Fizikalni praktikum V: Difuzija tekočin

Žan Ambrožič

29. 10. 2025

1 Uvod

Spreminjanje koncentracije $c(\mathbf{x}, t)$ difundirajoče snovi v odvisnosti od kraja in časa v sredstvu opisuje difuzijska enačba:

$$D\nabla^2 c = \frac{\partial c}{\partial t}, \tag{1}$$

ki jo lahko v našem primeru prepišemo na eno (navpično) dimenzijo ($c(z, t)$). S tem dobimo želeno parcialno diferencialno enačbo:

$$Dc_{zz} = c_t. \tag{2}$$

V našem poskusu je na začetku do neke višine koncentracija snovi c_0, nad njo pa 0, ki nam da rešitev:

$$c(z, t) = \frac{c_0}{2}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right)\right). \tag{3}$$

Naj bo lomni količnik linearno odvisen od koncentracije snovi:

$$n(z) = n_0 + n_1 c(z). \tag{4}$$

V zveznem sredstvu se kot vpadlega žarka spreminja zvezno:

$$\frac{\sin(\alpha)\mathrm{d}\alpha}{\cos(\alpha)} = \frac{\mathrm{d}n}{n}, \tag{5}$$

kar se za dovolj majhne kote poenostavi v:

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}. \tag{6}$$

V tem približku se žarek pri prehodu kivete dolžine l odkloni za kot

$$\alpha_1 = \frac{l}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}, \tag{7}$$

pri izstopu pa ne smemo pozabiti še na prehod voda-zrak, ki odmik poveča: $\alpha_2 = n\alpha_1$.
Če je razdalja od kivete do zaslona b, dobimo navpični odmik

$$Y = bl\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}. \tag{8}$$

Če to združimo z dognanji o difuziji, dobimo:

$$Y = \frac{bl(n_1 - n_0)}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-z^2/4Dt}. \tag{9}$$

Maksimalen odmik je na prvotni meji med sredstvoma ($z = 0$) in pada obratno sorazmerno s kvadratom časa.
Ploščina pod krivuljo $\int_{-\infty}^{\infty} Y\mathrm{d}z = B = \text{konst.}$, saj po integriranju ostane le $B + \mathrm{erf}(z/\sqrt{4Dt})$, drugi del pa je v neskončnih limitah $z \to \pm\infty$ enak 0 in tako neodvisen od časa.

2 Pripomočki

- Laser,
- stojali,
- steklena palčka,
- kiveta,
- etanol, voda,
- kapilarni lijak,
- milimetrski papir (in svinčnik).

3 Naloga

1. S pomočjo krivulje na zaslonu v odvisnosti od časa (v intervalih nekaj minut) določi difuzijsko konstanto.
2. Preveri, ali je ploščina pod krivuljo res konstantna.

4 Metodologija

Pripravimo laser in stekleno palčko pod kotom $45°$, ki žarek razprši v črto. V kiveto nalijemo nekaj etanola in nato s pipeto dodamo vodo pod etanol tako, da ju čim manj zmešamo. Kiveto postavimo na nosilec, kjer se razpršen laser lomi ter na zaslonu zadaj obrišemo začetno obliko. Višino vrha nato odčitavamo na smiselnih intervalih (ko se dovolj spusti). Nekajkrat obrišemo tudi še celotno krivuljo, da bomo lahko preverili površino pod njo.

5 Meritve

Razdalja zaslon – kiveta: $b = (113 \pm 1)\,\mathrm{cm}$, razdalja kiveta – palčka: $a = (35 \pm 1)\,\mathrm{cm}$, razdalja palčka – laser $(32 \pm 1)\,\mathrm{cm}$. Notranja širina kivete je $d = (1{,}50 \pm 0{,}01)\,\mathrm{cm}$.

Napaka višin ni omejena z natančnostjo oznake in odčitka le te, vendar je omejena z nihanjem višine na skali minut, celotno napako smo ocenili na okoli $5\,\mathrm{mm}$. Za zmanjšanje napake je bila višina odčitana čim bolj na minimumu (časovni interval je bil prilagojen temu primerno).

t [min]	Y [mm] $\pm 5\,\mathrm{mm}$
0	191
3	183
10	176
15	165
22	158
29	145
36	135
43	126
48	121
58	119
71	111
85	108
90	106
97	102
126	100
135	94
180	78

Tabela 1: Meritve $Y_{\max}(t)$.

