sqrt{5}}=\dfrac{\left|-\frac{9}{4}+2+9\right|}{\sqrt{1+4}}=L_2$

نلاحظ أن $L_1\neq L_2$ فالنقطة E غير متساوية البعد عن المستقيمات المارة بأزواج من النقاط A,B,C .

2 $ABCD$ مربّع. I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[BC]$. أثبت أنّ المستقيمين (DJ) و (CI) متعامدان.

الحل



طريقة أولى. نأخذ معلماً متجانساً $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$. فتكون إحداثيات النقاط في هذا المعلم :

$$I(\tfrac{1}{2},0),C(1,1),D(0,1),J(1,\tfrac{1}{2})$$

$$\overrightarrow{IC}(\tfrac{1}{2},1),\overrightarrow{DJ}(1,-\tfrac{1}{2})$$

وبحساب الجداء السلمي : $\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{DJ}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$ نستنتج أن الشعاعين متعامدان.

طريقة ثانية.

$$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CB}^2-\overrightarrow{CD}^2)=0$$

3 نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ.

① بيّن في كل من الحالتين الآتيتين إذا كان الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين:

❶ $\vec{u}(1,-2,5),\quad \vec{v}\left(2,-\tfrac{3}{2},1\right)$

❷ $\vec{u}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},0\right),\quad \vec{v}\left(\sqrt{2},\sqrt{3},1\right)$

② نتأمّل النقاط $A(4,1,-2)$ و $B(-1,2,4)$ و $C(0,2,-5)$ و $D(1,-2,-\tfrac{7}{2})$. ونعرّف M منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. احسب

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} \text{ و } \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC} \text{ و } \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$$

③ بيّن في كلّ من الحالات الآتية إذا كان المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدين:

❶ $\mathcal{P}: x+2y-5z+7=0,\quad \mathcal{Q}: x+2y+z-3=0,$

❷ $\mathcal{P}: x-3y+2=0,\quad \mathcal{Q}: y-2z+3=0,$

④ احسب في كلّ من الحالتين الآتيتين بُعد النقطة A عن المستوي $\mathcal{P}$:

❶ $A(0,\sqrt{2},1),\quad \mathcal{P}: x+y-2z+4=0,$

❷ $A(5,-2,0),\quad \mathcal{P}: 3x+y-\dfrac{z}{2}+7=0,$

الحل

① ❶ $\vec{u}\cdot\vec{v}=2+3-5=0$ ومنه $\vec{u}\perp\vec{v}$

❷ $\vec{u}\cdot\vec{v}=2+3+0\neq 0$ ومنه $\vec{u},\vec{v}$ غير متعامدين.

② $\overrightarrow{AC}(-4,1,-3)$ و $\overrightarrow{AB}(-5,1,6)$ ، إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20+1-18=3$

$\overrightarrow{CD}(1,-4,\frac{3}{2})$ و $\overrightarrow{AB}(-5,1,6)$ ، إذن $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-5-4+9=0$

$\overrightarrow{AC}(-4,1,-3)$ و $\overrightarrow{DB}(-2,4,\frac{15}{2})$ ، إذن $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=8+4-\dfrac{45}{2}=-\dfrac{21}{2}$

إحداثيات النقطة M منتصف $[AB]$ هي $M(\frac{3}{2},\frac{3}{2},1)$ إذن

$\overrightarrow{CD}(1,-4,\frac{3}{2})$ و $\overrightarrow{MB}(-\frac{5}{2},\frac{1}{2},3)$ ، ومنه $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=\dfrac{-5}{2}-2+\dfrac{9}{2}=0$

③ يكون المستويان متعامدين إذا كان الجداء السلمي لناظميهما معدوماً.

❶ $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,2,1)$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,2,-5)$ ومنه $\vec{n}_{\mathcal{P}}\cdot\vec{n}_{\mathcal{Q}}=0$ ، المستويان متعامدان.

❷ $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(0,1,-2)$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,-3,0)$ ومنه $\vec{n}_{\mathcal{P}}\cdot\vec{n}_{\mathcal{Q}}=0-3\neq 0$ ، المستويان غير متعامدين.

④ ❶ $$\mathrm{dist}(A,\mathcal{P})=\frac{\left|1(0)+1(\sqrt{2})-2(1)+4\right|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

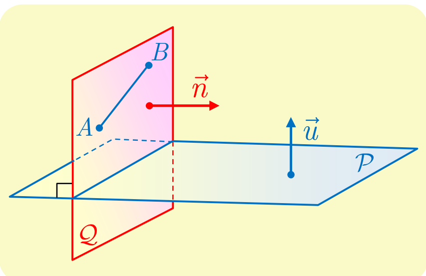
❷ $$\mathrm{dist}(A,\mathcal{P})=\frac{\left|3(5)+1(-2)-\frac{1}{2}(0)+7\right|}{\sqrt{9+1+\frac{1}{4}}}=\frac{40}{\sqrt{41}}$$

لنتعلّم البحث معاً

4 مستويات متعامدة

نتأمّل، في المعلم المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطتين الآتيتين: $A(1,-1,2)$ و $B(2,0,4)$ والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $x-y+3z-4=0$. جِد معادلةً للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.

نحو الحلّ



☝ نريد تعيين معادلة لمستوٍ $\mathcal{Q}$ مار بنقطة (بل اثنتين). وإذا كنّا نعرف شعاعاً ناظماً $\vec{n}(a,b,c)$ على $\mathcal{Q}$ استطعنا تعيين المستوي. أتوجد فرضيات في المسألة تفيد في تعيين $\vec{n}$؟ المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان فرضاً إذن يكون كل شعاع ناظم $\vec{u}$ على $\mathcal{P}$ شعاعاً عمودياً على $\vec{n}$، كما إنّ المستقيم (AB) محتوى في $\mathcal{Q}$ فالشعاع $\overrightarrow{AB}$ عمودي أيضاً على $\vec{n}$.

1. أعطِ مركّبات شعاع ناظم $\vec{u}$ على $\mathcal{P}$.
2. علّل صحة المساواتين $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$.

✌ لدينا إذن جملة المعادلتين

$$\begin{cases} a-b+3c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases}$$

لا تكفي هاتان المعادلتان لتعيين قيم a و b و c، وهذا ليس مُفاجئاً لأننا نعلم أنّه يوجد عدد لانهائي من الأشعة الناظمة على مستو. ولأنه يكفي تعيين ثلاثية واحدة (a,b,c) تحقّق الجملة، يمكننا مثلاً أن نختار قيمة إحدى المركّبات. فمثلاً لنضع $c=2$.

1. أثبت في هذه الحالة أنّ $a=-5$، $b=1$.
2. تحقّق أنّ $\vec{n}(-5,1,2)$ شعاع ناظم على $\mathcal{Q}$.
3. اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

✌ 1. يمكن أن نختار $\vec{u}(1,-1,3)$.

2. لما كان المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدين، كان $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$. ولما كان $\overrightarrow{AB}$ محتوى في المستوي $\mathcal{Q}$، كان $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$.

✌ من $\vec{u}\cdot\vec{n}=0$ نستنتج أنّ $a-b+3c=0$ ، ومن $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$ نجد $a+b+2c=0$. إذن لدينا جملة المعادلتين : $\begin{cases} a-b+3c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases}$ ، لا تكفي هاتان المعادلتان لتعيين قيم a و b و c، لهذا نختار قيمة عددية لإحدى المركبات لتعيين أحد الأشعة الناظمة على المستوي $\mathcal{Q}$، فمثلاً في حالة $c=2$ تكون المعادلات الناتجة:

1. $\begin{cases} a-b=-6 \\ a+b=-4 \end{cases}$

وبحل جملة هاتين المعادلتين نجد : $a=-5$ و $b=1$.

2. الشعاع $\vec{n}=(-5,1,2)$ شعاع ناظم على المستوي $\mathcal{Q}$، لأنه يحقق :

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=-5-1+6=0 \text{ و } \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-5+1+4=0$$

3. معادلة المستوي $\mathcal{Q}$ هي $-5x+y+2z+2=0$.

5 بُعد نقطة عن مستقيم في الفراغ

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطة $A(3,-1,2)$ ، والمستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

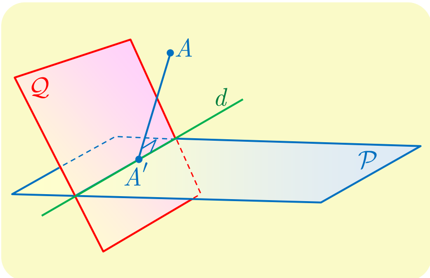
$$\mathcal{P} : 2x - y + z - 4 = 0$$
$$\mathcal{Q} : x + y + 2z - 5 = 0$$

أثبت تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، واحسب بُعد A عن المستقيم d الذي يمثّل فصلهما المشترك.

نحو الحلّ

☝ للتحقّق من تقاطع المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، نستعمل الأشعة الناظمة على كل منهما.

1. عيّن شعاعاً ناظماً $\vec{n}_1$ على $\mathcal{P}$، وشعاعاً ناظماً $\vec{n}_2$ على $\mathcal{Q}$.
2. استنتج أنّ $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان.



✌ بُعد A عن d يساوي بُعد A عن A' حيث A' هي المسقط القائم للنقطة A على d. بالطبع إذا وقعت A على d كان $A = A'$ ومن ثَمّ $AA' = 0$. تيقّن أنّ A، في الحقيقة، لا تقع على أيّ من المستويين $\mathcal{P}$ أو $\mathcal{Q}$.

إحدى الطرائق لحساب AA' تتمثّل في تعيين إحداثيات A' . تنتمي هذه النقطة إلى كلٍّ من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ فإحداثياتها تحقّق معادلتيهما. بالإضافة إلى ما سبق المستقيم (AA') عمودي على d، فإذا كان $\vec{u}$ شعاعاً موجهاً للمستقيم d فإنّ A' هي النقطة الوحيدة من d التي تُحقّق $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{u} = 0$. علينا إذن تعيين شعاع $\vec{u}$ يوجه المستقيم d، ولهذا نبحث عن نقطتين B و C من d.

1. تذكّر أن $M(x,y,z)$ تقع على d . إذا تحقّق الشرطان

$$2x - y + z - 4 = 0 \text{ و } x + y + 2z - 5 = 0$$

2. مثلاً لتعيين نقطة $B(x,y,z)$ من d . نختار $x = 0$ ونعيّن y و z الموافقتين. ولتعيين $C(x,y,z)$ من d . نختار $x = 1$ ونعيّن y و z . وهذا يتيح لنا تعيين $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.
3. أثبت أنّ (a,b,c) إحداثيات A' تُحقّق جملة المعادلات

$$\begin{cases} 2a - b + c - 4 = 0 & (1) \\ a + b + 2c - 5 = 0 & (2) \\ a + b - c = 0 & (3) \end{cases}$$

4. استنتج من (2) و (3) أنّ $3c = 5$ ثُمّ احسب إحداثيات A' ، واستنتج المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

✌ لإثبات أنّ المستويين متقاطعان نتحقق أن ناظميهما غير مرتبطين خطياً.

1. لدينا $\vec{n}_1 = (2,-1,1)$ و $\vec{n}_2 = (1,1,2)$، نلاحظ أن الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

2. لأنّ الناظمين غير مرتبطان خطياً، فالمستويان متقاطعان.

✌ بافتراض أن النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على d فيكون AA' هو البعد المطلوب.

إذا وقعت النقطة A على d، فإن $A=A'$ ومن ثمّ $AA'=0$

في الحقيقة A لا تقع على A' لأن : A لا تحقق معادلة المستوي $\mathcal{P}$ لأن : $6+1+2-4=5\neq 0$

وأيضاً A لا تحقق معادلة المستوي $\mathcal{Q}$ لأن : $3-1+4-5=1\neq 0$

إحدى الطرائق لحساب AA' تتمثل في تعين إحداثيات النقطة A' .

لما كانت النقطة A' تنتمي إلى d ، فهي نقطة مشتركة بين المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، فإحداثياتها تحقق معادلة كلٍ منهما. وبافتراض أن $A'(a,b,c)$ يكون :

$$2a-b+c-4=0 \qquad (1$$
$$a+b+2c-5=0 \qquad (2$$

ولدينا (AA') عمودي على d، فإذا كان $\vec{u}$ شعاعاً موجهاً للمستقيم d، فإن A' هي النقطة الوحيدة من d التي تحقق $\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{u}=0$. علينا تعيين شعاع $\vec{u}$ يوجه المستقيم d، ولهذا نبحث عن نقطتين B و C من d .

1. بافتراض $M(x,y,z)$ تقع على d فهي تحقق معادلتي كل من المستويين $\mathcal{P}$ و$\mathcal{Q}$:

$$2x-y+z-4=0 \quad \text{و} \quad x+y+2z-5=0$$

2. لتعيين نقطة $B(x,y,z)$ من d نختار قيمة لـ x ولتكن مثلاً $x=0$ فيصبح الشرطان المذكوران $-y+z-4=0$ و $y+2z-5=0$. وبالحل نجد $y=-1$ و $z=3$ إذن $B(0,-1,3)\in d$.

ولتعيين نقطة $C(x,y,z)$ من d نختار قيمة لـ x ولتكن مثلاً $x=1$ فيصبح الشرطان المذكوران: $-y+z-2=0$ و $y+2z-4=0$. وبالحل نجد $y=0$ و $z=2$ إذن $C(1,0,2)\in d$. ومنه نستنتج شعاعاً موجهاً للمستقيم d : $\vec{u}=\overrightarrow{BC}=(1,1,-1)$.

3. لدينا $\overrightarrow{AA'}=(a-3,b+1,c-2)$ ، ومن $\overrightarrow{AA'}\cdot\vec{u}=0$ نستنتج أن $a+b-c=0$. أصبحت إحداثيات A' تحقق المعادلات الآتية:

$$\begin{cases} 2a-b+c=4 & (1)\\ a+b+2c=5 & (2)\\ a+b-c=0 & (3)\end{cases}$$

بطرح (3) من (2) نجد $3c=5$ ومنه $c=\frac{5}{3}$ وبالتعويض في المعادلات المذكورة والحل المشترك نجد $a=\frac{4}{3}$ و $b=\frac{1}{3}$. إذن $A'(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$. ومنه بُعد النقطة A عن الفصل المشترك d يساوي:

$$AA'=\sqrt{\left(3-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{42}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

طريقة ثانية. نستنتج من المعادلتين 2) و 1) اللتين تعيّنان $A'(a,b,c)$ من d أنّ

$$2a+c=4+b \qquad (1$$
$$a+2c=5-b \qquad (2$$

إذن بالجمع نجد $a+c=3$ ومنه $a=1+b$ و $c=2-b$. وهكذا نرى أنّ $A'(1+b,b,2-b)$ حيث b عدد حقيقي، أمّا مربّع المسافة $\overline{AA'}^2$ فيحسب بدلالة b كما يأتي

$$\overline{AA'}^2=(2-b)^2+(1+b)^2+b^2=3b^2-2b+5=3\left(b-\tfrac{1}{3}\right)^2+\tfrac{14}{3}$$

إذن أقصر مسافة بين A ونقطة A' من d هي $\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$ وهي المسافة المطلوبة، أمّا النقطة A' الموافقة فنحصل عليها عندما $b=\frac{1}{3}$ وهي إذن $A'(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$.

6 تقاطع مستقيم ومستو

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$. والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$. أثبت أنّ المستقيم (AB) يقطع المستوي $\mathcal{P}$ وعيّن إحداثيات C نقطة التقاطع.

نحو الحلّ

- لإثبات وجود النقطة C علينا إثبات أنّ المستقيم (AB) لا يوازي المستوي $\mathcal{P}$. أعط شعاعاً موجّهاً للمستقيم (AB) وشعاعاً ناظماً على $\mathcal{P}$. واستنتج وجود C .
- علينا إذن تعيين (a,b,c) إحداثيات النقطة C .

1. علّل وجود ثابت k يحقّق $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.
2. استنتج عبارات a و b و c بدلالة k .
3. عيّن k اعتماداً على وقوع C في $\mathcal{P}$. واستنتج إحداثيات C .

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

: لإثبات وجود النقطة C علينا إثبات أنّ المستقيم (AB) لا يوازي المستوي $\mathcal{P}$. ولكن $\vec{n}(2,-3,1)$، و $\overrightarrow{AB}(-3,4,5)$ فنلاحظ : $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=-6-12+5=-13\neq 0$ إذن $\vec{n}$ ليس عمودياً على $\overrightarrow{AB}$.
وبالتالي (AB) لا يوازي المستوي $\mathcal{P}$، فهو قاطع له في نقطة C.

: لنفترض إحداثيات النقطة C هي (a,b,c) عندئذٍ :

1. النقاط A و B و C على استقامة واحدة، فيوجد $k\in\mathbb{R}$ يحقق : $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$.
2. لدينا $\overrightarrow{AC}=k\,\overrightarrow{AB}$ فيكون $(a-2,b+1,c)=(-3k,4k,5k)$ ومنه :
$$a=-3k+2\ ,\ b=4k-1\ ,\ c=5k$$
3. لما كانت النقطة C تقع في المستوي P، فإحداثياتها تحقق معادلته أي : $a-3b+c-5=0$ ومنه $k=\frac{2}{13}$ وبالتالي $C(\frac{20}{13},-\frac{5}{13},\frac{10}{13})$.

7 مستقيم عمودي على مستوٍ

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل نقطتين $A(2,5,3)$ و $B(-1,0,-1)$، ومستوياً $\mathcal{P}$ يقبل $\vec{u}(1,1,-2)$ و $\vec{v}(3,-1,-1)$ شعاعين موجّهين. أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي $\mathcal{P}$.

نحو الحلّ

يكفي لإثبات المطلوب أن نبرهن أنّ الشعاع $\overrightarrow{AB}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي $\mathcal{P}$.

1. أعطِ شعاعاً $\vec{w}$ موجّهاً للمستقيم (AB). وتيقّن أنّ الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً.
2. أثبت أنّ $\vec{w}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

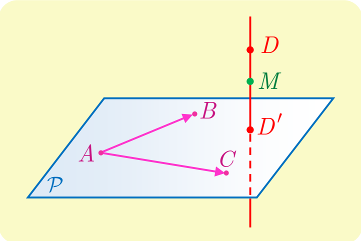
لإثبات تعامد مستقيم مع مستوٍ، نبرهن تعامد المستقيم مع مستقيمين متقاطعين في المستوي. أي نبرهن تعامد $\overrightarrow{AB}$ مع شعاعين غير مرتبطين خطياً من المستوي $\mathcal{P}$.

1. الشعاع $\vec{w}=\overrightarrow{AB}=(-3,-5,-4)$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)، ونلاحظ أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.
2. نحسب $\vec{w}\cdot\vec{u}=-3-5+8=0$ و $\vec{w}\cdot\vec{v}=-9+5+4=0$ فنجد $\vec{w}\perp\vec{u}$ و $\vec{w}\perp\vec{v}$ ومن العلاقتين السابقتين نستنتج تعامد المستقيم (AB) مع المستوي $\mathcal{P}$.

8 المسقط القائم على مستوٍ

في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل النقاط $A(1,2,0)$ و $B(0,0,1)$ و $C(1,5,5)$. يُطلب تعيين D' المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي (ABC).

نحو الحلّ



لنرسم شكلاً مبسطاً. كيف نجد إحداثيات النقطة D'؟ نعلم أنّ المستقيم (DD') عمودي على المستوي (ABC)، فهو من ثَمّ عمودي على جميع مستقيمات هذا المستوي. الفكرة، إذن، تكمن في التعبير شعاعياً عن هذا التعامد.

1. اشرح لماذا $M(x,y,z)$ تنتمي إلى (DD') إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
2. اكتب تحليلياً الشرطين السابقين.
3. استنتج أنّ (DD') هو مجموعة النقاط $M\left(x,\dfrac{62-5x}{13},\dfrac{3x-19}{13}\right)$ حيث x عددٌ حقيقي.

علينا كتابة معادلة للمستوي (ABC) لأنّ D' هي النقطة M من (DD') التي تنتمي إلى هذا المستوي. ولكن أي شعاعٍ موجّه للمستقيم (DD') هو شعاع ناظم على (ABC).

1. بإعطاء قيمتين مختلفتين للمتحوّل x أعطِ إحداثيات نقطتين مختلفتين من (DD').
2. استنتج مركّبات شعاعٍ موجّه للمستقيم (DD')، أي شعاعٍ ناظم على (ABC).
3. اكتب معادلة للمستوي (ABC).
4. عيّن قيمة x التي تجعل النقطة M من 3. عنصراً من (ABC). استنتج إحداثيات D'.

أنجزِ الحلّ الآخر واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

: علينا البحث عن إحداثيات النقطة D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC).

1. بافتراض $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (DD')، ولما كان (DD') عمودياً على المستوي (ABC)، كان $\overrightarrow{DD'}$ عمودياً على أي شعاع في المستوي (ABC). وبوجه خاص $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DM}\perp\overrightarrow{AC}$ وهذا يعني $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

2. لدينا $\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)$ و $\overrightarrow{DM}(x+11,y-9,z+4)$ إذن من $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ نستنتج

$$-x-2y+z+11=0 \qquad (1)$$

ولدينا $\overrightarrow{AC}(0,3,5)$ و $\overrightarrow{DM}(x+11,y-9,z+4)$ إذن من $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ نستنتج

$$3y+5z-7=0 \qquad (2)$$

3. نكتب العلاقتين (1) و (2)

$$\begin{aligned} -2y + z &= x - 11 \\ 3y + 5z &= 7 \end{aligned}$$

وبالحل نجد

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{3}{13}x - \tfrac{19}{13} \\ y &= -\tfrac{5}{13}x + \tfrac{62}{13} \end{aligned}$$

إذن (DD') هو مجموعة النقاط $M\left(x, -\frac{5}{13}x + \frac{62}{13}, \frac{3}{13}x - \frac{19}{13}\right)$ حيث x عددٌ حقيقي.

✌ إن أي شعاع موجه للمستقيم (DD') هو شعاع ناظم على المستوي (ABC).

1. لتعيين نقطتين من (DD') بهدف تحديد شعاع موجه للمستقيم (DD'). نعلم أنّ $D(-11, 9, -4)$ تقع على هذا المستقيم، وباختيار $x = 2$ في صيغة M نستنتج أنّ $D_1(2, 4, -1)$ تقع على (DD') أيضاً. وعليه نستنتج شعاعاً موجّهاً للمستقيم (DD')، وفي الوقت نفسه ناظماً على المستوي (ABC)، هو

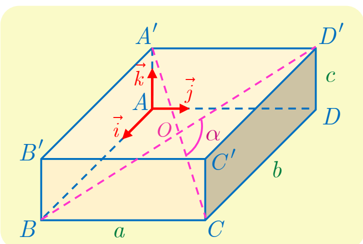
$$\vec{n} = \overrightarrow{DD_1}(13, -5, 3)$$

3. معادلة المستوي (ABC) هي إذن $13(x-1) - 5(y-2) + 3z = 0$ أو $13x - 5y + 3z = 3$.

4. لتعيين قيمة x التي تجعل النقطة M عنصراً من (ABC) أي التي تجعل M منطبقة على D'، يجب أن تحقق إحداثيات M معادلة المستوي (ABC) وبالتعويض نستنتج أنّ $x = 2$. إذن $(2, 4, -1)$ هي إحداثيات النقطة D'.

ملاحظة. يمكن أيضاً تعيين D' من الشرطين $D \neq D'$ و $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{DD'} = 0$.

قُدُماً إلى الأمام



9 $ABCDA'B'C'D'$ متوازي مستطيلات. يتقاطع قطراه $[BD']$ و $[CA']$ في O. نضع $\alpha = \widehat{COD'}$، ونفترض أنّ $BC = a$ و $CD = b$ و $DD' = c$. نهدف في هذه المسألة إلى حساب $\cos\alpha$. نختار معلماً متجانساً $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بحيث يكون $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{i}$ مرتبطين خطّياً، و $\overrightarrow{AD}$ و $\vec{j}$ مرتبطين خطّياً، وكذلك $\overrightarrow{AA'}$ و $\vec{k}$ مرتبطين خطّياً.

① أعط إحداثيات جميع رؤوس متوازي المستطيلات وإحداثيات مركزه O.

② أثبت أنّ $\cos\alpha = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$. ادرس على وجه الخصوص حالة المكعّب.

الحل لنأخذ المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ عندئذٍ :

① إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات :

$$A(0,0,0)\,,\ B(b,0,0)\,,\ C(b,a,0)\,,\ D(0,a,0)$$
$$A'(0,0,c)\,,\ B'(b,0,c)\,,\ C'(b,a,c)\,,\ D'(0,a,c)$$

النقطة O منتصف القطر $[A'C]$ فتكون إحداثياتها : $O(\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2})$.

② لمّا كان $\overrightarrow{OC}=\left(\frac{b}{2},\frac{a}{2},-\frac{c}{2}\right)$، و $\overrightarrow{OD'}=\left(-\frac{b}{2},\frac{a}{2},\frac{c}{2}\right)$ استنتجنا أنّ

$$\|\overrightarrow{OC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \|\overrightarrow{OD'}\| \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD'} = \frac{1}{4}(a^2-b^2-c^2)$$

ومنه

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD'}}{\|\overrightarrow{OC}\|\,\|\overrightarrow{OD'}\|} = \frac{a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

عندما يصبح متوازي المستطيلات مكعباً، يصبح $a=b=c$ فيكون $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

10 في الحالتين الآتيتين، احسب بُعد A عن المستوي $\mathcal{P}$:

① $A(1,2,-3)$ و $\mathcal{P}: 2x-y+z+1=0$.

② $A(-1,1,1)$ و $\mathcal{P}$ هو المستوي المار بالنقاط $B(0,1,0)$ و $C(-1,1,0)$ و $D(-1,-2,-3)$.

الحل

① بعد A عن المستوي $\mathcal{P}$ هو : $\quad \text{dist}(A,\mathcal{P}) = \dfrac{|2-2-3+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

② لنلاحظ أنّ $\overrightarrow{BA}=(-1,0,1)$ و $\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$ و $\overrightarrow{BD}=(-1,-3,-3)$. نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ غير مرتبطين خطياً، فهما يعرّفان مستوياً (BCD). كما إنّ $A\notin(BCD)$ لأنّه لا يوجد عددين α و β يحققان $\overrightarrow{BA}=\alpha\overrightarrow{BC}+\beta\overrightarrow{BD}$، (علل).

لتكن النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستوي (BCD)، فيكون AA' هو البعد المطلوب .

بافتراض إحداثيات النقطة A' هي (a,b,c)، عندئذٍ $\overrightarrow{AA'}=(a+1,b-1,c-1)$، ولما كان $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AA'}$ كان $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AA'}=0$، ومنه $a=-1$. وبالمثل لما كان $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AA'}$ كان $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AA'}=0$، ومنه $-a-3b-3c+5=0$، وبالاستفادة من كون $a=-1$ نجد أنّ $c=2-b$.

إذن أثبتنا أنّ $A'(-1,b,2-b)$ و $\overrightarrow{AA'}=(0,b-1,1-b)$، (لاحظ أنّ $b\neq1$ وإلاّ كان $A=A'$).

وأخيراً $\overrightarrow{BA'}\perp\overrightarrow{AA'}$ لأنّ $A'\in(BCD)$ إذن $(1-b)(3-2b)=0$ ومنه $b=\frac{3}{2}$، إذن $A'(-1,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ و $\overrightarrow{AA'}=(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. وخصوصاً $\text{dist}(A,(BCD)) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

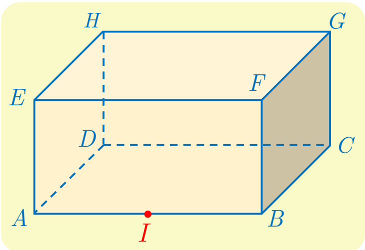
طريقة ثانية: بافتراض النقطة $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي عندئذٍ يوجد عددين حقيقيين a,b يحققان :

$\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BC} + b\overrightarrow{BD}$ ومنه : $(x,y-1,z) = (-a-b,-3b,-3b)$ ومنه نحصل على المعادلات :

$\begin{cases} x = -a-b \\ y = -3b+1 \\ z = -3b \end{cases}$ وبالحل المشترك نحصل على معادلة المستوي (BCD) : $y-z-1=0$ ومنه بعد A

عن المستوي (BCD) يساوي : $\mathrm{dist}(A,(BCD)) = \dfrac{|1-1-1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

11 $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$. لتكن النقطة I منتصف $[AB]$.



① أعط معلماً متجانساً مبدؤه A ويمكن التعبير عن إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات فيه ببساطة.

② اكتب معادلة للمستوي (IFH).

③ احسب بُعد G عن المستوي (IFH).

④ احسب بُعد G عن المستقيم (IH). أينتمي المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) إلى المستقيم (IH) ؟

الحل

① لنأخذ المعلم المتجانس $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ حيث $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \vec{j} = \overrightarrow{AD}, \vec{k} = \overrightarrow{AE}$ فتكون عندئذ إحداثيات رؤوس متوازي المستطيلات في هذه الجملة بسيطة.

② معادلة المستوي (IFH): النقطة I هي منتصف $[AB]$ فيكون $I(1,0,0)$ ولدينا $F(2,0,1)$ و $H(0,1,1)$. المعادلة المطلوبة من الشكل $ax+by+cz=d$، وتحققها إحداثيات هذه النقاط الثلاث، إذن من I نستنتج $a=d$، ومن F نستنتج $2a+c=d$، وأخيراً من H نجد $b+c=d$.

إذن $a=d$ و $c=d-2a=-d$ و $b=d-c=2d$، فمعادلة المستوي المطلوبة هي

$$x+2y-z-1=0$$

③ ومنه بعد G عن المستوي (IFH) يساوي : $\mathrm{dist}(G,(IFH)) = \dfrac{|2+2-1-1|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

④ لتكن M نقطة من المستقيم (IH) فهي إذن مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(I,1-t)$ و (H,t) حيث t عددٌ حقيقي. إذن $M(1-t,t,t)$، تنطبق M على المسقط القائم للنقطة G على (IH) إذا وفقط إذا تحقق الشرط $\overrightarrow{GM} \perp \overrightarrow{IH}$ أي $\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{IH}=0$ ولكن $\overrightarrow{GM} = (-1-t,t-1,t-1)$

و $\overrightarrow{IH}=(-1,1,1)$ فشرط التعامد السابق يكافئ $3t-1=0$، ومنه تكون $M(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ هي المسقط القائم للنقطة G على المستقيم (IH)، ومن ثَمّ

$$\text{dist}(G,(IH))=GM=\sqrt{(2-\tfrac{2}{3})^2+(1-\tfrac{1}{3})^2+(1-\tfrac{1}{3})^2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

لاحظ أنّ $\text{dist}(G,(IH))\neq\text{dist}(G,(IFH))$، إذن المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) لا ينتمي إلى المستقيم (IH).

12 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ ، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P}: x-y+z=0$$
$$\mathcal{Q}: 3x+z-1=0$$

احسب بُعد A عن المستقيم d الذي يمثّل الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

الحل

لتكن $M(a,b,c)$ نقطة من الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، عندئذٍ إحداثياتها تحقق معادلة كلٍ منهما:

$$3a+c-1=0 \quad \text{و} \quad a-b+c=0$$

ومنه $c=1-3a$ و $b=c+a=1-2a$، إذن إحداثيات M هي $(a,1-2a,1-3a)$، وعليه يكون

$$\overline{MA}^2=(a-2)^2+(-1-2a)^2+(2-3a)^2=14a^2-12a+9$$
$$=14\left(a-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{45}{7}$$

وعليه أقصر مسافة بين A والمستقيم d هي $3\sqrt{\frac{5}{7}}$، وتحقّقها النقطة $(\frac{3}{7},\frac{1}{7},-\frac{2}{7})$ من d. إذن

$$\text{dist}(A,d)=3\sqrt{\frac{5}{7}}$$

13 نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطة $A(2,1,2)$ ، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P}: x+y-2z-1=0$$
$$\mathcal{Q}: x+y+z=0$$

① أثبت أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان.

② احسب بُعد A عن كلٍّ من المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

③ استنتج بُعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

الحل

① المستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان، لأنّ شعاعيهما الناظمين $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,-2)$ و $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,1,1)$ متعامدان كما يبين حساب جدائهما السلمي.

② $\text{dist}(A,\mathcal{P})=\dfrac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ و $\text{dist}(A,\mathcal{Q})=\dfrac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

③ لتكن $A_{\mathcal{P}}$ المسقط القائم للنقطة A على $\mathcal{P}$ وكذلك لتكن $A_{\mathcal{Q}}$ المسقط القائم للنقطة A على $\mathcal{Q}$، ولتكن A' المسقط القائم للنقطة A على الفصل المشترك d للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$. فيكون $(AA_{\mathcal{P}})$ عمودياً على $\mathcal{P}$ فهو إذن عمودي على $(A'A_{\mathcal{P}})$ (لأنّ الأخير محتوى في $\mathcal{P}$). لما كان $d \perp (AA')$ و $d \perp (AA_{\mathcal{P}})$ لأنّ d محتوى في $\mathcal{P}$ استنتجنا أنّ d عمودي على المستوي $(AA_{\mathcal{P}}A')$ وبوجه خاص $d \perp (A_{\mathcal{P}}A')$، ونبرهن بالمثل أنّ $d \perp (A_{\mathcal{Q}}A')$. نستنتج من ذلك أنّ النقاط A و $A_{\mathcal{P}}$ و A' و $A_{\mathcal{Q}}$ تقع في مستوٍ واحد هو المستوي المار بالنقطة A والعمودي على d. لأنّ $\overrightarrow{AA_{\mathcal{P}}}$ عمودي على $\mathcal{P}$ فهو شعاع ناظم على $\mathcal{Q}$، وكذلك يكون $\overrightarrow{AA_{\mathcal{Q}}}$ شعاعاً ناظماً على $\mathcal{P}$، ولكنّ هذين المستويين متعامدان إذن $\overrightarrow{AA_{\mathcal{P}}} \perp \overrightarrow{AA_{\mathcal{Q}}}$ فالرباعي $AA_{\mathcal{P}}A'A_{\mathcal{Q}}$ مستطيل لأنّ فيه ثلاث زوايا قائمة. وعليه

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{AA_{\mathcal{P}}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AA_{\mathcal{Q}}}\right\|^2\\ &= \operatorname{dist}^2(A,\mathcal{P}) + \operatorname{dist}^2(A,\mathcal{Q})\\ &= \frac{25}{3} + \frac{2}{3} = 9\end{aligned}$$

14 في كل من الحالات الآتية، نُعطى نقطتين A و B والمعادلة الديكارتية لمستوٍ $\mathcal{P}$. تيقّن في كل حالة أنّ المستقيم (AB) ليس عمودياً على $\mathcal{P}$. ثُمّ أعطِ معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ والمار بالنقطتين A و B.

① $\mathcal{P} : x + y + z = 0$، $A(1,0,0)$، $B(0,1,1)$

② $\mathcal{P} : x + z = 0$، $A(1,2,0)$، $B(1,0,1)$

③ $\mathcal{P} : 2x + z - 4 = 0$، $A(2,3,-1)$، $B(1,1,1)$

الحل

لإثبات أن المستقيم (AB) لا يتعامد مع المستوي $\mathcal{P}$ يكفي أن نبرهن أن $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}$ غير مرتبطين خطياً.

① $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ و $A(1,0,0)$، $B(0,1,1)$.

الشعاعان $\overrightarrow{AB}(-1,1,1)$ و $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,1)$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة، فالمستقيم (AB) ليس عمودياً على المستوي $\mathcal{P}$.

للمستوي $\mathcal{Q}$ معادلة من الشكل $ax + by + cz = d$ حيث الأعداد (a,b,c,d) ليست جميعها معدومة. ولأن $\mathcal{Q}$ يمر بالنقطتين A و B فإنّ إحداثياتهما تحقق معادلته، ومنه $b + c = d$ و $a = d$، ومن تعامد الناظمين $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,1)$ و $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(a,b,c)$ نستنتج أيضاً أنّ $a + b + c = 0$. إذن $a = d = 0$ و $b + c = 0$. فمعادلة $\mathcal{Q}$ هي $b(y - z) = 0$. ولأنّ $b \neq 0$ نجد $\mathcal{Q} : y - z = 0$.

② في هذه الحالة نجد بأسلوب مماثل لما سبق $\mathcal{Q} : 2x - y - 2z = 0$.

③ في هذه الحالة نجد بأسلوب مماثل لما سبق $\mathcal{Q} : -2x + 5y + 4z - 7 = 0$.

15 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q}: x+y+z+1=0 \quad \text{و} \quad \mathcal{P}: x-2y+3z-5=0$$

① علّل كون المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعين. نرمز بالرمز d إلى فصلهما المشترك.

② أثبت أنّ d هو مجموعة النقاط $M\left(1-\frac{5}{3}z, \frac{2}{3}z-2, z\right)$ عندما تتحوّل z في $\mathbb{R}$.

③ أعطِ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d.

④ اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{R}$ العمودي على كل من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ ويمر بالنقطة $A(2,5,-2)$.

الحل

لدينا $P: x-2y+3z-5=0$ و $Q: x+y+z+1=0$

① الناظمان $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,-2,3)$ و $\vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,1,1)$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالمستويان $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متقاطعان.

② تنتمي $M(x,y,z)$ إلى المستقيم d، إذا وفقط إذا حققت إحداثياتها معادلتي المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ أي :

$$\begin{cases} x-2y=5-3z & (1) \\ x+y=-1-z & (2) \end{cases}$$

وبالحل نجد $y=\frac{2}{3}z-2$ و $x=1-\frac{5}{3}z$. إذن إحداثيات d هي مجموعة النقاط $M\left(1-\frac{5}{3}z, \frac{2}{3}z-2, z\right)$ عندما تتحوّل z في $\mathbb{R}$.

③ نختار نقطتين من بإعطاء قيمتين للعدد z. في حالة $z=0$ نجد $A(1,-2,0)$ من d، وفي حالة $z=3$ نجد $B(-4,0,3)$ من d. ومنه الشعاع الموجّه $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-5,2,3)$ للمستقيم d.

④ المستوي $\mathcal{R}$ عمودي على كل من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$، إذن هو عمودي على فصلهما المشترك d ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً ناظماً. فمعادلته من الشكل $-5x+2y+3z=k$، وتتعين k بشرط مرور $\mathcal{R}$ بالنقطة $A(2,5,-2)$، فنجد أنّ $d=-26$، ومعادلة $\mathcal{R}$ هي $5x-2y-3z-6=0$.

16 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط:

$$A(2,1,3) \text{ و } B(1,0,-1) \text{ و } C(4,0,0) \text{ و } D(0,4,0) \text{ و } E(1,-1,1)$$

① أثبت أنّ النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

② أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE).

الحل

① نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CD}=(-4,4,0)$ و $\overrightarrow{CE}=(-3,-1,1)$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

② لإثبات أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CED) نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-4)$ ونحسب

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(-1)(-4)+(-1)(4)+0=0$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE}=(-1)(-3)+(-1)(-1)+(-4)(1)=0$$

أي $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CE}$، فالمستقيم (AB) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (CED) وهو من ثَمّ عمودي على (CED).

17 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقاط:

$A(2,4,3)$ و $B(4,-2,3)$ و $C(1,-1,1)$ و $D(3,3,-3)$

① أثبت أنّ النقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

② عيّن إحداثيات المسقط القائم D' للنقطة D على المستوي (ABC).

الحل

① نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AB}=(2,-6,0)$ و $\overrightarrow{AC}=(-1,-5,-2)$ غير مرتبطين خطياً فالنقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة.

② النقطة D' نقطة من المستوي (ABC) فيوجد عددان x و y يحقّقان $\overrightarrow{AD'}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$، ومن ثَمّ

$$\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$$

لتعيين x و y نستفيد من كون $\overrightarrow{DD'}$ عمودياً على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فنعبر عن ذلك باستعمال الجداء السلمي:

$$0=\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$0=\overrightarrow{DD'}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$$

وهذا يكافئ

$$\begin{cases} x\overrightarrow{AB}^2+y\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\\ x\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\end{cases}$$

ولكن $\overrightarrow{AB}=(2,-6,0)$، و $\overrightarrow{AC}=(-1,-5,-2)$، و $\overrightarrow{AD}=(1,-1,-6)$ كما إنّ

$\overrightarrow{AB}^2=40$ و $\overrightarrow{AC}^2=30$ و $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=28$ و $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=8$ و $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

فالجملة السابقة تكافئ

$$\begin{cases} 40x + 28y = 8 \\ 28x + 30y = 16 \end{cases}$$

فإذا طرحنا الثانية من ضعفي الأولى وجدنا $52x + 26y = 0$ ومنه $y = -2x$، وبالتعويض في الأولى مثلاً نجد $x = -\frac{1}{2}$ ومن ثَمّ $y = 1$. وأخيراً لأنّ $\overrightarrow{AD'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ نستنتج أنّ

$$\begin{bmatrix} x_{D'} - 2 \\ y_{D'} - 4 \\ z_{D'} - 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ومن ثَمّ $D'(0,2,1)$.

