

# Kromatično število Kneserjevih grafov

Žan Hafner Petrovski

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Oddelek za matematiko

12. maj 2017

## Definicija

*Graf  $K(n, k)$ ,  $n \geq k \geq 1$  in  $n, k \in \mathbb{N}$ , imenujemo **Kneserjev**, če je množica vozlišč  $V(n, k)$  družina vseh  $k$ -elementnih podmnožic množice  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.*

## Definicija

Graf  $K(n, k)$ ,  $n \geq k \geq 1$  in  $n, k \in \mathbb{N}$ , imenujemo **Kneserjev**, če je množica vozlišč  $V(n, k)$  družina vseh  $k$ -elementnih podmnožic množice  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.

## Definicija

Najmanjše število  $m$ , ki zadošča barvanju vozlišč grafa  $G$ , imenujemo **Kromatično število**. Označimo ga s  $\chi(K(n, k))$ .

## Definicija

Graf  $K(n, k)$ ,  $n \geq k \geq 1$  in  $n, k \in \mathbb{N}$ , imenujemo **Kneserjev**, če je množica vozlišč  $V(n, k)$  družina vseh  $k$ -elementnih podmnožic množice  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.

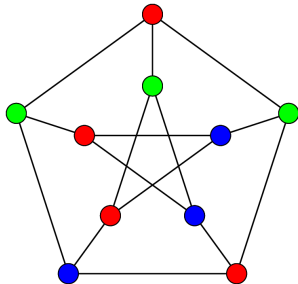
## Definicija

Najmanjše število  $m$ , ki zadošča barvanju vozlišč grafa  $G$ , imenujemo **Kromatično število**. Označimo ga s  $\chi(K(n, k))$ .

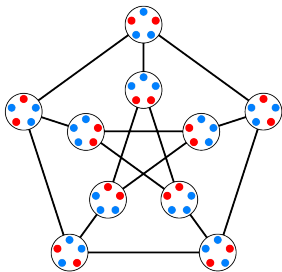
## Definicija

Preslikavo  $c : V \rightarrow \{1, \dots, m\}$ , ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo **barvanje**. Ta preslikava zadošča pogoju, da sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.

*Petersenov graf oziroma  $K(5, 2)$ .*



**Slika:** Primer barvanja s 3 barvami



**Slika:** Prikaz povezav med disjunktnimi množicami

## Izrek (Kneser)

*Za kromatično število Kneserjevega grafa velja*

$$\chi(K(2k + d, k)) = d + 2.$$

## Izrek (Kneser)

*Za kromatično število Kneserjevega grafa velja*

$$\chi(K(2k + d, k)) = d + 2.$$

## Izrek (Ekvivalentno)

*Če družino  $k$ -elementnih podmnožic množice  $\{1, 2, \dots, 2k + d\}$  razdelimo na  $d + 1$  razredov,  $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_{d+1}$ , potem obstaja  $i$ , da  $V_i$  vsebuje par  $k$ -elementnih disjunktnih množic  $A$  in  $B$ .*

## Izrek (Borsuk-Ulam)

*Za vsako zvezno preslikavo  $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , z  $d$ -sfere v  $d$ -prostor, obstajata antipodni točki  $x^*$  in  $-x^*$ , ki ju  $f$  slika v isto točko, torej  $f(x^*) = f(-x^*)$ .*

## Izrek (Lyusternik-Shnirel'man)

*Če je  $d$ -sfera  $S^d$  pokrita z  $d + 1$  množicami,*

$$S^d = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_d \cup U_{d+1},$$

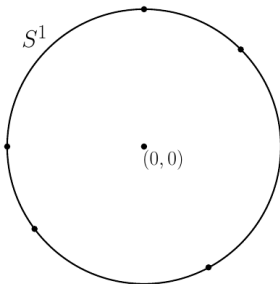
*tako, da so vse izmed prvih  $d$  množic  $U_1, U_2, \dots, U_d$  bodisi odprte bodisi zaprte, potem ena izmed  $d + 1$  množic vsebuje par antipodnih točk  $x^*$  in  $-x^*$ .*



# Splošna lega točk na sferi

## Definicija

Točke iz množice  $\{1, 2, \dots, 2k + d\}$  so v **splošni legi** na sferi  $S^{d+1}$ , če nobenih  $d + 2$  točk iz omenjene množice ne leži na hiperravnini skozi središče sfere.



**Slika:** Primer postavitve 5 točk za  $k = 2$  in  $d = 1$  na sfero  $S^1$