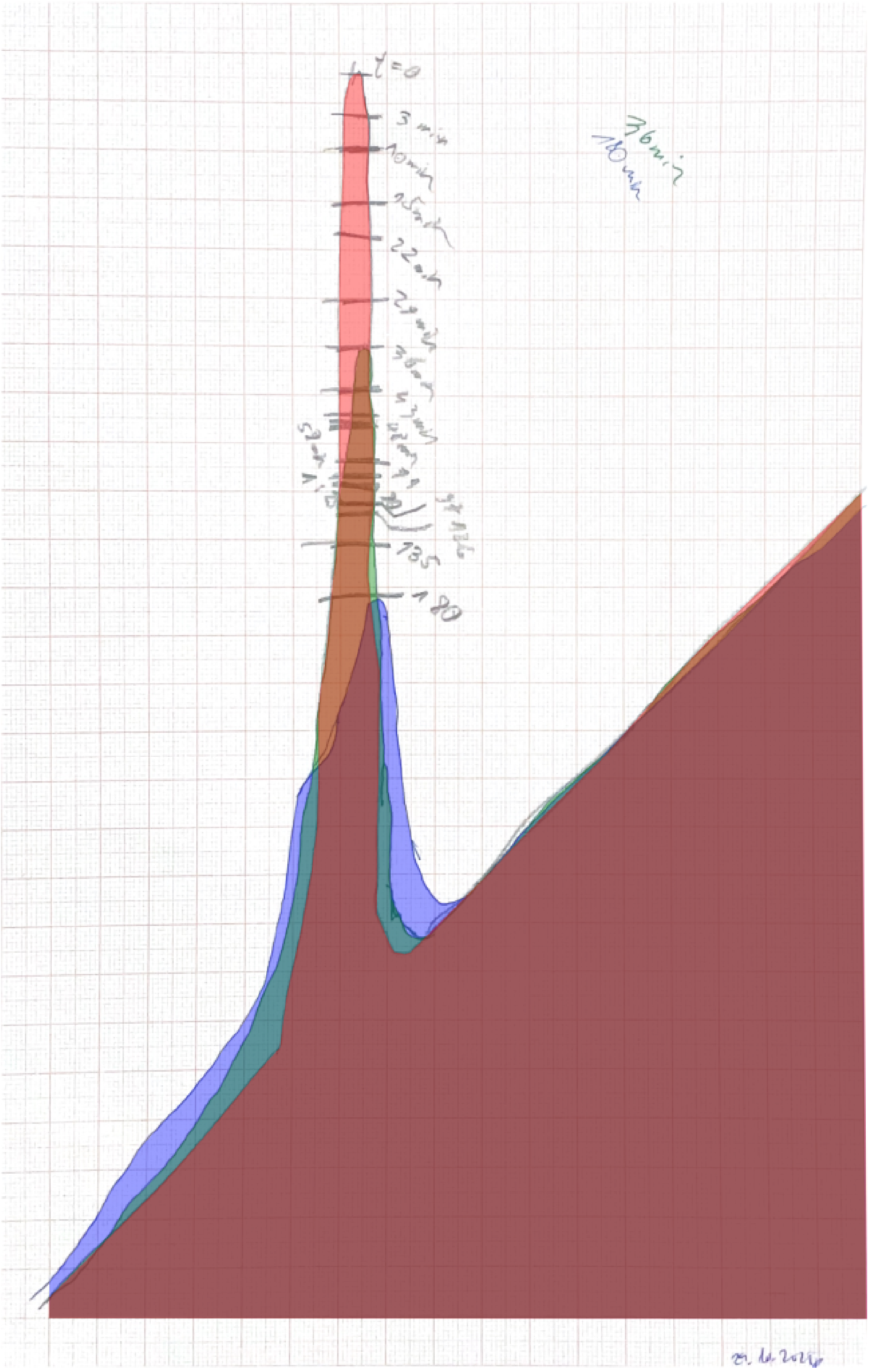
Ploščino odčitamo na začetku, po 36 min in po 180 min. Na skenu poustvarimo krivulje s programom `Inkscape`, ki nam omogoča tudi določanje plščine zaključene krivulje. Dobimo vrednosti $152{,}2\,\mathrm{cm}^2$, $152{,}8\,\mathrm{cm}^2$ in $153{,}7\,\mathrm{cm}^2$. Natančnost metode ocenimo na 1% relativne napake.

6 Analiza

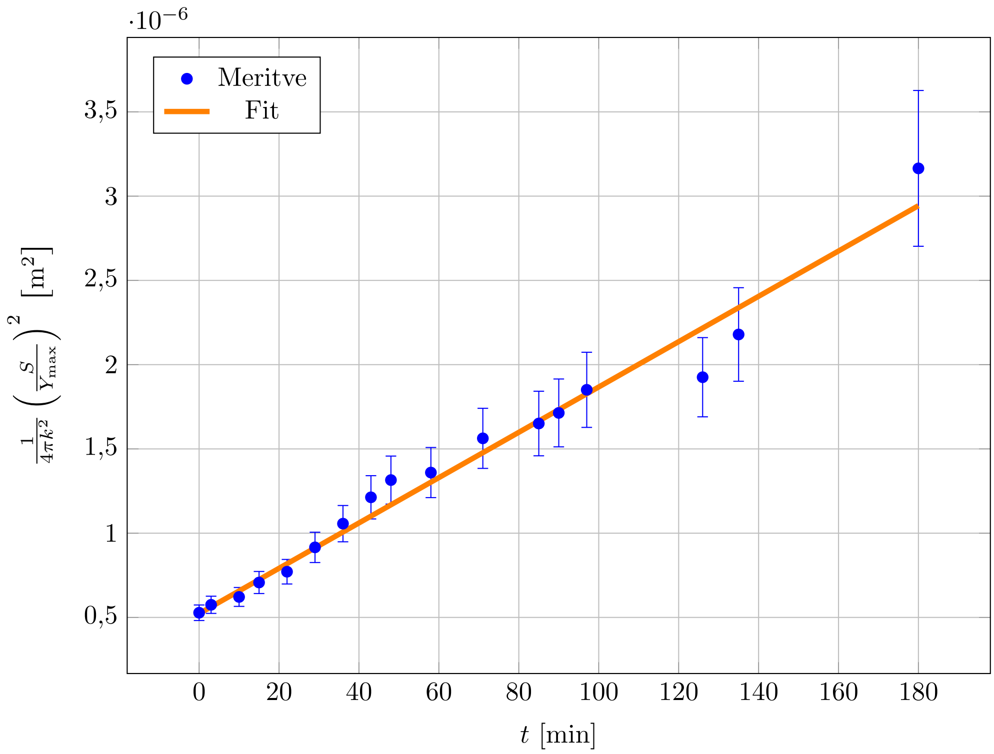
Izračunamo $k = (a+b)/a = 4{,}23 \pm 0{,}28$ in $\overline{S}' = (152{,}9 \pm 0{,}9)\,\mathrm{cm}^2$, tako da je znotraj napake res konstantna. Na navpično os grafa rišemo:

$$y = \frac{1}{4\pi k^2}\left(\frac{S}{Y_{\max}}\right)^2, \tag{10}$$

kjer vzamemo $S = kbd(n_1 - n_0) = (2{,}08 \pm 0{,}16)\,\mathrm{m}^2$ napake meritev višine pa upoštevamo kot nekorelirane z napakami meritev razdalij.



Slika 1: Meritve in prikaz odčitavanja ploščine.



Graf 1: Določanje difuzijske konstante iz meritev.

Dobimo prilegajočo se premico (z upoštevanimi utežmi posameznih napak merskih točk) $y = kt + m$ s parametroma $k = (1{,}34 \pm 0{,}08) \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m^2\,min^{-1}}$, $m = (5{,}2 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-7}$. Difuzijska konstanta torej znaša

$$D = (2{,}23 \pm 0{,}13) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}.$$

7 Rezultati

Meritve so potekale brez težav in dovolj dolgo časa, da lahko trdimo, da se ploščina pod krivuljo ni spreminjala (3 h). Dobljen difuzijski koeficient je kolikor toliko smiselen, sicer najdemo različne vrednosti za standardne pogoje (za vodo in etanol), ki so vse blizu $1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m^2/s}$, kar je približno za faktor 4 več od našega. Obstaja nekaj možnih razlogov, ampak noben ne bi dal tako velikega efekta: voda je bila v odprti posodi, zato je bila zaradi izhlapevanja malo hladnejša od etanola. Ker je voda že tako na dnu, bi lahko to rahlo upočasnilo difuzijo, vendar je efekt verjetno minimalen. Druga možnost bi bila prisotnost primesi v kateri od tekočin, kar bi neposredno vplivalo na difuzijsko konstanto in na optično gostoto, s tem pa na našo vrednost S, vendar v primeru te napake ničesar ne bi mogli narediti. Nihanje gladine je bilo najverjetneje posledica neenakomernosti difuzije, saj se je morda na enem delu kivete (po širini) del hitreje zmešal kot na drugem (razloga sta lahko površinska napetost in konvekcija).

8 Priloge

8.1 Izpeljava rešitve PDE za skoncentrirano snov na enem mestu

Začetni pogoji: $c(z \neq 0, 0) = 0$.
Z uporabo Fourierove transformacije si poenostavimo problem (pravila za transformacij odvodov):

$$-Dk^2\hat{c}(k,t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{c}(k,t)$$

$$\ln(\hat{c}(k,t)) = -Dk^2t + A$$
$$\hat{c}(k,t) = e^{-Dk^2t}e^A$$

Začetna distribucija je Diracova delta, ki jo lahko (ob času 0) tranformiramo in dobimo $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z,0)\mathrm{d}z = 1$. Od tod sledi $A = 1$. Z obratno Fourierovo transformacijo dobimo:

$$c(z,t) = \frac{e^{-z^2/4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} =: f(z,t)$$

8.2 Rešitev PDE za naše začetne pogoje

Začetni pogoji: $c(z,0) = \begin{cases} c_0 & z < 0 \\ 0 & z \geqslant 0 \end{cases}$.
Rešitev iz 8.1 uporabimo v konvoluciji (nastavimo točkaste vire v spodji polprostor):

$$c(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(y,0)c_0 f(z-y,t)\mathrm{d}y = c_0\int_{-\infty}^{0} f(z-y,t)\mathrm{d}y$$

Hitro opazimo, da je substitucija $\eta = (z-y)/\sqrt{4Dt}$ kot nalašč za naš integral:

$$c(z,t) = -\frac{c_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{z/\sqrt{4Dt}} e^{-\eta^2}\mathrm{d}\eta = \frac{c_0}{2}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4Dt}}\right)\right)$$