18 نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $\Omega(2,-1,3)$ و $A(-1,0,1)$. نهدف إلى كتابة معادلة للكرة S التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A .

① احسب ΩA.

② لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ احسب ΩM^2 بدلالة x و y و z .

③ أثبت أنّ « $M(x,y,z)$ نقطةٌ من S » إذا وفقط إذا تحقَّق الشرط « $\Omega M^2 = \Omega A^2$ » واستنتج معادلة للكرة S المطلوبة.

الحل

① $\Omega A = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$.

② لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ فيكون $\Omega M^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2$

③ نصف قطر الكرة المطلوبة هو $R = \Omega A = \sqrt{14}$. إذن $M \in S$ إذا وفقط إذا $\Omega M = R$ وهذا يكافئ الشرط $\Omega A^2 = \Omega M^2$، ومنه معادلة S هي $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 14$.

19 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω وتمر بالنقطة A .

① $\Omega(0,0,1)$ و $A(1,1,1)$.　　② $\Omega(0,5,-1)$ و $A(1,-2,3)$.

الحل (التمرين السابق)

① : $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$.

② : $x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 66$.

20 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. اكتب معادلة الكرة التي مركزها Ω ونصف قطرها r .

① $\Omega(1,2,3)$ و $r = 2$.　　② $\Omega(0,5,-1)$ و $r = \sqrt{3}$.

الحل

① : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

② : $x^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 3$.

21 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في الحالات الآتية:

① $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$ ② $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$

③ $x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$ ④ $x^2+y^2+z^2-4x+5=0$

الحل

نرد كل معادلة إلى الصيغة $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=\alpha$.

① تصبح المعادلة : $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$. فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل كرة مركزها $\Omega=(1,-3,0)$ ونصف قطرها $r=2\sqrt{3}$.

② تصبح المعادلة : $(x-5)^2+y^2+(z+1)^2=0$. فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحققها هي النقطة $\Omega=(5,0,-1)$.

③ تصبح المعادلة : $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$. فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ تمثل كرة مركزها $\Omega=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ ونصف قطرها $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

④ تصبح المعادلة : $(x-2)^2+y^2+z^2=-1$، فمجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق هذه المعادلة مجموعة خالية من النقاط .

22 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقطة $A(2,-2,2)$ والمستوي $\mathcal{P}: x+2y+3z=5$. اكتب معادلة للكرة التي مركزها A وتمس المستوي $\mathcal{P}$.

الحل

الكرة تمس المستوي $\mathcal{P}$ إذن بعد مركزها عن المستوي يساوي نصف قطر الكرة.

$$R=\operatorname{dist}(A,\mathcal{P})=\frac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

ومعادلة الكرة المطلوبة هي $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{14}$.

23 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$.

① أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

② ما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$؟

الحل

لدينا النقطتان $A(2,1,2)$ و $B(-2,0,2)$

① النقطة $M(x,y,z)$ تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ إذا وفقط إذا كان $\begin{bmatrix}2-x\\1-y\\2-z\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2-x\\0-y\\2-z\end{bmatrix}=0$.

ومنه $x^2-4+y^2-y+(z-2)^2=0$.

② تكتب المعادلة السابقة بعد الإصلاح بالصيغة: $x^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-2)^2=\frac{17}{4}$ ، وهي معادلة كرة مركزها $A(0,\frac{1}{2},2)$ ، ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

24 نتأمّل نقطتين مختلفتين A و B في الفراغ. نضع $r=\dfrac{1}{2}AB$ ، ونعرّف I منتصف $[AB]$.

① أثبت أنّه في حالة نقطة ما M من الفراغ تتحقّق المساواة : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-r^2$.

② أثبت أنّ مجموعة نقاط الفراغ التي تحقّق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r ، وهي أيضاً الكرة التي تقبل $[AB]$ قطراً فيها.

الحل

① لدينا I منتصف $[AB]$ و $r=\dfrac{1}{2}AB=IA$ ومنه

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})$$
$$=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=\overrightarrow{MI}^2-r^2$$

② إذن $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ تكافئ $MI^2=r^2$ وهذا يعني أنّ مجموعة النقاط M التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ هي الكرة التي مركزها I ونصف قطرها r ويكون من ثَمّ AB قطر فيها.

25 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(0,-1,-1)$.

① أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{E}$ المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق $MA=2MB$.

② ما طبيعة المجموعة $\mathcal{E}$؟

③ أعطِ معادلة للمجموعة $\mathcal{P}$ المكوّنة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تُحقّق $MA=MB$.

④ ما طبيعة المجموعة $\mathcal{P}$؟

الحل

① تحقق النقطة $M(x,y,z)$ الشرط $MA=2MB$ إذا وفقط إذا كان $MA^2=4MB^2$ وهذا يكافئ

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4\left(x^2+(y+1)^2+(z+1)^2\right)$$

الذي يكتب بعد الإصلاح بالصيغة $x^2+y^2+z^2+\frac{2}{3}x+\frac{10}{3}y+\frac{10}{3}z+\frac{5}{3}=0$.

② وهي تكافئ بعد الإتمام إلى مربعات كاملة $(x+\frac{1}{3})^2+(y+\frac{5}{3})^2+(z+\frac{5}{3})^2=4$. إذن مجموعة النقاط M التي تحقق الشرط $MA=2MB$ هي الكرة التي مركزها $\Omega(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3})$ ونصف قطرها يساوي $R=2$.

③ تحقق النقطة $M(x,y,z)$ الشرط $MA=MB$ إذا وفقط إذا كان $MA^2=MB^2$ وهذا يكافئ

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=x^2+(y+1)^2+(z+1)^2$$

الذي يكتب بعد الإصلاح: $2x+4y+4z-1=0$.

④ المعادلة : $2x+4y+4z-1=0$ تمثل معادلة مستو . إذن مجموعة النقاط M التي تحقق الشرط $MA=MB$ هي مستو، وهو في الحقيقة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

26 نتأمّل نقطتين مختلفتن A و B في الفراغ. وعدداً موجباً غير معدوم k. نعرّف $\mathcal{E}_k$ مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقّق الشرط $AM=k\cdot BM$.

❶ حالة $k=1$.

① لتكن I منتصف $[AB]$ أثبت أنّ

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=\frac{MA^2-MB^2}{2}$$

② استنتج أنّ $\mathcal{E}_1$ هي المستوي $\mathcal{P}$ المار بمنتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ والعمودي على (AB). (المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$).

❷ حالة $k\neq 1$.

① لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و (B,k)، ولتكن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-k)$. أثبت أنّ

$$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{1-k^2}(\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB})=\frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2}$$

② استنتج أنّ $\mathcal{E}_k$ هي الكرة S التي تقبل القطعة المستقيمة $[IJ]$ قطراً فيها.

الحل

❶ حالة $k=1$.

① لمّا كان I منتصف $[AB]$ كان $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})$ وكان أيضاً $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}$ ومنه

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2\right)=\frac{MA^2-MB^2}{2}$$

وهو المطلوب .

② هنا $M\in\mathcal{E}_1$ يُكافئ الشرط $MA=MB$، وهذا يُكافئ استناداً إلى ما سبق $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{MI}=0$، أي إنّ M تنتمي إلى المستوي المار بالنقطة I والعمودي على الشعاع $\overrightarrow{AB}$. فهو إذن المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

❷ حالة $k\neq1$

① لأنّ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و (B,k) فإن : $\overrightarrow{IA}+k\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ إذن

$$\overrightarrow{MA}+k\overrightarrow{MB}=(1+k)\overrightarrow{MI} \qquad (1)$$

ولأن J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,-k)$ فإن : $\overrightarrow{JA}-k\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ إذن

$$\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MB}=(1-k)\overrightarrow{MJ} \qquad (2)$$

من (1) و (2) نجد $(1-k^2)\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=(\overrightarrow{MA}+k\,\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-k\,\overrightarrow{MB})$ ومنه

$$\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{1-k^2}(MA^2-k^2MB^2)=\frac{MA^2-k^2MB^2}{1-k^2}$$

② لنا $M\in\mathcal{E}_k$ يُكافئ الشرط $MA=kMB$ ، وهذا يُكافئ استناداً إلى ما سبق $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$ ، وهذا يعني أنّ M تنتمي إلى الكرة التي قطرها $[IJ]$، استناداً إلى ما أثبتناه في التمرين 24 .

27 في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نتأمّل النقاط

$A(4,0,-3)$ و $B(2,2,2)$ و $C(3,-3,-1)$ و $D(0,0,-3)$.

① أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_1$ للقطعة المستقيمة $[AB]$.

② أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_2$ للقطعة المستقيمة $[BC]$.

③ أعطِ معادلة للمستوي المحوري $\mathcal{P}_3$ للقطعة المستقيمة $[CD]$.

④ علّل لماذا إذا تقاطعت المستويات $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ في نقطة واحدة Ω. كانت Ω مركزاً لكرة تمرّ بالنقاط A و B و C و D .

⑤ بحلِّ جملة من ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل أثبت أنّ المستويات $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ و $\mathcal{P}_3$ تتقاطع في نقطة واحدة Ω.

⑥ احسب نصف قطر الكرة $\mathcal{S}$ المارة بالنقاط A و B و C و D .

⑦ اكتب معادلة للكرة $\mathcal{S}$ المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$.

الحل

لدينا النقاط : $A(4,0,-3)$ و $B(2,2,2)$ و $C(3,-3,-1)$ و $D(0,0,-3)$.

① إذا كانت M منتصف القطعة $[AB]$ كانت إحداثياتها $M(3,1,-\frac{1}{2})$. وكان $\overrightarrow{AB}(-2,2,5)$ شعاعاً ناظماً على المستوي المحوري $\mathcal{P}_1$. فتكون معادلة المستوي $\mathcal{P}_1$ هي :

$$-2(x-3)+2(y-1)+5(z+\tfrac{1}{2})=0$$

أي $\mathcal{P}_1 : -4x+4y+10z+13=0$.

② تنتمي $M(x,y,z)$ إلى $\mathcal{P}_2$ إذا وفقط إذا كان $MB^2=MC^2$ وهذا يكافئ

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=(x-3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2$$

وهذا يكافئ بعد الإصلاح $2x-10y-6z-7=0$ وهي معادلة $\mathcal{P}_2$.

③ نجد بمثل ما سبق معادلة $\mathcal{P}_3 : -3x+3y-2z+5=0$.

④ إذا تقاطعت المستويات الثلاثة في نقطة Ω فهي تُحقّق $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ وهي إذن مركز الكرة المارة بالنقاط A و B و C و D.

⑤ علينا إذن حل جمل المعادلات

$$\begin{aligned} 4x - \ 4y - 10z &= 13 \\ 2x - 10y - \ 6z &= 7 \\ 3x - \ 3y + \ 2z &= 5 \end{aligned}$$

من الأولى والأخيرة نجد $x - y = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}z = \frac{13}{4} + \frac{5}{2}z$ ومنه $z = -\frac{1}{2}$ و $x - y = 2$. وبتعويض قيمة z و $x = y + 2$ في الثانية نجد $y = 0$ ومن ثَمّ $x = 2$. إذن $\Omega(2, 0, -\frac{1}{2})$.

⑥ نصف قطر الكرة يساوي مثلاً $R = \Omega D$ إذن $R = \sqrt{4 + 0 + (-3 + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{41}{4}}$.

⑦ إذن معادلة الكرة المارة برؤوس رباعي الوجوه $ABCD$ هي : $(x - 2)^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{41}{4}$.

3

المستقيمات والمستويات في الفراغ

1. المستقيم والمستوي بصفتهما مراكز أبعاد متناسبة
2. التمثيلات الوسيطية
3. تقاطع مستقيمات ومستويات
4. تقاطع ثلاثة مستويات

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعيين المستقيم والمستوي بصفتهما مراكز أبعاد متناسبة.
- التمثيل الوسيطي للمستقيم والمستوي.
- تقاطع المستقيمات والمستويات، وحل جمل المعادلات الخطية.

تَدرَّبْ صفحة 80

① النقطتان A و B نقطتان مختلفتان. في الحالات الآتية عيّن t التي تحقّق $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

❶ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,-2)$ و $(B,1)$.

❷ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,3)$.

الحل

❶ $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}$. ❷ $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

② أعطِ في الحالات الآتية α و β لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,α) و (B,β).

❶ $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$ ❷ $2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ❸ $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

الحل

❶ $\alpha = 5, \beta = 2$ ❷ $\alpha = 3, \beta = -1$ ❸ $\alpha = 4, \beta = -3$.

③ في الشكل الآتي التدريجات متساوية. عبّر في كل حالة عن كل واحدة من النقاط A و B و C بصفتها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين الأخريين.

❶ 

❷ 

الحل

❶ $\left.\begin{array}{r} 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0} \\ 2\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CB} = \vec{0} \end{array}\right\}$

❷ $\left.\begin{array}{r} 4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ 6\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} \\ 6\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CB} = \vec{0} \end{array}\right\}$

④ نتأمّل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي، جِدْ عددين x و y بحيث $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

❶ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

❷ M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,2)$.

الحل

❶ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. ❷ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

⑤ نتأمّل مثلثاً ABC. في كل حالة مما يأتي، جِدْ الأعداد α و β و γ لتكون M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ).

❶ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ❷ $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

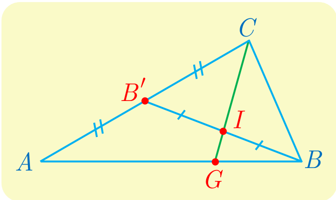
❸ $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$ ❹ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

الحل

❶ $\alpha = 0, \beta = 2, \gamma = -1$ ❷ $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -1$

❸ $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = -4$ ❹ $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$

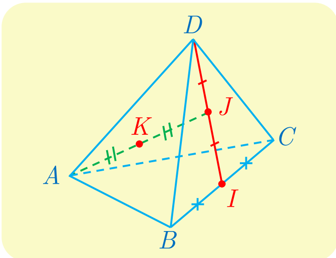
⑥ انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال α و β و γ لتكون I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ).
واستنتج λ التي تحقق $\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.



الحل

$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1$ و $\lambda = 2$.

⑦ انطلاقاً من الشكل المجاور. جد الأمثال α و β و γ و δ لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ) و (D,δ).



الحل

مثلاً في حالة نقطة كيفية M من الفراغ لدينا

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MK} &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MJ} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{MD} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MI}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{4}\overrightarrow{MD} + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right)\\
8\overrightarrow{MK} &= 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}
\end{aligned}$$

ومنه $\alpha = 4, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 2$.

⑧ $ABCD$ رباعي وجوه. استعمل الخاصة التجميعية لتعيين موضع النقطة G في الحالات الآتية:

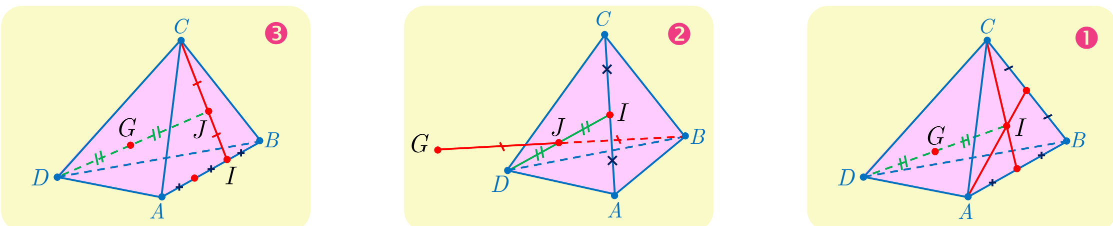
❶ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$.

❷ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,2)$ و $(C,-1)$ و $(D,-2)$.

❷ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(C,3)$ و $(D,6)$.

الحل

يبيّن الرسم الآتي حالات الإنشاء الثلاث:



.

تَدرَّبْ صفحة 84

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① أعط معادلة وسيطية للمستقيم d:

❶ المستقيم d يمر بالنقطة $A(-1,2,0)$ وموجه بالشعاع $\vec{u}(0,1,-1)$.

❷ $d=(AB)$ حيث $A(2,1,-1)$ و $B(3,-1,1)$.

الحل

❶ $\{(x,y,z)=(-1,2+t,-t),\ t\in\mathbb{R}$

❷ $\{(x,y,z)=(2+t,1-2t,-1+2t),\ t\in\mathbb{R}$

② نتأمّل النقطتين $A(-2,1,0)$ و $B(2,3,1)$. أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من

❶ المستقيم (AB).

❷ القطعة المستقيمة $[AB]$.

❸ نصف المستقيم $[AB)$.

❹ نصف المستقيم $[BA)$.

الحل

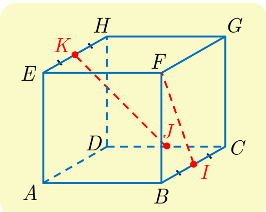
❶ $\begin{cases} x=-2+4t, \\ y=1+2t, \\ z=t. \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

❷ $\begin{cases} x=-2+4t, \\ y=1+2t, \\ z=t. \end{cases} \quad t\in[0,1]$

❸ $\begin{cases} x=-2+4t, \\ y=1+2t, \\ z=t. \end{cases} \quad t\geq 0$

❹ $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=3+2t, \\ z=1+t. \end{cases} \quad t\leq 0$

③ $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1. فيه I منتصف $[BC]$ و J منتصف $[CD]$ و K منصف $[EH]$. نتأمّل المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



❶ أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من (IK) و (FJ).

❷ أيتقاطع المستقيمان (IK) و (FJ)؟ هل تقع النقاط I و J و K و F في مستو واحد؟

الحل

❶ لمّا كان $I(1,\frac{1}{2},0)$ و $K(0,\frac{1}{2},1)$ كان $\overrightarrow{IK}(-1,0,1)$، ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم (IK):

$$(IK):\ \begin{cases} x=-t+1 \\ y=1/2 \\ z=t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

وبالمثل لمّا كان $J(\frac{1}{2},1,0)$ و $F(1,0,1)$ كان $\overrightarrow{FJ}(-\frac{1}{2},1,-1)$، ومنه التمثيل الوسيطي للمستقيم (JF):

$$(JF):\ \begin{cases} x=-t/2+1 \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

❷ يتقاطع المستقيمان (JF) و (IK) إذا وُجد s و t بحيث

$$-s/2+1=-t+1$$
$$s=1/2$$
$$-s+1=t$$

من المعادلتين الثانية والثالثة نجد $s=t=\frac{1}{2}$، ولكنّ هاتين القيمتين لا تحققان المعادلة الأولى، إذن المستقيمان (JF) و (IK) غير متقاطعين. وهما أيضاً غير متوازيين لأنّ الشعاعين $\overrightarrow{JF}$ و $\overrightarrow{IK}$ غير مرتبطين خطّياً فهما لا يقعان في مستو واحد. إذن لا تقع النقاط I و J و K و F في مستو واحد لأنّ المستقيمين (IK) و (FJ) غير متقاطعين وغير متوازيين.

تَدرَّبْ صفحة 87

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

① في الحالات الآتية تحقّق من تقاطع المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ وأعطِ تمثيلاً وسيطياً لفصلهما المشترك.

❶ $\mathcal{P}_1: x+y=2$ و $\mathcal{P}_2: x+z=1$.

❷ $\mathcal{P}_1: -x+y+z=3$ و $\mathcal{P}_2: 2x-y+2z=1$.

الحل

❶ المستويان متقاطعان لأنّ النقطة $M(1,1,0)$ (مثلاً) تنتمي إلى كلّ منهما. أمّا التمثيل الوسيطي للفصل المشترك فيمكن استنتاجه بحلّ جملة معادلتيّ المستويين بعد اختيار $x=t$ وسيطاً:

$$\begin{cases} x=t \\ y=-t+2, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-t+1 \end{cases}$$

❷ المستويان متقاطعان لأنّ النقطة $M(4,7,0)$ (مثلاً) تنتمي إلى كلّ منهما. أمّا التمثيل الوسيطي للفصل المشترك فيمكن استنتاجه بحلّ جملة معادلتيّ المستويين بعد اختيار $z=t$ وسيطاً:

$$\begin{cases} x=-3t+4 \\ y=-4t+7, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

② في الحالات الآتية، أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d' وبيّن إذا كان $d \parallel d'$ أو كان d منطبقاً على d'.

❶ $d:\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=2t-1 \end{cases}$، $d':\begin{cases} 3x-y-2z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$

❷ $d:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2 \\ z=t+1 \end{cases}$، $d':\begin{cases} x+y-2z=3 \\ x-y-2z=5 \end{cases}$

الحل

❶ $d':\begin{cases}x= t\\ y= -t+1\\ z= 2t-1\end{cases}$ هنا لدينا $d \parallel d'$ ولكنّ المستقيمين غير منطبقين لأنه ليس هناك نقاط مشتركة.

❷ $d':\begin{cases}x =2t+4\\ y = -1\\ z =t\end{cases}$ هنا أيضاً لدينا $d \parallel d'$ ولكن المستقيمين غير منطبقين لأنه ليس هناك نقاط مشتركة.

③ في الحالات الآتية أثبت تقاطع المستقيم d مع المستوي $\mathcal{P}$ وعين إحداثيات نقطة التقاطع.

❶ $d=(AB)$ حيث $A(-1,2,3)$ و $B(1,2,-1)$ ، و $\mathcal{P}: x+y+z=1$.

❷ d يمر بالنقطة $A(2,-1,0)$ ويوجهه الشعاع $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ و $\mathcal{P}: \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{6}=1$.

الحل

❶ نجد تمثيلاً وسيطيّاً للمستقيم d

$$d:\begin{cases}x=2t-1\\ y=2\\ z=-4t+3\end{cases}$$

لإيجاد نقاط التقاطع نعوّض في معادلة المستوي فنجد نقطة واحدة هي $(2,2,-3)$.

❷ نجد تمثيلا وسيطيّاً للمستقيم d

$$d:\begin{cases}x=\quad t+2\\ y=-2t-1\\ z=0\end{cases}$$

لإيجاد نقاط التقاطع نعوّض في معادلة المستوي فنجد نقطة واحدة هي $(0,3,0)$.

④ في الحالات الآتية، ادرس تقاطع المستقيم d والمستوي $\mathcal{P}$.

❶ $d:\begin{cases}x= 2t-1\\ y= t\\ z= 1-3t\end{cases}$, $\mathcal{P}: x-y+z=1$

❷ $d:\begin{cases}x= s+1\\ y=2s+1\\ z=8s-3\end{cases}$, $\mathcal{P}: 2x+3y-z=0$

الحل

❶ يتقاطع المستقيم والمستوي في نقطة واحدة هي $\left(-2,-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.

❷ بتعويض قيم x و y و z في التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي نجد أنّ المستقيم والمستوي لايتقاطعان فهما متوازيان.

تَدرَّبْ صفحة 90

نُعطى في هذه الفقرة معلماً متجانساً $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. في كل من الحالات الآتية نعطي معادلات ثلاثة مستويات، حلّ الجملة الخطية الموافقة وبيّن إذا كانت هذه المستويات تشترك في نقطة فقط، أو في مستقيم مشترك، أو لا تشترك بأية نقطة:

❶ $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 5x + y + z = -5 \\ \mathcal{P}_2 : & 2x + 13y - 7z = -1 \\ \mathcal{P}_3 : & x - y + z = 1 \end{cases}$

❷ $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & x - 2y - 3z = 3 \\ \mathcal{P}_2 : & 2x - y - 4z = 7 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 3y - 5z = 8 \end{cases}$

❸ $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x - y + 3z = 0 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z = 0 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$

❹ $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x - y + 3z = 2 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 5z = 3 \end{cases}$

❺ $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x - y + 3z = 2 \\ \mathcal{P}_2 : & x + 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 5z = 4 \end{cases}$

❻ $\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & x + y + z = 1 \\ \mathcal{P}_2 : & x - 2y + z = 1 \\ \mathcal{P}_3 : & 3x - 4y + 3z = -1 \end{cases}$

الحل

بحلّ الجملة الموافقة في كلّ مرّة نجد أنّه في الحالتين ❶ و ❷ تتقاطع المستويات الثلاثة في نقطة واحدة. وفي الحالتين ❸ و ❹ تتقاطع المستويات الثلاثة في مستقيم معطى بتمثيل وسيطي. وفي الحالتين الأخيرتين لا تتقاطع المستويات الثلاثة بأيّة نقطة وذلك وفق ما يأتي :

❶ $x = -8, y = 13, z = 22$

❷ $x = 2, y = 1, z = -1$

❸ $x = 7t, y = -t, z = -5t, t \in \mathbb{R}$

❹ $x = 7t, y = \frac{1}{7} - t, z = \frac{5}{7} - 5t, t \in \mathbb{R}$.

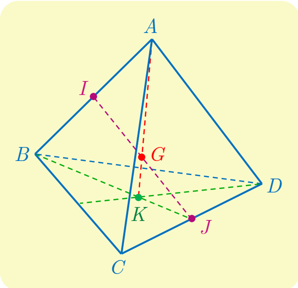
❺ $\{\ \}$

❻ $\{\ \}$

أنشطة

نشاط 1 مستقيمات متقاطعة في الفراغ

❶ خواص عامة خواص رباعي الوجوه



ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما. ولتكن G مركز الأبعاد المتناسبة لرؤوسه مزوّدة جميعها بالأمثال 1 ذاتها. وليكن K مركز ثقل المثلث BCD. وكذلك ليكن I و J منتصفي $[AB]$ و $[CD]$ بالترتيب.

① نسمي القطعة المستقيمة التي تصل الرأس بمركز ثقل الوجه المقابل **متوسطاً** في رباعي الوجوه. نهدف إلى إثبات تلاقي المتوسطات جميعها في نقطة واحدة هي النقطة G. ولهذا نسمّي G مركز ثقل رباعي الوجوه.

a. استعمل الخاصة التجميعية لتثبت أنّ G تقع على $[AK]$ وأنّ $AG = \frac{3}{4}AK$.

b. أثبت بالمثل أنّ G تقع على المتوسطات الثلاثة الأخرى.

② نهدف في هذا السؤال إلى إثبات أنّ القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات الأحرف المتقابلة في رباعي الوجوه تتلاقى أيضاً في G، وأنّ G تقع في منتصف كل منها.

a. أثبت أنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I;2)$ و $(J;2)$. واستنتج أنّ G تقع في منتصف $[IJ]$.

b. أثبت صحة الخاصة المشار إليها في ②.

❷ مسألة مستقيمات متقاطعة

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه ما. ولنعرّف النقاط P و Q و R و S كما يأتي :

$$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \text{ و } \overrightarrow{BR} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BA} \text{ و } \overrightarrow{DS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$$

نريد إثبات تلاقي المستقيمين (PQ) و (RS).

①a. أثبت أنّ P هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B;4)$ و $(C;1)$. وأنّ Q هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A;1)$ و $(D;3)$.

b. ليكن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A;1)$ و $(B;4)$ و $(C;1)$ و $(D;3)$. بين أنّ G تقع على المستقيم (PQ).

② أثبت بأسلوب مماثل أنّ G تقع أيضاً على (RS)، فالمستقيمان (PQ) و (RS) متقاطعان.

③ لتكن I منتصف $[AC]$. أثبت تلاقي المستقيمين (IG) و (BD)، وعيّن نقطة تقاطعهما.

الحل

❶ a① استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(K,3)$. إذن تنتمي G إلى القطعة المستقيمة $[AK]$ وتُحقّق $AG=\frac{3}{4}AK$.

b① بسبب الدور المتناظر الذي تؤدّيه رؤوس رباعي الوجوه نستنتج أنّ G تقع على جميع متوسطات رباعي الوجوه وتقسم كلّاً منها بنسبة $3:1$.

a② لمّا كان I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$، و J أيضاً مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$، استنتجنا استناداً إلى الخاصة التجميعية أنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$، أي إنّ G هي منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$.

b② بسبب الدور المتناظر الذي تؤدّيه رؤوس رباعي الوجوه نستنتج أنّ G تقع أيضاً في منتصف جميع القطع المستقيمة التي يصل كل منها بين منتصفي ضلعين متقابلين في رباعي الوجوه.

❷ a① لمّا كان

$$\frac{1}{5}\overrightarrow{PC}+\frac{4}{5}\overrightarrow{PB}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC})-\overrightarrow{BP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}=\vec{0}$$
$$\frac{3}{4}\overrightarrow{QD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{QA}=\frac{3}{4}(\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QD})-\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$$

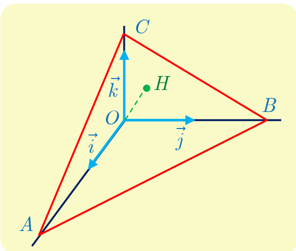
استنتجنا أنّ P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و $(C,1)$، و Q هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(D,3)$.

b① استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,5)$ و $(Q,4)$، وعلى الخصوص G تقع على المستقيم (PQ).

② نبرهن بأسلوب مماثل لِما سبق أنّ R هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و $(A,1)$، و S هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,3)$. إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(R,5)$ و $(S,4)$، وعلى الخصوص G تقع على المستقيم (RS).

③ لتكن T مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,4)$ و $(D,3)$. لمّا كانت I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(A,1)$، إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(T,7)$ و $(I,2)$، وعلى الخصوص المستقيم (GI) يتقاطع مع (BD) في T وهي النتيجة المطلوبة.

نشاط 2 بعد نقطة عن مستوٍ



نتأمّل في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(a,0,0)$ و $B(0,b,0)$ و $C(0,0,c)$ حيث a و b و c أعدادٌ موجبةٌ تماماً. نهدف إلى إثبات علاقة بين بُعد O عن المستوي (ABC) والمسافات OA و OB و OC.

①a. أثبت أنّ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ معادلة للمستوي (ABC).

b. استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC).

② لتكن H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC).

a. احسب إحداثيات H بدلالة a و b و c.

b. تحقّق أنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

c. نضع $h=OH$ أثبت أنّ $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

الحل

①a. هذا تحقّقٌ مباشر إذ يكفي أن نتيقّن أنّ إحداثيات النقاط A و B و C تحقّق المعادلة المعطاة. وليس هناك إلّا مستو واحد يمر بهذه النقاط الثلاث لأنها ليست على استقامة واحدة.

b. الناظم $\vec{n}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ على المستوي (ABC) هو شعاع توجيه للمستقيم Δ المار بالنقطة $O(0,0,0)$ عمودياً على المستوي (ABC). إذن يقبل Δ التمثيل الوسيطي: $(x,y,z)=\left(\frac{1}{a}t,\frac{1}{b}t,\frac{1}{c}t\right);\ t\in\mathbb{R}$.

②a. إحداثيات H من الشكل $\left(\frac{1}{a}t,\frac{1}{b}t,\frac{1}{c}t\right)$ حيث تتعين t بشرط انتماء H إلى المستوي (ABC) أي بشرط تحقيق معادلته. ومنه $\frac{t}{a^2}+\frac{t}{b^2}+\frac{t}{c^2}=1$ ومنه $t=t_0=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$ ومن ثَمّ

$$H\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\frac{a^2bc^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},\frac{a^2b^2c}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right)$$

②b.نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AH}=\left(\frac{t_0}{a}-a,\frac{t_0}{b},\frac{t_0}{c}\right)$ و $\overrightarrow{BC}=(0,-b,c)$. إذن $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ فالمستقيم (AH) عمودي على (BC) وهو من ثَمّ ارتفاع في المثلث ABC. ونبرهن بالمثل أنّ كلّاً من (BH) و (CH) هو أيضاً ارتفاع في المثلث ABC. فالنقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

②c. حساب $h^2=OH^2$:

$$OH^2=t_0^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=t_0$$

ومنه

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{t_0}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

تمرينات ومسائل

1 ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن α عدداً حقيقيّاً، و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. النقطتان E و F معرّفتان بالعلاقتين $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BF}=\alpha\overrightarrow{BC}$. وأخيراً H هي منتصف $[EF]$.

① تحقّق أنّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (D,α)، وكذلك أنّ النقطة F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha)$ و (C,α).

②$.a$ أثبت أنّ H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$ و (C,α) و (D,α).

$.b$ استنتج وقوع النقاط I و J و H على استقامة واحدة.

الحل

① لمّا كان

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{ED}+(1-\alpha)\overrightarrow{EA}&=\alpha(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED})-\overrightarrow{AE}\\&=\alpha\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\vec{0}\\\alpha\overrightarrow{FC}+(1-\alpha)\overrightarrow{FB}&=\alpha(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FC})-\overrightarrow{BF}\\&=\alpha\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BF}=\vec{0}\end{aligned}$$

استنتجنا أنّ E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (D,α)، و F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1-\alpha)$ و (C,α).

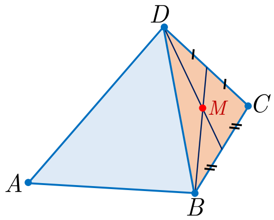
②$.a$ لتكن H' مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$ و (C,α) و (D,α). استناداً إلى ما سبق وإلى الخاصة التجميعية تكون H' مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,1)$ و $(F,1)$ فهي إذن منتصف $[EF]$ ومنه $H'=H$، والنقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-\alpha)$ و $(B,1-\alpha)$ و (C,α) و (D,α).

②$.b$ استناداً إلى الخاصة التجميعية نفسها، H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2\alpha)$، و $(J,2\alpha)$. إذن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

2 $ABCD$ رباعي وجوه. أثبت في كل من الحالتين الآتيتين أنّ النقاط M و B و C و D تقع في مستو واحد، ثُمّ وضّع النقطة M.

① $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{DA}$.

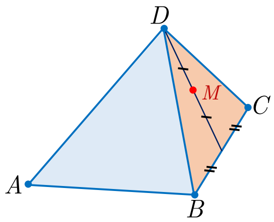
② $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{MC}$.



الحل

الفكرة هي حذف النقطة A من الصيغة المعطاة.

① الصيغة المعطاة تكافئ $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$ وهذا يعني أنّ M هي مركز ثقل المثلث BCD وهي تقع في مستويه.



② الصيغة المعطاة تكافئ $2\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$ أي إنّ M تقع في منتصف المتوسط المرسوم من الرأس D في المثلث BCD وهي من ثَمّ تقع في مستويه.

3 نُعطى معلماً متجانساً في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نُعطى النقطتين $A(1,0,0)$ و $B(4,3,-3)$.

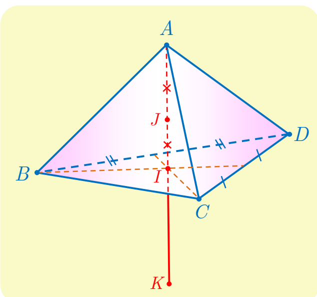
① أَتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (B,α) عندما تتحوّل α في $\mathbb{R}$، هي نفسها المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ ؟

② أَتكون مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (O,y) عندما تتحوّل x و y في $\mathbb{R}$، هي نفسها المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه؟

الحل

① نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AB}=3(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})$ إذن المستقيم المار بالنقطة A وشعاع توجيهه $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ هو نفسه المستقيم (AB) وهو من ثَمّ مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-\alpha)$ و (B,α) عندما تتحوّل α في $\mathbb{R}$. الجواب إذن هو نعم.

② استناداً إلى الملاحظة السابقة، المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\vec{i}$ و $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ شعاعي توجيه، هو نفسه المستوي المار بالنقطة O ويقبل $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}$ شعاعي توجيه. هو إذن المستوي (OAB) وهو من ثَمّ مجموعة النقاط M مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x-y)$ و (B,x) و (O,y) عندما تتحوّل x و y في $\mathbb{R}$. الجواب إذن هو نعم.



4 ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن I مركز ثقل المثلث BCD، و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة إلى I. عبِّر عن J و K بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط A و B و C و D بعد تزويدها بأمثال مناسبة.

الحل

فرضاً لدينا

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{AI}) = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

وهذه تكتب $3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}$ بالاستفادة من علاقة شال. إذن J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$. وبالمثل لدينا

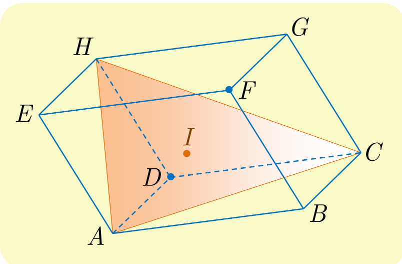
$$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}(3\overrightarrow{AI}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

وهذه تكتب $-3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{KD} = \vec{0}$ بالاستفادة من علاقة شال. إذن K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$.

لنتعلّم البحث معاً

5 الوقوع على استقامة واحدة

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي سطوح، وليكن I مركز ثقل المثلث AHC. أثبت أنّ النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة. وعيّن موقع I على $[DF]$.



نحو الحلّ

- الفكرة الأولى التي تخطر لنا هي محاولة إيجاد ثابت k يحقق $\overrightarrow{DI} = k\overrightarrow{DF}$، يبدو هذا صعباً للوهلة الأولى، ومنه تأتي الفكرة المعتادة القائمة على تحليل أحد هذه الأشعة أو جميعها والاستفادة من علاقة شال. أثبت انطلاقاً من تعريف I أنّ

$$3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}.$$

- ولكنّ $ABCDEFGH$ متوازي سطوح. استفد من ذلك لتبرهن أنّ

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DF}$$

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

طريقة ثانية :

يمكننا أيضاً التفكير بطريقة تحليلية. لإثبات الوقوع على استقامة واحدة لا نحتاج إلى معلم متجانس. لذلك نتأمّل المعلم $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$.

1. أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (DF).
2. احسب إحداثيات النقطة I.
3. تحقّق أنّ I تقع على المستقيم (DF) وعيّن قيمة t التي تحقق $\overrightarrow{DI} = t\overrightarrow{DF}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

النقطة I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(C,1)$ و $(H,1)$ إذن مهما كانت النقطة M في الفراغ كان $3\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MH}$، وبوجه خاص في حالة $M = D$ نجد

$$3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DF}$$

إذ استفدنا من كون $ABCDEFGH$ متوازي سطوح لنستنتج أنّ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$، وهذا يبرهن أنّ النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة، وأنّ I نقطة من القطعة المستقيمة $[DF]$ تحقّق $DI = \frac{1}{3}DF$.

طريقة ثانية :

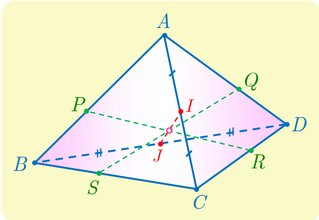
في المعلم المعطى لدينا $A(1,0,0)$ و $C(0,1,0)$ و $H(0,0,1)$ و $F(1,1,1)$. أمّا التمثيل الوسيطي للمستقيم (DF) فهو $(x,y,z) = (t,t,t), t \in \mathbb{R}$. ومن جهة أخرى إحداثيات النقطة I مركز ثقل المثلث (ACH) هي $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. فهي إذن النقطة من المستقيم (DF) الموافقة للوسيط $t = \frac{1}{3}$، والنقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة، ونجد مجدداً $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$.

6 تعيين نقطة تلاقي مستقيمات

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. لتكن x من $]0,1[$، ولتكن P و Q و R و S النقاط التي تحقق

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]$ و $[BD]$. أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة.



نحو الحلّ

- نعرف فعالية الخاصة التجميعية في حل مسائل التلاقي، وفرضيات مثل $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$ تعني أنّ P هي مركز أبعاد متناسبة للنقطتين A و B.

1. بيّن أنّ P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-x)$ و (B,x).
2. عبّر بالمثل عن النقاط Q و R و S.

- تأمّل إذن النقطة G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1-x)$ و $(C,1-x)$ و (B,x) و (D,x).

1. أثبت استناداً إلى الخاصة التجميعية أنّ G تقع على كل من القطع المستقيمة $[PR]$ و $[QS]$ و $[IJ]$.
2. ماذا تستنتج؟

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- في الحقيقة

$$x\overrightarrow{PB}+(1-x)\overrightarrow{PA}=-\overrightarrow{AP}+x(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB})=-\overrightarrow{AP}+x\overrightarrow{AB}=\vec{0}.$$

- إذن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و $(A,1-x)$.
- ونجد بالمثل أنّ Q هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,x) و $(A,1-x)$.
- و R هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D,x) و $(C,1-x)$.
- وأخيراً S هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و $(C,1-x)$.

يلخّص الشكل المجاور هذه النتائج.

$$\begin{array}{ccccc} (A,1-x) & - & Q & - & (D,x) \\ P\,| & & G & & |\,R \\ (B,x) & - & S & - & (C,1-x) \end{array}$$

- استناداً إلى الخاصة التجميعية، G هي مركز الأبعاد المتناسبة لكل من $(P,1)$ و $(R,1)$، أي هي منتصف $[PR]$.

