Kromatično število Kneserjevih grafov

Seminar

Žan Hafner Petrovski
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

12. maj 2017

1 Uvod

V teoriji grafov poznamo mnogo različnih tipov grafov. Razlikujemo jih glede na njihove specifične lastnosti. V tem seminarju se bomo ukvarjali s *Kneserjevimi grafi* oziroma podrobneje, s *kromatičnim številom* le-teh. Najprej podajmo nekaj glavnih definicij.

Definicija 1 *Graf $K(n,k)$, $n \geq k \geq 1$ in $n,k \in \mathbb{N}$, imenujemo* ***Kneserjev****, če je množica vozlišč $V(n,k)$ družina vseh k-elementnih podmnožic množice $\{1,2,\ldots,n\}$. Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.*

Povejmo še, da za število vozlišč velja $|V(n,k)| = \binom{n}{k}$. V primeru, ko je $n < 2k$, imata vsaki dve k-elementni množici neprazen presek. Tak Kneserjev graf nima nobenih povezav, zato privzemimo, da velja $n \geq 2k$.

Definicija 2 *Najmanjše število m, ki zadošča barvanju vozlišč grafa G, imenujemo* ***Kromatično število****. Označimo ga s $\chi(K(n,k))$.*

Definicija 3 *Preslikavo $c : V \to \{1,\ldots,m\}$, ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo* ***barvanje****. Ta preslikava zadošča pogoju, da sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.*

Kromatično število grafa G je torej najmanjše število barv, s katerimi lahko pobarvamo vozlišča grafa tako, da se nobeni dve sosednji vozlišči slikata v isto barvo. Množico vozlišč V bi radi predstavili kot disjunktno unijo barvnih razredov $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_{\chi(G)}$, teh pa želimo, da je najmanj. ??Za vsak barvni razred velja, da imajo vsi njegovi elementi, torej k-elementne množice, neprazen presek.??

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(n,k)$ bomo razdelili na disjunktne množice $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_{\chi(K(n,k))}$, kjer bo vsak V_i družina množic moči k z nepraznim presekom. Ker smo predpostavili, da je $n \geq 2k$, poenostavimo zapis in pišimo $n = 2k + d, k \geq 1, d \geq 0$.

Zapišimo še preprost predpis za barvanje grafa $K(2k + d, k)$, pri katerem uporabimo $d + 2$ barv. Za števila i iz $\{1, 2, \ldots, d + 1\}$ naj množica V_i sestoji iz vseh k-elementnih množic, ki imajo i za najmanjši element. Preostale k-elementne množice so vsebovane v množici $\{d + 2, d + 3, \ldots, 2k + d\}$, katere moč je le $2k - 1$. Sledi, da imajo te množice neprazen presek in lahko zanje uporabimo barvo $d + 2$.

Tako smo dobili $\chi(K(2k + d, k)) \leq d + 2$. Kneser je postavil domnevo, da je $d + 2$ kromatično število Kneserjevega grafa $K(2k + d, k)$.

2 Kneserjeva domneva

Cilj tega seminarja je dokazati naslednji izrek:

Izrek 1 (Kneser) *Za kromatično število Kneserjevega grafa velja*

$$\chi(K(2k + d, k)) = d + 2.$$

Preformulirajmo ta izrek v obliko problema obstoja na sledeč način:

Če družino podmnožic s k elementi množice $\{1, 2, \ldots, 2k + d\}$ razdelimo na $d + 1$ razredov, $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_{d+1}$, potem obstaja i, da V_i vsebuje par k-elementnih disjunktnih množic A in B.

Tako smo prišli do splošnejše različice izreka. Ta nam, še preden se poglobimo v sam dokaz, nudi drugačen pogled na zastavljen problem, saj ne omenja grafov. László Lovász je uvidel, da bistvo problema tiči v slavnem izreku o d-dimenzionalni enotski sferi S^d v $\mathbb{R}^d$, $S^d = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$. Zapišimo še ta izrek.

Izrek 2 (Borsuk-Ulam) *Za vsako zvezno preslikavo $f : S^d \to \mathbb{R}^d$, z d-sfere v d-prostor, obstajata antipodni točki x^* in $-x^*$, ki ju f slika v isto točko, torej $f(x^*) = f(-x^*)$.*

Dokaz tega izreka lahko bralec najde v knjigi "Using the Borsuk-Ulam theorem" matematika Jirija Matouška, mi pa se bomo posvetili njegovi uporabi pri dokazu izreka Lyusternika in Shnirel'mana.

Izrek 3 (Lyusternik-Shnirel'man) *Če je d-sfera S^d pokrita z $d+1$ množicami,*

$$S^d = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_d \cup U_{d+1},$$

tako, da so vse izmed prvih d množic $U_1, U_2, \ldots, U_d$ bodisi odprte bodisi zaprte, potem ena izmed $d+1$ množic vsebuje par antipodnih točk x^* in $-x^*$.

