Kromatično število Kneserjevih grafov

Žan Hafner Petrovski

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

12. maj 2017

Definicije

Definicija

Graf $K(n,k)$, $n \geq k \geq 1$ *in* $n, k \in \mathbb{N}$, *imenujemo Kneserjev, če je množica vozlišč* $V(n,k)$ *družina vseh* k*-elementnih podmnožic množice* $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.*

Definicije

Definicija

Graf $K(n, k)$, $n \geq k \geq 1$ *in* $n, k \in \mathbb{N}$, *imenujemo Kneserjev, če je množica vozlišč* $V(n, k)$ *družina vseh* k*-elementnih podmnožic množice* $\{1, 2, \dots, n\}$. *Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.*

Definicija

Preslikavo $c : V \to \{1, \dots, m\}$, *ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo barvanje vozlišč grafa. Barvanje vozlišč je pravilno, če sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.*

Definicije

Definicija

Graf $K(n,k)$, $n \geq k \geq 1$ *in* $n,k \in \mathbb{N}$, *imenujemo Kneserjev, če je množica vozlišč* $V(n,k)$ *družina vseh* k*-elementnih podmnožic množice* $\{1,2,\ldots,n\}$. *Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.*

Definicija

Preslikavo $c : V \rightarrow \{1,\ldots,m\}$, *ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo barvanje vozlišč grafa. Barvanje vozlišč je pravilno, če sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.*

Definicija

Najmanjše naravno število m, *za katero obstaja pravilno barvanje vozlišč grafa* G *z* m *barvami, imenujemo kromatično število. Označimo ga s* $\chi(G)$.

Kneserjeva domneva

Trditev

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(2k+d,k)$ lahko pobarvamo z $d+2$ barvama.

Kneserjeva domneva

Trditev

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(2k+d,k)$ *lahko pobarvamo z* $d+2$ *barvama.*

Izrek (Kneser)

Za kromatično število Kneserjevega grafa velja

$$\chi(K(2k+d,k)) = d+2.$$

Kneserjeva domneva

Trditev

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(2k+d,k)$ lahko pobarvamo z $d+2$ barvama.

Izrek (Kneser)

Za kromatično število Kneserjevega grafa velja

$$\chi(K(2k+d,k)) = d+2.$$

Izrek (Ekvivalentno)

Če družino k-elementnih podmnožic množice $\{1,2,\ldots,2k+d\}$ razdelimo na $d+1$ razredov, $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_{d+1}$, potem obstaja i tako, da V_i vsebuje par disjunktnih k-elementnih množic A in B.

Potrebovali bomo:

Izrek (Borsuk-Ulam)

Za vsako zvezno preslikavo $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ d-sfere v d-prostor, obstajata antipodni točki x^* in $-x^*$, ki ju f slika v isto točko, torej $f(x^*) = f(-x^*)$.

Potrebovali bomo:

Izrek (Borsuk-Ulam)

Za vsako zvezno preslikavo $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ d-sfere v d-prostor, obstajata antipodni točki x^* in $-x^*$, ki ju f slika v isto točko, torej $f(x^*) = f(-x^*)$.

Izrek (Lyusternik-Shnirel'man)

Če je d-sfera S^d pokrita z $d+1$ množicami,

$$S^d = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_d \cup U_{d+1},$$

tako, da je vsaka izmed prvih d množic $U_1, U_2, \ldots, U_d$ bodisi odprta bodisi zaprta, potem ena izmed $d+1$ množic vsebuje par antipodnih točk x^* in $-x^*$.

Galeov izrek in splošna lega točk na sferi

Izrek (Gale)

Za vsak $k \geq 0$ in vsak $d \geq 1$ obstaja taka postavitev $2k + d$ točk na d-dimenzionalno sfero S^d, da vsaka odprta polsfera vsebuje vsaj k izmed teh točk.

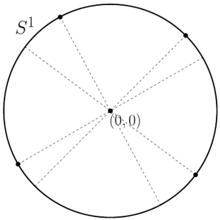
Galeov izrek in splošna lega točk na sferi

Izrek (Gale)

Za vsak $k \geq 0$ in vsak $d \geq 1$ obstaja taka postavitev $2k + d$ točk na d-dimenzionalno sfero S^d, da vsaka odprta polsfera vsebuje vsaj k izmed teh točk.

Definicija

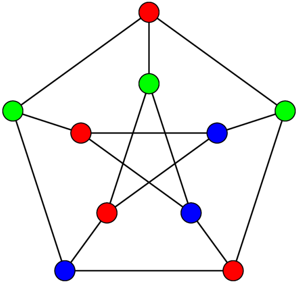
*Točke iz množice $\{1, 2, \ldots, 2k + d\}$ so v **splošni legi** na sferi $S^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+2}$, če nobenih $d + 2$ točk iz omenjene množice ne leži na hiperravnini skozi središče sfere.*



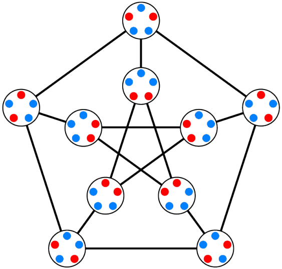
Slika: Primer za $d = 0$, postavitev 4 točk sfero S^1

Zgled

Petersenov graf oziroma $K(5, 2)$.



Slika: Primer barvanja s 3 barvami



Slika: Prikaz povezav med disjunktnimi množicami