ومن جهة أخرى G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1)$ و $(S,1)$ فهي أيضاً تقع في منتصف $[SQ]$. وأخيراً لأنّ I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1-x)$ و $(C,1-x)$، وكذلك J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,x) و (D,x)، استنتجنا أنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2-2x)$ و $(J,2x)$. فالنقطة G تنتمي أيضاً إلى القطعة المستقيمة $[IJ]$.

نستنتج مما سبق أنّ G نقطة تلاقي القطع المستقيمة $[IJ]$ و $[PR]$ و $[SQ]$، فالمستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) تتلاقى في نقطة واحدة.

قُدُماً إلى الأمام

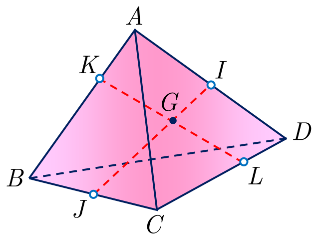
7 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. K نقطة من $[AB]$ تحقّق $AK=\frac{1}{3}AB$، و L نقطة من القطعة المستقيمة $[CD]$ تحقق $CL=\frac{2}{3}CD$. وأخيراً I هي منتصف $[AD]$، و J هي منتصف $[BC]$. نعرّف G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$.

① a. أثبت أنّ النقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

b. أثبت أنّ النقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

② استنتج وقوع النقاط I و J و K و L في مستوٍ واحد.

الحل



① I منتصف $[AD]$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(D,2)$. وكذلك J منتصف $[BC]$ هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$. إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,4)$ و $(J,2)$. فالنقاط G و I و J تقع على استقامة واحدة.

وبالمثل K هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,1)$. وكذلك L هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$ و $(C,1)$. إذن استناداً إلى الخاصة التجميعية G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,3)$ و $(L,3)$. فالنقاط G و K و L تقع على استقامة واحدة.

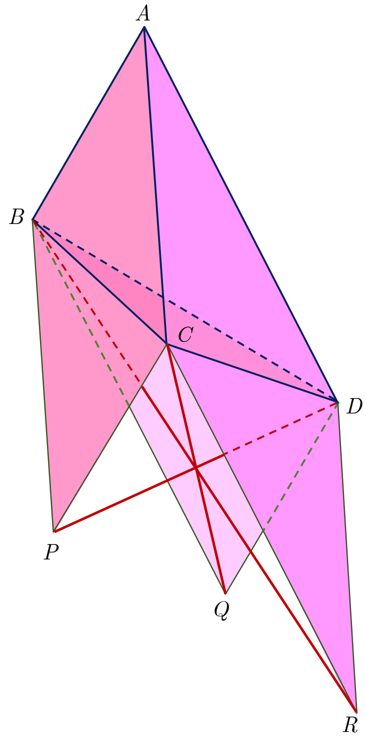
② المستقيمان (KL) و (IJ) متقاطعان في G فهما يعينان مستوياً واحداً، ومن ثَمّ تقع النقاط I و K و J و L في مستوٍ واحدٍ.

8 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. والنقاط P و Q و R هي نقاط تجعل $ABPC$ و $ABQD$ و $ACRD$ متوازيات أضلاع. نهدف إلى إثبات تلاقي المستقيمات (DP) و (CQ) و (BR).

① a. أثبت أنّ النقطة P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

b. عبّر بالمثل عن Q بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و B و D. وكذلك، عبّر عن R بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقاط A و C و D.

② بالاستفادة من نقطة I، وهي مركز أبعاد متناسبة مُختارة للنقاط A و B و C و D، ومن الخاصة التجميعية، أثبت تلاقي المستقيمات (DP) و (CQ) و (BR)، وعيّن موقع I على هذه المستقيمات.



الحل

① $ABPC$ متوازي الأضلاع $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$،
وهذه تكتب $(1+1-1)\overrightarrow{AP}=1\overrightarrow{AB}+1\overrightarrow{AC}-1\overrightarrow{AA}$
إذن P هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(A,-1)$.
ونجد بالمثل أنّ Q هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(B,1)$ و $(D,1)$ و $(A,-1)$. وأنّ R هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(C,1)$ و $(D,1)$ و $(A,-1)$.

② لتكن I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ و $(A,-1)$. نستنتج استناداً إلى الخاصة التجميعية أنّ

- I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(P,1)$ و $(D,1)$ أي منتصف $[PD]$.
- وكذلك I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q,1)$ و $(C,1)$ أي منتصف $[QC]$.
- وأخيراً I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(R,1)$ و $(B,1)$ أي منتصف $[RB]$.

والمستقيمات (DP) و (CQ) و (BR) تتلاقى في نقطة واحدة هي النقطة I التي تقع في منتصف كل من القطع المستقيمة $[PD]$ و $[QC]$ و $[RB]$.

9 نتأمّل ثلاث نقاط A و B و C من الفراغ، وعدداً حقيقياً k من المجال $[-1,1]$. ترمز G_k إلى مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A;k^2+1)$ و $(B;k)$ و $(C;-k)$.

① مثّل النقاط A و B و C و I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، وأنشئ النقطتين G_1 و G_{-1}.

② .a أثبت أنّه مهما كان العدد k من $[-1,1]$ كان $\overrightarrow{AG_k}=-\dfrac{k}{1+k^2}\overrightarrow{BC}$.

.b ادرس تغيرات التابع f المعرّف على المجال $[-1,1]$ بالصيغة $f(x)=-\dfrac{x}{1+x^2}$.

.c استنتج مجموعة النقاط G_k عندما تتحوّل k في المجال $[-1,1]$.

③ عيّن المجموعة $\mathcal{E}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقق

$$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$$

④ عيّن المجموعة $\mathcal{F}$ المكوّنة من النقاط M التي تحقّق

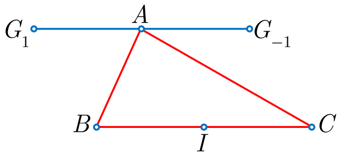
$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

⑤ نزوّد الفضاء بمعلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. ونفترض أنّ النقاط A و B و C معطاة كما يأتي: $A(0,0,2)$ و $B(-1,2,1)$ و $C(-1,2,5)$، وأنّ G_k و $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ معرّفة كما في السابق.

a. احسب إحداثيات النقطتين G_1 و G_{-1}، وأثبت أنّ المجموعتين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ متقاطعتان.

b. احسب نصف قطر الدائرة Γ الناتجة من تقاطع المجموعتين $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$.

الحل



① لأنّ $2\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI}$ ومنه $\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{CI}$ وبالمثل $\overrightarrow{AG_{-1}}=-\overrightarrow{CI}$، الشكل المجاور يوضّح توضّع هذه النقاط.

② a. استناداً إلى تعريف G_k لدينا

$$(1+k^2)\overrightarrow{AG_k}=(1+k^2)\overrightarrow{AA}+k\overrightarrow{AB}-k\overrightarrow{AC}=-k(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=-k\overrightarrow{BC}$$

ومنه العلاقة المطلوبة.

② b. التابع f مستمرٌ واشتقاقي على المجال $[-1,1]$ ومشتقه $f'(x)=-\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ سالبٌ على مجال الدراسة فللتابع f جدول التغيرات المبيّن جانباً.

x	-1		$+1$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

② c. نستنتج من الدراسة السابقة أنّه عندما ترسم k المجال $[-1,1]$ يرسم $f(k)$ المجال $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ والنقطة G_k ترسم القطعة المستقيمة $[G_{-1}G_1]$.

③ استناداً إلى تعريف G_1 و G_{-1} لدينا

$$2\overrightarrow{MG_{-1}}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$$
$$2\overrightarrow{MG_1}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$$

إذن تنتمي M إلى $\mathcal{E}$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $MG_1=MG_{-1}$ أي إذا وفقط إذا انتمت M إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$. ومنه $\mathcal{E}$ هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$.

④ استناداً إلى تعريف G_1 لدينا $2\overrightarrow{MG_1}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$، ومن جهة أخرى لدينا

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{IA}$$

إذن تنتمي M إلى $\mathcal{F}$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $MG_1=IA$ أي إذا وفقط إذا انتمت M إلى الكرة التي مركزها G_1 ونصف قطرها يساوي IA. ومنه $\mathcal{F}$ هي الكرة التي مركزها G_1 وتمر بالنقطة B. لأنّ $\overrightarrow{BG_1}=\overrightarrow{IA}$.

⑤ G_1 هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2),(B,1),(C,-1)$ ومنه

$$\begin{bmatrix} x_{G_1} \\ y_{G_1} \\ z_{G_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن $G_1(0,0,0)$، وبالمثل نجد $G_{-1}(0,0,4)$.

ونحسب $G_1B = \sqrt{6}$ و $G_1A = 2$. لمّا كانت A تقع في منتصف القطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$ استنتجنا أنّها تنتمي إلى $\mathcal{E}$ ولأنّ $G_1A < G_1B$ استنتجنا أنّ A تقع داخل الكرة $\mathcal{F}$، إذن المستوي $\mathcal{E}$ والكرة $\mathcal{F}$ يتقاطعان.

معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_{-1}]$ هي $z = 2$ وهو يبعد عن مركز الكرة $\mathcal{F}$ مسافة تساوي 2، ولمّا كان نصف قطر الكرة يساوي $\sqrt{6}$ استنتجنا استناداً إلى مبرهنة مبرهنة فيثاغورث أنّ نصف قطر الدائرة التي تمثّل $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ يساوي $\sqrt{6-2^2} = \sqrt{2}$.

10 نتأمّل معلماً متجانساً $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$. ليكن G مركز ثقل المثلث ABC.

① احسب إحداثيات G، وتحقّق أنّ (OG) عمودي على (ABC).

② تعرّف النقاط $A'(2,0,0)$ و $B'(0,2,0)$ و $C'(0,0,3)$ المستوي $(A'B'C')$.

a. اكتب معادلة للمستوي $(A'B'C')$.

b. أثبت أنّ $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستقيم (AC) إذا وُجد عدد k بحيث $\begin{cases} x = 1-k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$.

c. احسب إحداثيات النقطة K المشتركة بين المستقيم (AC) والمستوي $(A'B'C')$.

③ a. احسب إحداثيات النقطة L المشتركة بين المستقيم (BC) والمستوي $(A'B'C')$.

b. أثبت توازي المستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL).

④ عيّن تقاطع المستويين (ABC) و $(A'B'C')$ بدلالة النقاط المعرّفة سابقاً.

الحل

① لأنّ $A(1,0,0)$ و $B(0,1,0)$ و $C(0,0,1)$ استنتجنا أنّ $G(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. ونحسب

$$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

إذن $\overrightarrow{OG}$ عمودي على شعاعين موجّهين للمستوي (ABC) فالمستقيم (OG) عمودي على المستوي (ABC).

② $a.$ معادلة المستوي $(A'B'C')$ من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a,b,c)\neq(0,0,0)$، فإحداثيات النقاط $A'(2,0,0)$ و $B'(0,2,0)$ و $C'(0,0,3)$ تحقّق هذه المعادلة ومنه نجد $2a+d=0$ و $2b+d=0$ و $3c+d=0$. إذن $d\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z+1\right)=0$، ولكن $d=0$ يقتضي أنّ يكون $(a,b,c)=(0,0,0)$ وهذا خُلفٌ، فلابد أن يكون $d\neq 0$ ويمكننا الاختصار عليه لنجد معادلة المستوي $(A'B'C')$ كما يأتي: $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1$.

② $b.$ لما كان $\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$ شعاعاً موجهاً للمستقيم (AC) الذي يمر بالنقطة $A(1,0,0)$ استنتجنا كون $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$ أنّ

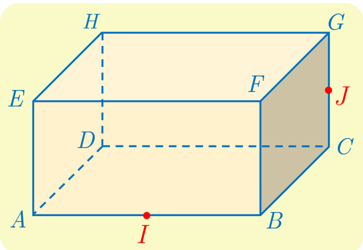
$$\begin{cases} x=1-k \\ y=0 \qquad ; \quad k\in\mathbb{R} \\ z=k \end{cases}$$

② $c.$ تنتمي $K(1-k,0,k)$ من المستقيم (AC) إلى المستوي $(A'B'C')$ إذا حققت إحداثياتها معادلته، أي إذا كان $k=-3$. فإحداثيات K هي $(4,0,-3)$.

③ $a.$ نحسب L بأسلوب مماثل لحساب K فنجد $L(0,4,-3)$

③ $b.$ نجد $\overrightarrow{KL}=(-4,4,0)=4\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{A'B'}$ فالمستقيمات (AB) و $(A'B')$ و (KL) متوازية.

④ لدينا $K\in(AC)\subset(ABC)$ و $K\in(A'B'C')$ إذن K تقع على الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$. وكذلك لدينا $L\in(BC)\subset(ABC)$ و $L\in(A'B'C')$ إذن L تقع على الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$. فالمستقيم (KL) هو الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $(A'B'C')$.



11 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB=2$ و $BC=GC=1$. النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$.

نتأمّل المعلم المتجانس $(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

① احسب المسافتين DJ و IJ.

② أثبت أنّ المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان. واحسب $\cos\widehat{IJD}$.

③ $a.$ أعط معادلة للمستوي (DIJ).

$b.$ احسب بُعد H عن المستوي (DIJ).

④ احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$.

⑤ $a.$ أعط تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار بالنقطة J عمودياً على المستوي (HDI).

$b.$ احسب إحداثيات النقطة J' نقطة تقاطع المستقيم d والمستوي (HDI).

$c.$ جد بطرائق مختلفة بُعد النقطة J عن المستوي (HDI).

الحل

① هنا $I(1,0,0)$ و $D(0,1,0)$ و $J(2,1,\frac{1}{2})$ إذن $IJ=\frac{3}{2}$ و $DJ=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

② من الواضح أنّ $DI=\sqrt{2}$ ومنه $DI^2+IJ^2=DJ^2$ فالمثلث DIJ قائم في I، والمستقيمان (DI) و (IJ) متعامدان. ونحسب $\cos\widehat{IJD}=\dfrac{IJ}{JD}=\dfrac{3}{\sqrt{17}}$.

③ a. تنتمي $M(x,y,z)$ إلى المستوي (DIJ) إذا وفقط إذا وجد عددان s و t بحيث

$$\overrightarrow{IM}=t\overrightarrow{ID}+s\overrightarrow{IJ}$$

وهذا يكافئ

$$\begin{cases} x-1=-t+s \\ y=t+s \\ z=\frac{1}{2}s \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{bmatrix}=t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

بجمع المعادلتين الأولى والثانية وتعويض قيمة s من الثالثة نجد $x+y-4z-1=0$ وهي معادلة المستوي (DIJ).

ويمكن بطريقة ثانية، أن نقول إنّ معادلة المستوي المنشود هي من الشكل $ax+by+cz+d=0$، حيث الأعداد $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ ولأنّه يمر بالنقاط I و D و J فإحداثياها تحقّق معادلته ومنه

$$a+d=0 \text{ و } b+d=0 \text{ و } 2a+b+\tfrac{1}{2}c+d=0$$

ومنه $a=b=-d$ و $c=4d$.

إذن $x+y-4z-1=0$ لأنّ $d\neq0$ (وإلا كان $(a,b,c)=(0,0,0)$).

③ b. إحداثيات H هي $(0,1,1)$ إذن

$$\operatorname{dist}(H,(DIJ))=\frac{\left|0+1-4\times1-1=0\right|}{\sqrt{1+1+16}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

④ حجم رباعي الوجوه $HDIJ$ يساوي ثلث جداء ضرب مساحة قاعدته DIJ أي $\frac{1}{2}DI\cdot IJ$ (لأنّ المثلث قائم) بارتفاعه الذي يساوي $\operatorname{dist}(H,(DIJ))$. إذن

$$\mathcal{V}(HDIJ)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}$$

⑤ a. لنبحث عن شعاع توجيه (α,β,γ) للمستقيم d المنشود. هذا الشعاع عمودي على كل من $\overrightarrow{DH}=(0,0,1)$ و $\overrightarrow{DI}=(1,-1,0)$. إذن $\gamma=0$ و $\alpha-\beta=1$. فيمكن مثلاً أن نأخذ $(1,1,0)$ شعاعاً موجهاً للمستقيم العمودي على المستوي (HDI)، ولأنّ d يمر بالنقطة J استنتجنا أنّ التمثيل الوسيطي المنشود هو

$$d:\quad\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t\,; \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1/2 \end{cases}$$

⑤ b. معادلة المستوي (HDI) هي $x+y=1$ لأنّ إحداثيات النقاط $I(1,0,0)$ و $D(0,1,0)$ و $H(0,0,1)$ غير الواقعة على استقامة واحدة تحقّق وضوحاً هذه المعادلة. وعليه إذا كانت إحداثيات J' هي (x,y,z) استنتجنا أنّ $(x=2+t, y=1+t, z=\frac{1}{2})$ حيث تتعين J' بشرط الانتماء إلى (HDI) أي يجب أن يكون $1=x+y=3+2t$ أو $t=-1$، ومنه $J'(1,0,\frac{1}{2})$.

⑤ c. الطريقة الأولى: $\operatorname{dist}(J,(HDI))=JJ'=\sqrt{2}$.

الطريقة الثانية: لمّا كانت معادلة المستوي (HDI) هي $x+y=1$ و $J(2,1,\frac{1}{2})$ كان

$$\operatorname{dist}(J,(HDI))=\frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}.$$

الطريقة الثالثة: مساحة المثلث القائم HDI تساوي $\frac{1}{\sqrt{2}}$ إذن حجم الهرم $HDIJ$ يساوي

$$\frac{1}{3}=\mathcal{V}(HDIJ)=\frac{1}{3}\times\mathcal{A}(HDI)\times\operatorname{dist}(J,(HDI))$$

فنجد مجدداً أنّ $\operatorname{dist}(J,(HDI))=\sqrt{2}$.

12 في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمّل الهرم $S\text{-}OABC$ حيث $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$ و $\overrightarrow{OC}=\vec{j}$ و $\overrightarrow{OS}=\vec{k}$. وليكن t عدداً يحقّق $0<t<1$. نهدف إلى تعيين مقطع الهرم بالمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته $x+y=t$، وتعيين قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

① a. يقطع المستوي $\mathcal{P}$ المستقيمات (OA) و (OC) و (SC) و (SB) و (SA) في D و E و F و G و H بالترتيب. ارسم شكلاً وبيّن طبيعة هذا المقطع.

b. أثبت أنّ الرباعي $DEFH$ مستطيل، وعبّر عن مساحته بدلالة t.

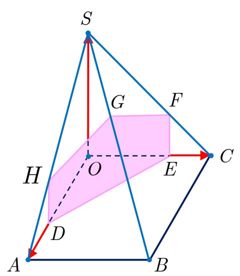
c. احسب إحداثيات النقطة G، ثُمّ مساحة المثلث FGH بدلالة t.

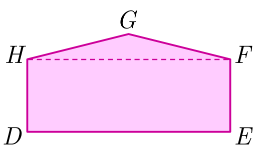
d. استنتج عبارة $\mathcal{A}(t)$ مساحة المقطع المنشود بدلالة t.

② ادرس اطراد $\mathcal{A}$ على المجال $]0,1[$، واستنتج قيمة t التي تجعل مساحة المقطع أعظمية.

③ استنتج أنّ المستوي المار بمركز ثقل المثلث OAC ويقبل $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OS}$ شعاعي توجيه يوافق مقطعاً أعظمي المساحة.

الحل





① a. المقطع شكل خماسي مبيّن في الشكل المجاور:

b. من السهل تعيين إحداثيات D و E إذ نجد $D(t,0,0)$ و $E(0,t,0)$، ولأنّ المستوي $\mathcal{P}$ يوازي (Oz)، فإنّ كل من (EF) و (DH) يوازي (Oz) وكل من المثلثين ECF و DAH قائم ومتساوي الساقين.

إذن $\overrightarrow{EF}=(1-t)\vec{k}=\overrightarrow{DH}$ ، ولدينا وضوحاً $\overrightarrow{DE}\perp\vec{k}$ إذن $DEFH$ مستطيل. ولمّا كان $DE=\sqrt{2}\,t$ استنتجنا أنّ مساحة المستطيل $DEFH$ تساوي $\sqrt{2}\,t(1-t)$.

.c يقبل المستقيم (SB) الشعاع $\overrightarrow{SB}=(1,1,-1)$ شعاعاً موجّهاً، ومن ثَمّ يوجد عدد حقيقي α يحقّق $\overrightarrow{SG}=\alpha\overrightarrow{SB}$ أي $G(\alpha,\alpha,1-\alpha)$ ، ولكنّ النقطة G تنتمي أيضاً إلى $\mathcal{P}$ ، فهي تحقّق معادلة $\mathcal{P}$ ، أي $2\alpha=t$ ومنه $G\left(\frac{t}{2},\frac{t}{2},1-\frac{t}{2}\right)$ ، ولدينا $F(0,t,1-t)$ و $H(t,0,1-t)$. فالمثلّث HFG مثلث متساوي الساقين طول قاعدته $\sqrt{2}\,t$ وارتفاعه $\frac{t}{2}$. إذن مساحة EGH تساوي $\frac{\sqrt{2}}{4}t^2$.

.d نستنتج أنّ مساحة المقطع $DEFGH$ تعطى بالصيغة

$$\mathcal{A}(t)=\frac{\sqrt{2}}{4}t^2+\sqrt{2}\,t(1-t)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(4t-3t^2\right)$$

② نجد بسهولة أنّ للتابع $\mathcal{A}$ جدول الاطراد الآتي على $]0,1[$:

t	0		$\frac{2}{3}$		1
$\mathcal{A}'(t)$		$+$		$-$	
$\mathcal{A}(t)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	

فمساحة المقطع $DEFGH$ تبلغ قيمة عظمى عند $t=\frac{2}{3}$ وهي تساوي $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

③ ليكن $\mathcal{Q}$ المستوي الذي يقبل الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{OS}$ شعاعي توجيه، ويمر بمركز ثقل المثلث OAC أي النقطة $M(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)$.

الشعاع $\overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{CA}=\vec{i}-\vec{j}$ و $\overrightarrow{OS}=\vec{k}$. إذن $\overrightarrow{OB}$ شعاع ناظم على المستوي $\mathcal{Q}$. فمعادلة هذا المستوي من الشكل $x+y=d$ ، ويتعيّن d من شرط مرور هذا المستوي بالنقطة M إذن $d=\frac{2}{3}$. إذن معادلة $\mathcal{Q}$ هي $x+y=\frac{2}{3}$ فهو تحديداً المستوي $\mathcal{P}$ الموافق لقيمة $t=\frac{2}{3}$ التي تجعل مساحة المقطع أعظمية، وهي النتيجة المطلوب إثباتها.

4

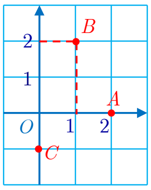
الأعداد العقدية

1. مجموعة الأعداد العقدية
2. مرافق عدد عقدي
3. الشكل المثلثي لعدد عقدي
4. خواص طويلة عدد عقدي وزاويته
5. الشكل الأسي لعدد عقدي
6. المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقية

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- تعريف الأعداد العقدية، والعمليات عليها.
- مرافق عدد عقدي وزاويته وطويلته.
- الأشكال الجبرية والمثلثية والأسية للأعداد العقدية، والانتقال من شكل إلى آخر.
- الجذور التربيعية للأعداد العقدية.
- حلّ المعادلات من الدرجة الثانية في مجموعة الأعداد العقدية.

تَدرَّبْ صفحة 105



① ليكن x عدداً عقدياً تمثله نقطة M في المستوي. وليكن $z_1 = 2 + xi$ و $z_2 = 3 + x + 4i$. اكتب z_1 و z_2 بالشكل الجبري في حالة $M = A$ أو $M = B$ أو $M = C$، حيث A و B و C مبينة في الشكل المجاور.

- عندما $M = A$ يكون $x = 2$ ومنه $z_1 = 2 + 2i$ و $z_2 = 5 + 4i$.
- عندما $M = B$ يكون $x = 1 + 2i$ ومنه $z_1 = i$ و $z_2 = 4 + 6i$.
- عندما $M = C$ يكون $x = -i$ ومنه $z_1 = 3$ و $z_2 = 3 + 3i$.

② في حالة عدد عقدي z نضع $P(z) = z^3 - (1-i)z^2 - (4-5i)z + (4+6i)$. احسب كلاً من $P(i)$ و $P(-2)$ و $P(3-2i)$.

الحل

هنا الحساب يعطينا $P(i) = 0$ و $P(-2) = 0$، ويمكن للطالب حساب $P(3-2i)$ بالتعويض مباشرة وسيجد أنّ $P(3-2i) = 0$ ولكنّ الحساب طويل. الفكرة المفيدة هي أن نتذكّر أنّ $P(i) = 0$ تعني أنّ كثير الحدود يقبل القسمة الإقليدية على $(z-i)$ وكذلك فإنّ $P(-2) = 0$ تعني أنّه يقبل القسمة على $(z+2)$، ولأنّ P من الدرجة الثالثة، استنتجنا وجود عددين λ و μ بحيث

$$P(z) = (z-i)(z+2)(\lambda z + \mu)$$

بمقارنة أمثال z^3 في الطرفين نجد $\lambda = 1$، والحدين الثابتين (الخاليين من z) نجد $-2i\mu = 4 + 6i$ ومنه $\mu = -3 + 2i$ إذن $P(z) = (z-i)(z+2)(z-3+2i)$، وعليه $P(3-2i) = 0$.

مثال: ليكن $Q(z) = 2z^3 - (5-4i)z^2 + (1-7i)z + (2+3i)$. احسب كلاً من $Q(1)$ و $Q(-i)$ و $Q(2-i)$.

③ بسّط العبارتين:

❶ $$z = \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i} + \frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+i}$$

❷ $w = (1+i)^8$.

الحل

❶ $z = \frac{2}{3}$

❷ ولأنّ $(1+i)^2 = 2i$ استنتجنا أنّ $w = 16$.

④ أعط الشكل الجبري للأعداد العقدية الآتية:

❶ $z_1 = (2+i)(3-2i)$ ❷ $z_2 = (1+i)^2$

❸ $z_3 = (1-i)^2$ ❹ $z_4 = (1+2i)(1-2i)$

❺ $z_5 = (3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})$ ❻ $z_6 = (4-3i)^2$

❼ $z_7 = \dfrac{4-6i}{3+2i}$ ❽ $z_8 = \dfrac{1}{2-i}$

❾ $z_9 = \dfrac{3-6i}{3+i} + \dfrac{4}{3-i}$ ❿ $z_{10} = \left(\dfrac{4-6i}{2-3i}\right)\left(\dfrac{1+3i}{3+2i}\right)$

الحل

لكتابة عدد عقدي $z = \dfrac{a+ib}{c+id}$ بالشكل الجبري نضرب البسط والمقام بالعدد $c-di$

$$z = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2}$$

❶ $z_1 = 8-i$ ❷ $z_2 = 2i$

❸ $z_3 = -2i$ ❹ $z_4 = 5$

❺ $z_5 = 14$ ❻ $z_6 = 7-24i$

❼ $z_7 = -2i$ ❽ $z_8 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

❾ $z_9 = \frac{3}{2} - \frac{17}{10}i$ ❿ $z_{10} = \frac{18}{13} + \frac{14}{13}i$

تَدرَّبْ صفحة 107

① اكتب بدلالة $\overline{z}$ مرافق كل من الأعداد العقدية Z الآتية:

❶ $Z = (z-1)(z+i)$ ❷ $Z = \dfrac{3z^2 - 2iz + 4}{2z - 3i}$

❸ $Z = z^3 + 2iz^2 + 1 - 3i$ ❹ $Z = (1+2iz)^3$

الحل

❶ $\overline{Z} = (\overline{z}-1)(\overline{z}-i)$ ❷ $\overline{Z} = \dfrac{3\overline{z}^2 + 2i\overline{z} + 4}{2\overline{z} + 3i}$

❸ $\overline{Z} = \overline{z}^3 - 2i\overline{z}^2 + 1 + 3i$ ❹ $\overline{Z} = (1-2i\overline{z})^3$

② حلّ كلاً من المعادلات الآتية بالمجهول z:

❶ $z - 2\overline{z} = 2$ ❷ $2iz + \overline{z} = 3+3i$

❸ $2\overline{z} = i-1$ ❹ $\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}+1} = i$

الحل

❶ بأخذ مرافق طرفي المساواة $z-2\bar{z}=2$ نجد $\bar{z}-2z=2$، ثُمّ بتعويض $\bar{z}$ من الأخيرة في الأولى نجد $z-2(2z+2)=2$ ومنه $z=-2$.

❷ بأسلوب مماثل للحالة السابقة نجد $z=1-i$.

❸ خذ مرافق الطرفين لتجد $z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

❹ احسب $\bar{z}$ ثُمّ استنتج أنّ $z=-i$.

تَدرَّبْ صفحة 110

① مثّل الأعداد الآتية في المستوي العقدي، ثُمّ أعط زاوية لكل منها انطلاقاً من اعتبارات هندسية ودون إجراء حسابات.

$$1+i,-1-i,5,-3,3i,4-4i,-5i,3+3i$$

الحل

z	$1+i$	$-1-i$	5	-3	$3i$	$4-4i$	$-5i$	$3+3i$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

② اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

❶ $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ ❷ $z_2=2+2i\sqrt{3}$

❸ $z_3=4-4i$ ❹ $z_4=-2i$

❺ $z_5=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{i\sqrt{3}}{4}$ ❻ $z_6=\dfrac{4}{1-i}$

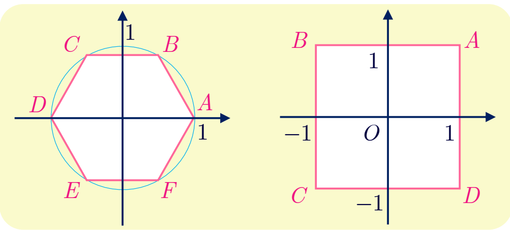
الحل

❶ $z_1=2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ ❷ $z_2=4\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

❸ $z_3=4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ ❹ $z_4=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

❺ $z_5=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ❻ $z_6=2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

③ في الشكل المجاور مثّلنا في معلم متجانس مربّعاً $ABCD$ ومسدّساً $ABCDEF$. أعط الأعداد العقدية التي تمثّل كلّاً من رؤوس كلّ منهما.



الحل

في المربّع : $z_A = 1+i, z_B = -1+i, z_C = -1-i, z_D = 1-i$.

في المسدّس:

$z_A = 1, z_B = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_C = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_D = -1, z_E = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, z_F = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

④ في كل من الحالات الآتية، عيّن مجموعة النقاط M التي يحقّق العدد العقدي z الذي يمثلها الشرط المعطى:

❶ $\arg z = \frac{\pi}{3}$ ❷ $\arg z = -\frac{2\pi}{3}$

❸ $\arg z = \pi$ ❹ $|z| = 3$

❺ $\mathrm{Re}(z) = -2$ ❻ $\mathrm{Im}(z) = 1$

الحل

❶ نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ مع محور الفواصل.

❷ نصف مستقيم مفتوح بدايته المبدأ ويصنع زاوية قدرها $-\frac{2\pi}{3}$ مع محور الفواصل.

❸ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.

❹ دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها 3.

❺ مستقيم يوازي محور التراتيب ويمر بالنقطة التي إحداثيّاتها $(-2,0)$.

❻ مستقيم يوازي محور الفواصل ويمر بالنقطة التي إحداثيّاتها $(0,1)$.

تَدرَّبْ صفحة 113

I. ① اكتب بالشكل المثلثي كلّاً من الأعداد الآتية:

❶ $z = (1-i)^2$ ❷ $z = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$ ❸ $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{i}\right)^5$

الحل

❶ $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

❷ $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

❸ $z = 32\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

② نعطى العددين العقديين $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ و $z_2 = 1 - i$.

❶ اكتب بالشكل المثلثي كلاً من الأعداد z_1 و z_2 و $\dfrac{z_1}{z_2}$.

❷ اكتب بالشكل الجبري $\dfrac{z_1}{z_2}$.

❸ استنتج أنّ $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

الحل

❶ الحساب مباشر:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right)$$

❷ $\dfrac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

❸ من ❶ و ❷ نجد $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

③ اكتب بالشكل المثلثي العدد العقدي $1 + i\sqrt{3}$ واستنتج الشكل المثلثي للعدد $1 - i\sqrt{3}$، وأخيراً احسب العددين:

❶ $z_1 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$ ❷ $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$

الحل

$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ و $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

❶ $$z_1 = 2^5(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) + 2^5(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}) = 32$$

❷ $$z_2 = 2^5(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) - 2^5(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}) = -32\sqrt{3}\,i$$

④ اكتب بالشكل المثلثي كلّاً من الأعداد العقدية الآتية:

❶ $z = \left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)^6$ ❷ $z = \left(\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}\right)^6$

❸ $z = (1+i)\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$ ❹ $z = (1+i)^{2016}$

الحل

❶ $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$ ❷ $z = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

❸ $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{36} + i\sin\frac{13\pi}{36}\right)$ ❹ $z = 2^{1008}\left(\cos 0 + i\sin 0\right)$

تَدرَّبْ صفحة 116

① نضع $z_1 = e^{i\pi/3}$ و $z_2 = 3e^{-i\pi/4}$ و $z_3 = \sqrt{2}\,e^{2i\pi/3}$. جِد الشكل الأسي للأعداد الآتية:

$$z_1z_2,\quad \frac{z_1}{z_2},\quad z_1^3,\quad z_1z_2z_3,\quad z_3^4,\quad \frac{z_2}{z_3}$$

الحل

z_1z_2	$\frac{z_1}{z_2}$	z_1^3	$z_1z_2z_3$	z_3^4	$\frac{z_2}{z_3}$
$3e^{i\frac{\pi}{12}}$	$\frac{1}{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$	$e^{i\pi}$	$3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$4e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}\,e^{-i\frac{11\pi}{12}}$

② اكتب بالشكل الأسي كلاً من الأعداد العقدية الآتية:

❶ $z_1 = 2\sqrt{3}+6i$ ❷ $z_2 = (1+i)\sqrt{3}e^{i\pi/3}$

❸ $z_3 = (1-\sqrt{2})e^{i\pi/4}$ ❹ $z_4 = (1+i\sqrt{3})^4$

❺ $z_5 = \dfrac{6}{1+i}$ ❻ $z_6 = (1+i\sqrt{3})^4e^{4i\pi/3}$

❼ $z_7 = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$ ❽ $z_8 = \dfrac{(2\sqrt{3}+2i)^5}{(1-i)^4}$

❾ $z_9 = -12e^{i\pi/4}$ ❿ $z_{10} = 3ie^{i\pi/3}$

الحل

❶ $z_1 = 4\sqrt{3}e^{i\pi/3}$ ❷ $z_2 = \sqrt{6}e^{i7\pi/12}$

❸ $z_3 = (\sqrt{2}-1)e^{i5\pi/4}$ ❹ $z_4 = 16e^{4i\pi/3}$

❺ $z_5 = 3\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ ❻ $z_6 = 16e^{2i\pi/3}$

❼ $z_7 = \frac{\sqrt{2}}{8}\,e^{i5\pi/12}$ ❽ $z_8 = 256e^{-i\pi/6}$

❾ $z_9 = 12e^{i5\pi/4}$ ❿ $z_{10} = 3e^{i5\pi/6}$

③ نضع $Z = \dfrac{-\sqrt{2}}{1+i}e^{i\pi/3}$ بيّن أي الخواص الآتية صحيحة:

❶ $|Z| = 1$ ❷ $Z = -(1-i)e^{i\pi/3}$

❸ $\arg Z = -\dfrac{\pi}{12}$ ❹ $Z = e^{i\frac{13\pi}{12}}$

الحل

الخواص الصحيحة هي ❶ و ❹.

تَدرَّبْ صفحة 118

① حلّ في $\mathbb{C}$ كلاً من جمل المعادلات الآتية بالمجهولين z و z':

❶ $$\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$$

❷ $$\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$$

❸ $$\begin{cases} 2iz + z' = 2i \\ 3z - iz' = 1 \end{cases}$$

الحل

❶ $z = -i, \quad z' = 2 - 2i$

❷ $z = 1 + i, \; z' = 2 - i$

❸ $z = -1, \quad z' = 4i$

② حلّ في $\mathbb{C}$ كلاً من المعادلات الآتية:

❶ $2z^2 - 6z + 5 = 0$

❷ $z^2 - 5z + 9 = 0$

❸ $z^2 + z + 1 = 0$

❹ $z^2 - 2z + 3 = 0$

❺ $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$

❻ $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0, \quad (\theta \in \mathbb{R})$

الحل

❶ $\left\{\frac{1}{2}(3 + i), \frac{1}{2}(3 - i)\right\}$

❷ $\left\{\frac{1}{2}(5 + i\sqrt{11}), \frac{1}{2}(5 - i\sqrt{11})\right\}$

❸ $\left\{\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})\right\}$

❹ $\left\{1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}\right\}$

❺ $\left\{1 + \sqrt{2} + i, 1 + \sqrt{2} - i\right\}$

❻ $\left\{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\right\}$

مثلاً لحلّ المعادلة الأخيرة نكتب:

$$\begin{aligned} z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 &= z^2 - 2(\cos\theta)z + \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= (z - \cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2 \\ &= (z - \cos\theta - i\sin\theta)(z - \cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (z - e^{i\theta})(z - e^{-i\theta}) \end{aligned}$$

③ جد عددين عقديين p و q كي تقبل المعادلة $z^2+pz+q=0$ العددين $1+2i$ و $3-5i$ جذرين لها.

الحل

- طريقة أولى: إذا كان $1+2i$ و $3-5i$ جذرين للمعادلة $z^2+pz+q=0$ كان

$$\begin{aligned} -p &= (1+2i)+(3-5i) &= 4-3i \\ q &= (1+2i)(3-5i) &= 13+i \end{aligned}$$

ومنه $p=-4+3i, q=13+i$.

- طريقة ثانية: إذا كان $1+2i$ و $3-5i$ جذرين للمعادلة $z^2+pz+q=0$ حققاها، ومنه

$$(1+2i)^2+p(1+2i)+q=0$$
$$(3-5i)^2+p(3-5i)+q=0$$

وبالحلّ المشترك لجملة هاتين المعادلتين بعد إصلاحهما نجد $p=-4+3i, q=13+i$.

④ احسب جداء الضرب $(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)$ ثُمّ حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة

$$z^4+4z^3+6z^2+4z-15=0$$

الحل

نلاحظ أنّ $(z^2+2z-3)(z^2+2z+5)=z^4+4z^3+6z^2+4z-15$.

$$\begin{aligned} z^4+4z^3+6z^2+4z-15 &= ((z+1)^2-4)((z+1)^2+4) \\ &= (z+3)(z-1)(z+1+2i)(z+1-2i) \end{aligned}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $z^4+4z^3+6z^2+4z-15=0$ هي $\{-3,1,-1+2i,-1-2i\}$.

أنشطة

نشاط 1 كثيرات الحدود

نعمّم مفهوم التابع الكثير الحدود ليصبح أي تابع P معرّف على $\mathbb{C}$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{C}$ من الشكل:

$$z \mapsto a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ هي أعداد عقدية، وإذا كانت $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ حقيقية قلنا إنّ P ذو أمثال حقيقية. وإذا كان $a_n \neq 0$ قلنا إنّ درجة P تساوي n. نقبل صحة الخواص الآتية:

- إذا كان z_0 جذراً لكثير حدود P درجته n (أي $P(z_0)=0$) وُجد كثير حدود Q درجته $n-1$ بحيث $P(z)=(z-z_0)Q(z)$.
- لكل كثير حدود P درجته n، عدداً من الجذور يساوي n في $\mathbb{C}$ على أن نكرر كل جذر بقدر درجة مضاعفته.

❶ مثال على كثير حدود من الدرجة الثالثة

نهدف إلى حل المعادلة $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$ (1)

① علّل وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق: $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)Q(z)$.

② عيّن Q ثُمّ حل المعادلة $Q(z) = 0$.

③ لتكن A و B و C نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (1) أثبت أنّ ABC مثلث متساوي الأضلاع.

❷ مثال على كثير حدود من الدرجة الرابعة

نهدف إلى حل المعادلة $z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63 = 0$ (2)

① أثبت بوجه عام أنّه إذا كانت **أمثال P حقيقية**، وكان z_0 جذراً للمعادلة $P(z) = 0$ كان $\overline{z}_0$ أيضاً جذراً للمعادلة $P(z) = 0$.

② تحقق أنّ $i\sqrt{3}$ جذر للمعادلة (2). ماذا تستنتج بالاستفادة من ①؟

③ استنتج وجود كثير حدود من الدرجة الثانية Q يجعل المعادلة (2) تكتب $(z^2+3)Q(z) = 0$.

④ حلّ المعادلة (2). لتكن A و B و C و D نقاط المستوي التي تمثل حلول المعادلة (2) أثبت أنّ هذه النقاط تقع على دائرة واحدة. عيّن مركزها ونصف قطرها.

الحل

❶ نضع $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

① نلاحظ أنّ $P(-1) = 0$، إذن يقبل P القسمة على $(z+1)$ فيوجد كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقق: $P(z) = (z+1)Q(z)$.