Dokaz s protislovjem in uporabo Borsuk-Ulamovega izreka:

Naj bo pokritje $S^d = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_d \cup U_{d+1}$ dano, kot je zapisano v izreku. Predpostavimo, da noben izmed U_i ne vsebuje dveh antipodnih točk. Definirajmo preslikavo $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ na sledeč način:

$$f(x) := (d(x, U_1), d(x, U_2), \ldots, d(x, U_d)).$$

Tu $d(x, U_i)$ označuje razdaljo med točko x in množico U_i.

Ker je to zvezna funkcija na x, je tudi f zvezna. Torej lahko uporabimo Borsuk-Ulamov izrek, ki nam pove, da na domeni f, torej na S^d, obstajata antipodni točki x^* in $-x^*$ z lastnostjo $f(x^*) = f(-x^*)$. Ker po predpostavki U_{d+1} ne vsebuje antipodnih točk, sklepamo, da je vsaj en izmed x^* in $-x^*$ vsebovan v eni izmed množic U_i, recimo v U_k za $k \leq d$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je to x^*, torej $x^* \in U_k$. To pomeni, da je $d(x^*, U_k) = 0$, ključno pa je, da je zaradi lastnosti $f(x^*) = f(-x^*)$ tudi $d(-x^*, U_k) = 0$.

Obravnavajmo najprej primer, ko je U_k zaprt. Potem iz $d(-x^*, U_k) = 0$ sledi, da je $-x^* \in U_k$, kar pa je protislovje s predpostavko, da noben izmed U_i ne vsebuje para antipodnih točk.

Če je U_k odprt, potem iz $d(-x^*, U_k) = 0$ sledi, da $-x^*$ leži v zaprtju U_k, torej v $\overline{U_k}$. Ta množica pa je vsebovana v $S^d \backslash (-U_k)$, $-U_k = \{-x; x \in U_k\}$. Množica $S^d \backslash (-U_k)$ je namreč zaprta in vsebuje U_k, pri tem smo upoštevali predpostavko, da U_k ne vsebuje antipodnih točk. Ampak, ker je zaprta in vsebuje U_k, vsebuje tudi $\overline{U_k}$. To pomeni, da $-x^*$ leži v $S^d \backslash (-U_k)$, torej ne more ležati v $-U_k$. Ker pa smo privzeli, da $x^* \in U_k$, smo prišli do protislovja. $\square$

V svojem dokazu iz leta 1978 je Imre Bárány uporabil še Galeov izrek o obstoju določene postavitve točk na sfero S^d. Bárány je svoj dokaz objavil nekaj tednov za tem, ko je László Lovász prvi dokazal Kneserjevo domnevo s pomočjo Borsuk-Ulamovega dokaza.

Izrek 4 (Gale) *Obstaja taka postavitev $2k+d$ točk na d-dimenzionalno sfero S^d, da vsaka odprta polsfera vsebuje vsaj k izmed teh točk.*

Leta 2002 je dodiplomski študent Joshua Greene nadalje poenostavil Bárányjev dokaz. Ugotovil je namreč, da zadošča, če so točke iz izreka v splošnem položaju na sferi.

Definicija 4 *Točke iz množice $\{1, 2, \ldots, 2k + d\}$ so v* ***splošnem položaju*** *na sferi S^{d+1}, če nobenih $d + 2$ točk iz omenjene množice ne leži na hiperravnini skozi središče sfere.*

Dokaz Kneserjeve domneve:

Vzemimo množico $2k + d$ točk v splošnem položaju na sferi S^{d+1}. Naj bo $V(n, k)$ množica vseh k-elementnih podmnožic začetne množice, razdelimo jo na $d + 1$ razredov, $V(n, k) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_{d+1}$. Naš cilj je najti par disjunktnih k-elementnih množic A in B, ki pripadata istemu razredu V_i.

Za $i = 1, 2, \ldots, d+1$ definirajmo $O_i = \{x \in S^{d+1}$; odprta polsfera H_x z vrhom x vsebuje k-elen

Vsaka množica O_i je odprta. Za vsak $x \in O_i$ namreč obstaja neka odprta okolica, za vsak element y iz te okolice pa še vedno velja, da polsfera, katere vrh je y, vsebuje istih k-elementov kot polsfera, katere vrh je x. To sledi iz dejstva, da smo v definiciji množic O_i uporabili *odprte* polsfere.

Odprte množice O_i in zaprta množica $C = S^{d+1} \backslash (O_1 \cup \ldots \cup O_{d+1}$ tvorijo pokritje S^{d+1}. To pokritje zadošča pogoju iz izreka Lyusternik-Shnirel'mana, zato vemo, da ena izmed množic O_i vsebuje antipodni točki x^* in $-x^*$.

Recimo, da je to množica C. Potem po definiciji množic O_i polsferi H_{x^*} in H_{-x^*} vsebujeta manj kot k točk. To je res, saj unija množic O_i vsebuje *vse* k-elementne podmnožice začetne množice, C pa je komplement te unije.

Literatura

[1] M. Aigner in G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 2. izdaja, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2001.