

Kromatično število Kneserjevih grafov

Seminar

Žan Hafner Petrovski
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

12. maj 2017

1 Uvod

V teoriji grafov poznamo mnogo različnih tipov grafov. Razlikujemo jih glede na njihove specifične lastnosti. V tem seminarju se bomo ukvarjali s *Kneserjevimi grafi* oziroma podrobneje, s *kromatičnim številom* le-teh. Najprej podajmo nekaj glavnih definicij.

Definicija 1 Graf $K(n, k)$, $n \geq k \geq 1$ in $n, k \in \mathbb{N}$, imenujemo **Kneserjev**, če je množica vozlišč $V(n, k)$ družina vseh k -elementnih podmnožic množice $\{1, 2, \dots, n\}$. Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.

Povejmo še, da za število vozlišč velja $|V(n, k)| = \binom{n}{k}$. V primeru, ko je $n < 2k$, imata vsaki dve k -elementni množici neprazen presek. Tak Kneserjev graf nima nobenih povezav, zato privzemimo, da velja $n \geq 2k$.

Definicija 2 Najmanjše število m , ki zadošča barvanju vozlišč grafa G , imenujemo **Kromatično število**. Označimo ga s $\chi(K(n, k))$.

Definicija 3 Preslikavo $c : V \rightarrow \{1, \dots, m\}$, ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo **barvanje**. Ta preslikava zadošča pogoju, da sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.

Kromatično število grafa G je torej najmanjše število barv, s katerimi lahko pobarvamo vozlišča grafa tako, da se nobeni dve sosednji vozlišči slikata v isto barvo. Množico vozlišč V bi radi predstavili kot disjunktno unijo barvnih razredov $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_{\chi(G)}$, teh pa želimo, da je najmanj. ??Za

vsak barvni razred velja, da imajo vsi njegovi elementi, torej k -elementne množice, neprazen presek.??

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(n, k)$ bomo razdelili na disjunktne množice $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_{\chi(K(n,k))}$, kjer bo vsak V_i družina množic moči k z nepraznim presekom. Ker smo predpostavili, da je $n \geq 2k$, poenostavimo zapis in pišimo $n = 2k + d, k \geq 1, d \geq 0$.

2 Kneserjeva domneva

Cilj tega seminarja je dokazati naslednji izrek:

Izrek 1 (Kneser) *Za kromatično število Kneserjevega grafa velja*

$$\chi(K(2k + d, k)) = d + 2.$$

Preformulirajmo ta izrek v obliko problema obstoja na sledeč način:

Če družino podmnožic s k elementi množice $\{1, 2, \dots, 2k + d\}$ razdelimo na $d + 1$ razredov, $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_{d+1}$, potem obstaja i , da V_i vsebuje par k -elementnih disjunktne množic A in B .

Tako smo prišli do splošnejše različice izreka. Ta nam, še preden se poglobimo v sam dokaz, nudi drugačen pogled na zastavljen problem, saj ne omenja grafov. László Lovász je uvidel, da bistvo problema tiči v slavnem izreku o d -dimenzionalni enotski sferi S^d v \mathbb{R}^d , $S^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$. Zapišimo še ta izrek.

Izrek 2 (Borsuk-Ulam) *Za vsako zvezno preslikavo $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, z d -sfere v d -prostor, obstajata antipodni točki x^* in $-x^*$, ki ju f slika v isto točko, torej $f(x^*) = f(-x^*)$.*

Dokaz tega izreka lahko bralec najde v knjigi "Using the Borsuk-Ulam theorem" matematika Jirija Matouška, mi pa se bomo posvetili njegovi uporabi pri dokazu izreka Lyusternika in Shnirel'mana.

Izrek 3 (Lyusternik-Shnirel'man) *Če je d -sfera S^d pokrita z $d+1$ množicami,*

$$S^d = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_d \cup U_{d+1},$$

tako, da so vse izmed prvih d množic U_1, U_2, \dots, U_d bodisi odprte bodisi zaprte, potem ena izmed $d + 1$ množic vsebuje par antipodnih točk x^ in $-x^*$.*

Dokaz (s protislovjem in uporabo Borsuk-Ulamovega izreka):

Naj bo pokritje $S^d = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_d \cup U_{d+1}$ dano, kot je zapisano v izreku. Predpostavimo, da noben izmed U_i ne vsebuje dveh antipodnih točk. Definirajmo preslikavo $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ na sledeč način:

$$f(x) := (d(x, U_1), d(x, U_2), \dots, d(x, U_d)).$$

Tu $d(x, U_i)$ označuje razdaljo med točko x in množico U_i .

Ker je to zvezna funkcija na x , je tudi f zvezna. Torej lahko uporabimo Borsuk-Ulamov izrek, ki nam pove, da na domeni f , torej na S^d , obstajata antipodni točki x^* in $-x^*$ z lastnostjo $f(x^*) = f(-x^*)$. Ker po predpostavki U_{d+1} ne vsebuje antipodnih točk, sklepamo, da je vsaj en izmed x^* in $-x^*$ vsebovan v eni izmed množic U_i , recimo v U_k za $k \leq d$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je to x^* , torej $x^* \in U_k$. To pomeni, da je $d(x^*, U_k) = 0$, ključno pa je, da je zaradi lastnosti $f(x^*) = f(-x^*)$ tudi $d(-x^*, U_k) = 0$.

Obravnavajmo najprej primer, ko je U_k zaprt. Potem iz $d(-x^*, U_k) = 0$ sledi, da je $-x^* \in U_k$, kar pa je protislovje s predpostavko, da noben izmed U_i ne vsebuje para antipodnih točk.

Če je U_k odprt, potem iz $d(-x^*, U_k) = 0$ sledi, da $-x^*$ leži v zaprtju U_k , torej v $\overline{U_k}$. Ta množica pa je vsebovana v $S^d \setminus (-U_k)$, $-U_k = \{-x; x \in U_k\}$. Množica $S^d \setminus (-U_k)$ je namreč zaprta in vsebuje U_k , pri tem smo upoštevali predpostavko, da U_k ne vsebuje antipodnih točk. Ampak, ker je zaprta in vsebuje U_k , vsebuje tudi $\overline{U_k}$. To pomeni, da $-x^*$ leži v $S^d \setminus (-U_k)$, torej ne more ležati v $-U_k$. Ker pa smo privzeli, da $x^* \in U_k$, smo prišli do protislovja.

□

Literatura

- [1] M. Aigner in G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 2. izdaja, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2001.

[2]