② بإجراء قسمة إقليدية لكثير الحدود $P(z)$ على $(z+1)$ نجد $Q(z) = z^2 - 4z + 7$. وحلول المعادلة $Q(z) = 0$ هي $\{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}\}$.

③ لنضع $z_A = -1$ و $z_B = 2 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 2 + i\sqrt{3}$. لنحسب أطوال أضلاع المثلث

$$AB = |z_B - z_A|, AC = |z_C - z_A|, BC = |z_C - z_B|$$

فنجد مباشرة أنّ أطوال الأضلاع الثلاثة متساوية وتساوي $2\sqrt{3}$، فالمثلث متساوي الأضلاع.

❷ ① ليكن كثير الحدود ذو الأمثال الحقيقيّة $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$.

إذا كان وكان z_0 جذراً للمعادلة $P(z) = 0$ كان

$$a_n z_0{}^n + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

فإذا أخذنا مرافق طرفي المساواة السابقة، بعد ملاحظة أنّ الأمثال حقيقيّة، وجدنا

$$a_n \overline{z}_0{}^n + \cdots + a_1 \overline{z}_0 + a_0 = 0$$

ومنه $P(\overline{z}_0) = 0$، إذن $\overline{z}_0$ هو أيضاً جذر للمعادلة $P(z) = 0$.

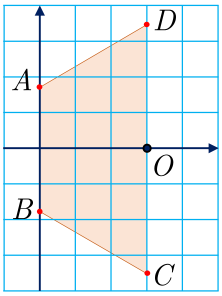
② نضع $P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$. يُمكن التحقّق بسهولة أنّ $P(i\sqrt{3})=0$.
وبالاستفادة من ① نستنتج أنّ $P(-i\sqrt{3})=0$.

③ نستنتج من ② أنّ P يقبل القسمة على كلٍّ من $(z-i\sqrt{3})$ و $(z+i\sqrt{3})$ فهو يقبل القسمة على جداء ضربهما أي z^2+3 ، إذن يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية Q يحقّق $P(z)=(z^2+3)Q(z)$ فالمعادلة (2) تكتب $(z^2+3)Q(z)=0$. وبإجراء قسمة إقليدية لكثير الحدود $P(z)$ على z^2+3 أو بإخراج هذا المقدار عاملاً مشتركاً كما يأتي:

$$\begin{aligned} P(z) &= z^4-6z^3+24z^2-18z+63 \\ &= (z^2+3)z^2-6z(z^2+3)+21z^2+63 \\ &= (z^2+3)(z^2-6z+21) \end{aligned}$$

فنجد $Q(z)=z^2-6z+21=(z-3)^2+12$.

④ نستنتج من الصيغة $(z^2+3)\left((z-3)^2+12\right)=0$ للمعادلة (2) أنّ حلولها هي
$z_A=i\sqrt{3}$ و $z_B=-i\sqrt{3}$ و $z_C=3-2i\sqrt{3}$ و $z_D=3+2i\sqrt{3}$.



لمّا كانت النقطتان B و C نظيرتا A و D بالترتيب بالنسبة إلى المحور الحقيقي، أو محور الفواصل، استنتجنا أنّ الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين. فهو إذن رباعي دائري.

وإذا كان O مركز الدائرة المارة برؤوسه، وجب أن ينتمي O إلى محور التناظر، فالعدد العقدي x الذي تمثّله النقطة O هو عدد حقيقي. ولأنّ O يبعد المسافة نفسها عن كل من D و A استنتجنا أنّ $\left|x-z_A\right|=\left|x-z_D\right|$ أي

$$\left|x-i\sqrt{3}\right|^2=\left|x-3-2i\sqrt{3}\right|^2$$

ومنه نجد $x=3$. إذن مركز الدائرة O هو النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z_O=3$ أمّا نصف قطر الدائرة فيساوي مثلاً $OA=2\sqrt{3}$.

ملاحظة: نجد من الحساب السابق أنّ O يقع في منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$ أي إنّ $[CD]$ هو قطر الدائرة المارة برؤوس الرباعي $ABCD$. وبوجه خاص: المثلث CAD قائم في A وهذا ما يمكن أن نتحقّق من صحته مباشرة بحساب أطوال الأضلاع، وتطبيق عكس مبرهنة فيثاغورث. فنجد طريقة أخرى لحل السؤال.

نشاط 2 الجذور التربيعية لعدد عقدي

نُعطى عدداً عقدياً غير الصفر $w=a+ib$ ونهدف إلى حل المعادلة $z^2-w=0$ $(*)$. هناك أسلوبان ممكنان:

- يمكن أن نكتب $w = Re^{i\varphi}$ ثمّ نبحث عن $z = re^{i\theta}$ تحقّق $(*)$. تيقّن عندئذ أنّ $r = \sqrt{R}$ وأنّ $\theta = \frac{\varphi}{2}\ (2\pi)$ أو $\theta = \frac{\varphi}{2} + \pi\ (2\pi)$، إذن $z \in \{z_0, -z_0\}$ حيث $z_0 = \sqrt{R}\,e^{i\frac{\varphi}{2}}$.
- ويمكن أن نبحث عن $z = x + iy$ تحقّق $(*)$. وهنا علينا حل جملة المعادلتين غير الخطيتين:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a & (1) \\ 2xy = b & (2) \end{cases}$$

هنا يمكننا أيضاً أن نستفيد من المعادلة المُساعدة $|z|^2 = |w|$ التي تنتج مباشرة من $(*)$ وتعطي المعادلة (3) الآتية: $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. وهكذا نحل في $\mathbb{R}$ جملة المعادلتين (1) و (3) ثُمّ نختار من مجموعة الحلول الناتجة تلك التي تحقّق المعادلة (2).

❶ **تعيين الجذور التربيعية للعدد i**

① اكتب i بالشكل الأسي.　　② حل المعادلة $z^2 = i$.

❷ **تعيين الجذور التربيعية للعدد $1 + i$**

① أثبت أنّ حل المعادلة $(x + iy)^2 = 1 + i$ في $\mathbb{R}$. يؤول إلى تعيين x و y تحقّقان

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

② حل المعادلة $z^2 = 1 + i$.

③ حل المعادلة $z^2 = 1 + i$ بأسلوب ثان، واستنتج النسب المثلثية للزاوية $\frac{\pi}{8}$.

الحل

❶ ① $i = e^{i\pi/2}$.

② هنا $R = 1, \varphi = \pi/2$. هناك إذن حلّان للمعادلة هما $z_0 = e^{i\pi/4}$ و $z_1 = -z_0 = -e^{i\pi/4}$.

❷ ① حلُّ المعادلة $(x + iy)^2 = 1 + i$ يكافئ حلّ المعادلة $(x^2 - y^2) + 2ixy = 1 + i$، وهذا يكافئ حلّ جملة المعادلتين الحقيقيّتين

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

وبحساب طويلة الطرفين في المعادلة العقديّة نجد $x^2 + y^2 = 1$. إذن، إذا كان (x, y) حلاً للمعادلة $(x + iy)^2 = 1 + i$ كان (x, y) حلّاً لجملة المعادلات :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

وبالعكس يُمكن التحقق بسهولة أنّه إذا كان (x, y) حلاً للجملة $(*)$ كان $(x + iy)^2 = 1 + i$.

② من المعادلتين الأولى والثانية نجد $x^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ومن ثَمّ

$$x \in \left\{\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}\right\}$$

وبالاستفادة من المعادلة الثالثة نحسب $y = 1/2x$ لنجد قيمة y الموافقة لكل x :

$$(x,y) \in \left\{\left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right), \left(-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\right)\right\}$$

أو

$$(x,y) \in \left\{\left(\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}\right)\right\}$$

③ بملاحظة أنّ $1+i = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ يمكننا حل $z^2 = 1+i$ باستخدام الطويلة والزاوية لنجد أنّ للمعادلة حلّان هما $z_0 = z\sqrt[4]{2}\,e^{i\pi/8}$ و $z_1 = -z_0 = -\sqrt[4]{2}\,e^{i\pi/8}$.

بالمقارنة بين الحلول في ② و ③ نجد: $\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}+2} + i\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2} = \sqrt[4]{2}\cos\dfrac{\pi}{8} + i\sqrt[4]{2}\sin\dfrac{\pi}{8}$

ومنه نجد:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,.$$

نشاط 3 الأعداد العقدية والتوابع المثلثية

عندما يكون z و z' عددين عقديين طويلة كل منهما تساوي الواحد وزاويتاهما a و b بالترتيب، تكون طويلة zz' مساوية الواحد وزاويته $a+b$. بكتابة zz' بطريقتين أثبت أنّ

- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ و $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$
- ما العلاقات التي تستنتجها عند استبدال $-b$ بالمقدار b ؟ استنتج أن

$$\cos a\cos b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big), \quad \sin a\sin b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$
$$\sin a\cos b = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big), \quad \cos a\sin b = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b)-\sin(a-b)\big)$$

- ما العلاقات التي تستنتجها عند تعويض $a+b=p$ و $a-b=q$؟
- استفد مما سبق لتحل في $\mathbb{R}$ المعادلة المثلثية : $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$.

الحل

- لدينا $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$ ، وبالعودة إلى الكتابة المثلّثيّة نجد:

$$(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

أو بشكل آخر:

$$(\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\sin a\cos b + \cos a\sin b) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

ونحصل على العلاقتين المطلوبتين بمقارنة الجزأين الحقيقي والتخيلي.

أي

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad (1)$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \qquad (2)$$

- عند استبدال $-b$ بالمقدار b نجد:

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad (1')$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \qquad (2')$$

وبجمع المساواتين (1) و $(1')$ طرفاً مع طرف، ثُمّ القسمة على 2 نجد:

$$\cos a\cos b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\big)$$

وبطرحهما والقسمة على 2 نجد:

$$\sin a\sin b = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\big)$$

وبجمع المعادلتين (2) و $(2')$، ثمّ القسمة على 2 نجد:

$$\sin a\cos b = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big)$$

وبطرحهما والقسمة على 2 نجد

$$\cos a\sin b = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a+b)-\sin(a-b)\big)$$

- لدينا $a = \dfrac{p+q}{2}, b = \dfrac{p-q}{2}$. وبالتعويض في المتطابقات السابقة نجد:

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

- بالاستفادة من العلاقات السابقة تُكتب المعادلة المعطاة بالشكل

$$-2\sin\frac{3x+5x}{2}\sin\frac{3x-5x}{2} = 2\sin\frac{6x+2x}{2}\cos\frac{6x-2x}{2}$$

أو $\sin 4x\sin x = \sin 4x\cos 2x$ أو $\sin 4x\big(\sin x - \cos 2x\big) = 0$.

إمّا $\sin 4x = 0$ وهذا يكافئ $x = \frac{1}{4}k\pi$ حيث k عدد صحيح.

أو $\sin x = \cos 2x$ وهذه تكافئ $\cos\big(\frac{\pi}{2}-x\big) = \cos 2x$ فإمّا $x = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}\pi k$ حيث k عدد صحيح، أو $x = -\frac{1}{2}\pi + 2\pi k$ حيث k عدد صحيح.

والخلاصة: مجموعة حلول المعادلة المعطاة هي

$$\left\{\tfrac{1}{4}\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\tfrac{\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\tfrac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$$

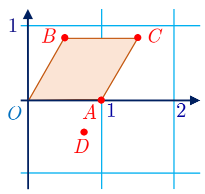
تمرينات ومسائل

1 لتكن النقاط A و B و C و D نقاطاً تمثّل بالترتيب الأعداد العقدية $a=1$ و $b=e^{i\pi/3}$ و $c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\pi/6}$.

① اكتب c بالشكل الأسي، واكتب d بالشكل الجبري.

② a. وضّع النقاط A و B و C و D في مستو مزوّد بمعلم متجانس.

b. أثبت أنّ الرباعي $OACB$ معيّن.



الحل

① $c=\sqrt{3}e^{i\pi/6}$ ، $d=\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

② a. التوضّع التقريبي للنقاط A و B و C و D :

b. مثلاً: بحساب أطوال أضلاع الرباعي نجد أنّ $OA=AC=CB=BO=1$، فالرباعي $OACB$ معيّن.

2 ① اكتب بالشكل الأسي حلول المعادلة :

$$(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)=0 \qquad (1)$$

② أثبت أنّ النقاط A و B و C و D التي تمثل جذور المعادلة السابقة هي رؤوس مستطيل.

الحل

① مثلاً بالإتمام إلى مربع كامل نجد

$$\begin{aligned}(z^2+3\sqrt{3}z+9)(z^2-3\sqrt{3}z+9)&=\Big((z+\tfrac{3}{2}\sqrt{3})^2+\tfrac{9}{4}\Big)\Big((z-\tfrac{3}{2}\sqrt{3})^2+\tfrac{9}{4}\Big)\\&=\Big(z+\tfrac{3}{2}\sqrt{3}+\tfrac{3}{2}i\Big)\Big(z+\tfrac{3}{2}\sqrt{3}-\tfrac{3}{2}i\Big)\Big(z-\tfrac{3}{2}\sqrt{3}+\tfrac{3}{2}i\Big)\Big(z-\tfrac{3}{2}\sqrt{3}-\tfrac{3}{2}i\Big)\\&=\Big(z-3e^{-5i\pi/6}\Big)\Big(z-3e^{5i\pi/6}\Big)\Big(z-3e^{-i\pi/6}\Big)\Big(z-3e^{i\pi/6}\Big)\end{aligned}$$

فحلول المعادلة (1) مكتوبة بالشكل الأسي هي :

$$\left\{a=3e^{-i\pi/6},b=3e^{i\pi/6},c=3e^{5i\pi/6},d=3e^{-5i\pi/6}\right\}.$$

② نلاحظ أنّ $b=\overline{a}$ و $c=-a$ وأخيراً $d=\overline{c}=-b$.

من المساواتين $c=-a$ و $d=-b$ نستنتج أنّ قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان فهو متوازي الأضلاع، ومن المساواتين $d=\overline{c}$ و $b=\overline{a}$ نستنتج أنّ القطر $[BD]$ هو نظير $[AC]$ بالنسبة إلى التناظر المحوري الذي محوره هو المحور الحقيقي (محور الفواصل) فلهما الطول نفسه. إذن قطرا الرباعي $ABCD$ متناصفان ومتساويان فهو مستطيل.

3 بسّط كتابة العدد العقدي : $Z=\dfrac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}$، موضّحاً قيم x التي يكون عندها هذا المقدار موجوداً.

الحل

نلاحظ أنّ طويلة المقام تساوي $(1+\cos x)^2+\sin^2 x=2(1+\cos x)$ فهو ينعدم فقط في حالة كون x من الشكل $\pi+2\pi k$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. إذن يكون Z معرّفاً في حالة $x\notin\{\pi(1+2k):k\in\mathbb{Z}\}$ وعندئذ

$$Z=\frac{1+e^{-ix}}{1+e^{ix}}=\frac{e^{-ix}(e^{ix}+1)}{1+e^{ix}}=e^{-ix}$$

ملاحظة: يمكن أيضاً اعتماد طريقة الضرب بمرافق المقام كما يأتي:

$$\begin{aligned}Z=\frac{1+\cos x-i\sin x}{1+\cos x+i\sin x}&=\frac{(1+\cos x-i\sin x)^2}{(1+\cos x)^2+\sin^2 x}\\&=\frac{(1+\cos x)^2-\sin^2 x-2i(1+\cos x)\sin x}{2(1+\cos x)}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\cos x-\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}-2i\sin x\right)\quad:\ \sin^2 x=1-\cos^2 x\\&=\frac{1}{2}\big(1+\cos x-(1-\cos x)-2i\sin x\big)=\cos x-i\sin x=e^{-ix}\end{aligned}$$

ويمكن أيضاً التعبير عن كل من $1+\cos x$ و $\sin x$ بدلالة النسب المثلثية لنصف x.

4 ① ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن u عدداً عقدياً طويلته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

أثبت أنّ $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عددٌ حقيقي.

② نفترض أنّ $u\neq 1$ وأنّ $\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عددٌ حقيقي أثبت أنّه إمّا أن يكون z حقيقياً أو أن يكون $|u|=1$.

الحل

① لأنّ طويلة u تساوي الواحد استنتجنا أنّ $u\bar{u}=|u|^2=1$ إذن $\bar{u}=\dfrac{1}{u}$. الآن لنضع $w=\dfrac{z-u\bar{z}}{1-u}$ عندئذ نحسب مباشرة

$$\overline{w}=\frac{\bar{z}-\bar{u}z}{1-\bar{u}}=\frac{\bar{z}-\dfrac{z}{u}}{1-\dfrac{1}{u}}=\frac{u\bar{z}-z}{u-1}=\frac{z-u\bar{z}}{1-u}=w$$

وينتج من كون $\overline{w}=w$ أنّ العدد w عددٌ حقيقي.

② كما في الحالة السابقة نضع $w=\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}$ ، ولنحسب الفرق $w-\overline{w}$:

$$w-\overline{w}=\frac{z-u\overline{z}}{1-u}-\frac{\overline{z}-\overline{u}z}{1-\overline{u}}=\frac{(z-u\overline{z})(1-\overline{u})-(\overline{z}-\overline{u}z)(1-u)}{(1-u)(1-\overline{u})}$$
$$=\frac{z-\overline{u}z-u\overline{z}+|u|^2\overline{z}-\overline{z}+u\overline{z}+\overline{u}z-|u|^2z}{|1-u|^2}$$
$$=\frac{z(1-|u|^2)-\overline{z}(1-|u|^2)}{|1-u|^2}=(z-\overline{z})\cdot\frac{1-|u|^2}{|1-u|^2}$$

وعليه إذا كان w عدداً حقيقياً كان $w=\overline{w}$ ومن ثَمّ $(z-\overline{z})\cdot(1-|u|^2)=0$. فإمّا أن يكون z عدداً حقيقياً، أو أن تكون طويلة u مساوية 1.

5 اكتب بالشكل الجبري كلاً من العددين:

$$z_1=\frac{\cos x+i\sin x}{\cos x-i\sin x} \quad \text{و} \quad z_2=(3+i)^4$$

الحل

$$z_1=\cos 2x+i\sin 2x \quad \text{و} \quad z_2=28+96i$$

6 ليكن z و z' عددين عقديين أثبت أنّ:

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2|z|^2+2|z'|^2$$

الحل

$$\begin{aligned}|z+z'|^2+|z-z'|^2&=(z+z')\overline{(z+z')}+(z-z')\overline{(z-z')}\\&=(z+z')(\overline{z}+\overline{z}')+(z-z')(\overline{z}-\overline{z}')\\&=2|z|^2+2|z'|^2\end{aligned}$$

7 ليكن المثلث ABC . أثبت تكافؤ الخاصتين الآتيتين:

① المثلث متساوي الساقين ورأسه A .

② $2\sin\widehat{B}\cos\widehat{C}=\sin\widehat{A}$.

الحل

المثلث متساوي الساقين ورأسه A يكافئ $\hat{B}=\hat{C}$ وهذا يكافئ $\sin(\hat{B}-\hat{C})=0$ وهذا بدوره يكافئ $\sin(\hat{B}+\hat{C})+\sin(\hat{B}-\hat{C})=\sin(\hat{B}+\hat{C})$ أو $\sin\hat{A}=2\sin\hat{B}\cos\hat{C}$. لأنّ $\hat{A}=\pi-\hat{B}-\hat{C}$.

لنتعلّم البحث معاً

8 تعيين مجموعة

ليكن a عدداً عقدياً معطى. لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقّق :

$$z^2 - a^2 = \overline{z}^2 - \overline{a}^2$$

عيّن المجموعة $\mathcal{E}$ ومثّلها في مستو مزوّد بمعلم.

نحو الحلّ

☝ الفكرة الأولى التي تخطر لنا هي بوضع $z = x + iy$ و $a = \alpha + i\beta$ حيث x و y و α و β هي أعداد حقيقية، ثُم نسعى إلى إيجاد معادلة ديكارتية للمجموعة $\mathcal{E}$.

① أثبت بهذا الأسلوب أنّ $M(x,y)$ تنتمي إلى $\mathcal{E}$ إذا وفقط إذا كان $xy = \alpha\beta$.

② ناقش الحالتين $\alpha\beta = 0$ و $\alpha\beta \neq 0$ ثُم عيّن $\mathcal{E}$ في هاتين الحالتين.

✌ هناك أسلوب آخر، نلاحظ أنّ مرافق $z^2 - a^2$ هو $\overline{z}^2 - \overline{a}^2$ أثبت تكافؤ الخواص

- z تنتمي إلى $\mathcal{E}$.
- $z^2 - a^2$ حقيقي.
- الجزء التخيلي للمقدار $z^2 - a^2$ يساوي 0 أو $\mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(a^2)$.

استنتج مجدداً المجموعة $\mathcal{E}$.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

☝ ① هذه عملية تعويض وحساب بسيطة.

② إذا كان $\alpha\beta = 0$ كانت المجموعة $\mathcal{E}$ مساوية لاجتماع المحورين الإحداثيين. وإذا كان $\alpha\beta \neq 0$ مثّلت المجموعة $\mathcal{E}$ الخط البياني للتابع $x \mapsto \dfrac{\alpha\beta}{x}$.

✌ الخطوات واضحة ولا تحتاج إلى إضافات.

قُدُماً إلى الأمام

9

نتأمّل عددين عقديين z و w يحققان $|z| = 1$ و $|w| = 1$ و $zw \neq -1$ أثبت أنّ العدد العقدي $Z = \dfrac{z + w}{1 + zw}$ عددٌ حقيقي.

الحل

الفكرة الأساسية هنا هي أنّه في حالة عدد عقدي طويلته تساوي الواحد، المرافق يساوي المقلوب إذن

$$\overline{Z} = \frac{\overline{z}+\overline{w}}{1+\overline{z}\,\overline{w}} = \frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{zw}} = \frac{z+w}{1+zw} = Z$$

إذن Z عددٌ حقيقي لأنه يساوي مرافقه.

10 نتأمّل كثير الحدود $P(z) = z^4 - 19z^2 + 52z - 40$.

① عيّن عددين حقيقيين a و b يحققان $P(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$.

② حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

الحل

① بافتراض المساواة

$$z^4 - 19z^2 + 52z - 40 = (z^2 + az + b)(z^2 + 4z + 2a)$$

محققّة تكون $a + 4$ هي أمثال z^3 وهي يجب أن تساوي الصفر، إذن $a = -4$. وبمقارنة الحدّ الثابت في الطرفين نجد $-40 = 2ab = -8b$ إذن $b = 5$. وبالعكس، نتحقّق مباشرة بإجراء عملية الضرب أنّ $P(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 4z - 8)$.

② بعد تفريق كثير الحدود P أصبح تعيين جذوره يسيراً ونجد مجموعة حلول المعادلة:

$$\left\{2+i, 2-i, 2\left(-1-\sqrt{3}\right), 2\left(-1+\sqrt{3}\right)\right\}.$$

11 حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i = 0$ إذا علمت أنها تقبل حلاً تخيلياً بحتاً.

الحل

لنفترض أنّ w هو الحلّ التخيلي البحت أي الذي يحقّق $\overline{w} = -w$. إذن لدينا

$$w^3 - (3+4i)w^2 - 6(3-2i)w + 72i = 0 \qquad (1)$$

وبأخذ مرافق الطرفين والاستفادة من نجد أيضاً

$$-w^3 - (3-4i)w^2 + 6(3+2i)w - 72i = 0 \qquad (2)$$

فإذا جمعنا (1) و (2) استنتجنا أنّ $w(w-4i) = 0$، ولكنّ $w = 0$ ليس حلاً للمعادلة (1) فلا بُد أن يكون الحل التخيلي البحت المنشود هو $4i$.

إذن يقبل كثير الحدود $P(z) = z^3 - (3+4i)z^2 - 6(3-2i)z + 72i$ القسمة على $z - 4i$ فإذا أجرينا قسمة إقليدية وجدنا أنّ $P(z) = (z-4i)(z^2 - 3z - 18) = (z-4i)(z-6)(z+3)$. إذن حلول المعادلة هي $\{4i, -3, 6\}$.

12 ليكن $\alpha = e^{2i\pi/5}$. نضع $A = \alpha + \alpha^4$ و $B = \alpha^2 + \alpha^3$.

① أثبت أنّ $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ واستنتج أنّ A و B هما جذرا المعادلة من الدرجة الثانية: $x^2 + x - 1 = 0 \quad (1)$.

② عبّر عن A بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

③ حلّ المعادلة (1) واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

الحل

① هذا مجموع متتالية هندسية حدها الأوّل 1 وأساسها α إذن

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \frac{1-\alpha^5}{1-\alpha} = \frac{1-e^{2i\pi}}{1-\alpha} = 0$$

لنحسب مستفيدين من كون $\alpha^5 = 1$:

$$\begin{aligned} A + B &= (\alpha + \alpha^4) + (\alpha^2 + \alpha^3) \\ &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1 \\ A \cdot B &= (\alpha + \alpha^4) \cdot (\alpha^2 + \alpha^3) \\ &= \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 \\ &= \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1 \end{aligned}$$

فنستنتج أنّ A و B هما جذرا المعادلة $x^2 + x - 1 = 0 \quad (1)$.

② بملاحظة أنّ $\alpha^4 = \bar{\alpha}$ نجد $A = 2\,\mathrm{Re}(\alpha) = 2\cos\frac{2\pi}{5}$.

③ بحساب جذور المعادلة (1) نجد الجذرين

$$\left\{\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}), \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\right\}$$

وبملاحظة أنّ كلاً من $2\cos\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ هو الجذر الموجب للمعادلة (1) نجد $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

13 ليكن θ عدداً حقيقياً من المجال $]-\pi, \pi[$. نعرّف $t = \dfrac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$.

① احسب المقادير $\dfrac{2t}{1+t^2}$ و $\dfrac{2t}{1-t^2}$ و $\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ بدلالة النسب المثلثية للعدد θ.

② أثبت صحة العلاقات:

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}} \quad \text{و} \quad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

الحل

① نلاحظ أنّ

$$1+t^2=\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2+(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})^2}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}=\frac{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}$$
$$1-t^2=\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2-(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})^2}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}=\frac{4}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}$$

إذن

$$\begin{aligned}\frac{2t}{1+t^2}&=2\frac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}\times\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}\\&=\frac{(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\\&=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\frac{2i\sin\theta}{2\cos\theta}=i\tan\theta\\\frac{2t}{1-t^2}&=2\frac{e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}\times\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}{4}\\&=\frac{(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})}{2}\\&=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=i\sin\theta\\\frac{1+t^2}{1-t^2}&=\frac{2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}\times\frac{(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})^2}{4}\\&=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}=\cos\theta\end{aligned}$$

② نلاحظ أنّ

$$t=\frac{2i\sin(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)}=i\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بالتعويض في العلاقات الواردة في ① نجد المطلوب.

14 ① حلّ في $\mathbb{C}$ المعادلات $z^2=w$ في الحالات الآتية

❶ $w=-3+4i$ ، ❷ $w=-21-20i$ ، ❸ $w=-7+24i$

② حل في $\mathbb{C}$ المعادلات الآتية:

❶ $z^2+(1+4i)z-5-i=0$

❷ $2iz^2+(3+7i)z+4+2i=0$

❸ $z^2+(1+8i)z-17+i=0$

الحل

① ❶ $\{1+2i,-1-2i\}$ ❷ $\{2-5i,-2+5i\}$ ❸ $\{3+4i,-3-4i\}$

② ❶ $\left\{-2-3i,1-i\right\}$ ❷ $\left\{-3+i,\frac{1}{2}(i-1)\right\}$ ❸ $\left\{-2-5i,1-3i\right\}$

15 في حالة عدد عقدي $z\neq-1$ نضع $Z=\dfrac{2+\overline{z}}{1+\overline{z}}$ ونفترض أنّ $z=x+iy$ و $Z=X+iY$ حيث x و y و X و Y هي أعداد حقيقية.

① احسب X و Y بدلالة العددين x و y.

② أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z حقيقياً هي مستقيم محذوف منه نقطة.

③ أثبت أنّ مجموعة النقاط $M(z)$ التي يكون عندها Z تخيلياً بحتاً هي دائرة محذوف منها نقطة.

الحل

① بضرب البسط والمقام بمرافق المقام في عبارة Z نجد

$$X+iY=\frac{2+x-iy}{1+x-iy}=\frac{(1+x)(2+x)+y^2+iy}{(1+x)^2+y^2}\text{،}$$

ومنه

$$X=\frac{(1+x)(2+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2}$$
$$Y=\frac{y}{(1+x)^2+y^2}$$

② يكون Z حقيقياً إذا وفقط إذا كان $z\neq-1$ و $y=0$، وهذا يمثّل محور الفواصل محذوفاً منه النقطة التي تقابل العدد العقدي -1 أي $(-1,0)$.

③ يكون Z تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان $z\neq-1$ وكان $(1+x)(2+x)+y^2=0$ أو $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ وهذا يمثّل الدائرة التي مركزها النقطة $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ محذوفاً منها النقطة التي تقابل العدد العقدي -1.

16 عيّن في كل حالة مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق الشرط المعطى:

① المقدار $(z+1)(\overline{z}-2)$ حقيقي.

② العدد z مختلف عن $4i$ و $\dfrac{z+2i}{z-4i}$ عدد حقيقي.

الحل

① يكون المقدار $(z+1)(\overline{z}-2)$ حقيقياً إذا وفقط إذا كان $(\overline{z}+1)(z-2) = (z+1)(\overline{z}-2)$، وهذا يكافئ $z=\overline{z}$. والمعادلة الأخيرة تمثّل مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

② يكون المقدار $\dfrac{z+2i}{z-4i}$ حقيقياً إذا وفقط إذا كان $z \neq 4i$ وكان $\dfrac{\overline{z}-2i}{\overline{z}+4i} = \dfrac{z+2i}{z-4i}$، وهذا يكافئ $z=-\overline{z}$. فمجموعة الأعداد المحققة للشرط السابق هي مجموعة الأعداد التخيّليّة البحتة عدا $4i$.

5

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

1. تمثيل الأشعة بأعداد عقدية
2. استعمال العدد العقدي الممثل لشعاع
3. الكتابة العقدية للتحويلات الهندسية

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

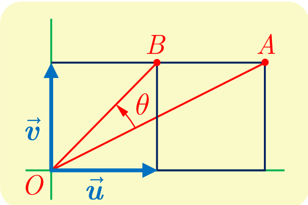
- التمثيل الهندسي للأعداد العقدية.
- حساب زاوية شعاعين انطلاقاً من التمثيل العقدي.
- التعبير عن التعامد والتوازي باستعمال الأعداد العقدية.
- التمثيل العقدي للتحويلات الهندسية : الانسحاب – الدوران – التحاكي التناظر المركزي.
- استعمال الأعداد العقدية في حل بعض مسائل الهندسة المستوية.

5

تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة

انطلاقة نشطة

نتأمّل معلماً متجانساً $(O;\vec{u},\vec{v})$ في المستوي.



❶ يبيّن الشكل المجاور مربّعين طول ضلع كل منهما يساوي الواحد.

يُطلب حساب النسبة $r=\dfrac{OB}{OA}$ وتعيين قياس للزاوية $\theta=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

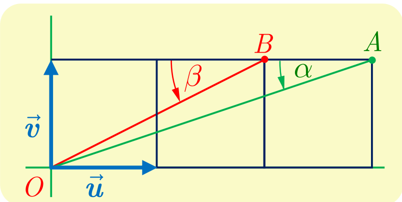
بالطبع يمكن استعمال الطرائق التقليدية، ولكننا هنا سنسعى إلى استعمال الأعداد العقدية.

① أعط z_A و z_B العددان العقديان اللذان يمثلان A و B.

② اشرح العلاقة بين $Z=\dfrac{z_B}{z_A}$ والعددين المطلوبين r و θ.

③ احسب Z واستنتج قيم r و $\cos\theta$ و $\sin\theta$.

الحل هنا $z_A=2+i$ و $z_B=1+i$. $Z=z_B/z_A=re^{i\theta}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$. ومنه $r=\sqrt{\frac{2}{5}}$ و θ من $[0,\frac{\pi}{2}]$ تحقق $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$. أي $\theta\approx 18^\circ\, 26'\, 6''$.



❷ يبيّن الشكل المجاور ثلاثة مربعات طول ضلع كل منهما يساوي الواحد. يُطلب حساب $\alpha+\beta$ مجموع قياسي الزاويتين المبينتين في الشكل.

① أعط z_A و z_B العددين العقديين اللذين يمثلان A و B.

② اشرح العلاقة بين كل من α و β وزاويتي العددين العقديين z_A و z_B.

③ بيّن أنّ المطلوب هو حساب زاوية العدد العقدي $Z=z_A\cdot z_B$.

④ احسب Z واستنتج قيمة $\alpha+\beta$.

الحل $z_A=3+i=\sqrt{10}\,e^{i\alpha}$ و $z_B=2+i=\sqrt{5}\,e^{i\beta}$.

$$Z=z_Az_B=5\sqrt{2}\,e^{i(\alpha+\beta)}=5(1+i)$$

ولكن α و β زاويتان حادتان، إذن $\alpha+\beta\in[0,\pi]$ وتحققان $\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. أي $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$.

تَدرَّبْ صفحة 132

① لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية:

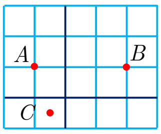
$$z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ و } z_B = 2 + i \text{ و } z_A = -1 + i$$

❶ وضّع النقاط A و B و C في شكل.

❷ احسب الأعداد العقدية التي تمثّل الأشعة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$.

❸ احسب أطوال أضلاع المثلث ABC وبيّن إذا كان مثلثاً قائماً في C.

الحل



لدينا $\overrightarrow{BC} = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2}i, \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i, \overrightarrow{AB} = 3$، ومن ثَمّ $AB = 3$ و $AC = \frac{\sqrt{10}}{2}$ و $BC = \frac{\sqrt{34}}{2}$. نلاحظ أنّ $AC^2 + BC^2 - AB^2 = \frac{34+10}{4} - 9 = 2 \neq 0$ فالمثلث ABC ليس قائم الزاوية في C.

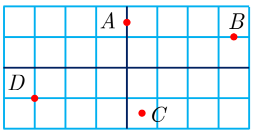
② لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$z_D = -3 - i \text{ و } z_C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ و } z_B = \frac{7}{2} + i \text{ و } z_A = \frac{3}{2}i$$

❶ وضّع النقاط A و B و C و D في شكل.

❷ ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

الحل لدينا



$$\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i,$$
$$\overrightarrow{DC} = z_C - z_D = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$$

ومن ثَمّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ والرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.

③ لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية : $z_A = 2(1 + i\sqrt{3})$ و $z_B = 2(1 - i\sqrt{3})$.

❶ أثبت أنّ A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

❷ جد العدد العقدي المُمثّل للنقطة C التي تجعل O مركز ثقل المثلث ABC.

❸ ما طبيعة المثلث ABC ؟

الحل لدينا $\left|z_A\right|^2 = 4\left(1+3\right) = 16$ إذن $\left|z_A\right| = 4$، وكذلك $\left|z_B\right| = 4$ إذن $OA = OB = 4$، والنقطتان A و B تنتميان إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4.

استناداً إلى تعريف C لدينا $z_C + z_A + z_B = 3z_O = 0$ ومنه $z_C = -z_A - z_B = 4$. إذن C تنتمي أيضاً إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها يساوي 4. فمركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC (نقطة تقاطع محاوره) هي نفسها نقطة تلاقي متوسطاته. فهو إذن متساوي الأضلاع. ويمكننا التحقق مباشرة من ذلك بحساب أطوال أضلاعه لنجدها متساوية.

④ نتأمّل شعاعين $\vec{U}$ و $\vec{V}$ يمثلهما العددان العقديان u و v بالترتيب. نفترض أنّ $v = iu$ ونضع $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{V}$. أثبت أنّ المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

الحل المساواة $v = iu$ تقتضي أنّ $\frac{\pi}{2} = \arg(i) = \arg\left(\frac{v}{u}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ وأنّ $|v| = |u|$ أي $AB = AC$. فالمثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

⑤ المثلّثان ABC و $A'B'C'$ معرّفان بالأعداد العقدية التي تمثل رؤوسهما:

$$c = 2 + i, \quad b = 2 + 3i, \quad a = 1 - i,$$
$$c' = 4 + i, \quad b' = 3 - i, \quad a' = -2 + 3i,$$

❶ احسب العدد الممثِّل للشعاع $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

❷ جد العدد العقدي المُمثّل للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

❸ أثبت أنّ G هي مركز ثقل المثلث $A'B'C'$.

الحل

❶ ليكن Z العدد العقدي الممثل للشعاع $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ ، عندئذ

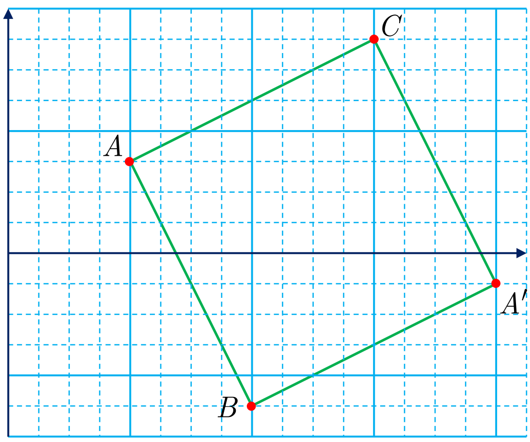
$$Z = a' - a + b' - b + c' - c = 0$$

ومن ثَمّ $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

❷ $z_G = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{5}{3} + i$.

❸ $\frac{1}{3}(a' + b' + c') = \frac{1}{3}(a + b + c)$ لأنّ $Z = 0$.

⑥ لتكن النقاط A و B و C التي تمثلها الأعداد العقدية: $a = 1 + \frac{3}{4}i$ و $b = 2 - \frac{5}{4}i$ و $c = 3 + \frac{7}{4}i$



❶ وضّع النقاط A و B و C في شكل. ما العلاقات التي تربط الأعداد العقدية المُمثلة للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$؟

❷ استنتج أنّ ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

❸ احسب العدد العقدي الممثل للنقطة A' التي تجعل $ABA'C$ مربعاً.

الحل

❶ ليكن u و v العددين العقديين الممثلين للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بالترتيب. عندئذ $u = b - a = 1 - 2i$ و $v = c - a = 2 + i$ ، وإذن $v = iu$.

❷ فالمثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين رأسه A ، مثلما فعلنا في التمرين ④ أعلاه.

❸ لما كان $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ استنتجنا أنّ $z_{A'} = a + u + v = 4 - \frac{1}{4}i$.

⑦ لتكن النقاط A و B و C و D التي تمثلها الأعداد العقدية:

$$a = 2 - 2i \text{ و } b = -1 + 7i \text{ و } c = 4 + 2i \text{ و } d = -4 - 2i$$

❶ لتكن Ω النقطة التي يمثلها العدد العقدي $\omega = -1 + 2i$. أثبت وقوع النقاط A و B و C و D على دائرة مركزها Ω ونصف قطرها يساوي 5.

❷ ليكن e العدد المُمثّل للنقطة E منتصف $[AB]$. احسب e وبرهن أنّ $\dfrac{c-e}{a-e} = \dfrac{a-e}{d-e}$.

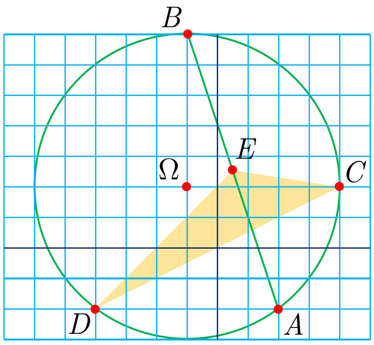
❸ ماذا يمثل المستقيم (EA) في المثلث DEC؟

الحل

❶ علينا أن نحسب الأطوال ΩA و ΩB و ΩC و ΩD. فنجد مثلاً

$$\Omega A = |a - \omega| = |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

وكذلك نجد بحساب مماثل أنّ $\Omega B = \Omega C = \Omega D = 5$. فهذه النقاط تقع جميعاً على الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها يساوي 5.



❷ لما كان $e = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ استنتجنا أنّ

$$\frac{a-e}{d-e} = \frac{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{-4 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

$$\frac{c-e}{a-e} = \frac{4 + 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i}{2 - 2i - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

إذن $\dfrac{c-e}{a-e} = \dfrac{a-e}{d-e}$.

❸ نستنتج مما سبق أنّ $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = (\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA})$ فالمستقيم (EA) منصف للزاوية DEC، ومن ثَمّ هو منصف للزاوية E في المثلث DEC.

⑧ لتكن النقطتان A و B اللتان تمثلهما الأعداد العقدية : 1 و $3 + 2i$ بالترتيب. مثّل في كل من الحالتين الآتيتين مجموعة النقاط $M(z)$ التي تحقق:

❶ $|z - 1| = |z - 3 - 2i|$،

❷ $|z - 3 - 2i| = 1$.

الحل

❶ هذا هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$ حيث A هي النقطة الموافقة للعدد العقدي 1، و B هي النقطة الموافقة للعدد العقدي $3 + 2i$.

❷ هذه هي الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها يساوي 1.

تدرّب صفحة 136

① لتكن M النقطة التي يمثلها العدد العقدي $z = 1 + i$. جد العدد العقدي z' المُمثّل للنقطة M' صورة M وفق التحويل الموصوف في كل مما يأتي:

❶ $\mathcal{T}$ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$. ❷ $\mathcal{H}$ التحاكي الذي مركزه O ونسبته 3.

❸ $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$. ❹ $\mathcal{S}$ التناظر الذي مركزه $A(1-3i)$.

❺ $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه $A(2-i)$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$. ❻ $\mathcal{S}$ التناظر المحوري الذي محوره (Ox).

الحل

❶ $z' = z + (-2+3i) = -1 + 4i$. ❷ $z' = 3z = 3 + 3i$.

❸ $z' = e^{i\pi/4}z = \sqrt{2}\,i$. ❹ $z' = 1 - 3i - (z - 1 + 3i) = 1 - 7i$.

❺ $z' = 2 - i + e^{2\pi i/3}(z - 2 + i) = \frac{5}{2} - \sqrt{3} - \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$. ❻ $z' = \overline{z} = 1 - i$.

② فيما يأتي يرتبط العددان العقديان a و b الممثلان للنقطتين A و B بالعلاقة المعطاة. عيّن طبيعة التحويل الهندسي الذي يقرن النقطة B بالنقطة A:

❶ $b = a - 1 + 3i$ ❷ $b = -ia$

❸ $b = \overline{a}$ ❹ $b = 2a$

❺ $b - 1 = -(a - 1)$ ❻ $b - i = e^{i\pi/3}(a - i)$

❼ $b = a + 4 - 3i$ ❽ $b + 1 - i = e^{i\pi/4}(a + 1 - i)$

الحل

❶ B صورة A وفق انسحاب شعاعه $\vec{w} = -\vec{u} + 3\vec{v}$.

❷ B صورة A وفق الدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

❸ B صورة A وفق التناظر المحوري الذي محوره (Ox).

❹ B صورة A وفق التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

❺ B صورة A وفق التناظر المركزي الذي مركزه النقطة التي يمثلها العدد 1.

❻ B صورة A وفق الدوران الذي مركزه $A(i)$ وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

❼ B صورة A وفق انسحاب شعاعه $\vec{w} = 4\vec{u} - 3\vec{v}$.

❽ B صورة A وفق الدوران الذي مركزه $A(i-1)$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

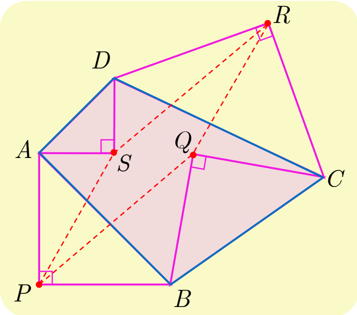
③ لتكن النقطتان $G(3 - i\sqrt{3})$ و $H(3 + i\sqrt{3})$. وليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي مركزه O ويحقّق $H = \mathcal{R}(G)$. احسب قياس الزاوية $(\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH})$، واستنتج الصيغة العقدية للدوران $\mathcal{R}$.

الحل

$z' = e^{i\pi/3}z$.

أنشطة

نشاط 1 متوازي الأضلاع وربع الدورة



نتأمّل في مستوٍ مزوّد بمعلم متجانس رباعياً محدباً $ABCD$.
ونُنشئ عليه مثلثات قائمة ومتساوية الساقين PAB و QBC و RCD و SDA بحيث

$$(\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QC})=\frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB})=-\frac{\pi}{2}$$

$$(\overrightarrow{SD},\overrightarrow{SA})=\frac{\pi}{2} \text{ و } (\overrightarrow{RC},\overrightarrow{RD})=-\frac{\pi}{2} \text{ و}$$

نهدف إلى استعمال الأعداد العقدية في إثبات أنّ $PQRS$ متوازي الأضلاع.

لنفترض أنّ الشكل مرسوم في المستوي الموجّه، وقد زوّدناه **بمعلم متجانس مباشر**. ولنرمز a و b و c و d إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A و B و C و D، وكذلك لنرمز p و q و r و s إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط P و Q و R و S.

① الدوران الذي مركزه P وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ينقل A إلى B. استعمل الصيغة العقدية لتثبت أنّ

$$p=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+b(1-i)\big)$$

② عبّر بالمثل عن q و r و s بدلالة a و b و c و d.

③ تيقّن أنّ $p+r=q+s$، ثُمّ استنتج المطلوب.

الحل

① إذا كانت $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ وفق الدوران الذي مركزه P وزاويته $-\frac{\pi}{2}$، كان

$$z'=p+e^{-i\pi/2}(z-p)=p-i(z-p)$$

ولأنّ B هي صورة A وفق هذا الدوران استنتجنا أنّ $b=p-i(a-p)$ أو $b+ia=(1+i)p$.
وبضرب الطرفين بالعدد $(1-i)$ نستنتج أنّ $p=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+b(1-i)\big)$ $(*)$.

② لاحظ أنّ B هي صورة C وفق الدوران الذي مركزه Q وزاويته $-\frac{\pi}{2}$، مثلما هي B صورة A وفق الدوران الذي مركزه P وزاويته $-\frac{\pi}{2}$. إذن لنحصل على صيغة q يكفي أن نستبدل $c \leftarrow a$ و $q \leftarrow p$ في العلاقة $(*)$ لنجد $q=\frac{1}{2}\big(c(1+i)+b(1-i)\big)$. وبالمثل، يفيد التبديل $c \leftarrow a, d \leftarrow b, r \leftarrow p$ في $(*)$ في حساب r : $r=\frac{1}{2}\big(c(1+i)+d(1-i)\big)$، وأخيراً التبديل $d \leftarrow b, s \leftarrow p$ في $(*)$ يتيح حساب s : $s=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+d(1-i)\big)$.

③ نلاحظ إذن أنّ

$$p=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+b(1-i)\big),\qquad r=\frac{1}{2}\big(c(1+i)+d(1-i)\big)$$
$$q=\frac{1}{2}\big(c(1+i)+b(1-i)\big),\qquad s=\frac{1}{2}\big(a(1+i)+d(1-i)\big)$$

ومن ثَمّ

$$p+r=\frac{a+c}{2}(1+i)+\frac{b+d}{2}(1-i)$$
$$q+s=\frac{a+c}{2}(1+i)+\frac{b+d}{2}(1-i)$$

أي $p+r=q+s$ أو $\frac{p+r}{2}=\frac{q+s}{2}$ وهذه الأخيرة تعني أنّ قطرا الرباعي $PQRS$ متناصفان، فهو إذن متوازي الأضلاع.

نشاط 2 الجذور التكعيبية للواحد. المثلث المتساوي الأضلاع

نهدف في هذه الفقرة إلى تعيين حلول المعادلة $z^3=1$ في $\mathbb{C}$، ثُمّ استعمال ذلك لإعطاء خاصة مميِّزة للمثلث متساوي الأضلاع.

❶ في حالة $z\neq 0$ نرمز بالرمز r إلى طويلة z وبالرمز θ إلى زاويته من المجال $[0,2\pi[$.

① تيقن أنّ الشرط $z^3=1$ يقتضي أن يكون $r=1$ و $3\theta=2\pi k$ حيث k عدد صحيح.

② تحقّق أنّ الشرط $\theta\in[0,2\pi[$ يقتضي في الحقيقة أنّ $k\in\{0,1,2\}$.

③ استنتج أنّ مجموعة حلول المعادلة $z^3=1$ محتواة في $\mathbb{U}_3=\left\{1,e^{2i\pi/3},e^{4i\pi/3}\right\}$.

④ وبالعكس تحقّق أنّ كل عنصر من $\mathbb{U}_3=\left\{1,e^{2i\pi/3},e^{4i\pi/3}\right\}$ هو حل للمعادلة $z^3=1$.

⑤ مثِّل النقاط $M_0(1)$ و $M_1(e^{2\pi i/3})$ و $M_2(e^{4\pi i/3})$ في المستوي، وتيقّن أنّها تؤلّف رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

نسمّي حلول المعادلة $z^3=1$ الجذور التكعيبية للواحد ونرمز إلى مجموعتها بالرمز $\mathbb{U}_3$.
وكذلك نرمز إلى $e^{2i\pi/3}$ بالرمز j. لاحظ أنّ $\mathbb{U}_3=\{1,j,j^2\}$.

⑥ تحقّق أنّ $1+j+j^2=0$، و $\bar{j}=j^2=e^{-2i\pi/3}$.

❷ نزوّد المستوي بمعلم **متجانس مباشر** $(O;\vec{u},\vec{v})$. ونتأمّل ثلاث نقاط متباينة A و B و C تمثلها الأعداد العقدية a و b و c. نقول إنّ ABC مثلث متساوي الأضلاع **مباشر** إذا كنا عند قراءة رؤوسه بهذا الترتيب: $A\to B\to C\to A$ ندور في الاتجاه الموجب. وهذا يُكافئ القول إنّ A هي صورة C وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

استعمل نتائج الفقرة السابقة لتثبت أنّ ABC مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان

$$a + bj + cj^2 = 0$$

❸ نقرن بكل عدد $z \neq 1$، النقاط $R(1)$ و $M(z)$ و $M'(\overline{z})$.

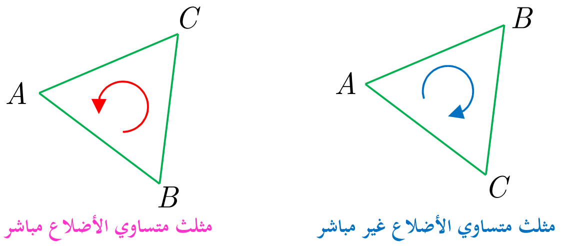
① ما هي قيم z التي تجعل M و M' مختلفتين ؟

② نفترض تحقّق الشرط السابق. أثبت أنّ Δ مجموعة النقاط $M(z)$ التي تجعل المثلث RMM' مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً، هي مستقيم محذوفةٌ منه نقطة.

الحل

❶ بسيط ومتروك للقارئ.

❷ نوعان من المثلثات المتساوية الأضلاع.



إذا كانت $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ وفق الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$، كان

$$z' = a + e^{i\pi/3}(z - a) = a - j^2(z - a)$$

حيث استفدنا من كون $e^{i\pi/3} = -j^2$. الآن يكون ABC مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً إذا كانت C صورة B وفق الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$، أي $c = a - j^2(b - a)$ وهذه تُكتب بالصيغة المُكافئة $c + j^2b - (1 + j^2)a = 0$، ولكن $1 + j + j^2 = 0$ إذن $c + j^2b + ja = 0$. يكفي أن نضرب طرفي هذه المساواة بالمقدار j^2 لنجد $a + bj + cj^2 = 0$.

❸ ① $M \neq M'$ إذا وفقط إذا كان $z \neq \overline{z}$ إي إذا وفقط إذا لم يكن z عدداً حقيقياً صرفاً.

② نفترض أنّ $z \neq \overline{z}$ عندئذ RMM' مثلث متساوي الأضلاع مباشر إذا وفقط إذا كان $1 + jz + j^2\overline{z} = 0$، أو $1 + 2\,\mathrm{Re}(jz) = 0$.

فإذا افترضنا $z = x + iy$ كتبنا الشرطين السابقين كما يأتي

$$1 + \mathrm{Re}\Big((-1 + \sqrt{3}i)(x + iy)\Big) = 0 \quad \text{و} \quad y \neq 0$$

أي $1 - x - \sqrt{3}y = 0$ و $y \neq 0$. فالمجموعة Δ هي المستقيم الذي معادلته $\sqrt{3}y + x = 1$ باستثناء النقطة $(1,0)$.

تمرينات ومسائل

1 نتأمّل النقاط A و B و C التي توافق بالترتيب الأعداد العقدية $a=8$ و $b=-4+4i$ و $c=-4i$.

① a. تحقّق أنّ $b-c=i(a-c)$.

b. استنتج أنّ المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

② نقرن بكل نقطة $M(z)$ النقطة M' الموافقة للعدد العقدي $z'=e^{i\pi/3}z$.

a. ما التحويل الهندسي الموافق؟

b. احسب الأعداد العقدية a' و b' و c' الموافقة للنقاط A' و B' و C' صور A و B و C وفق هذا التحويل.

③ لتكن P و Q و R منتصفات القطع المستقيمة $[A'B]$ و $[B'C]$ و $[C'A]$، ولتكن p و q و r الأعداد العقدية التي توافقها.

a. احسب p و q و r.

b. تحقّق أنّ $r-p=e^{i\pi/3}(q-p)$.

c. استنتج أنّ المثلث PQR متساوي الأضلاع.

الحل

① نحسب

$$b-c-i(a-c)=-4+4i+4i-i(8+4i)=8i-4-8i+4=0$$

فنستنتج أنّ $b-c=i(a-c)$. هذا يعني أنّ B هي صورة A وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول C. فالمثلث ABC مثلث قائم في C ومتساوي الساقين.

② $M'(z')$ هي صورة $M(z)$ وفق الدوران بزاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ حول O. ولأنّ $e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ وجدنا

$$a'=4+4\sqrt{3}i \text{ و } b'=-2-2\sqrt{3}+(2-2\sqrt{3})i \text{ و } c'=2\sqrt{3}-2i$$

③

$$p=\frac{a'+b}{2}=\frac{4+4\sqrt{3}i+(-4+4i)}{2}=2(1+\sqrt{3})i$$

$$q=\frac{b'+c}{2}=\frac{-2-2\sqrt{3}+(2-2\sqrt{3})i+(-4i)}{2}=-1-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i$$

$$r=\frac{c'+a}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2i+8}{2}=4+\sqrt{3}-i$$

ونجد

$$\begin{aligned} r-p &= 4+\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i \\ q-p &= -1-\sqrt{3}-3(1+\sqrt{3})i \\ e^{i\pi/3}(q-p) &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(-1-\sqrt{3}-3(1+\sqrt{3})i) = 4+\sqrt{3}-(3+2\sqrt{3})i \end{aligned}$$

إذن $r-p=e^{i\pi/3}(q-p)$، والنقطة R هي صورة Q وفق دوران مركزه P وزاويته $\frac{\pi}{3}$، فالمثلث PQR مثلث متساوي الأضلاع.

ملاحظة. ربما كان من الأيسر الحل رمزياً دون تعويض قيم a و b و c. لنضع $\omega=e^{i\pi/3}$ عندئذ

$$r=\frac{\omega c+a}{2}, q=\frac{\omega b+c}{2}, p=\frac{\omega a+b}{2}$$

ومن ثَمّ

$$q-p=\frac{1}{2}\big(-\omega a+(\omega-1)b+c\big),\quad r-p=\frac{1}{2}\big((1-\omega)a-b+\omega c\big)$$

إذن $\omega(q-p)=\frac{1}{2}\big(-\omega^2 a+\omega(\omega-1)b+\omega c\big)$، ومنه

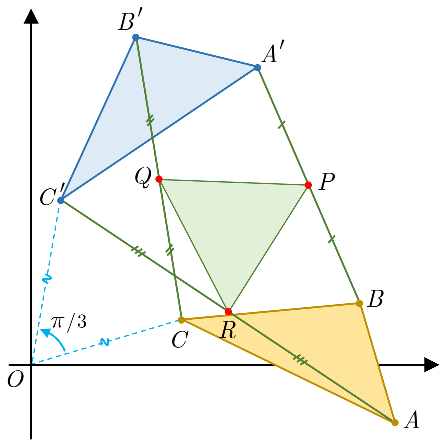
$$r-p-\omega(q-p)=\frac{1}{2}(1-\omega+\omega^2)(a-b)$$

بقي أن نحسب المقدار $1-\omega+\omega^2$. وهنا نلاحظ أنّ

$$\omega^2=e^{2i\pi/3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{و} \quad \omega=e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

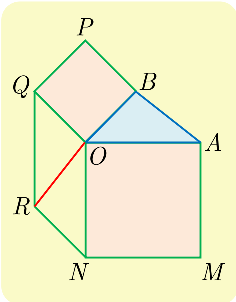
إذن $1-\omega+\omega^2=0$. ومن ثَمّ $r-p=\omega(q-p)$، والمثلث PQR مثلث متساوي الأضلاع.

في الشكل الآتي الذي يوضح الخاصة الهندسية التي أثبتناها في هذا التمرين، المثلث ABC هو مثلث كيفي في المستوي.



2 نتأمّل مثلّثاً OAB فيه $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\alpha$ حيث $\alpha\in]0,\pi[$. نُنشئ خارج هذا المثلث المربعين $OAMN$ و $OBPQ$ ومتوازي الأضلاع $NOQR$. نهدف في هذا التمرين إلى إثبات أنّ المستقيمين (OR) و (AB) متعامدان وأنّ $OR=AB$، وذلك باستعمال الأعداد العقدية.

لنختر معلماً متجانساً مباشراً $(O,\vec{u},\vec{v})$. وليكن a و b العددين العقديين اللذين يمثلان A و B.



① a. ما هي صور النقطتين N و B وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول O؟

b. نرمز n إلى العدد العقدي الممثل للنقطة N، و q للعدد العقدي الموافق للنقطة Q. أثبت أنّ $n=-ia$ و $q=ib$.

② a. عبّر عن $\overrightarrow{OR}$ بدلالة $\overrightarrow{ON}$ و $\overrightarrow{OQ}$.

b. استنتج العدد العقدي r الذي يمثّل النقطة R بدلالة a و b.

c. ما العدد العقدي المُمثّل للشعاع $\overrightarrow{AB}$ ؟

d. أثبت إذن أنّ $OR=AB$ وأنّ $(\vec{u},\overrightarrow{OR})=\dfrac{\pi}{2}+(\vec{u},\overrightarrow{AB})$. واستنتج تعامد (OR) و (AB).

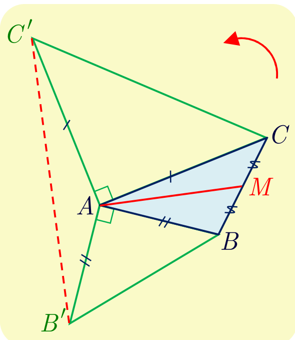
الحل

① إذا كان $\mathcal{R}$ هو الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول O كان $\mathcal{R}(N)=A$ و $\mathcal{R}(B)=Q$. فإذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق $\mathcal{R}$ كان $z'=e^{i\pi/2}z=iz$. ومنه نرى أنّ $a=in$ و $q=ib$. ومنه العلاقتان المطلوبتان.

② لمّا كان $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}$ استنتجنا أنّ $r=-ia+ib=i(b-a)$. ومن جهة أخرى $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ فالعدد العقدي w الممثل للشعاع $\overrightarrow{W}=\overrightarrow{AB}$ هو $w=b-a$. نستنتج إذن أنّ $r=iw$، ومنه $|r|=|w|$ أي $OR=AB$ و $\arg(r)=\dfrac{\pi}{2}+\arg(w)$ أي $(\vec{u},\overrightarrow{OR})=\dfrac{\pi}{2}+(\vec{u},\overrightarrow{AB})$. ومن استناداً إلى علاقة شال للزوايا الموجهة : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OR})=(\vec{u},\overrightarrow{OR})-(\vec{u},\overrightarrow{AB})=\dfrac{\pi}{2}$، فالمستقيمان (OR) و (AB) متعامدان.

لنتعلّم البحث معاً

3 دراسة شكل



نتأمّل في المستوي ABC مثلثاً مباشر التوجيه كيفياً. لتكن M منتصف $[AC]$، وليكن $AB'B$ و ACC' مثلثين قائمين في A ومتساويي الساقين مباشرين. أثبت أنّ المتوسط (AM) في المثلث ABC، هو ارتفاع في المثلث $AB'C'$ وأنّ $B'C'=2AM$.

نحو الحلّ

- نبدأ باختيار معلم مباشر مناسب. تؤدي النقطة A دوراً أساسياً، لذلك نعتبرها مبدأ لهذا المعلم. ونرمز بالرمزين b و c إلى العددين العقديين اللذين يمثلان النقطتين B و C. احسب بدلالة b و c الأعداد العقدية b' و c' و m المُمثِّلة للنقاط B' و C' و M بالترتيب.
- نهدف إلى إثبات أنّ $\overrightarrow{B'C'}$ عمودي على $\overrightarrow{AM}$، الذي يؤول إلى إثبات أنّ

$$\frac{B'C'}{AM} = 2 \quad \text{وأنّ} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{أو} \quad (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) = +\frac{\pi}{2}$$

ومنه تأتي فكرة حساب النسبة $\frac{c'-b'}{m-a}$، التي تعطي مباشرة جميع المعلومات المطلوبة. احسب هذه النسبة واستنتج الخاصة المطلوبة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

- فإذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق $\mathcal{R}$، الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول A، كان $z' = e^{i\pi/2}z = iz$، ولأنّ $C' = \mathcal{R}(C)$ و $B = \mathcal{R}(B')$ استنتجنا أنّ $c' = ic$ و $b' = -ib$. وأخيراً لأنّ M منتصف $[BC]$ استنتجنا أنّ $m = \frac{1}{2}(b+c)$.
- لنحسب العدد العقدي $w = \frac{c'-b'}{m-a}$. إذ لدينا

$$\arg w = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C'}) \text{ و } |w| = \frac{B'C'}{AM}$$

وهما المقداران المطلوب تعيينهما. في الحقيقة لدينا $a = 0$ و من ثَمّ

$$w = \frac{c'-b'}{m-a} = \frac{ic+ib}{\frac{1}{2}(b+c)} = 2i$$

وهذا يبرهن أنّ $|w| = 2$ و $\arg w = \frac{\pi}{2}$، ومن ثَمّ $B'C' = 2AM$، و (AM) عمودي على $(B'C')$ كما هو مطلوب.

4 البحث عن مجموعة

نزوّد المستوي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. نقرن كل نقطة $M(z)$ حيث $z \neq i$ بالنقطة $M(z')$ حيث $z' = \frac{z+2}{z-i}$.

- عيّن Δ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً حقيقيّاً.
- عيّن Γ مجموعة النقاط M التي يكون عندها z' عدداً تخيليّاً بحتاً.

نحو الحلّ

التفسير الهندسي: الشرط z' عددٌ حقيقي يُكافئ القول $\operatorname{Im}(z') = 0$ أو $\overline{z'} = z'$، أو $\arg z' \in \{0, \pi\}$ (في حالة $z' \neq 0$). ولأنّ z' من الشكل $\dfrac{z-a}{z-b}$ وجدنا من المناسب استعمال الخاصة الأخيرة.

لنرمز a و b و z إلى الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط A و B و M. ما الزاوية بين شعاعين التي يقيسها المقدار $\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$ ؟

لوضع z' بالشكل $\dfrac{z-a}{z-b}$، نكتب $z' = \dfrac{z-(-2)}{z-i}$، ونعرّف النقطتين $A(i)$ و $B(-2)$.

① وضّع هاتين النقطتين.

② تحقّق أنّ z' حقيقي إذا وفقط إذا كان $M = B$ أو $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \in \{0, \pi\}$.

③ مثّل المجموعة Δ وعيّن طبيعتها الهندسية. (لا تنس أنّ $z \neq i$ ومن ثَمّ $M \neq A$).

④ عيّن بالمثل المجموعة Γ ومثّلها هندسياً.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

باتباع الخطوات المشار إليها. نعرّف النقطتين $A(i)$ و $B(-2)$. عندئذ تنتمي $M(z)$ إلى Δ إذا وفقط إذا كان $z = z_B$ أو $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 0\ (\pi)$ وهذا يكافئ القول إنّ $M = B$ أو إنّ الزاوية الموجهة للشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ تساوي 0 أو π: $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \in \{0, \pi\}$. هذا يعني أنّ الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطان خطياً، أو أنّ النقطة M تقع على المستقيم (AB) ومختلفة عن A. إذن $\Delta = (AB) \backslash \{A\}$.

بالمثل، تنتمي $M(z)$ إلى Γ إذا وفقط إذا كان $z = z_B$ أو $\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ وهذا يكافئ القول إنّ $M = B$ أو إنّ الزاوية الموجهة للشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BM}$ تساوي $\pm\dfrac{\pi}{2}$، أي إنهما متعامدان. فالنقطة M تنتمي إلى مجموعة النقاط التي تُرى منها القطعة المستقيمة $[AB]$ تحت زاوية قائمة باستثناء النقطة A . هي إذن الدائرة التي قطرها $[AB]$ محذوفاً منها النقطة A. وعليه Γ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ محذوفاً منها النقطة A. ونترك مهمة رسم Δ و Γ للقارئ.

5 خاصّة مميّزة لمتوازي الأضلاع

تمثّل الأعداد العقدية a و b و c و d أربع نقاط A و B و C و D. أثبت أنّ الرباعي $ABCD$ يكون متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان $a+c=b+d$.

الحل

يكون $ABCD$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا تناصف قطراه. ولكن العدد العقدي الذي يمثل منتصف $[AC]$ هو $\frac{a+c}{2}$، والعدد العقدي الذي يمثل منتصف $[BD]$ هو $\frac{b+d}{2}$ وينطبق المنتصفان إذا وفقط إذا كان $a+c=b+d$.

6 حساب النسب المثلثية للزاوية $\frac{3\pi}{8}$.

نتأمّل النقطتين A و B اللتين يمثلهما العددان $a=2$ و $b=2e^{3i\pi/4}$. وليكن I منتصف $[AB]$.

① a. ارسم شكلاً مناسباً، وبيّن طبيعة المثلث OAB.

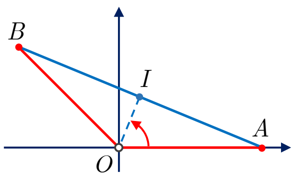
b. استنتج قياساً للزاوية $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.

② a. احسب العدد العقدي z_I المُمَثِّل للنقطة I بصيغته الجبرية والأسية.

b. استنتج كلّاً من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

الحل

① المثلث OAB مثلث متساوي الساقين رأسه O. المستقيم (OI) متوسط في هذا المثلث فهو منصف زاوية رأسه، ومنه $(\vec{u},\overrightarrow{OI})=\frac{3\pi}{8}$.



② هنا $z_I=\frac{1}{2}(a+b)=1+e^{3\pi i/4}$ إذن من جهة أولى لدينا

$$z_I=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

ومن جهة ثانية $\sqrt{2-\sqrt{2}}\,e^{3\pi i/8}=|z_I|\cdot e^{3\pi i/8}=z_I$. وهكذا نجد أنّ

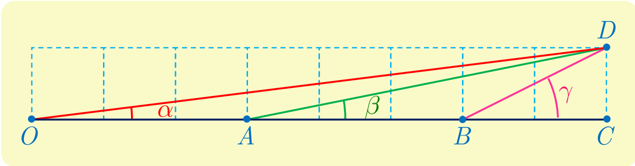
$$\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

أو

$$\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}+\frac{i}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

ومنه بمقارنة الجزأين الحقيقيين والتخيليّين نجد $\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$.

7 تأمّل الشكل واحسب المجموع $\alpha+\beta+\gamma$، حيث α و β و γ هي القياسات الأساسية للزوايا الموجهة $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})$، و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ و $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$ بالترتيب.



الحل

لاحظ أوّلاً أنّ كلاً من الزوايا α و β و γ أصغر من $\frac{\pi}{4}$. فمجموعها $\theta=\alpha+\beta+\gamma$ ينتمي إلى المجال $]0,\pi[$.

- الشعاع $\overrightarrow{OD}$ يمثله العدد العقدي $8+i=\sqrt{65}\,e^{i\alpha}$.
- الشعاع $\overrightarrow{AD}$ يمثله العدد العقدي $5+i=\sqrt{26}\,e^{i\beta}$.
- الشعاع $\overrightarrow{BD}$ يمثله العدد العقدي $2+i=\sqrt{5}\,e^{i\gamma}$.

نستنتج إذن أنّ

$$\sqrt{65}\sqrt{26}\sqrt{5}\,e^{i\theta}=(2+i)(5+i)(8+i)$$

أو

$$65\sqrt{2}\,e^{i\theta}=i^3+15i^2+66i+80=65(1+i)$$

وأخيراً $e^{i\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$. إذن $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ولكن θ زاوية من $]0,\pi[$، فلا بد أن يكون $\theta=\frac{\pi}{4}$.

8 نقرن بكل نقطة $M(z)$ من المستوي حيث $z\neq-\frac{1}{2}i$ النقطة M' التي يمثلها العدد العقدي $z'=\dfrac{z+2i}{1-2iz}$. لتكن Γ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1. أثبت أنّه إذا انتمت M إلى Γ انتمت M' إلى Γ أيضاً. أيكون العكس صحيحاً؟

الحل

تنتمي نقطة إلى الدائرة Γ إذا وفقط إذا كانت طويلتها تساوي الواحد لذلك سنسعى إلى مقارنة طويلة z' بالواحد، وهذا يُكافئ مقارنة مربّع طويلة z' بالواحد. التعامل مع مربّع طويلة عدد عقدي أمر يسير لأنه يساوي جداء ضرب هذا العدد بمرافقه.

لنحسب إذن المقدار $|z'|^2-1$ في حالة $z'=\dfrac{z+2i}{1-2iz}$.

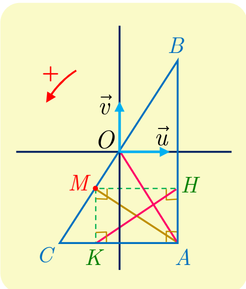
$$|z'|^2-1=\frac{|z+2i|^2}{|1-2iz|^2}-1=\frac{|z+2i|^2-|1-2iz|^2}{|1-2iz|^2}$$
$$=\frac{(z+2i)(\overline{z}-2i)-(1-2iz)(1+2i\overline{z})}{|1-2iz|^2}$$

إذن

$$|z'|^2-1=\frac{|z|^2+4+2i\overline{z}-2iz-1-4|z|^2+2iz-2i\overline{z}}{|1-2iz|^2}=\frac{3(1-|z|^2)}{|1-2iz|^2}$$

من هذه المساواة نرى أنّه يوجد تكافؤ بين الخاصتين $|z|^2-1=0$ و $|z'|^2-1=0$، فإذا تحققت الأولى تحققت الثانية وبالعكس. وعليه تنتمي $M(z)$ إلى Γ (أي $|z|=1$) إذا وفقط إذا انتمت النقطة $M'(z')$ إلى Γ (أي $|z'|=1$).

9 مسألة تعامد



نتأمّل في المستوي الموجّه، مثلّثاً مباشراً ABC قائماً في A. النقطة M هي المسقط القائم للنقطة A على (BC) بالترتيب، و H و K هما المسقطان القائمان للنقطة M على (AB) وعلى (AC) بالترتيب.

نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (OA) و (HK).

نختار معلماً متجانساً ومباشراً $(O;\vec{u},\vec{v})$ بحيث تقع O في منتصف $[BC]$ ويكون $\vec{u}$ عمودياً على (AB) و $\vec{v}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم (AB). ونرمز a,b,c,h,k,m إلى الأعداد العقدية التي تمثل النقاط A,B,C,H,K,M.

① علّل ما يأتي : $a=\overline{b}$ و $a-m=\overline{h-k}$.

② a. أثبت أنّ $\arg\left(\dfrac{a-m}{b}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\dfrac{a-m}{b}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

b. استنتج أنّ $\arg\left(\dfrac{h-k}{a}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\dfrac{h-k}{a}\right)=\dfrac{\pi}{2}$، ثُمّ أثبت المطلوب.

الحل

① لأنّ B نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل استنتجنا أنّ $a=\overline{b}$. الرباعي $AHMK$ مستطيل.

فيكون لدينا من جهة أولى $\overrightarrow{MA}=\mathrm{Re}(a-m)\vec{u}+\mathrm{Im}(a-m)\vec{v}$ إذن

$$\overrightarrow{MH}=\mathrm{Re}(a-m)\vec{u} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{HA}=\mathrm{Im}(a-m)\vec{v}$$

ومن جهة ثانية $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA} = \operatorname{Re}(a-m)\vec{u} - \operatorname{Im}(a-m)\vec{v}$ ، إذن

$$\operatorname{Re}(h-k) = \operatorname{Re}(a-m) \text{ و } \operatorname{Im}(h-k) = -\operatorname{Im}(a-m)$$

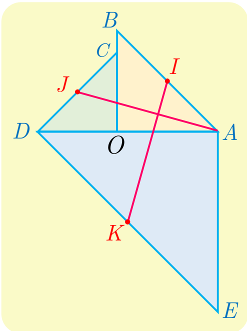
وهذا يكافئ $a - m = \overline{h-k}$.

② الشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدان، أي $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{MA}) = \pm\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ أو $\arg\left(\frac{a-m}{b}\right) = \pm\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$.

أي $\arg\left(\overline{\left(\frac{h-k}{a}\right)}\right) = \pm\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ ومن ثَمّ $\arg\left(\frac{h-k}{a}\right) = \mp\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$ أي $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{KH}) = \mp\frac{\pi}{2}\,(2\pi)$

فالمستقيمان (OA) و (HK) متعامدان.

10 نتأمّل في المستوي الموجّه الشكل المجاور. المثلثات OAB و OCD و ADE مثلثات قائمة ومتساوية الساقين ومباشرة. النقاط I و J و K هي منتصفات أوتار هذه المثلثات. نهدف إلى إثبات تعامد المستقيمين (AJ) و (IK) وأنّ $IK = AJ$. نختار معلماً متجانساً مباشراً مبدؤه O . ونرمز a و c إلى العددين العقديين المُمثّلين للنقطتين A و C .



①.a عبّر بدلالة a و c عن الأعداد العقدية التي تمثّل النقاط B و D و E .

.b استنتج الأعداد العقدية z_I و z_J و z_K التي تمثّل النقاط I و J و K .

② أثبت أنّ $z_K - z_I = i(z_J - a)$. ثُمّ استنتج الخواص المطلوبة.

الحل

إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول O، الذي نرمّزه $\mathcal{R}$، كان

$$z' = e^{i\pi/2}z = iz$$

لما كان $B = \mathcal{R}(A)$ ، و $D = \mathcal{R}(C)$ ، كان $b = ia$ و $d = ic$. ولأنّ E هي صورة d وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول a كان $e - a = i(d - a)$ ومنه

$$e = a + i(ic - a) = (1-i)a - c$$

إذن

$$z_I = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1+i}{2}a$$
$$z_J = \frac{1}{2}(c+d) = \frac{1+i}{2}c$$
$$z_K = \frac{1}{2}(e+d) = \frac{1-i}{2}(a-c)$$

ومنه

$$z_K - z_I - i(z_J - a) = \frac{1-i}{2}(a-c) - \frac{1+i}{2}a - i\left(\frac{1+i}{2}c - a\right)$$
$$= \frac{1}{2}\big(1 - i - 1 - i + 2i\big)a + \frac{1}{2}\big(-1 + i - i + 1\big)c = 0$$

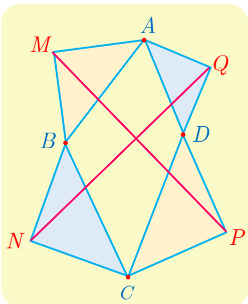
إذن $z_K - z_I = i(z_J - a)$. وعليه

$$\arg\left(\frac{z_K - z_I}{z_J - a}\right) = \frac{\pi}{2} \text{ و } |z_K - z_I| = |z_J - a|$$

أي $IK = AJ$ و $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{2}$ ، فالمستقيمان (AJ) و (IK) متعامدان.

11 نتأمّل في المستوي الموجّه رباعياً محدباً مباشراً $ABCD$. نُنشئ خارجه النقاط M و N و P و Q التي تجعل المثلثات MBA و NCB و PDC و DQA قائمة في M و N و P و Q بالترتيب ومتساوية الساقين ومباشرة.

أثبت باستعمال الأعداد العقدية أنّ $MP = NQ$ وأنّ المستقيمين (MP) و (NQ) متعامدان.



الحل

إذا كانت $M'(z')$ صورة $M(z)$ وفق الدوران ربع دورة بالاتجاه الموجب حول نقطة $\Omega(\omega)$ ، كان

$$z' - \omega = e^{i\pi/2}(z - \omega) = iz - i\omega$$

ومن ثَمّ تتعيّن ω من z و z' بالعلاقة :

$$\omega = \frac{1}{2}(1+i)z' + \frac{1}{2}(1-i)z \text{ .}$$

- A هي صورة B وفق دوران ربع دورة مباشرة حول M ، إذن $m = \frac{1}{2}(1+i)a + \frac{1}{2}(1-i)b$.
- B هي صورة C وفق دوران ربع دورة مباشرة حول N ، إذن $n = \frac{1}{2}(1+i)b + \frac{1}{2}(1-i)c$.
- C هي صورة D وفق دوران ربع دورة مباشرة حول P ، إذن $p = \frac{1}{2}(1+i)c + \frac{1}{2}(1-i)d$.
- D هي صورة A وفق دوران ربع دورة مباشرة حول Q ، إذن $q = \frac{1}{2}(1+i)d + \frac{1}{2}(1-i)a$.

وعليه نرى أنّ

$$p-m=-\frac{1}{2}(1+i)a-\frac{1}{2}(1-i)b+\frac{1}{2}(1+i)c+\frac{1}{2}(1-i)d$$
$$q-n=+\frac{1}{2}(1-i)a-\frac{1}{2}(1+i)b-\frac{1}{2}(1-i)c+\frac{1}{2}(1+i)d$$
$$i(p-m)=+\frac{1}{2}(1-i)a-\frac{1}{2}(1+i)b-\frac{1}{2}(1-i)c+\frac{1}{2}(1+i)d$$

إذن $q-n=i(p-m)$. وهذه تعني أنّ

$$|q-n|=|p-m| \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{q-n}{p-m}\right)=\frac{\pi}{2}$$

إذن $MP=NQ$ والمستقيمان (MP) و (NQ) متعامدان.

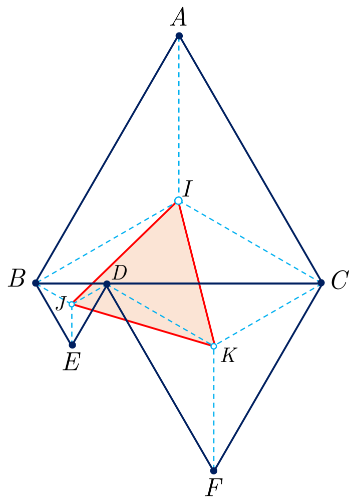
12 نتأمّل في المستوي الموجّه مثلثاً متساوي الأضلاع مباشراً ABC مركزه النقطة I . D نقطة من داخل القطعة المستقيمة $[BC]$. نُنشئ مثلثين متساويي الأضلاع مباشرين BED و DFC . ونعرّف J و K مركزي المثلثين BED و DFC . نهدف إلى إثبات أنّ المثلث IJK متساوي الأضلاع. نختار معلماً متجانساً مباشراً $(B,\vec{u},\vec{v})$ بحيث $\overrightarrow{BC}=a\vec{u}$ حيث $a=BC$.

① احسب، بدلالة a، العددين العقديين z_A و z_I اللذين يمثلان A و I بالترتيب.

② نفترض أنّ $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$ حيث $t\in]0,1[$. احسب بدلالة a و t، العددين العقديين z_J و z_K اللذين يمثلان J و K بالترتيب.

③ تحقّق أنّ $z_K-z_I=e^{i\pi/3}(z_J-z_I)$ ، واستنتج الخاصة المرجوّة.

الحل



① A هي صورة C وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$، فإذا وضعنا تسهيلاً للكتابة $\omega=e^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، كان $z_A=\omega a$.

وكان $z_I=\frac{1}{3}(z_B+z_C+z_A)=\frac{1+\omega}{3}a$.

② من $\overrightarrow{BD}=t\overrightarrow{BC}$ نستنتج أنّ $z_D=ta$ لأنّ $z_B=0$ و $z_C=a$. والنقطة E هي صورة D وفق الدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ، إذن $z_E=\overline{\omega}z_D=t\overline{\omega}a$ ومنه

$$z_J=\frac{1}{3}(z_B+z_D+z_E)=\frac{1+\overline{\omega}}{3}ta$$

النقطة F هي صورة D وفق الدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{3}$، إذن $z_F - z_C = \omega(z_D - z_C)$

ومنه $z_F = (1-\omega)a + \omega ta$. نستنتج إذن أنّ

$$z_K = \frac{1}{3}\left(z_C + z_D + z_F\right) = \frac{1}{3}\left((2-\omega)a + (1+\omega)ta\right)$$

ومنه

$$\begin{aligned}
z_K - z_I &= \frac{1}{3}\left((1-2\omega)a + (1+\omega)ta\right)\\
z_J - z_I &= \frac{1}{3}\left((1+\overline{\omega})ta - (1+\omega)a\right)\\
\omega(z_J - z_I) &= \frac{1}{3}\left((\omega+1)ta - (\omega+\omega^2)a\right)\\
z_K - z_I - \omega(z_J - z_I) &= \frac{1}{3}(1-\omega+\omega^2)a
\end{aligned}$$

ولكن $\omega^2 = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ إذن $1-\omega+\omega^2 = 0$. فنكون قد أثبتنا

أنّ $z_K - z_I = \omega(z_J - z_I)$ أي إنّ K هي صورة J وفق الدوران الذي مركزه I وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

فالمثلث IJK مثلث متساوي الأضلاع.

تتمة. بيّن أنّ مركز المثلث IJK يقع على القطعة المستقيمة $[BC]$.

13 نزوّد المستوي العقدي بمعلم متجانس مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$. النقاط A و A' و B و B' هي النقاط الموافقة للأعداد العقدية 1 و -1 و i و $-i$ بالترتيب.

نقرن كل نقطة $M(z)$ مختلفة عن النقاط O و A و A' و B و B' النقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث يكون المثلثان BMM_1 و AMM_2 قائمين ومتساويي الساقين بحيث

$$(\overrightarrow{M_1B},\overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{M_2A}) = \frac{\pi}{2}$$

① ارسم شكلاً مناسباً.

② a. علّل صحة المساواتين $z - z_1 = i(i - z_1)$ و $1 - z_2 = i(z - z_2)$.

b. عبّر عن z_1 و z_2 بدلالة z.

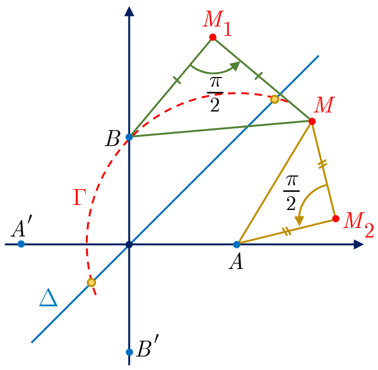
③ نهدف إلى تعيين النقاط M التي تجعل المثلث OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع.

a. أثبت أنّ الشرط $OM_1 = OM_2$ يُكافئ $\left|z+1\right| = \left|z+i\right|$ واستنتج Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$، وارسم Δ على الشكل نفسه.

b. أثبت أنّ الشرط $OM_1 = M_1M_2$ يُكافئ $\left|z+1\right|^2 = 2\left|z\right|^2$.

c. استنتج Γ مجموعة النقاط M التي تحقق $OM_1 = M_1M_2$، وارسم Γ على الشكل نفسه.

d. استنتج مما سبق النقاط M التي تجعل OM_1M_2 مثلثاً متساوي الأضلاع. وحدّدها على الشكل.



الحل

② إنّ M هي صورة B وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول M_1 إذن $z - z_1 = e^{i\pi/2}(i - z_1)$، أو $z - z_1 = i(i - z_1)$. وبالمثل إذن A هي صورة M وفق الدوران ربع دورة مباشرة حول M_2 إذن $1 - z_2 = i(z - z_2)$. نستنتج إذن أنّ

$$z_2 = \frac{1}{2}(1+i)(1-iz) \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{1}{2}(1+i)(z+1)$$

③ a.الشرط $OM_1 = OM_2$ يُكافئ $|z_1| = |z_2|$ وهذا بدوره يُكافئ

$$|z+1| = |1-iz| = |(-i)(i+z)| = |-i||i+z| = |i+z|$$

أو $|z - z_{B'}| = |z - z_{A'}|$. إذن Δ مجموعة النقاط M التي تجعل $OM_1 = OM_2$، هي مجموعة النقاط المتساوية البعد عن A' و B'، فهي إذن محور القطعة $[A'B']$، أي منصف الربع الأوّل.

b. نلاحظ أنّ $z_2 - z_1 = -\frac{(1+i)^2}{2}z = -iz$ إذن $M_1M_2 = |z|$، و $OM_1 = |z_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}|1+z|$

إذن الشرط يُكافئ $|1+z|^2 = 2|z|^2$.

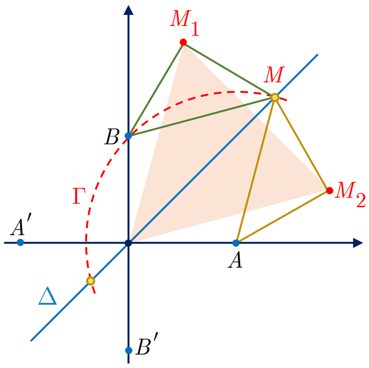
c. تنتمي $M(z)$ إلى Γ مجموعة النقاط التي تحقق $M_1M_2 = OM_1$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط $|1+z|^2 = 2|z|^2$، ولكن نعلم من متطابقة متوازي الأضلاع أنّ $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 2|z|^2 + 2$، فالشرط $|1+z|^2 = 2|z|^2$ يُكافئ إذن أنّ $|z-1|^2 = 2$ أو $|z-1| = \sqrt{2}$. فالمجموعة Γ هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{2}$، أي الدائرة التي مركزها A وتمر بالنقطة B.

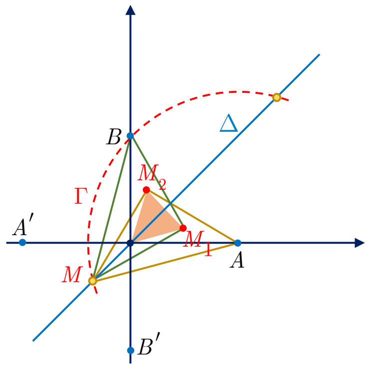
d. إذن يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع، إذا وفقط إذا انتمت M إلى تقاطع المجموعتين Γ و Δ. تنتمي z إلى Δ إذا كانت $z = t(1+i)$ حيث t عدد حقيقي نعيّنه بشرط انتماء M إلى Γ أي $|1+t(1+i)|^2 = 2|t(1+i)|^2$، وهذه تُكافئ $(1+t)^2 + t^2 = 4t^2$ أو $2t^2 - 2t - 1 = 0$، ومنه

$$t \in \left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}$$

وعلى هذا يكون OM_1M_2 متساوي الأضلاع، إذا وفقط إذا كان العدد العقدي الممثل للنقطة M واحداً من بين: $\left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i), \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)\right\}$.

يبيّن الشكل الآتي الأوضاع التي يكون عندها المثلث المدروس متساوي الأضلاع





6

التحليل التوافقي

1. إنشاء قوائم من عناصر مجموعة
2. التوافيق
3. خواص عدد التوافيق $\binom{n}{r}$، ومنشور ذي الحدّين

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة

- إنشاء قوائم من عناصر مجموعة: التراتيب، التباديل والتوافيق.
- المبدأ الأساسي في العدّ.
- عدد التراتيب، عددالتوافيق، العاملي وخواص هذه الأعداد
- منشور ذي الحدين،
- تطبيقات منشور ذي الحدين في تحويل بعض العبارات المثلثية.

تَدرَّبْ صفحة 152

① اختزل المقادير الآتية دون استعمال الآلة الحاسبة:

❶ $\frac{21!}{20!}$ ❷ $\frac{17!}{15!}$ ❸ $\frac{6!-5!}{5!}$ ❹ $\frac{6\times 4!}{5!}$ ❺ $\frac{7!\times 5!}{10!}$

❻ $\frac{1}{5!}-\frac{42}{7!}$ ❼ $\frac{6!}{(3!)^2}$ ❽ $\frac{9!}{5!\times 4!}$ ❾ $\frac{9!}{6!\times 3!}$ ❿ $\frac{6!+7!}{2!3!4!}$

الحل

❶ 21 ❷ 272 ❸ 5 ❹ $\frac{6}{5}$ ❺ $\frac{1}{6}$

❻ 0 ❼ 20 ❽ 126 ❾ 84 ❿ 20

② اختزل المقادير الآتية:

❶ $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ ❷ $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$ ❸ $\frac{(2n)!-(2n-1)!}{2(n!)-(n-1)!}$

❹ $\frac{(n-1)!}{n!}-\frac{n!}{(n+1)!}$ ❺ $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$ ❻ $\frac{(2n)!}{1\times 3\times 5\cdots\times(2n-1)}$

الحل

❶ $n(n+1)$ ❷ $2n(2n+1)$ ❸ $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!}=P^n_{2n-1}$

❹ $\frac{1}{n(n+1)}$ ❺ $\frac{1}{(n+1)\cdot(n-1)!}=\frac{n}{(n+1)!}$ ❻ $2^n n!$

③ اكتب جميع تباديل المجموعة $E=\{a,b,c,d\}$

الحل

عدد تباديل هذه المجموعة يساوي $24=4!$. وهذه التباديل مبينة في الجدول الآتي:

$abcd$	$bacd$	$cabc$	$dabc$
$abdc$	$badc$	$cadb$	$dacb$
$acbd$	$bcad$	$cbad$	$dbac$
$acdb$	$bcda$	$cbda$	$dbca$
$adbc$	$bdac$	$cdab$	$dcab$
$adcb$	$bdca$	$cdba$	$dcba$

④ لتكن المجموعة $S=\{1,2,5,8,9\}$.

❶ كم عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S؟

❷ كم عدداً مختلف الأرقام ومؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S؟

❸ كم عدداً زوجياً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S؟

الحل

❶ هناك خمسة خيارات للآحاد وخمسة خيارات للعشرات، إذن هناك $5 \times 5 = 25$ عدداً مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S.

❷ هناك خمسة خيارات للآحاد وفقط أربعة خيارات للعشرات؛ إذ لا يمكن اختيار العدد الموافق للآحاد مجدداً، إذن هناك $5 \times 4 = 20$ عدداً مختلف الأرقام مؤلفاً من منزلتين يمكن تشكيله من عناصر المجموعة S.

❸ هناك خياران فقط للآحاد؛ إذ يجب أن يكون الرقم زوجياً، وخمسة خيارات للعشرات، إذن هناك $2 \times 5 = 10$ أعداد زوجية مؤلفة من منزلتين يمكن تشكيلها من عناصر المجموعة S.

⑤ في أحد مراكز الهاتف مهندسان، وأربعة عمال، كم لجنة مختلفة قوامها مهندس واحد وعامل واحد يمكننا تأليفها لمتابعة أعمال الصيانة في المركز؟

الحل

هناك خياران للمهندس وأربعة خيارات للعامل، إذن يمكن تأليف $2 \times 4 = 8$ لجنة مختلفة لمتابعة أعمال الصيانة.

⑥ يتألف مجلس إدارة نادي رياضي من سبعة أعضاء، بكم طريقة يمكن اختيار رئيس، ونائب للرئيس، وأمين سرٍ للنادي؟

الحل

هناك سبعة خيارات للرئيس، فتبقى ستة خيارات لنائبه، وبعدها يبقى لدينا خمسة خيارات لأمين السر. إذن هناك $7 \times 6 \times 5 = 210$ خياراً مختلفاً للفريق المكوّن من رئيس مجلس إدارة النادي ونائبه، وأمين سره.

⑦ اشترك مئة متسابق في سباق للدراجات، يجري فيه توزيع ثلاث ميداليات (ذهبية، فضية، برونزية) كم نتيجة ممكنة لهذا السباق؟ (لا توجد حالات تساوٍ).

الحل

هناك 100 خي ار ممكن للحصول على الميدالية الذهبية، فيبقى بعدها 99 خياراً ممكناً للحصول على الميدالية الفضية، وبعد توزيع الأخيرة يبقى 98 خياراً ممكناً للحصول على الميدالية البرونزية. إذن هناك $100 \times 99 \times 98 = 970200$ توزيعاً ممكناً للميداليات الثلاث على المتسابقين.

تَدرَّبْ صفحة 155

① اختزل المقادير الآتية واكتبها بصيغة أعداد صحيحة أو كسور غير قابلة للاختزال :

❶ $\binom{6}{2}$ ❷ $\binom{12}{8}$ ❸ $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{9}{6}}$ ❹ $\dfrac{\binom{5}{3}\times\binom{6}{4}}{\binom{9}{3}}$ ❺ $\dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{3}}$ ❻ $\dfrac{\binom{4}{4}}{\binom{10}{1}}$

الحل

❶ 15 ❷ 495 ❸ $\dfrac{1}{4}$ ❹ $\dfrac{25}{14}$ ❺ $\dfrac{2}{3}$ ❻ $\dfrac{1}{10}$

② أثبت صحة المساواة $r\binom{n}{r} = n\binom{n-1}{r-1}$ في حالة $n \geq 2$ و $1 \leq r \leq n$.

الحل

$$n\binom{n-1}{r-1} = n\frac{(n-1)!}{(r-1)!\cdot((n-1)-(r-1))!} = \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r)!}$$
$$= \frac{r}{r}\cdot\frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r)!} = r\cdot\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} = r\binom{n}{r}$$

③ عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقّق الشرط المعطى في الحالات الآتية:

❶ $\binom{n}{2} = 36$ ❷ $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$ ❸ $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$

الحل

❶ $\binom{n}{2} = 36$ تعني $\frac{n(n-1)}{2} = 36$ أي $n(n-1) = 72$ أو $(n-9)(n+8) = 0$، ولكنّ n عددٌ طبيعي، إذن $n+8 > 0$ ولا بُدّ أن يكون $n-9 = 0$ أو $n = 9$.

❷ إذا كان n عدداً يحقّق $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$ لوجب أن يكون عدداً طبيعياً أكبر أو يساوي 4 ولوجب أيضاً أن تتحقّق المساواة

$$3\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = 14\frac{n(n-1)}{2}$$

وهذه تكافئ $n(n-1)\big((n-2)(n-3)-56\big) = 0$ أو $n(n-1)(n+5)(n-10) = 0$، ولأنّ n عددٌ طبيعي أكبر أو يساوي 4 استنتجنا مما سبق أنّ n يجب أن يساوي 10. ونتحقّق مباشرة أنّ $n = 10$ هو حلٌّ للمعادلة المعطاة.

❸ أيّ حلّ للمعادلة $\binom{10}{3n} = \binom{10}{n+2}$ هو عدد طبيعي n يحقّق $0 \leq 3n \leq 10$ أي هو أحد الأعداد $\{0,1,2,3\}$. وهذه حالة بسيطة جداً إذ يكفي أن نحسب الطرفين عند هذه القيم، فنجد المساواة غير محقّقة في حالة $n \in \{0,3\}$ ونجدها محقّقة في حالة $n \in \{1,2\}$، إذن مجموعة الحلول هي $\{1,2\}$.

④ نريد تأليف لجنة مكوّنة من أربعة أشخاص مأخوذين من مجموعة تحوي خمسة عشر رجلاً وأربع عشرة امرأة.

❶ كم لجنة مختلفة يمكننا تأليفها؟

❷ كم لجنة مختلفة مكوّنة من رجلين وامرأتين يمكننا تأليفها؟

الحل

❶ لدينا 29 شخصاً ونريد اختيار مجموعة جزئيّة (لجنة) من بينهم عدد عناصرها أربعة. هناك إذن هناك

$$\binom{29}{4} = \frac{29 \times 28 \times 27 \times 26}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 23751$$

خياراً ممكناً.

❷ لدينا 15 رجلاً ونريد اختيار مجموعة جزئيّة من بينهم مكونة من عنصرين، ولدينا $\binom{15}{2}$ خياراً ممكناً، ولدينا أيضاً 14 امرأة ونريد اختيار مجموعة جزئيّة من بينهن مكونة من عنصرين، إذن لدينا $\binom{14}{2}$ خياراً ممكناً،. هناك إذن هناك

$$\binom{14}{2} \times \binom{15}{2} = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} \cdot \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 9555$$

خياراً ممكناً.

تَدرَّبْ صفحة 159

① انشر كلاً من العبارات الآتية:

❶ $(2+x)^4$ ❷ $(1-x)^5$ ❸ $(2x+1)^6$

❹ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ ❺ $(1+2i)^3$ ❻ $(2-i)^4$

الحل

❶ $(2+x)^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

❷ $(1-x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

❸ $(2x+1)^6 = 64x^6 + 192x^5 + 240x^4 + 160x^3 + 60x^2 + 12x + 1$

❹ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + 4x^2 + 6 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

❺ $(1+2i)^3 = -11 - 2i$

❻ $(2-i)^4 = -7 - 24i$

② عيّن في منشور $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$ الحدّ الذي يحوي x^2 والحدّ الثابت المستقل عن x.

الحل

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في منشور ذي الحدين هي $T_r = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ وفي حالتنا

$$T_r = \binom{10}{r}x^{10-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{10}{r}x^{10-2r}$$

فالحدّ الذي يحوي x^2 هو الحد ذو الدليل r حيث $10-2r=2$ أي $r=4$. وهذا الحدّ يساوي $210x^2$.
وبطريقة مماثلة نجد أنّ الحد الثابت هو الحد ذو الدليل r حيث $10-2r=0$ أي $r=5$. وهذا الحدّ يساوي 252.

③ ما الشرط على العدد الطبيعي n كي يحتوي منشور $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ على حدّ ثابت مستقل عن x.

الحل

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في هذا المنشور هي

$$T_r = \binom{n}{r}x^{2(n-r)}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{n}{r}x^{2n-3r}$$

وجود حد ثابت في المنشور يكافئ وجود قيمة للدليل r تحقّق الشرط $2n-3r=0$ فلا بدّ أن يكون n من مضاعفات العدد 3.

وبالعكس، إذا كان n من مضاعفات العدد 3 فإنّ $r=\frac{2n}{3}$ تحقّق الشرط المطلوب ويحتوي المنشور على حدّ ثابت هو الحد ذي الدليل $r=2n/3$.

④ اختزل منشور المقدار $(1+x)^6+(1-x)^6$.

الحل

$$\begin{aligned}(1+x)^6+(1-x)^6 &= 2+30x^2+30x^4+2x^6\\ &= 2(1+x^2)(1+14x^2+x^4)\end{aligned}.$$

أنشطة

نشاط 1 أنواع السحب المختلفة

نتأمّل صندوقاً يحوي أربع كرات تحمل الأرقام 6 و 7 و 8 و 9.

❶ السحب مع الإعادة

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب ثلاث كرات **على التتالي مع الإعادة**، أي إننا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرّة.
- نُدوّن **بترتيب السحب** أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

إذن نتيجة التجربة هي ثلاثية أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة $E = \{6,7,8,9\}$. فمثلاً الثلاثية $(9,7,7)$ تمثّل سحب الكرة التي تحمل الرقم 9 في السحب الأوّل والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثاني والكرة التي تحمل الرقم 7 في السحب الثالث.

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② كم نتيجة ممكنة في كل من الحالات الآتية :

a. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 6، والثانية تحمل الرقم 9 والثالثة تحمل الرقم 7 ؟

b. الكرة المسحوبة أولاً تحمل الرقم 8، والثانية تحمل الرقم 7 ؟

c. الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 9، والمسحوبة ثالثاً تحمل الرقم 8 ؟

d الكرة المسحوبة ثانياً تحمل الرقم 7 ؟

❷ السحب دون إعادة

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب ثلاث كرات **على التتالي دون إعادة**، أي إننا لا نُعيد الكرة المسحوبة إلى الصندوق بعد كل مرّة.
- نُدوّن **بترتيب السحب** أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا أيضاً تكون نتيجة التجربة ثلاثية أو قائمة من ثلاثة بنود مأخوذة من المجموعة $E = \{6,7,8,9\}$، ولكن في هذه المرة يجب أن تكون بنود القائمة مختلفة مثنى مثنى. فهي إذن **ترتيب** لثلاثة عناصر مأخوذة من E.

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② أجب عن فقرات السؤال ② من الفقرة السابقة، ولكن لهذا النوع من التجارب.

❸ السحب في آن معاً

نُجري التجربة الآتية:

- نسحب **في آن معاً** ثلاث كرات من الصندوق.
- نُدوّن أرقام الكرات الثلاث المسحوبة.

هنا يمكن تمثيل نتيجة التجربة بمجموعة جزئية مكوّنة من ثلاثة عناصر مأخوذة من $E = \{6,7,8,9\}$.

① كم عدد النتائج الممكنة لهذه التجربة ؟

② كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العدد 7 ؟

③ كم عدد النتائج الممكنة والتي يظهر فيها العددان 8 و 9 ؟

الحل

❶ ① $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

② $a.$ 1.   ② $b.$ 4.   ② $c.$ 4.   ② $d.$ $4^2 = 16$.

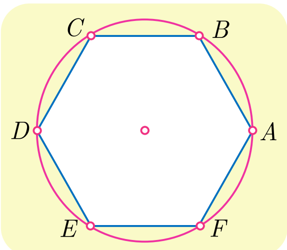
❷ ① $P_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$.

② $a.$ 1.   ② $b.$ 2.   ② $c.$ 2.   ② $d.$ $3 \times 2 = 6$.

❸ ① $\binom{4}{3} = 4$.   ② $\binom{3}{2} = 3$.   ③ $\binom{2}{1} = 2$.

نشاط 2 مثلثات في مسدّس

في الشكل المرسوم جانباً لدينا ست نقاط A و B و C و D و E و F موزّعة على دائرة بحيث تشكل رؤوس مسدّس منتظم.



نُجري التجربة الآتية: نصل بين ثلاث نقاط منها لنحصل على مثلّث.

① ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

② ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

③ ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب؟

الحل

① كلّ مثلث يتعيّن بثلاث نقاط من النقاط الست المعطاة، وأي مجموعة جزئية مؤلفة من ثلاث نقاط تعين مثلثاً. إذن عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها بهذا الأسلوب يساوي $\binom{6}{3} = 20$ مثلثاً.

② كل قطر يمر بمركز الدائرة في المسدس وترّ لأربعة مثلثات قائمة رؤوسها هي رؤوس المسدس عدا طرفيّ القطر المختار ولدينا ثلاثة أقطار، فعدد المثلثات القائمة التي يمكن الحصول عليها $4\times3=12$.

③ هناك مثلث واحدٌ منفرج الزاوية في A مثلاً. إذن عدد المثلثات المنفرجة الزاوية التي يمكن الحصول عليها بهذا الأسلوب يساوي عدد رؤوس المسدس أي 6.

نشاط 3 منعاً من السرقة

يوجد لبعض أنواع السيارات مذياع ذو قفل رقمي مضاد للسرقة يفتح عند إدخال رمّاز (كود) مكون من عدد ذي أربع خانات يمكن لأيّ منها أن يأخذ أياً من القيم $0,1,\ldots,9$.

① a. ما هو عدد الرمّازات التي تصلح للقفل؟

ينطلق الإنذار في السيارة إذا لم يجرِ إدخال أي خانة صحيحة في مكانها. ما عدد الرمازات التي تُسبب انطلاق الإنذار.

b. ما هو عدد الرمازات التي تصلح للقفل والمكوّنة من خانات مختلفة مثنى مثنى؟

② عند فصل التغذية الكهربائية عن المذياع، يجب على مالك السيارة أن يعيد إدخال الرماز الصحيح مجدداً ليتمكن من استعمال المذياع. يتذكر المالك أنّ الرماز الصحيح مكوّن من الأرقام 1 و 5 و 9 و 9 ولكنه نسي ترتيبها.

كم رمّازاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكوّن من هذه الأرقام؟

الحل

① a. $10\times10\times10\times10=10000$. واحدٌ منها فقط صحيحٌ ولا يسبب انطلاق الإنذار أمّا البقية وعددها 9999 فأي منها يُطلق الإنذار.

① b. $10\times9\times8\times7=5040$.

② هناك أربعة خيارات لموقع الرقم 1، وتبقى ثلاثة لموقع الرقم 5، وبعدها يملأ الخانتين المتبقيتين بالرقم 9 إذن هناك 4×3 رمازاً مختلفاً يمكن للمالك أن يكونه من هذه الأرقام.

نشاط 4 تحويل العبارات المثلثية

❶ ما هي المهمة المنشودة؟

نهدف إلى التعبير عن مقادير مثل $\cos^n x$ أو $\sin^n x$، أو حتى $\cos^n x\sin^m x$ بصيغة مجموع حدود من الصيغة $b\cos(qx)$ أو $c\sin(qx)$ حيث b و c أعداد حقيقية و n و m و q أعداد طبيعية. فمثلاً رأينا في دراستنا السابقة أن : $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$ و $\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$.

تظهر أهمية هذه التحويلات خصوصاً عند حساب التوابع الأصلية، فإذا تمكّنّا من كتابة التابع $x\mapsto\cos^n x\sin^m x$ بصيغة عبارة خطية لتوابع من النمط $x\mapsto\cos(qx)$ أو $x\mapsto\sin(qx)$، صار بإمكاننا حساب تابع أصلي لهذا التابع.

❷ شرح الطريقة في مثال

لنسعَ إلى تحويل عبارة $\sin^4 x$ إلى مجموع حدود من الصيغة $a\cos(qx)$.

- نستعمل علاقتي أويلر : $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ أو $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$:

$$\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{ix} - e^{-ix})^4$$

- ثُمّ ننشر $(e^{ix} - e^{-ix})^4$ باستعمال **منشور ذي الحدّين**:

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)$$

- نختزل هذه الصيغة باستعمال $e^{ikx}e^{-ik'x} = e^{i(k-k')x}$ ثُمّ نجمّع كل حدّين e^{ipx} و e^{-ipx} معاً لنجد

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}\left((e^{4ix} + e^{-4ix}) - 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6\right)$$

- نستعمل علاقتي أويلر بالشكل $e^{ipx} + e^{-ipx} = 2\cos px$ أو $e^{ipx} - e^{-ipx} = 2i\sin px$ لنجد

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}\left(2\cos 4x - 8\cos 2x + 6\right) = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$$

- فمثلاً لحساب $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$ نكتب

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx = \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$$

(تتطلب هذا الفقرة دراية ببحث التكامل).

❸ تطبيق

حوّل كلّ عبارة مما يأتي إلى مجموع نسب مثلثية لمضاعفات x :

① $\cos^4 x$ ② $\cos^2 x \sin^2 x$ ③ $\sin^5 x$.

الحل

①
$$\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) + 4\left(e^{-2ix} + e^{-2ix}\right) + 6\right) = \frac{1}{8}\left(\cos 4x + 4\cos 2x + 3\right)$$

②
$$\cos^2 x \sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{16}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)^2$$
$$= -\frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} - 2\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x$$

③
$$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}\left(e^{5ix} - e^{-5ix} - 5(e^{3ix} - e^{-3ix}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})\right)$$
$$= \frac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)$$

تمرينات ومسائل

1 أثبت صحة العلاقتين

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{n+1-r} \quad \text{و} \quad \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}$$

الحل

لدينا

$$\frac{\binom{n+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{r!\cdot(n+1-r)!} \times \frac{r!\cdot(n-r)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-r}$$

وكذلك

$$\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\cdot(n-r)!} \times \frac{r!\cdot(n-r)!}{n!} = \frac{n+1}{r+1}$$

2 احسب قيمة كل من n و r إذا علمت:

$$2\cdot\binom{n+1}{r+1} = 5\cdot\binom{n+1}{r} \quad \text{و} \quad 3\cdot\binom{n}{r} = 8\cdot\binom{n}{r-1}$$

الحل

من $3\cdot\binom{n}{r} = 8\cdot\binom{n}{r-1}$ نستنتج أنّ

$$\frac{8}{3} = \frac{\binom{n}{r}}{\binom{n}{r-1}} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} \times \frac{(r-1)!\cdot(n-r+1)!}{n!} = \frac{n-r+1}{r}$$

أو $3n+3 = 11r$. ومن $2\cdot\binom{n+1}{r+1} = 5\cdot\binom{n+1}{r}$

نستنتج أنّ

$$\frac{5}{2} = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n+1}{r}} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\cdot(n-r)!} \times \frac{r!\cdot(n-r+1)!}{(n+1)!} = \frac{n-r+1}{r+1}$$

أو $2n = 7r+3$. وبالحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{cases} 11r - 3n = 3 \\ 7r - 2n = -3 \end{cases}$$

نجد $(n,r) = (54,15)$.

3 عيّن n في كل من الحالات الآتية:

① $P^4_{n+2} = 14P^3_n$ ② $P^5_n = 18P^4_{n-2}$

③ $P^4_n = 10P^3_{n-1}$ ④ $P^6_n = 12P^5_{n-1}$

⑤ $P^3_{n+1} = 2P^2_{n+2}$ ⑥ $P^3_{n+2} = 6P^1_{n+2}$

⑦ $P^3_{n+2} = 4P^2_{n+1}$ ⑧ $P^2_n = 5P^1_{n-1}$

الحل

① إذا كان n حلاً للمعادلة $P^4_{n+2} = 14P^3_n$ كان $(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 14n(n-1)(n-2)$ ومنه $n(n-1)(n-5)(n-6) = 0$. القيمتان $n = 0$ و $n = 1$ مرفوضتان لأنّ P^3_n معرّف فقط في حالة $n \geq 3$. ونتحقّق بسهولة أنّ $n = 5$ و $n = 6$ هما حلان للمعادلة المعطاة. إذن مجموعة الحلول هي $\{5,6\}$.

② إذا كان n حلاً للمعادلة $P^5_n = 18P^4_{n-2}$ كان

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 18(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

ومنه $(n-2)(n-3)(n-4)(n-9)(n-10) = 0$. القيم $\{2,3,4\}$ مرفوضة لأنّ P^5_n معرّف فقط في حالة $n \geq 5$. ونتحقّق بسهولة أنّ $n = 9$ و $n = 10$ هما حلّا المعادلة المعطاة.

③ إذا كان n حلاً للمعادلة $P^4_n = 10P^3_{n-1}$ كان

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 10(n-1)(n-2)(n-3)$$

ومنه $(n-1)(n-2)(n-3)(n-10) = 0$. القيم $\{1,2,3\}$ مرفوضة لأنّ P^4_n معرّف فقط في حالة $n \geq 4$. ونتحقّق بسهولة أنّ $n = 10$ هو حل للمعادلة المعطاة. إذن مجموعة الحلول هي $\{10\}$.

④ إذا كان n حلاً للمعادلة $P^6_n = 12P^5_{n-1}$ كان $n \geq 6$ وعندها

$$12 = \frac{P^6_n}{P^5_{n-1}} = \frac{n!}{(n-6)!} \times \frac{(n-6)!}{(n-1)!} = n$$

إذن مجموعة الحلول هي $\{12\}$.

⑤ إذا كان n حلاً للمعادلة $P^3_{n+1} = 2P^2_{n+2}$ كان $n \geq 2$ وتكافئ المعادلة المعطاة ما يأتي

$$2 = \frac{P^3_{n+1}}{P^2_{n+2}} = \frac{(n+1)!}{(n-2)!} \times \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{n(n-1)}{n+2}$$

ومنه $(n-4)(n+1) = 0$. إذن مجموعة الحلول هي $\{4\}$.

⑥ الجواب $n = 2$.

⑦ الجواب $n = 2$.

⑧ الجواب $n = 5$.

4 يلتقي عشرة أصدقاء في حفل، يصافح كل منهم الأشخاص التسعة الآخرين مرة واحدة فقط ، فكم عدد المصافحات التي جرت في الحفل ؟ عمّم النتيجة السابقة إلى حالة n صديقاً.

الحل

كلما التقى شخصان تصافحا مرة واحدة، إذن عدد المصافحات يساوي عد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين. لدينا عشرة أشخاص فعدد المصافحات يساوي $\binom{10}{2} = 45$. وبوجه عام، في حالة حفل يضم n شخصاً يكون عدد المصافحات $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

5 في أحد الامتحانات يُطلب من الطالب الإجابة عن سبعة أسئلة من عشرة.

① بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة ؟

② بكم طريقة يمكنه الاختيار إذا كانت الأسئلة الأربعة الأولى إجبارية ؟

الحل

① $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$.

② $\binom{6}{3} = 20$.

6 أراد صف فيه إثنا عشر طالباً وثماني طالبات تأليف لجنة نشاط للصف مؤلفة من خمسة أشخاص.

بكم لجنة مختلفة يمكن تأليفها في كل من الحالات الآتية:

① اللجنة مؤلّفة من ثلاثة طلاب وطالبتين.

② في اللجنة طالبتان على الأكثر.

③ في اللجنة طالبتان على الأقل.

الحل

① $\binom{12}{3}\binom{8}{2} = 6160$.

② عدد اللجان التي تحوي k طالبة حيث $0 \leq k \leq 5$ يساوي $\binom{12}{5-k}\binom{8}{k}$، إذن عدد اللجان التي تضم طالبتين على الأكثر يساوي

$$\binom{12}{5-0}\binom{8}{0} + \binom{12}{5-1}\binom{8}{1} + \binom{12}{5-2}\binom{8}{2} = 10912$$

③ عدد اللجان التي تضم طالبتين على الأقل يساوي

$$\binom{12}{5-5}\binom{8}{5} + \binom{12}{5-4}\binom{8}{4} + \binom{12}{5-3}\binom{8}{3} + \binom{12}{5-2}\binom{8}{2} = 10752.$$

7 احسب أمثال x^3 في منشور $(2+3x)^{15}$.

الحل

الحد ذو الدليل r في هذا المنشور هو : $T_r = \binom{15}{r}2^{15-r}(3x)^r = \binom{15}{r}2^{15-r}3^r x^r$ إذن أمثال x^3 هي $\binom{15}{3}2^{12}3^3 = 2^{12}\times 3^3 \times 5 \times 7 \times 13 = 50\,319\,360$.

8 ما آحاد وعشرات العدد 11^{11} ؟

الحل

الحد ذو الدليل r في منشور $11^{11} = (1+10)^{11}$ هو : $T_r = \binom{11}{r}1^{11-r}(10)^r = \binom{11}{r}(10)^r$ إذن جميع الحدود $T_2, T_3, \ldots, T_{11}$ هي من مضاعفات المئة وإضافتها لا تؤثر في آحاد وعشرات العدد $T_0 + T_1 = 111$. إذن كل من آحاد وعشرات العدد 11^{11} يساوي 1.

9 ما الحد الثابت (الذي لا يتعلق بالمتحول x) في منشور $(x+\frac{1}{x^3})^{12}$ ؟

الحل

الصيغة العامة للحد ذي الدليل r في هذا المنشور هي

$$T_r = \binom{12}{r}x^{12-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r = \binom{12}{r}x^{12-4r}$$

وجود حد ثابت في المنشور يكافئ وجود قيمة للدليل r تحقّق الشرط $12-4r=0$ فلا بدّ أن يكون $r=3$ والحد المطلوب هو $T_3 = 220$.

لنتعلّم البحث معاً

10 عدد أقطار مضلّع محدّب

أثبت أن عدد أقطار مضلع محدب عدد رؤوسه n حيث $n \geq 4$، يعطى بالعلاقة $\frac{n(n-3)}{2}$.

نحو الحلّ

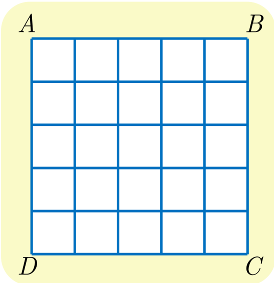
- نعلم أن القطر في المضلّع هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متجاورين. فكم قطعة مستقيمة تصل بين رأسين مختلفين من رؤوس المضلع يمكن أن نرسم؟ ومن بين هذه القطع كم ضلعاً للمضلع تجد؟
- اشرح لماذا يمثل المقدار $\binom{n}{2}-n$ عدد الأقطار المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

لتكن V مجموعة رؤوس المضلع وعدد عناصرها n. أيّة مجموعة جزئية مكوّنة من عنصرين من V تعرّف إمّا قطراً في المضلع أو ضلعاً فيه. إذن $\binom{n}{2}$ يساوي عدد الأقطار المطلوب مضافاً إليه عدد الأضلاع وهو n. نستنتج أنّ عدد الأقطار يساوي $\binom{n}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$.

11 التعداد على شبكة



في الشكل المجاور نتأمّل شبكة منتظمة مرسومة في مربّع $ABCD$. ونرغب بحساب عدد المستطيلات المرسومة في الشكل. علماً أن المربع مستطيل خاصٌّ.

نحو الحلّ

- غالباً ما يكون مفيداً، عند حلّ مسائل التعداد، إيجاد أسلوب عملي يتيح الحصول على الأشياء التي نريد تعدادها، وهذا واحد من هذه الأساليب: تحقّق أنه عندما يتقاطع مستقيمان شاقوليان مع مستقيمين أفقيين نحصل على مستطيل.
- يجب أن نتيقّن من تعداد جميع الأشياء المطلوبة دون استثناء ودون تكرار. لنرمز إذن إلى المستقيمات الشاقولية $(v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ بحيث ينطبق v_0 على (AD) و v_5 على (BC). ولنرمز أيضاً إلى المستقيمات الأفقية $(h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5)$ بحيث ينطبق h_0 على (AB) و h_5 على (DC).

وعلى هذا يمكن تمثيل كل مستطيل بالشكل $(\{h_i,h_j\},\{v_k,v_\ell\})$ مع ($i \neq j$ و $k \neq \ell$). لاحظ أنّ الترتيب غير مهم أي إنّ المستطيل الموافق لـ $(\{h_i,h_j\},\{v_k,v_\ell\})$ هو نفسه المستطيل الموافق لـ$(\{h_j,h_i\},\{v_k,v_\ell\})$ أو $(\{h_j,h_i\},\{v_\ell,v_k\})$ .... استنتج أنّ عدد المستطيلات المنشود يساوي عدد أساليب اختيار مستقيمين شاقوليّين، ومستقيمين أفقيين.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

عملاً بالمناقشة الموضّحة في نصّ الحلّ نجد أنّ عدد المستطيلات المطلوب يساوي $\binom{6}{2}\binom{6}{2}=225$.

12 من خواص عدد التوافيق

في حالة عدد طبيعي n. ادرس كيف تتغيّر الحدود المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n}$، واستنتج أنّ المساواة $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ تُكافئ $p=q$ أو $p+q=n$.

نحو الحلّ

- لننظر إلى الحدود المتتالية $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n}$ عند بعض القيم الصغيرة للعدد n. في حالة $n=4$ نجد $(1,4,6,4,1)$ وفي حالة $n=5$ نجد $(1,5,10,10,5,1)$. في الحالتين: تتزايد الحدود في البداية ثمّ تتناقص.
- لمقارنة حدّين متتاليين نحسب نسبتهما ونقارن هذه النسبة مع الواحد.

① أثبت أنّ $\dfrac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\dfrac{n-r}{r+1}$.

② .a نفترض أنّ $n=2m$. أثبت أنّ

$\binom{n}{r+1}>\binom{n}{r}$ في حالة $m>r$ و $\binom{n}{r+1}<\binom{n}{r}$ في حالة $m\le r$.

استنتج أنّ $\binom{2m}{m}$ هو أكبر أعداد التوافيق $\left(\binom{2m}{r}\right)_{0\le r\le 2m}$.

.b نفترض أنّ $n=2m+1$. أثبت أنّ

$\binom{n}{r+1}>\binom{n}{r}$ في حالة $m>r$ و $\binom{n}{r+1}<\binom{n}{r}$ في حالة $m<r$.

استنتج أنّ $\binom{2m+1}{m+1}=\binom{2m+1}{m}$ هما أكبر أعداد التوافيق $\left(\binom{2m+1}{r}\right)_{0\le r\le 2m+1}$.

- لاحظ أنّ المساواة $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ تقتضي أن يكون $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}=\binom{n}{n-p}=\binom{n}{n-q}$، وأنّه في هذه الحالة يكون اثنان من الأعداد $p,q,n-p,n-q$ أصغر من $\dfrac{n}{2}$ أو يساويانه. ويكونان من ثَمّ متساويين استناداً إلى الفقرة السابقة.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة

الحل

① نلاحظ أنّ : $\dfrac{n-r}{r+1}=\dfrac{r!\cdot(n-r)!}{n!}\times\dfrac{n!}{(r+1)!\cdot(n-r-1)!}=\dfrac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}$.

② .a في حالة $n=2m$ لدينا

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}<1\Leftrightarrow\frac{2m-r}{r+1}<1\Leftrightarrow 2m-r<r+1\Leftrightarrow 2m<2r+1\Leftrightarrow m\le r$$

ونجد بالمثل أنّ $\binom{n}{r+1}>\binom{n}{r}$ يكافئ $m>r$. إذن نجد جدول التغيرات الآتي في هذه الحالة

r	0		m		$2m$
$\binom{2m}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m}{m}$	$\searrow$	1

وهذا يبرهن أنّ $\binom{2m}{m}$ هو أكبر أعداد التوافيق $\left(\binom{2m}{r}\right)_{0\le r\le 2m}$.

② b. في حالة $n = 2m+1$ لدينا

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m+1-r}{r+1} < 1 \Leftrightarrow 2m < 2r \Leftrightarrow m < r$$

ونجد بالمثل أنّ $\binom{n}{r+1} > \binom{n}{r}$ يكافئ $m > r$. إذن نجد جدول التغيرات الآتي في هذه الحالة

r	0		m	$m+1$		$2m+1$
$\binom{2m+1}{r}$	1	$\nearrow$	$\binom{2m+1}{m}$	$\binom{2m+1}{m+1}$	$\searrow$	1

ولكن

وهذا يبرهن أنّ $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ هو أكبر أعداد التوافيق $\left(\binom{2m+1}{r}\right)_{0\le r\le 2m}$.

نتيجة مهمة. نستنتج مما سبق أنّ $\left(\binom{n}{r}\right)_{0\le r\le n/2}$ متزايدة تماماً فإذا وقعت المساواة $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ وكان p و q أصغر من $n/2$ استنتجنا أنّ $p = q$. وإذا كان أحدهما أكبر من $n/2$ (وليكن q) أكبر تماماً من $n/2$ والآخر أصغر منه استنتجنا من $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q}$ أنّ $p = n-q$ ، أمّا إذا كان كلا العددين p و q أكبر من $n/2$ استنتجنا من $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{n-q}$ أنّ $n-p = n-q$ ، أو $p = q$. والخلاصة المساواة $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ تقتضي أنّ $p = q$ أو $p + q = n$.

قُدُماً إلى الأمام

13 ليكن كثير الحدود $F(x) = (1+ax)^5(1+bx)^4$ حيث a و b عددان طبيعيان، فإذا علمت أن أمثال x تساوي 62، فما هي القيم الممكنة للمجموع $a+b$ ؟

الحل

ملاحظة مهمّة. في حالة أي كثير الحدود $x \mapsto P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ أمثال x هي $P'(0)$.

في حالتنا، نجد بحساب بسيط أنّ $F'(0) = 5a + 4b$. إذن لدينا بحسب الفرض $5a + 4b = 62$ ولكن a و b موجبان إذن $4(a+b) \le 5a+4b \le 5(a+b)$ وهذا يكافئ $\frac{62}{5} \le a+b \le \frac{62}{4}$ أو

$$12.4 \le a+b \le 15.5$$

ولكن $a+b$ عددٌ طبيعي فرضاً إذن $a+b \in \{13,14,15\}$ ، وتبين الأمثلة

$$(a,b) = (2,13) \text{ و } (a,b) = (6,8) \text{ و } (a,b) = (10,3)$$

أنّ قيم في المجموعة $\{13,14,15\}$ هي حالات ممكنة للمجموع $a+b$.

14 يريد معلّم توزيع $n+1$ جائزة مختلفة على n تلميذاً وبحيث يحصل كل تلميذ على مكافأة واحدة على الأقل. ما عدد النتائج المختلفة لهذه العملية ؟

الحل

يزيد عدد الجوائز على عدد التلاميذ بمقدار واحد. إذن هناك تلميذ واحد فقط سينال جائزتين في حين ينال كل واحد من باقي التلاميذ جائزة واحدة فقط.

سنجري توزيع الجوائز في مرحلتين :

- الأولى: اختيار الجائزتين اللتين ستوزّعان معاً. وهذا يؤول إلى اختيار مجموعة مؤلفة من جائزتين من مجموعة جميع الجوائز التي عدد عناصرها $n+1$ ولدينا $\binom{n+1}{2}$ خياراً متاحاً.
- الثانية: ننظر إلى الجائزتين المُختارتين بصفتهما جائزة واحدة، ثُمّ نوزّع الجوائز التي أصبح عددها n جائزة على التلاميذ لكل واحد منهم جائزة. وبالطبع عدد الخيارات الممكنة $P_n^n = n!$.

نستنتج، استناداً إلى المبدأ الأساسي في العد أنّ العدد الكلي للنتائج المختلفة لعملية توزيع الجوائز هذه هو

$$\binom{n+1}{2} \cdot n! = \frac{n \cdot (n+1)!}{2}$$

15 لتكن المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$ ولدينا مجموعة H من الأعداد التي تتميَّز بالخصائص التالية: أرقامها مختلفة ومأخوذة من S، لا يوجد أي عدد منها من مضاعفات العدد 5، كل عدد منها أكبر من 20000 . فما هو عدد عناصر H ؟

الحل

- عدد خانات أي عدد من H أصغر أو يساوي 5 لأنّه إذا كان يُكتب بست خانات أو أكثر لوجب أن يكون في كتابته رقمان متماثلان وهذا يناقض التعريف.
- عدد خانات أي عدد من H يساوي 5 لأنّه إذا كان العدد يكتب بأربع خانات أو أقل لكان هذا العدد أصغر من 9999 وهذا أيضاً يناقض تعريف H .
- نستنتج إذن أنّ H هي مجموعة الأعداد من الشكل $abcde$ حيث (a,b,c,d,e) هو تبديل على المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$ (لأنّ الأرقام مختلفة) وتحقّق الشرطين $e \neq 5$ (لأنّ العدد ليس من مضاعفات 5) و $a \geq 2$ (لأنّ العدد أكبر من 20000).
- فإذا عرّفنا Ω مجموعة الأعداد من الشكل $abcde$ حيث (a,b,c,d,e) هو تبديل على المجموعة $S = \{1,2,3,4,5\}$. وعددها يساوي $5! = 120$، لوجدنا أنّه من الأسهل التعامل مع متمّمة H أي $H' = \Omega \backslash H$.

- ينتمي العدد x إلى H' في حالتين: إمّا أن يبدأ بالعدد 5 أو أن ينتهي بالعدد 1. فإذا رمزنا بالرمز A إلى مجموعة أعداد Ω من الشكل $abcd5$ حيث (a,b,c,d) هو تبديل على المجموعة $\{1,2,3,4\}$، وبالرمز B إلى مجموعة أعداد Ω من الشكل $1bcde$ حيث (b,c,d,e) هو تبديل على المجموعة $\{2,3,4,5\}$، كان $H' = A \cup B$ ومن ثَمّ

$$n(H') = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 24 + 24 - 6 = 42$$

إذن $n(H) = 120 - 42 = 78$ وهو عدد عناصر H.

16 صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟

② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه ؟

③ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان ؟

④ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد ؟

⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟

⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

الحل

هنا نفترض أنّ الكرات متمايزة (مرقّمة مثلاً).

① عدد النتائج المختلفة لهذا السحب يساوي $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

② عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأحمر $6 \times 6 \times 4 \times 3 = 432$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأبيض $3 \times 3 \times 7 \times 3 = 189$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأسود $1 \times 1 \times 9 \times 3 = 27$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هو $432 + 189 + 27 = 648$.

③ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة اللون $6 \times 3 \times 1 \times 3! = 108$.

④ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد يساوي عدد النتائج الكلي مطروحاً منه عدد نتائج سحب ثلاث كرات من لون واحد أي $1000 - (6^3 + 3^3 + 1^3) = 756$.

⑤ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل يساوي عدد النتائج الكلي مطروحاً منه عدا النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء أو سوداء فقط أي $10^3 - (1+3)^3 = 936$

⑥ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل يساوي جميع النتائج عدا النتائج التي يكون فيها كرات بيضاء أو حمراء فقط أي $10^3 - (6+3)^3 = 271$.

17 صندوق يحوي 10 كرات، 6 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء وكرة واحدة سوداء. نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة في كل مرة.

① كم عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟

② كم عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه ؟

③ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة الألوان ؟

④ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد ؟

⑤ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل ؟

⑥ كم عدد النتائج المختلفة التي تشتمل كرة سوداء واحدة على الأقل ؟

الحل

① عدد النتائج المختلفة لهذا السحب يساوي $P_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$.

② عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأحمر $(6 \times 5 \times 4) \times 3 = 360$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون الأبيض $(3 \times 2 \times 7) \times 3 = 126$.

عدد النتائج المختلفة التي تحتوي على كرتين اثنتين فقط من اللون نفسه هو $360 + 126 = 486$.

③ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات مختلفة اللون هو $(6 \times 3 \times 1) \times 3! = 108$.

④ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على ثلاث كرات ليست جميعها من لون واحد يساوي عدد النتائج الكلي مطروحاً منه عدد نتائج سحب ثلاث كرات من لون واحد أي $720 - (P_6^3 + P_3^3) = 594$.

⑤ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة حمراء واحدة على الأقل يساوي $720 - (P_4^3) = 696$.

⑥ عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرة سوداء واحدة على الأقل يساوي $(1 \times 9 \times 8) \times 3 = 216$.

18 لتكن $S = \{1,2,3,\ldots,29,30\}$. كم عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 ؟

الحل

لنجزّئ المجموعة S إلى ثلاثة مجموعات جزئية وذلك تِبعاً لقيمة باقي قسمة كل عدد على 3 كما يأتي

$$A_0 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$$
$$A_1 = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$$
$$A_2 = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$$

إذن باقي قسمة أي عنصر من عناصر A_k على 3 يساوي k حيث $k = 0,1,2$.

لنتأمّل مجموعة جزئية $\{a,b,c\}$ مكونة من ثلاثة عناصر S وبحيث يكون $a+b+c$ مضاعفاً للعدد 3 .

- إذا انتمى عنصران من عناصر $\{a,b,c\}$ إلى المجموعة A_k نفسها وجب أن ينتمي الثالث إلى ذات المجموعة. (مثلاً إذا كان a و b من A_1 وجب أن ينتمي c إلى A_1 ، لأنّ مجموع بواقي القسمة يجب

أن يساوي 3 في هذه الحالة، وهكذا...) إذن تصبح $\{a,b,c\}$ مجموعة جزئية مكونة من ثلاثة عناصر من إحدى المجموعات A_0 أو A_1 أو A_2 . وعدد مثل هذه المجموعات يساوي $\binom{10}{3}\times 3 = 360$

- إذا لم ينتمِ أي اثنين من عناصر المجموعة $\{a,b,c\}$ إلى المجموعة A_k نفسها، في هذه الحالة يكون الشرط: " $a+b+c$ مضاعفٌ للعدد 3 " محققاً حكماً لأنّ بواقي قسمة عناصر $\{a,b,c\}$ على 3 هي 0 و 1 و 2، ومجموعها يساوي 3. إذن عدد مثل هذا النوع من المجموعات $\{a,b,c\}$ يساوي $10\times10\times10$ أي 1000.

وعليه، عدد المجموعات الجزئية المكوّنة من ثلاثة عناصر من S مجموعها من مضاعفات العدد 3 يساوي $1000+360=1360$ مجموعة.

19 ليكن A_n العدد المعرّف بالصيغة : $A_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

① تحقّق أنّ A_3 و A_4 هما عددان طبيعيان.

② أثبت أنّ A_n عددٌ طبيعي أياً كانت قيمة العدد الطبيعي n .

الحل

① تسهيلاً للحسابات ضع $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2-\sqrt{3}$ ولاحظ أنّ $a+b=4$ و $ab=1$. ومنه نجد

$$\begin{aligned}
a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab && = 16-2 && = 14\\
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2+b^2-ab) && = 4(14-1) && = 52\\
a^4+b^4 &= (a^2+b^2)^2-2(ab)^2 && = 196-2 && = 194
\end{aligned}$$

إذن

n	0	1	2	3	4
A_n	2	4	14	52	194

② لنرمز T_r إلى الحدّ ذي الدليل r في منشور ذي الحدين للمقدار $(2+\sqrt{3})^n$ فنجد أنّ

$$T_r = \binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r$$

ولنرمز بالمثل T'_r إلى الحدّ ذي الدليل r في منشور ذي الحدين للمقدار $(2-\sqrt{3})^n$ فنجد أنّ

$$T'_r = \binom{n}{r}2^{n-r}(-\sqrt{3})^r$$

نلاحظ إذن أنّ

$$T_r + T'_r = \binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r + \binom{n}{r}2^{n-r}(-\sqrt{3})^r = (1+(-1)^r)\binom{n}{r}2^{n-r}(\sqrt{3})^r$$

- فإذا كان r عدداً زوجياً أي $r=2k$ كان $T_r+T'_r = 2\binom{n}{2k}2^{n-2k}3^k$ وهذا عدد طبيعي،
- وإذا كان r عدداً فردياً أي $r=2k+1$ كان $1+(-1)^r=0$ ومن ثَمّ $T_r+T'_r=0$ وهذا عدد طبيعي أيضاً.

ولكنّ A_n يساوي مجموع جميع هذه الحدود، ولأنها أعداد طبيعية كان مجموعها عدداً طبيعياً أي $A_n\in\mathbb{N}$.

20 نتأمّل مضلّعاً محدّباً مؤلفاً من n ضلعاً $(n > 4)$. نسمّي **قطراً** في المضلّع كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين في المضلع. نفترض أننا في الحالة العامّة حيث لا تتلاقى أي ثلاثة أقطار في نقطة واحدة إلا إذا كانت هذه النقطة أحد رؤوس المضلع. احسب D_n عدد نقاط تقاطع أقطار المضلّع بدلالة n. يمكن البدء بتعيين D_4 و D_5.

مساعدة: الجواب $\binom{n}{4} + n$.

الحل

- يتقاطع قطرا أي رباعي محدّب في نقطة واحدة داخله، إذن $D_4 = 1$، الفكرة المهمّة هنا هي أنّ كل أربع نقاط تمثل رؤوس رباعي يوافقه نقطة تقاطع واحدة لقطري هذا الرباعي.
- في حالة مضلّع خماسي نجد أنّ الرؤوس هي أيضاً نقاط تقاطع للأقطار إذ ينبثق من كل رأس قطران للمضلع، ويضاف إلى ذلك نقاط التقاطع الواقعة داخل المضلع، وهنا يوافق كل أربعة رؤوس قطرين متقاطعين في نقطة تقاطع واحدة إذن $D_5 = 5 + 5 = 10$.
- في الحالة العامّة. عدد نقاط التقاطع داخل المضلع هي تلك التي تحددها الرباعيات التي رؤوسها من رؤوس المضلع وعددها $\binom{n}{4}$، ويضاف إليها في حالة $n \geq 5$ رؤوس المضلّع إذ ينبثق من كل رأس أكثر من قطر للمضلع وعدد هذه الرؤوس n. فالعدد الكلي لنقاط تقاطع الأقطار في حالة $n \geq 5$ يساوي $\binom{n}{4} + n$.

21 اكتب المقادير الآتية بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x، ثمّ أجب عن السؤال الموافق.

① $\cos^3 x$، واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx$.

② $\sin^3 x$ ، واستنتج قيمة $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$.

③ $\sin^4 x$، واستنتج قيمة $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx$.

④ $\cos x \sin^4 x$، واحسب $F(x) = \int_0^x \cos t \sin^4 t\,dt$ بطريقتين.

الحل

① بتطبيق دستور أويلر $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ ثمّ منشور ذي الحدين نجد

$$\cos^3 x = \frac{1}{8}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right)$$

ومنه

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \ dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\right)dx = \left[\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

② بتطبيق دستور أويلر $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ ثُمّ منشور ذي الحدين نجد

$$\sin^3 x = -\frac{1}{8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3\times\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) = \frac{1}{4}\left(3\sin x - \sin 3x\right)$$

ومنه

$$\frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = -\frac{4\sin^3 x}{\tan^3 x} = -4\cos^3 x$$

إذن $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x} = -4$.

③بمثل ما سبق نجد

$$\sin^4 x = \frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4\times\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3\right) = \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)$$

ومنه

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}$$

④ بتطبيق دستوري أويلر $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ و $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ نجد

$$\cos x \sin^4 x = \frac{1}{32}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{1}{32}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$$

$$= \frac{1}{32}\left(e^{2ix} - e^{-2ix}\right)\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} - 3\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 2\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x\right)$$

ومنه : $F(x) = \frac{1}{80}\sin 5x - \frac{1}{16}\sin 3x + \frac{1}{8}\sin x$.

ولكن من الواضح أنّ $F(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x$. فنكون قد أثبتنا صحة المساواة:

$\sin^5 x = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x$.

7

الاحتمالات

1 الاحتمالات المشروطة (تذكرة)

2 المتحولات العشوائية

3 الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين

4 المتحولات العشوائية الحدانية

نقاط التعلّم الأساسية في هذه الوحدة:

- استعمال المخطط الشجري عند دراسة تجارب احتمالية مركّبة.
- قانون متحول عشوائي يأخذ عدداً منتهياً من القيم وحساب توقعه وتباينه.
- قانون زوج من المتحولات العشوائية التي يأخذ كل منها عدداً منتهياً من القيم، واستقلالهما الاحتمالي.
- التجارب البرنوليّة، والمتحولات العشوائية الحدانية.

تَدرَّبْ صفحة 180

① يحتوي صندوق على عشرين كرة سبع منها بيضاوات اللون. نسحب منه ثلاث كرات دفعة واحدة. ما احتمال أن تكون الكرات الثلاثة بيضاوات؟

الحل

ليكن A الحدث "الكرات المسحوبة الثلاث بيضاوات" عندئذ عدد النتائج المواتية لهذا الحدث يساوي $n(A) = \binom{7}{3}$ وحجم فضاء العينة يساوي $n(\Omega) = \binom{20}{3}$ إذن

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n_A}{n(\Omega)} = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{35}{1140} = \frac{7}{228}$$

② نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$ بأحد العددين $+1$ أو -1 احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً الصفر. وكذلك احتمال ألاّ يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين.

الحل

عدد الخانات 4 إذن عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega) = 2^4 = 16$.

لنرمز A إلى الحدث "مجموع الخانات يساوي الصفر". عندئذ النتائج المؤاتية هي تلك التي تحتوي على إشارتين موجبتين والباقية سالبة. إذن عدد النتائج المؤاتية يساوي $n(A) = \binom{4}{2} = 6$ واحتمال الحدث A يساوي $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

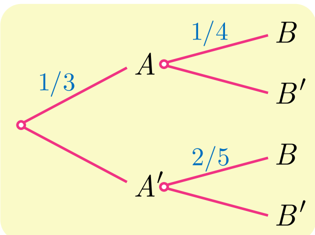
لنرمز B الحدث "لا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين" عندئذ تكون النتائج المؤاتية $\{+-+-, -+-+\}$ وعددها 2 إذن $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{4}$.

③ استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور.

عيّن الاحتمالات $\mathbb{P}(A')$ و $\mathbb{P}(B'|A)$ و $\mathbb{P}(B'|A')$.

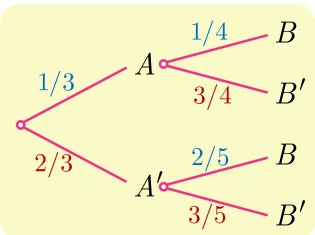
واستنتج قيمة كل من

$\mathbb{P}(A \cap B)$ و $\mathbb{P}(A \cap B')$ و $\mathbb{P}(A' \cap B)$ و $\mathbb{P}(A' \cap B')$



الحل

نتمّم المخطط الشجري فنجد الشكل المجاور، ونقرأ منه:



$$\mathbb{P}(A') = \frac{2}{3} \text{ و } \mathbb{P}(B'|A) = \frac{3}{4} \text{ و } \mathbb{P}(B'|A') = \frac{3}{5}$$

وعليه نحسب

$$\mathbb{P}(A\cap B')=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4},\qquad \mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$\mathbb{P}(A'\cap B')=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5},\qquad \mathbb{P}(A'\cap B)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

④ أجب عن الأسئلة الآتية:

- إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$.

الحل

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{5}\quad \text{و}\quad \mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$$

- إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(A\cup B)=\frac{2}{3}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$.

الحل

نعلم أن $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap B)$ وبالتعويض نجد $\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\mathbb{P}(A\cap B)$

ومنه $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$ وبالتالي

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\quad \text{و}\quad \mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

- إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(B|A)=\frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(B|A')=\frac{4}{5}$ فاحسب $\mathbb{P}(B)$.

الحل

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B)&=\mathbb{P}(B\cap A)+\mathbb{P}(B\cap A')\\&=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B\mid A)+\mathbb{P}(A')\cdot\mathbb{P}(B\mid A')\\&=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B\mid A)+(1-\mathbb{P}(A))\cdot\mathbb{P}(B\mid A')\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{37}{60}\end{aligned}$$

- إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{3}{4}$ و $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$.

واحسب أيضاً $\mathbb{P}(A'\cap B')$ واستنتج $\mathbb{P}(B'|A')$.

الحل

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{15}\quad \text{و}\quad \mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A'\cap B')&=\mathbb{P}\Big((A\cup B)'\Big)=1-\mathbb{P}(A\cup B)\\&=1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B))=1-(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5})=\frac{3}{20}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(B'|A')=\frac{\mathbb{P}(A'\cap B')}{\mathbb{P}(A')}=\frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{10}$$

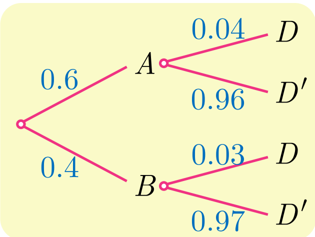
⑤ يضمّ مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية. عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح ، صنّعت الورشة A منها 1200 مصباحاً وصنّعت البقية الورشة B . هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة A معطوبة، في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة. نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب. نرمز بالرمز A إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة A» وبالرمز B إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة B» وبالرمز D إلى الحدث «المصباح معطوب».

❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

❷ احسب احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

❸ إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A .

الحل



❶ التمثيل الشجري للتجربة.

❷ احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

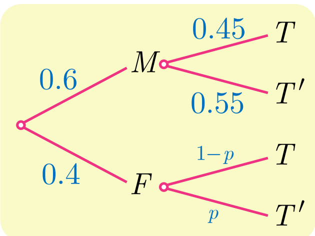
$$\mathbb{P}(D) = 0.6 \times 0.04 + 0.4 \times 0.03 = 0.036$$

❸ إذا كان المصباح معطوباً فإن احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A هو

$$\mathbb{P}(A \mid D) = \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{0.6 \times 0.04}{0.036} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

⑥ في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب. ونعلم أنّ مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور، وأنّ 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب. ما احتمال أن تكون طالبة مُختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارسن لعبة كرة المضرب؟

الحل



المطلوب هو احتمال ألا يكون الشخص المختار ممن يلعبون كرة المضرب علماً أنه أنثى. أي $\mathbb{P}(T'|F)$. أمّا المعطيات $\mathbb{P}(M) = 0.6$ و $\mathbb{P}(T) = 0.3$ و $\mathbb{P}(T'|M) = 0.55$. من التمثيل الشجري المجاور نستنتج أنّ

$0.4(1-p) + 0.60 \cdot 0.45 = 0.3$ بالحل نجد $p = 0.925$.

تَدرَّبْ صفحة 184

① نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقّمة من 1 إلى 6. نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1، ونحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه 6، ونخسر درجتين في بقية الحالات. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X، واحسب كلاً من $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{V}(X)$.

الحل

مجموعة النتائج الممكنة هي $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$، وهذه النتائج متساوية في الاحتمال لأن النرد متوازن. المتحول العشوائي X معرف على Ω ويأخذ قيمه في $\{-2,1,6\}$ كما إنّ

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=6) &= \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X=1) &= \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X=-2) &= \mathbb{P}(\{2,3,4,5\}) = \frac{4}{6} \end{aligned}$$

فيكون قانونه الاحتمالي

x	1	-2	6
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 1\times\frac{1}{6} - 2\times\frac{4}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{-1}{6} \\ \mathbb{E}(X^2) &= 1\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{4}{6} + 36\times\frac{1}{6} = \frac{53}{6} \\ \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{53}{6} - \frac{1}{36} = \frac{317}{36} \end{aligned}$$

② يحتوي صندوق على خمس كرات: ثلاث كرات سوداء اللون، وكرتان بيضاوان. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق. ونسمّي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة. عيّن مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل

مجموعة القيم الممكنة للمتحول العشوائي X هي $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$ و $\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$ و $\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$

فيكون قانونه الاحتمالي

x	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = 0\times\frac{3}{10} + 1\times\frac{6}{10} + 2\times\frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 0\times\frac{3}{10} + 1^2\times\frac{6}{10} + 2^2\times\frac{1}{10} = 1$$
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

③ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي ودون إعادة.

الحل

مجموعة القيم الممكنة للمتحول العشوائي X هي $X(\Omega) = \{0,1,2\}$ ولدينا

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{P_3^2}{P_5^2} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$
$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{P_2^1\cdot P_3^1\cdot 2}{P_5^2} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$
$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{P_2^2}{P_5^2} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

وعليه نرى أنّ هذه التجربة مطابقة للتجربة السابقة وقانون X هو نفسه القانون السابق.

④ يحتوي صندوق على خمس كرات: اثنتان تحملان الرقم 1 واثنتان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق. ونسمّي X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين. عيّن مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل

مجموعة قيم X هي $\{2,3,4,5\}$، وقانونه الاحتمالي

x	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = 2\times\frac{1}{10} + 3\times\frac{4}{10} + 4\times\frac{3}{10} + 5\times\frac{2}{10} = \frac{18}{5}$$
$$\mathbb{V}(X) = 4\times\frac{1}{10} + 9\times\frac{4}{10} + 16\times\frac{3}{10} + 25\times\frac{2}{10} - \left(\frac{18}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

⑤ أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي ودون إعادة.

الحل

الحل مطابق للتمرين السابق. الهدف هو الوصول إلى فكرة أنّ السحب معاً يماثل السحب على التتالي دون إعادة.

⑥ نُلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين ونسجل رقمي الوجهين الظاهرين. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين. اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه وانحرافه المعياري.

الحل

القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{36}(2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6\\ &\qquad +8\times5+9\times4+10\times3+11\times2+12\times1)=7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \frac{1}{36}(4\times1+9\times2+16\times3+25\times4+36\times5+49\times6\\ &\qquad +64\times5+81\times4+100\times3+121\times2+144\times1)-7^2\\ &= \frac{329}{6}-49=\frac{35}{6}\end{aligned}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{35}{6}}\approx 2.42$$

تَدرَّبْ صفحة 187

① نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X,Y) من المتحولات العشوائية، أكمله وبيّن إذا كان المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

الحل

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0,Y=0) &= \frac{1}{20}\\ \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

إذن X و Y غير مستقلين احتمالياً.

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{10}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

② أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X,Y)، علماً أنّ المتحولين العشوائيين X و Y مستقلّان احتمالياً.

X \ Y	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

الحل

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.08	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3	0.5	0.2	

③ نُلقي حجري نرد متوازنين. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الوجهين الظاهرين، وليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يمثل أصغر هذين الرقمين. اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)، واستنتج القانون الاحتمالي لكل من X و Y، واحسب توقع وتباين كل من X و Y. أيكون X و Y مستقلين احتمالياً؟

الحل

Y \ X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	قانون Y
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{11}{36}$
2	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{9}{36}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
قانون X	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

ونلاحظ أنّ

$$\mathbb{P}(X=2,Y=3)=0\neq\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=3)$$

إذن X و Y غير مستقلين احتمالياً. ونترك أمر حساب توقع وتباين كل من X و Y البسيط للقارئ.

تَدرَّبْ صفحة 192

① يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء.

❶ نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون؟

❷ نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي ومع الإعادة. ونعرّف X المتحوّل العشوائي الذي يدلّ على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث. ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X.

الحل

❶ ثلاثة أرباع عدد كرات الصندوق حمراء اللون إذن إذا كان R حدث سحب كرة حمراء اللون كان $\mathbb{P}(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$.

❷ هذه تجربة برنولية، X يحصي عدد مرات الحصول على كرة حمراء عند تكرار التجربة ثلاث مرات $(n = 3)$ علماً أنّ احتمال الحصول كرة حمراء في المرة الواحدة يساوي $p = \frac{3}{4}$.

إذن يتبع X قانوناً حدانياً $\mathcal{B}(3, \frac{3}{4})$.

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\tfrac{3}{4}\right)^0\left(\tfrac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^1\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\tfrac{3}{4}\right)^2\left(\tfrac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$
$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^3\left(\tfrac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

فيكون قانونه الاحتمالي

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

② نُلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية. ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات؟

الحل

هذه تجربة برنولية؛ ليكن X عدد مرات الحصول على العدد 6 عند تكرار التجربة ست مرات $(n = 6)$ علماً أنّ احتمال الحصول العدد 6 في المرة الواحدة يساوي $p = \frac{1}{6}$. قانون X حدّاني $\mathcal{B}(6,\frac{1}{6})$ والمطلوب حساب $\mathbb{P}(X = 3)$ أي $\mathbb{P}(X = 3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{11664}$.

③ نُلقي حجر نرد متوازن ثماني مرات متتالية. ليكن A الحدث: «الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل». ما احتمال A ؟

الحل

هذه تجربة برنولية؛ ليكن X عدد مرات الحصول على عدد زوجي عند تكرار التجربة ثماني مرات $(n = 8)$ علماً أنّ احتمال الحصول عدد زوجي في المرة الواحدة يساوي $p = \frac{1}{2}$. قانون X حدّاني $\mathcal{B}(8,\frac{1}{2})$ والمطلوب حساب $\mathbb{P}(X \geq 3)$ أي

هذا يتطلب حساب مجموع ست حدود والأسهل حساب $\mathbb{P}(X < 3)$ لأنّه يتضمن حساب مجموع ثلاث حدود. فنكتب

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \big(\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 0)\big) \\
&= 1 - \left(\binom{8}{2} \cdot p^2 \cdot q^6 + \binom{8}{1} \cdot p^1 \cdot q^7 + \binom{8}{0} \cdot p^0 \cdot q^8\right) \\
&= 1 - \left(\binom{8}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8\right) \\
&= 1 - \frac{28 + 8 + 1}{256} = \frac{219}{256}
\end{aligned}$$

④ يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة أدوار. يكسب A الدور الواحد باحتمال يساوي 0.6. يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار. ما احتمال أن يربح B المباراة ؟

الحل

هذه تجربة برنولية؛ ليكن X عدد الأدوار التي يكسبها A بعد تسعة أدوار $(n = 9)$ علماً أنّ احتمال ربحه في الدور الواحد يساوي $p = 0.6$. قانون X حدّاني $\mathcal{B}(9, 0.6)$ والمطلوب حساب $\mathbb{P}(X \leq 4)$ أي

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 4) &= \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 1) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 2) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 3) + \mathbb{P}(\mathrm{X} = 4) \\
&= \binom{9}{0}0.6^0 0.4^9 + \binom{9}{1}0.6^1 0.4^8 + \binom{9}{2}0.6^2 0.4^7 + \binom{9}{3}0.6^3 0.4^6 + \binom{9}{4}0.6^4 0.4^5 \\
&\approx 0.2666
\end{aligned}$$

أنشطة

نشاط 1 إنشاء واستعمال التمثيل الشجري

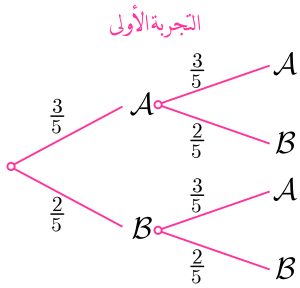
❶ السحب مع الإعادة وبدونها

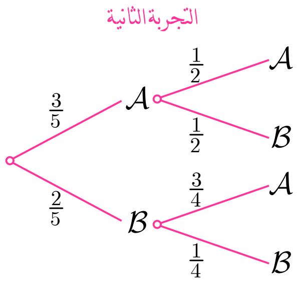
يحتوي صندوق على ثلاثة حروف $\mathcal{A}$ وحرفين اثنين $\mathcal{B}$.

التجربة الأولى. نسحب عشوائياً حرفاً من الصندوق ونسجّل النتيجة ثُمّ نُعيده إلى الصندوق ونسحب حرفاً ثانياً ونسجّل النتيجة.

التجربة الثانية. نسحب عشوائياً وعلى التتالي حرفين من الصندوق واحداً إثر الآخر دون إعادة ونسجّل النتيجة بترتيب السحب.

اشرح التمثيلين الشجريين الآتيين:





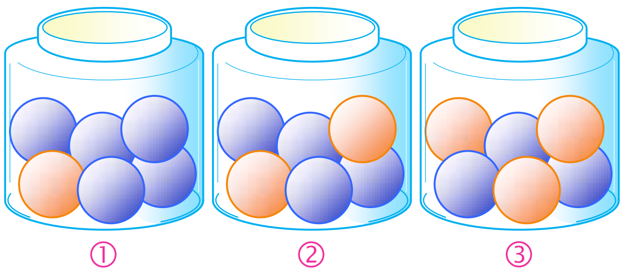
ما احتمال الحصول على $\mathcal{AA}$ في التجربة الأولى؟ وما احتمال هذا الحدث في التجربة الثانية؟

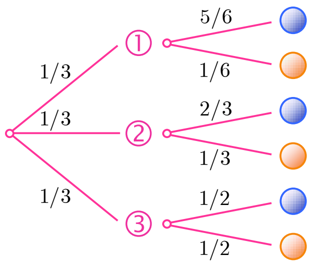
الحل

التجربة الأولى : $\mathbb{P}(\mathcal{AA}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ ، التجربة الثانية : $\mathbb{P}(\mathcal{AA}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

❷ سحب صندوق ثُم سحب كرة

تتألّف التجربة من مرحلتين، نختار عشوائياً واحداً من الصناديق الثلاثة المبينة في الشكل، ثُمّ نختار منه كرة. ولقد أنشأنا التمثيل الشجري الموافق لهذه التجربة. اشرح هذا الإنشاء ثُمّ أعطِ احتمال الحدث: «سحب كرة زرقاء اللون». وإذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء فما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق ②؟





الحل

ليكن B حدث سحب كرة زرقاء عندئذ فإن $\mathbb{P}(\text{B}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

وليكن A حدث سحب كرة من الصندوق ② عندئذ يكون المطلوب

$$\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$$

نشاط 2 فحص الأمراض

يُصيبُ مرضٌ نسبة 10% من السكان. يُتيح اختبارٌ اكتشاف إذا كان شخصٌ مصاباً بهذا المرض. يجب أن تكون نتيجة الاختبار إيجابية في حال كون الشخص مصاباً. ولكن احتمال أن تكون النتيجة إيجابية مع كون الشخص الخاضع للاختبار غير مصاب بالمرض يساوي 0.008. أمّا احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية على الرغم من كون الشخص الخاضع للاختبار مصاباً فيساوي 0.02.

لنرمز بالرمز M إلى الحدث «الشخص مصاب بالمرض»، وبالرمز T إلى الحدث «نتيجة الاختبار إيجابية». نختار شخصاً عشوائياً.

① أنشئ تمثيلاً شجرياً مُحدّداً عليه الاحتمالات المعطاة في النص.

② احسب احتمال أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية.

③ احسب احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض.

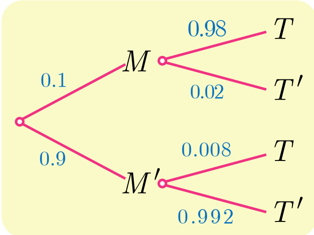
④ استنتج احتمال أن يكون الاختبار **موثوقاً**، أي احتمال أن يعطي الاختبار نتيجة إيجابية في حالة شخص مصاب بالمرض ونتيجة سلبية في حالة شخص غير مصاب بالمرض.

⑤ أجب عن الأسئلة السابقة ذاتها بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان.

⑥ عمّم النتائج السابقة بافتراض أنّ احتمال الإصابة بالمرض يساوي p.

الحل

①



② أن يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية هو الحدث $M' \cap T$ عندئذ

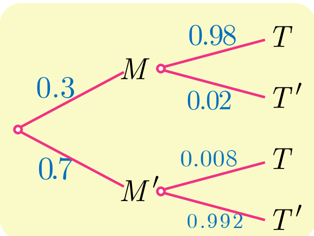
$$\mathbb{P}(M' \cap T) = 0.9 \times 0.008 = 0.0072$$

③ احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض هو

$$\mathbb{P}(M \cap T') = 0.1 \times 0.02 = 0.002$$

④ يكون الاختبار **موثوقاً** إن أعطى نتيجة صحيحة أي وقع $(M \cap T) \cup (M' \cap T')$، ومنه

$$\mathbb{P}((M \cap T) \cup (M' \cap T')) = 0.9 \times 0.992 + 0.1 \times 0.98 = 0.9908$$



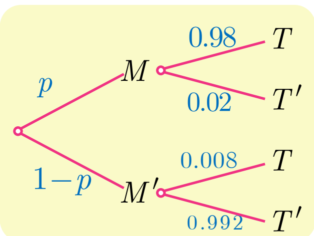
⑤ بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان.

عندئذ $\mathbb{P}(M' \cap T) = 0.7 \times 0.008 = 0.0056$.

و $\mathbb{P}(M \cap T') = 0.3 \times 0.02 = 0.006$.

واحتمال أن يكون الاختبار **موثوقاً** هو

$$\mathbb{P}((M \cap T) \cup (M' \cap T')) = 0.7 \times 0.992 + 0.3 \times 0.98 = 0.9884 .$$



⑥ بافتراض أنّ احتمال الإصابة بالمرض يساوي p.

عندئذ $\mathbb{P}(M' \cap T) = (1-p) \times 0.008$

و $\mathbb{P}(M \cap T') = p \times 0.02 = 0.02p$

واحتمال أن يكون الاختبار **موثوقاً** هو

$$\mathbb{P}((M \cap T) \cup (M' \cap T')) = (1-p) \times 0.992 + p \times 0.98 = 0.992 - 0.012p .$$

نشاط 3 متحولات عشوائية واحتمالات مشروطة

ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد زبائن محطّة لتوزيع الوقود في فترة خمس دقائق. نفترض أنّ عدد الزبائن هذا لا يتجاوز 2. أمّا القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي X فهو كما يأتي:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X=k)$	0.1	0.5	0.4

يشتري كلُّ زبون إما البنزين أو المازوت. احتمال أن يشتري الزبون البنزين يساوي 0.4 واحتمال أن يشتري المازوت 0.6. إنّ ما يشتريه الزبون مستقل عما يشتريه الزبائن الآخرون وعن عدد الزبائن.

لنرمز بالرمز C_k إلى الحدث $(X=k)$ تسهيلاً للكتابة، ولنرمز بالرمز E إلى الحدث «في خمس دقائق يشتري زبونٌ، وزبون واحد فقط، البنزين». استعن بتمثيل شجري أو بأي أسلوب آخر في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

① a. احسب $\mathbb{P}(C_1 \cap E)$.

b. علّل لماذا $\mathbb{P}(E|C_2)=0.48$، واستنتج $\mathbb{P}(C_2 \cap E)$.

c. استنتج مما سبق قيمة $\mathbb{P}(E)$.

② ليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يعطي عدد الزبائن الذين يشترون البنزين في خمس دقائق.

a. ما هي القيم التي يأخذها Y ؟

b. اكتب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي Y.

c. اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

d. أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً ؟

الحل

① a. لمّا كان الحدثان C_1 و E مستقلين احتمالياً كان

$$\mathbb{P}(C_1 \cap E)=\mathbb{P}(C_1)\cdot\mathbb{P}(E)=0.5\times 0.4=0.2$$

b. إذا وقع C_2 فيوجد في المحطة زبونان. وعدد الذين يشترون البنزين من بينهم هو متحول حداني $\mathcal{B}(2,0.4)$، إذن $\mathbb{P}(E|C_2)=\binom{2}{1}0.4^1 0.6^1=0.48$. ومنه

$$\mathbb{P}(C_2 \cap E)=\mathbb{P}(C_2)\cdot\mathbb{P}(E \mid C_2)=0.4\times 0.48=0.192$$

c. $\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}(E\cap C_0)+\mathbb{P}(E\cap C_1)+\mathbb{P}(E\cap C_2)=0+0.2+0.192=0.392$.

② a. القيم التي يأخذها Y هي $\{0,1,2\}$

b. لنرمز بالرمز E_k للدلالة إلى الحدث $(Y=k)$ عندئذ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_0) &= \mathbb{P}(E_0\cap C_0)+\mathbb{P}(E_0\cap C_1)+\mathbb{P}(E_0\cap C_2)\\ &= 0.1+0.5\times 0.6+0.4\times\tbinom{2}{0}\times(0.4)^0\times(0.6)^2 = 0.544\end{aligned}$$

و $\mathbb{P}(E_1)=\mathbb{P}(E)=0.392$ أما

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_2) &= \mathbb{P}(E_2\cap C_0)+\mathbb{P}(E_2\cap C_1)+\mathbb{P}(E_2\cap C_2)\\ &= 0+0+0.4\times\tbinom{2}{2}\times(0.4)^2\times(0.6)^0 = 0.064\end{aligned}$$

c. القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0.1	0	0	0.1
1	0.3	0.2	0	0.5
2	0.144	0.192	0.064	0.4
قانون Y	0.544	0.392	0.064	

d. من الواضح أن المتحولين العشوائيين X و Y غير مستقلين احتمالياً لأنّ

$$\mathbb{P}(X=0\cap Y=2)=0\neq \mathbb{P}(X=0)\cdot\mathbb{P}(Y=2)$$

نشاط 4 التوازن الصبغي

نتأمّل مورثة تحمل أليلَيْن A و a. نقول إن نبتة متماثلة الألائل عندما تحتوي على الأليلين ذاتهما على زوجين من الصبغيات المتوافقة، فتكون صيغتها الوراثية عندئذ AA أو aa، ونقول إنّ النبتة متخالفة الألائل عندما تكون صيغتها الوراثية Aa. تتكاثر بعض النباتات (الترمس مثلاً) بالإلقاح الذاتي، يحدث الأمر بالنسبة إلى الخَلَف وكأنّ الإلقاح جرى بين نبتتيْن من الصيغة الوراثية ذاتها حيث يجري اختيار الألائل عشوائياً. نهدف إلى دراسة خَلَف نبتة متخالفة الألائل بالإلقاح الذاتي.

❶ الجيل الأوّل

بالإلقاح الذاتي تُعطي نبتةٌ من الصيغة AA نبتةً من الصيغة ذاتها، وكذلك تعطي نبتةٌ من الصيغة aa نبتةً من الصيغة ذاتها.

اكتب احتمالات أن يكون الجيل الأوّل لنبتة صيغتها الوراثية Aa نبتةً صيغتها الوراثية AA أو aa أو Aa.

❷ أجيال متلاحقة

نبدأ من نبتةٍ متخالفة الألائل (من النمط Aa في الجيل 0)، ونكوّن أجيالاً لاحقة بالتكاثر الذاتي.

سنستعمل الرموز الآتية:

- الحدث $(\mathrm{AA})_n$: «للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية AA».
- الحدث $(\mathrm{Aa})_n$: «للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية Aa».
- الحدث $(\mathrm{aa})_n$: «للنبتة في الجيل رقم n الصيغة الجينية aa».

ثُمّ لنرمز x_n و y_n و z_n إلى احتمالات الأحداث $(\mathrm{AA})_n$ و $(\mathrm{Aa})_n$ و $(\mathrm{aa})_n$ بالترتيب.

① ما قيمة كل من x_0 و y_0 و z_0 ؟

② احسب كلاً من x_1 و y_1 و z_1.

③ اكتب قيمة كل من $\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{AA})_n)$ و $\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)$ و $\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)$.

ثُمّ استعمل هذه النتائج لتثبت أنّه مهما كانت قيمة n كان

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n \quad \text{و} \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n$$

وأعطِ عبارة z_{n+1}.

❸ دراسة المتتاليات $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(z_n)_{n\geq 0}$

① احسب قيم x_n و y_n و z_n في حالة $0 \leq n \leq 10$، يمكن استعمال الآلة الحاسبة.

② ما طبيعة المتتالية $(y_n)_{n\geq 0}$ ؟ عبّر عن y_n بدلالة n.

③ نعرّف $t_n = x_n + \frac{1}{2}y_n$، احسب t_{n+1} بدلالة t_n. ما طبيعة المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ ؟ ثُمّ استنتج قيمة x_n بدلالة n.

④ احسب نهاية كل من المتتاليات $(x_n)_{n\geq 0}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ و $(z_n)_{n\geq 0}$.

الحل

❶ $\mathbb{P}(\mathrm{aa}) = \frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(\mathrm{aA}) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(\mathrm{AA}) = \frac{1}{4}$.

❷

① لدينا نبتة متخالفة الألائل (من النمط Aa في الجيل 0)، ومنه

$x_0 = \mathbb{P}((\mathrm{AA})_0) = 0$ و $y_0 = \mathbb{P}((\mathrm{Aa})_0) = 1$ و $z_0 = \mathbb{P}((\mathrm{aa})_0) = 0$.

② لدينا $x_1 = \mathbb{P}((\mathrm{AA})_1) = \frac{1}{4}$ و $y_1 = \mathbb{P}((\mathrm{Aa})_1) = \frac{1}{2}$ و $z_1 = \mathbb{P}((\mathrm{aa})_1) = \frac{1}{4}$.

③ في الإلقاح الذاتي تُعطي نبتةٌ من الصيغة AA نبتةً من الصيغة ذاتها، ومنه

$$\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{AA})_n) = 1$$

أماّ إذا كان لدينا نبتة متخالفة الألائل في الجيل رقم n فعندئذ

$$\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n) = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n) = \frac{1}{2}$$

وعليه

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}) &= \mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}\cap(\mathrm{AA})_n)+\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}\cap(\mathrm{Aa})_n)+\underbrace{\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}\cap(\mathrm{aa})_n)}_{0}\\ &= \mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{AA})_n)\mathbb{P}((\mathrm{AA})_n)+\mathbb{P}((\mathrm{AA})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_n)\\ &= \mathbb{P}((\mathrm{AA})_n)+\frac{1}{4}\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_n)\end{aligned}$$

ومنه $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{4}y_n$.

وكذلك

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}) &= \underbrace{\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}\cap(\mathrm{AA})_n)}_{0}+\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}\cap(\mathrm{Aa})_n)+\underbrace{\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}\cap(\mathrm{aa})_n)}_{0}\\ &= \mathbb{P}((\mathrm{Aa})_{n+1}|(\mathrm{Aa})_n)\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_n)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}((\mathrm{Aa})_n)\end{aligned}$$

ومنه $y_{n+1}=\dfrac{1}{2}y_n$. وأخيراً

$$z_n=1-x_n-y_n$$

الحل

① احسب قيم x_n و y_n و z_n في حالة $0\le n\le 10$، يمكن استعمال الآلة الحاسبة. ماذا يمكنك القول بشأن المتتاليات الثلاث ؟

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$
x_0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\frac{1023}{2048}$
z_0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{31}{64}$	$\frac{63}{128}$	$\frac{127}{256}$	$\frac{255}{512}$	$\frac{511}{1024}$	$\frac{1023}{2048}$

② المتتالية $(y_n)_{n\ge0}$ متتالية هندسية حدّها y_0 يساوي 1 وأساسها $\dfrac{1}{2}$ ومنه $y_n=\dfrac{1}{2^n}$.

③ نعرّف $t_n=x_n+\frac{1}{2}y_n$، ونحسب $t_{n+1}=x_{n+1}+\frac{1}{2}y_{n+1}$

$$t_{n+1}=x_n+\frac{1}{4}y_n+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}y_n=x_n+\frac{1}{2}y_n=t_n$$

أي إنّ المتتالية $(t_n)_{n\ge0}$ متتالية ثابتة تحقّق $\frac{1}{2}=t_n=t_0=x_0+\frac{1}{2}y_0$. ومنه

$$z_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{و} \quad x_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

④ وأخيراً

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}y_n=0$$

تمرينات ومسائل

1 يحتوي صندوق على خمس كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2. نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق. يتكون فضاء العينة إذن من مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين والمأخوذة من بين خمسة عناصر.

① ما احتمال الحدث A : «للكرتين المسحوبتين اللون ذاته» ؟

② ما احتمال الحدث B : «مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3» ؟

③ ما احتمال الحدث B علماً أنّ A قد وقع ؟

الحل

① يقع الحدث A إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين أوكرتين سوداوين إذن

$$\mathbb{P}(A)=\frac{\binom{3}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3+1}{10}=\frac{2}{5}$$

② يقع الحدث B إذا كانت نتيجة تضم كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2 إذن

$$\mathbb{P}(B)=\frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}$$

③ لدينا $\mathbb{P}(B\cap A)=\frac{2}{10}$ ومنه $\mathbb{P}(B\mid A)=\frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{1}{2}$.

2 نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة، ونتأمّل الحدث A : «العدد الظاهر زوجي» والحدث B : «العدد الظاهر أوّلي». أيكون هذان الحدثان مستقلَّين احتمالياً ؟

الحل

لما كان $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{2,3,5\}$ استنتجنا أنّ $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{1}{2}$ ومنه

$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(\{2\})=\tfrac{1}{6}\neq\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$$

إذن الحدثان A و B غير مستقلان احتماليا.

3 تتألّف عائلة من أربعة أطفال. نقبل أنّه عند كل ولادة احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة أنثى. ونفترض أن الولادات المتتالية هي أحداث مستقلة احتمالياً. نرمز A و B و C إلى الأحداث:

A : «للأطفال الأربعة الجنس نفسه»،

B : «هناك طفلان ذكران وطفلتان»،

C : «الطفل الثالث أنثى»،

① احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A و B و C.

② احسب $\mathbb{P}(A\cap C)$ ثمّ $\mathbb{P}(C|A)$. أيكون الحدثان A و C مستقلين احتمالياً ؟

③ احسب $\mathbb{P}(B\cap C)$ ثمّ $\mathbb{P}(C|B)$. أيكون الحدثان B و C مستقلين احتمالياً ؟

الحل

① يقع الحدث A إذا كانت الأطفال الأربعة ذكوراً أو كان الأطفال الأربعة إناثاً

$$\mathbb{P}(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

يقع الحدث B إذا كانت الأطفال الأربعة اثنان ذكور و اثنتان إناث (الترتيب غير مهم وهناك $\binom{4}{2}=6$ طريقة لترتيب هؤلاء الأطفال)

$$\mathbb{P}(B)=\binom{4}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$$

يقع الحدث C إذا كان الطفل الثالث أنثى واحتمال هذا الحدث $\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}$.

② يقع الحدث $A\cap C$ إذا كان الطفل الثالث أنثى والأطفال الأربعة من جنس واحد أي الحدث $A\cap C$ هو الحدث الموافق لكون الأطفال الأربعة جميعها إناثاً. إذن

$$\mathbb{P}(C\mid A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \mathbb{P}(A\cap C)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

ولما كان $\mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(C)$ كان هذان الحدثان مستقلين احتمالياً.

③ نصف النتائج الموافقة للحدث B تضم بنتاً بصفتها طفلاً ثالثاً ونصفها الآخر يضم صبياً بصفته طفلاً ثالثاً، إذن $\mathbb{P}(B\cap C)=\frac{3}{16}$ و $\mathbb{P}(C|B)=\frac{1}{2}$.

ولمّا كان $\mathbb{P}(B\cap C)=\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)$ كان الحدثان B و C مستقلين احتمالياً.

4 يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثّل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

② احسب كلاً من $\mathbb{P}(X=1)$ و $\mathbb{P}(X=3)$.

③ استنتج قيمة $\mathbb{P}(X=2)$.

④ احسب توقّع X وانحرافه المعياري.

الحل

① مجموعة القيم التي يأخذها X هي $X(\Omega) = \{1,2,3\}$

② الحدث $\{X = 1\}$ هو الحدث الموافق لكون الكرات الثلاث المسحوبة من اللون نفسه

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56}$$

الحدث $\{X = 3\}$ هو الحدث الموافق لكون الكرات الثلاث المسحوبة واحدة من كل لون

$$\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

③ الحدث $\{X = 2\}$ هو الحدث المتمم للحدث $\{X = 1\} \cup \{X = 3\}$ إذن

$$\mathbb{P}(X=2) = 1 - \frac{5}{56} - \frac{12}{56} = \frac{39}{56}$$

④

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

وعليه

$$\mathbb{E}(X) = 1\times\frac{5}{56} + 2\times\frac{39}{56} + 3\times\frac{12}{56} = \frac{17}{8} = 2.125$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 1\times\frac{5}{56} + 2^2\times\frac{39}{56} + 3^2\times\frac{12}{56} = \frac{269}{56}$$
$$\mathbb{V}(X) = \frac{269}{56} - \left(\frac{17}{8}\right)^2 = \frac{129}{448}$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{129}{448}} \approx 0.537$$

لنتعلّم البحث معاً

5 احتمال مشروط

تبيّن دراسة إحصائية أجريت على جماعة من الرياضيين أنّه أثناء فترة المسابقة يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع أحد الرياضيين له مساوياً 0.02. ويمكن لتناول بعض أدوية الرشح أن يؤثر في نتيجة الاختبار السابق. يتناول 25% من الرياضيين في الجماعة أدوية الرشح في الشتاء. وبين هؤلاء يكون احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً 0.05. ليكن M الحدث: «الرياضي يستعمل دواء الرشح»، وليكن D الحدث: «نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية».

يجري اختيار أحد الرياضيين من الجماعة عشوائياً احسب احتمال كل من الحدثين:

- «الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية»،
- «الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً أنّه لا يستعمل دواء الرشح».

نحو الحلّ

لنبدأ بترجمة معطيات المسألة وأسئلتها إلى لغة الأحداث والاحتمالات. فضاء العيّنة هو جماعة الرياضيين والأحداث البسيطة (اختيار أحد الرياضيين) متساوية الاحتمال. نصّ المسألة يعطي $\mathbb{P}(D)$ و $\mathbb{P}(M)$ فما هما؟ يعطي النص أيضاً الاحتمال المشروط $\mathbb{P}(D|M)$ فما هي؟ أمّا الاحتمالان المطلوبان فهما $\mathbb{P}(M\cap D)$ و $\mathbb{P}(D|M')$.

نستطيع حساب $\mathbb{P}(M\cap D)$ بسهولة لأننا نعرف كلاً من $\mathbb{P}(D|M)$ و $\mathbb{P}(M)$، لنفعل ذلك.

لحساب $\mathbb{P}(D|M')$ نرجع إلى التعريف.

① احسب $\mathbb{P}(M'\cap D)$ انطلاقاً من $\mathbb{P}(M\cap D)$ و $\mathbb{P}(D)$.

② احسب $\mathbb{P}(M')$ واستنتج المطلوب.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

من نص المسألة نجد

$$\mathbb{P}(D|M)=0.05 \text{ و } \mathbb{P}(M)=0.25 \text{ و } \mathbb{P}(D)=0.02$$

هنا

$$\mathbb{P}(M\cap D)=\mathbb{P}(D|M)\cdot\mathbb{P}(M)=0.25\times 0.05=0.0125$$

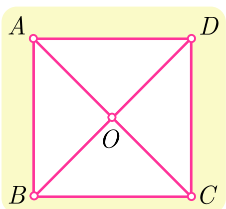
① لمّا كان $\mathbb{P}(D)=\mathbb{P}(D\cap M)+\mathbb{P}(D\cap M')$ استنتجنا أنّ

$$\mathbb{P}(D\cap M')=0.02-0.0125=0.0075$$

② لمّا كان $\mathbb{P}(M')=1-\mathbb{P}(M)=0.75$ استنتجنا أنّ

$$\mathbb{P}(D|M')=\frac{\mathbb{P}(M'\cap D)}{\mathbb{P}(M')}=\frac{0.0075}{0.75}=0.01$$

6 تجوال عشوائي



نتأمّل مربّعاً $ABCD$ مركزه O. تقفز جزيئة بأسلوب عشوائي من إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة أخرى وفق القواعد الآتية :

- إذا كانت الجزيئة عند أحد رؤوس المربع فإنها تقفز إلى أحد الرأسين

المجاورين أو إلى مركز المربع باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$. (فمثلاً من A يمكنها أن تنتقل إلى B أو D أو O).

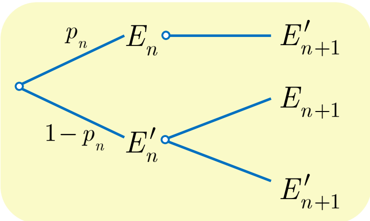
- وإذا كانت الجزيئة في O فإنها تقفز إلى أيٍّ من الرؤوس A، B، C، D باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$.

في البدء كانت الجزيئة في A. في حالة $n \geq 1$، نرمز بالرمز E_n إلى الحدث: «الجزيئة في O بعد القفزة رقم n»، وليكن $p_n = \mathbb{P}(E_n)$، (إذن $p_1 = \frac{1}{3}$). يطلب إيجاد علاقة تفيد في حساب p_{n+1} انطلاقاً من p_n، ثُمّ حساب p_n بدلالة n.

نحو الحلّ

الاحتمال p_{n+1} هو احتمال أن تقفز الجزيئة إلى O في القفزة رقم $n+1$. أَتوجد صلة بين الحدثين E_n و E_{n+1} ؟ إذا كانت الجزيئة في O بعد القفزة رقم n فهل يمكنها أن تقفز إلى O بعد القفزة رقم $n+1$؟

إذن وقوع E_{n+1} مشروط **بعدم** وقوع الحدث E_n، (أي بوقوع E'_n)، إذن يمكننا إنشاء التمثيل الشجري المبين جانباً :



① علّل الاحتمالات المكتوبة.

② لماذا لا يوجد إلا فرع واحد بعد E_n ؟

③ ما الاحتمال الذي يجب كتابته على الفرع $E'_n \longrightarrow E_{n+1}$ ؟

④ أثبت أنّ $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1-p_n)$.

ليكن α حلّ المعادلة $x = \frac{1}{3}(1-x)$، نضع $t_n = p_n - \alpha$. أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية، عيّن أساسها وحدها الأوّل، ثمّ استنتج p_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

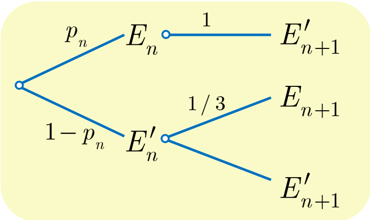
أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

① مجموع الاحتمالات عند كل عقدة يجب أن يساوي الواحد.

② وقوع الحدث E_n يعني أنّ الجزيئة في مركز المربع O بعد القفزة رقم n، وهي من ثَمّ ستقفز إلى أحد رؤوس المربع ولن تبقى في المركز بعد القفزة $n+1$. إذن وقوع E_n يقتضي وقوع E'_{n+1} حتماً.

③ وقوع الحدث E'_n يعني أن الجزيئة تحتل أحد رؤوس المربع بعد القفزة رقم n، ومن ثم يمكنها القفز إلى المركز O أو إلى أحد الرأسين المجاورين في القفزة $n+1$. وهي تقفز إلى المركز باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$. فنكتب على $E_{n+1} \longleftarrow E'_n$ الفرع الاحتمال $\frac{1}{3}$.



④ يصبح التمثيل الشجري كما في الشكل، ومن ثمّ

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \tfrac{1}{3}\times(1-p_n)$$

العدد $\alpha = \frac{1}{4}$ هو حل المعادلة $x = \frac{1}{3}(1-x)$. أي

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \tfrac{1}{3}\times(1-p_n) \\ \tfrac{1}{4} &= \tfrac{1}{3}\times(1-\tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$

وبالطرح نجد $p_{n+1}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\times(p_n-\frac{1}{4})$ أو $t_{n+1} = -\frac{1}{3}t_n$. فالمتتالية $(t_n)_{n\geq1}$ هندسية أساسها $q = -\frac{1}{3}$ وحدها t_1 يساوي $t_1 = p_1 - \alpha = \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ومنه

$$t_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$$

إذن $p_n = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$ و $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4}$.

7 استعمال متحولين عشوائيين

يتطلّب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي. تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B قانونه الاحتمالي هو الآتي:

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E إلى الحدث: «يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل».

نحو الحلّ

☝ يستغرق إنجاز المهمة زمناً عشوائياً يساوي $X_A + X_B$. والمطلوب هو حساب احتمال الحدث $E = (X_A + X_B \leq 3)$.

① اكتب الحدث E بصيغة اجتماع احداث منفصلة من النمط

$$(X_A = p)\cap(X_B = q)$$

② بيّن كيف يفيد الاستقلال الاحتمالي في حساب احتمال كل من الأحداث السابقة.

③ استنتج احتمال الحدث E .

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

الحل

$$E=\{X_A=2,X_B=1\}\cup\{X_A=1,X_B=2\}\cup\{X_A=1,X_B=1\}$$

إذن

$$\mathbb{P}(E)=\mathbb{P}\big((X_A,X_B)=(2,1)\big)+\mathbb{P}\big((X_A,X_B)=(1,2)\big)+\mathbb{P}\big((X_A,X_B)=(1,1)\big)$$

ولأنّ المتحولين العشوائيَّيْن X_A و X_B مستقلان احتمالياً فإنّ

$$\mathbb{P}\big((X_A,X_B)=(p,q)\big)=\mathbb{P}(X_A=p)\cdot\mathbb{P}(X_B=q)$$

إذن

$$\mathbb{P}(E)=0.04+0.06+0.1=0.2$$

قُدُماً إلى الأمام

8 يضم ناد رياضي 80 سبّاحاً، و 95 لاعب قوى، و 125 لاعب جمباز. يمارس كل رياضيّ لعبة واحدة فقط.

① نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة. احسب احتمال وقوع الحدثين الآتيين:

a. الحدث A : «يمارس اللاعبون الثلاثة ألعاب القوى».

b. الحدث B : «يمارس اللاعبون الثلاثة الرياضة ذاتها».

② نسبة الفتيات بين الذين يمارسون السباحة تساوي 45% وبين الذين يمارسون ألعاب القوى 20%، وهي تساوي 68% بين الذين يمارسون لعبة الجمباز.

a. نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي. احسب p_1 : احتمال أن يكون فتاة تمارس إحدى ألعاب القوى. احسب أيضاً p_2 : احتمال أن يكون فتاة.

b. نختار عشوائياً فتاة من أعضاء النادي. احسب p_3 احتمال أن تكون لاعبة جمباز.

الحل

①

$$\mathbb{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}}=\frac{138415}{4455100}=\frac{27683}{891020}$$

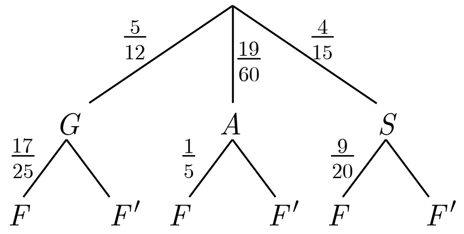
$$\mathbb{P}(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{\binom{95}{3}+\binom{125}{3}+\binom{80}{3}}{\binom{300}{3}}=\frac{21533}{178204}$$

② لنتامّل الأحداث

S : « اللاعب سبّاحٌ».　　　　A : « اللاعب لاعب قوى».

G : « اللاعب لاعب جمباز».　　　　F : « اللاعب أنثى».

لدينا التمثيل الشجري الآتي:



والمطلوب حساب $p_1 = \mathbb{P}(F \cap A)$ و $p_2 = \mathbb{P}(F)$. من التمثيل الشجري نجد

$$p_1 = \mathbb{P}(F \cap A) = \frac{1}{5} \times \frac{19}{60} = \frac{19}{300}$$

و

$$\begin{aligned} p_2 = \mathbb{P}(F) &= \frac{4}{15} \times \frac{9}{20} + \frac{19}{60} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{12} \times \frac{17}{25} \\ &= \frac{3}{25} + \frac{19}{300} + \frac{17}{60} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

وأخير نريد حساب

$$p_3 = \mathbb{P}(G|F) = \frac{\mathbb{P}(G \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{17}{25}}{\frac{7}{15}} = \frac{17}{28}$$

9 يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات. نتأمّل المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب: ثلاث كرات حمراء (الحدث R_3)، ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب: كرتان حمراوان وكرة خضراء (الحدث R_2)، وأخيراً يأخذ القيمة 0 في بقية الحالات.

① احسب $\mathbb{P}(R_3)$ و $\mathbb{P}(R_2)$.

② عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

الحل

① $\mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(R_3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$ و $\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(R_2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$.

① قانون X :

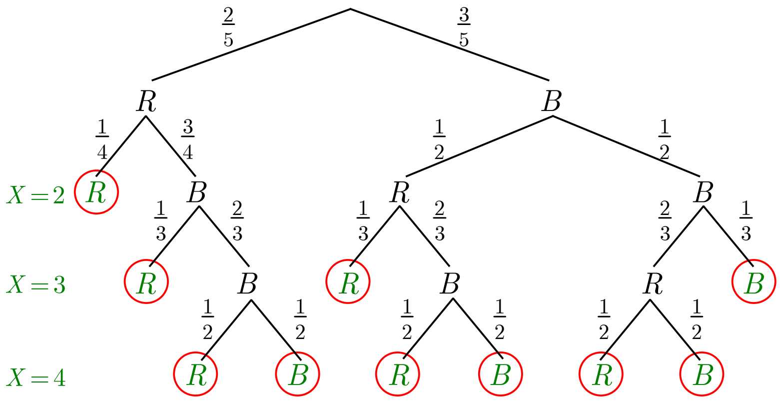
x	0	3	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

التوقع الرياضي والتباين. $\mathbb{E}(X) = \frac{5}{3}$ و $\mathbb{V}(X) = \frac{55}{18}$.

10 لدينا صندوق يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء. نكرّر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتّى لا يتبقّى في الصندوق إلاّ كرات من اللون ذاته. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد مرّات السحب اللازمة. عيّن مجموعة القيم التي يأخذها X، وعيّن قانون X، واحسب توقعه الرياضي.

الحل

لننشئ المخطط الشجري للتجربة



نرى أنّ $X(\Omega) = \{2,3,4\}$. وكذلك فإنّ

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = 1 - \mathbb{P}(X = 2) - \mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{5}$$

إذن قانون X.

x	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$

التوقع الرياضي $\mathbb{E}(X) = 3.5$.

11 نُلقي حجري نرد متوازنين ونرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2، وليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 4.

① عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S.

② عيّن القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y.

③ عيّن القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

④ أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين عشوائياً؟

الحل

هنا $S(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. والقانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي S هو:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

إذن $X(\Omega) = \{0,1\}$، أما جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X فهو:

x	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

و $Y(\Omega) = \{0,1,2,3\}$، أما جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y فهو:

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$

القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

$X \backslash Y$	0	1	2	3	قانون X
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2}$
قانون Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	

المتحولان X و Y غير مستقلين احتمالياً لأنّ $\mathbb{P}(X=0,Y=0) \neq \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$.

12 طائرات ذات محركين وأخرى ذات أربعة محركات

يجري تزويد طائرات ذات محركين وطائرات ذات أربعة محركات بالنوع ذاته من المحركات. إنّ احتمال حدوث عطل في أحد هذه المحركات يساوي p وهو عددٌ موجب وأصغر تماماً من 1. نفترض أنّ الأعطال التي يمكن أن تصيب المحركات مستقلّة عن بعضها. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين، وليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات أربعة محركات.

① عيّن القيم التي يأخذها X، وقانونه الاحتمالي.

② عيّن القيم التي يأخذها Y، وقانونه الاحتمالي.

③ يمكن لطائرة أن تتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطّل. احسب p_2 احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرّك طيرانها، واحسب p_4 احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرّك طيرانها.

④ تحقّق أنّ $p_2 - p_4 = p^2(1-p)(3p-1)$، وبيّن تِبعاً لقيم p أي نوع من الطائرات يعطي وثوقيّة أكبر.

الحل

① مجموعة قيم X هي $I = \{0,1,2\}$، و X متحوّل حدّاني $\mathcal{B}(2,p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{2}{k} p^k (1-p)^{2-k}; \quad k = 0,1,2$$

② مجموعة قيم Y هي $J = \{0,1,2,3,4\}$، و Y متحوّل حدّاني $\mathcal{B}(4,p)$:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}; \quad k = 0,1,2,3,4$$

③ احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرّك طيرانها

$$p_2 = \mathbb{P}(X \le 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 2) = 1 - p^2$$

احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرّك طيرانها

$$\begin{aligned} p_4 &= \mathbb{P}(Y \le 2) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2) \\ &= q^4 + 4pq^3 + 6p^2q^2 = q^2(1 - 2p + p^2 + 4p - 4p^2 + 6p^2) \\ &= q^2(1 + 2p + 3p^2) = (1 - 2p + p^2)(1 + 2p + 3p^2) \\ &= 3p^4 - 4p^3 + 1 \end{aligned}$$

④

$$\begin{aligned} p_2 - p_4 &= 1 - p^2 - 3p^4 + 4p^3 - 1 = p^2(-3p^2 + 4p - 1) \\ &= p^2(1-p)(3p-1) \end{aligned}$$

إذن إشارة $p_2 - p_4$ هي من إشارة $(3p-1)$،

- في حالة $0 \le p < \frac{1}{3}$ لدينا $p_2 \le p_4$ والطائرة ذات المحركات الأربعة أعلى وثوقيه.
- أما إذا كان $p = \frac{1}{3}$ كان للطائرتين نفس مستوى الوثوقية
- وعندما $\frac{1}{3} < p < 1$ تكون الطائرة ذات المحركين أعلى وثوقيه من ذات الأربعة محركات.

13 متتاليات واحتمالات

① ليكن a عدداً حقيقياً. نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\ge 1}$ المعرّفة بشرط البدء $u_1 = a$ والعلاقة التدريجية $u_{n+1} = \dfrac{4}{10} - \dfrac{3}{10}u_n$.

a. لتكن $(v_n)_{n\ge1}$ المتتالية المعرّفة بالصيغة $v_n = 13u_n - 4$. أثبت أنّ $(v_n)_{n\ge1}$ متتالية هندسية، وعيّن أساسها، ثُمّ عبّر عن v_n بدلالة n.

b. استنتج صيغة u_n بدلالة n و a. ثُمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

② غالباً ما ينسى مدرّس الرياضيات مفتاح غرفة الصف. أيّاً كان العدد n، $(n \ge 1)$، نرمز بالرمز E_n إلى الحدث: «نسي المدرّس مفتاح غرفة الصف في اليوم n».

لنضع

$$q_n = \mathbb{P}(E'_n) \quad \text{و} \quad p_n = \mathbb{P}(E_n)$$

نفترض أنّه إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n ، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$، وإذا لم ينس المدرّس المفتاح في اليوم n ، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$.

a. أثبت أنّه في حالة $n \geq 1$ لدينا $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$.

b. استنتج صيغة p_{n+1} بدلالة p_n ، ثُمّ استفد من ① لتحسب p_n بدلالة n و p_1 .
أتتعلّق نهاية المتتالية $(p_n)_{n\geq 1}$ بقيمة p_1 ؟

الحل

① a.

$$v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4 = 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4 = \frac{12}{10} - \frac{39}{10}u_n$$
$$= -\frac{3}{10}(13u_n - 4) = -\frac{3}{10}v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية، أساسها $-\frac{3}{10}$ وفيها $v_1 = 13u_1 - 4$ وبالتالي

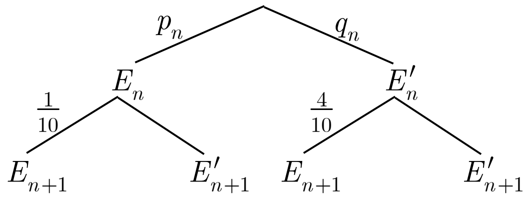
$$v_n = (13a - 4)\cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)^{n-1}$$

b. بالتعويض في العلاقة $v_n = 13u_n - 4$ نجد

$$u_n = \tfrac{1}{13}\left((13a - 4)\cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)^{n-1} + 4\right) = \left(a - \tfrac{4}{13}\right)\cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)^{n-1} + \tfrac{4}{13}$$

ومنه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{4}{13}$ لأنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1} = 0$.

② a. إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$ أي $\mathbb{P}(E_{n+1} \mid E_n) = \frac{1}{10}$ وإذا لم ينس المدرّس المفتاح في اليوم n، فإنّ احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$، تعني $\mathbb{P}(E_{n+1} \mid E'_n) = \frac{4}{10}$، إذن لدينا المخطط الشجري الآتي:



إذن

$$p_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \tfrac{1}{10}p_n + \tfrac{4}{10}q_n$$

b. ولمّا كان $q_n = 1 - p_n$ وجدنا $p_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}p_n$. وبالاستفادة من ① نجد

$$p_n = \left(p_1 - \tfrac{4}{13}\right)\cdot\left(-\tfrac{3}{10}\right)^{n-1} + \tfrac{4}{13}$$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{4}{13}$ والنهاية لا تتعلق بقيمة p_1 .

14 نُكرّر عشر مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين، ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين. احسب احتمال كل من الحدثين A : «الحصول ثلاث مرات على وجهين H» و B : «الحصول على وجهين H مرّة على الأقل».

الحل

هذه تجربة برنولية، إذا كان X المتحوّل العشوائي الذي يعطي عدد مرات ظهور HH كان X حدّانياً $\mathcal{B}(10,\frac{1}{4})$. المطلوب هو $\mathbb{P}(X=3)$ و $\mathbb{P}(X\geq 1)$. ومنه

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(X=3)=\binom{10}{3}(\tfrac{1}{4})^3(\tfrac{3}{4})^7=10\tfrac{3^8}{4^9}\approx 0.25$$

$$\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(\mathrm{X}\geq 1)=1-\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)=1-\binom{10}{0}(\tfrac{1}{4})^0(\tfrac{3}{4})^{10}=1-(\tfrac{3}{4})^{10}\approx 0.94$$

15 نتأمّل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملوّنة بالأسود، ووجهان ملوّنان بالأحمر. نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي.

① ما احتمال أن يظهر وجه أحمر أوّل مرة عند آخر إلقاء لحجر النرد؟

② ما احتمال أن يظهر وجه أحمر مرة على الأقل؟

③ ما قانون المتحوّل العشوائي X الذي يعدّ عدد الوجوه السوداء اللون التي نحصل عليها؟

الحل

① ليكن A_n الحدث الموافق لظهور وجه أحمر في المرة رقم n، وليكن A الحدث الموافق لظهور وجه أحمر أوّل مرة عند إلقاء الحجر في المرة الخامسة (الأخيرة) إذن

$$A=A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4'\cap A_5$$

ولكن هذه الأحداث مستقلة احتمالياً إذن

$$\mathbb{P}(A)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{16}{243}$$

② ليكن B الحدث الموافق لظهور وجه أحمر مرة واحدة على الأقل. فيكون B' الحدث الموافق لظهور اللون الأسود في المرات الخمس ومنه

$$\mathbb{P}(B)=1-\mathbb{P}(B')=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=1-\frac{32}{243}=\frac{211}{243}$$

③ احتمال الحصول على وجه أسود في المرة الواحدة هو $p=\frac{2}{3}$. نكرر التجربة خمس مرات، فيكون المتحول العشوائي X الذي يمثل عدد الوجوه ذات اللون الأسود التي نحصل عليها متحولاً حدّانياً $\mathcal{B}(5,\frac{2}{3})$. ومنه

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}=\binom{5}{k}\frac{2^k}{3^5};\quad k=0,1,\ldots,5$$

16 نتأمّل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجّل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثُمّ نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق. وبعدئذ نسحب مجدداً كرة من الصندوق. لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون»، وليكن R_1 الحدث : «الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون».

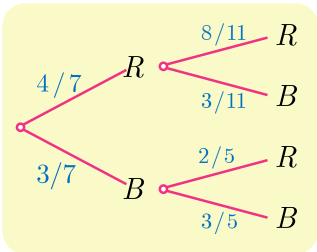
① أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة.

② احسب احتمال الحدث R_2.

③ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون؟

الحل

① التمثيل الشجري المطلوب هو



②

$$\mathbb{P}(R_2) = \frac{4}{7}\times\frac{8}{11}+\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{226}{385}$$

③

$$\mathbb{P}(R_1' \mid R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_1' \cap R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}}{\frac{226}{385}} = \frac{33}{113}$$

17 التجربة الأولى. نتأمّل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً. ليكن Y عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها Y؟

② احسب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي Y.

③ احسب التوقع الرياضي للمتحوّل العشوائي Y وتباينه.

التجربة الثانية. نتأمّل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين وأربع كرات حمراء. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجّل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثُمّ نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق. وبعدئذ نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً. ليكن X عدد الكرات الحمراء المسحوبة في المرة الثانية. نرمز بالرمز R_1 إلى الحدث: «الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون».

① ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ؟

② احسب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي X .

③ احسب التوقع الرياضي للمتحوّل العشوائي X وتباينه.

الحل

التجربة الأولى. ① $Y(\Omega)=\{1,2,3\}$.

②

$$\mathbb{P}(Y=1)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{1\times 4}{20}=\frac{1}{5}$$

$$\mathbb{P}(Y=2)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{2\times 6}{20}=\frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(Y=3)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

وإذا أردنا يمكن أن نكتب

y	1	2	3
$\mathbb{P}(Y=y)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

ويكون لدينا

$$\mathbb{E}(Y)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{5}=2$$

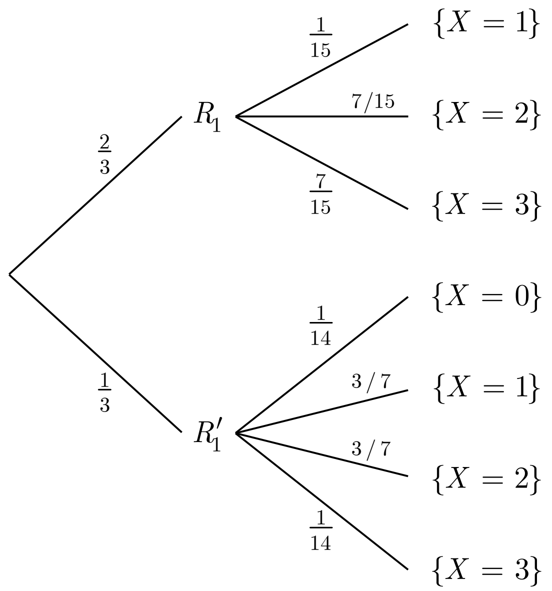
$$\mathbb{E}(Y^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{22}{5}$$

$$\mathbb{V}(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-(\mathbb{E}(Y))^2=\frac{22}{5}-4=\frac{2}{5}$$

التجربة الثانية.

① $X(\Omega)=\{0,1,2,3\}$. واضحٌ أننا نسحب ثلاث كرات معاً من صندوق يحوي أكثر من ثلاث كرات حمراء. فعدد الكرات الحمراء المسحوبة يتراوح بين 0 و 3 .

② لدينا $\mathbb{P}(R_1) = \frac{2}{3}$ و $\mathbb{P}(R_1') = \frac{1}{3}$. والتمثيل الشجري الآتي للتجربة:



إذ نلاحظ أنّه إذا كانت الكرة المسحوبة أولاً سوداء أصبحت محتويات الصندوق 4 كرات سوداء و 4 كرات حمراء. أما إذا كانت الكرة المسحوبة أولاً حمراء فعندها تصبح محتويات الصندوق كرتين سوداوين و 8 كرات حمراء.

يتيح لنا المخطط الشجري ملء جدول القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X بيسر لنجد

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{59}{315}$	$\frac{143}{315}$	$\frac{211}{630}$

ويكون لدينا

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 1\times\frac{59}{315} + 2\times\frac{143}{315} + 3\times\frac{211}{630} = \frac{21}{10}\\
\mathbb{E}(X^2) &= 1^2\times\frac{59}{315} + 2^2\times\frac{143}{315} + 3^2\times\frac{211}{630} = \frac{3161}{630}\\
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\\
&= \frac{3161}{630} - \left(\frac{21}{10}\right)^2 = \frac{3827}{6300}
\end{aligned}$$

18 تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تُلقيها، تُكرّر سعاد التجربة عدداً من المرات. عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{1}{3}$، وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$. نفترض أنّ احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها.

نتأمّل، أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n، الحدثين الآتيين:

A_n : « نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n».

B_n : « فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n».

ونعرّف $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

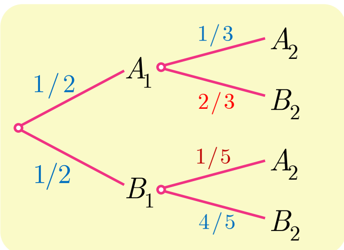
① عيّن p_1 وبرهن أنّ $p_2 = \frac{4}{15}$.

② أثبت أنّه أياً كانت $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

③ نعرّف في حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية وعيّن حدها الأوّل u_1 وأساسها q.

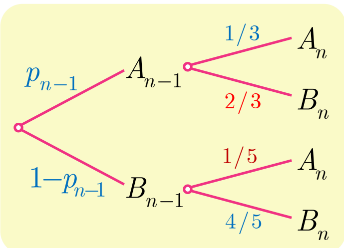
④ استنتج قيمة u_n ثمّ p_n بدلالة n، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

الحل



① لأنّ احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة الأولى يساوي احتمال فشلها فإن $p_1 = \frac{1}{2}$. ولدينا المخطط الشجري المجاور الذي يمثّل نتيجة إلقاء أوّل حلقتين. ومنه نستنتج أنّ

$$p_2 = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$



② في الحالة العامة لدينا المخطط الشجري المجاور: ومنه

$$p_n = \mathbb{P}(A_n) = p_{n-1}\cdot\frac{1}{3} + (1 - p_{n-1})\cdot\frac{1}{5}$$
$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{15}p_{n-1}$$

③ لدينا

$$u_n = p_n - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}p_{n-1} - \frac{2}{65} = \frac{2}{15}u_{n-1}$$

أي $u_n = \frac{2}{15}u_{n-1}$.

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ هندسية أساسها $q = \dfrac{2}{15}$ وحدها u_1 يساوي

$$u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

④ إذن $u_n = q^{n-1}u_1$ أي $u_n = \dfrac{7}{26}\cdot\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1}$ ومنه $p_n = \dfrac{3}{13} + \dfrac{7}{26}\cdot\left(\dfrac{2}{15}\right)^{n-1}$.

ولكن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{15}\right)^n = 0$ لأن $\dfrac{2}{15} \in]-1,1[$ إذن $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \dfrac{3}{13}$.