

Kromatično število Kneserjevih grafov

Žan Hafner Petrovski

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

12. maj 2017

Definicija

Graf $K(n, k)$, $n \geq k \geq 1$ in $n, k \in \mathbb{N}$, imenujemo **Kneserjev**, če je množica vozlišč $V(n, k)$ družina vseh k -elementnih podmnožic množice $\{1, 2, \dots, n\}$. Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.

Definicija

Graf $K(n, k)$, $n \geq k \geq 1$ in $n, k \in \mathbb{N}$, imenujemo **Kneserjev**, če je množica vozlišč $V(n, k)$ družina vseh k -elementnih podmnožic množice $\{1, 2, \dots, n\}$. Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.

Definicija

Preslikavo $c : V \rightarrow \{1, \dots, m\}$, ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo **barvanje vozlišč grafa**. Barvanje vozlišč je pravilno, če sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.

Definicija

Graf $K(n, k)$, $n \geq k \geq 1$ in $n, k \in \mathbb{N}$, imenujemo **Kneserjev**, če je množica vozlišč $V(n, k)$ družina vseh k -elementnih podmnožic množice $\{1, 2, \dots, n\}$. Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.

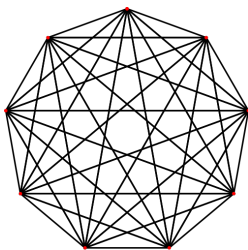
Definicija

Preslikavo $c : V \rightarrow \{1, \dots, m\}$, ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo **barvanje vozlišč grafa**. Barvanje vozlišč je pravilno, če sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.

Definicija

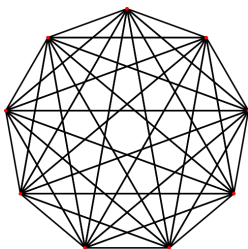
Najmanjše naravno število m , za katero obstaja pravilno barvanje vozlišč grafa G z m barvami, imenujemo **kromatično število**. Označimo ga s $\chi(G)$.

- 1 $K(n, 1)$ je poln graf za $n \in \mathbb{N}$



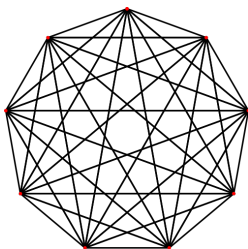
Slika: Poln graf $K_9 = K(9, 1)$

- 1 $K(n, 1)$ je poln graf za $n \in \mathbb{N}$
- 2 $K(2n, n)$ je enak $\frac{1}{2} \binom{2n}{n}$ kopijam potnega grafa P_2



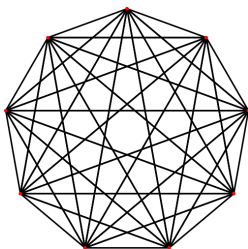
Slika: Poln graf $K_9 = K(9, 1)$

- 1 $K(n, 1)$ je poln graf za $n \in \mathbb{N}$
- 2 $K(2n, n)$ je enak $\frac{1}{2} \binom{2n}{n}$ kopijam potnega grafa P_2
- 3 število vozlišč $|V(n, k)| = \binom{n}{k}$



Slika: Poln graf $K_9 = K(9, 1)$

- ❶ $K(n, 1)$ je poln graf za $n \in \mathbb{N}$
- ❷ $K(2n, n)$ je enak $\frac{1}{2} \binom{2n}{n}$ kopijam potnega grafa P_2
- ❸ število vozlišč $|V(n, k)| = \binom{n}{k}$
- ❹ $K(n, k)$ je regularen stopnje $\binom{n-k}{k}$



Slika: Poln graf $K_9 = K(9, 1)$

Trditev

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(2k + d, k)$ lahko pobarvamo z $d + 2$ barvama.

Trditev

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(2k + d, k)$ lahko pobarvamo z $d + 2$ barvama.

Izrek (Kneser)

Za kromatično število Kneserjevega grafa velja

$$\chi(K(2k + d, k)) = d + 2.$$

Trditev

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(2k + d, k)$ lahko pobarvamo z $d + 2$ barvama.

Izrek (Kneser)

Za kromatično število Kneserjevega grafa velja

$$\chi(K(2k + d, k)) = d + 2.$$

Izrek (Ekvivalentno)

Če družino k -elementnih podmnožic množice $\{1, 2, \dots, 2k + d\}$ razdelimo na $d + 1$ razredov, $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_{d+1}$, potem obstaja i tako, da V_i vsebuje par disjunktnih k -elementnih množic A in B .

Izrek (Borsuk-Ulam)

Za vsako zvezno preslikavo $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ d -sfere v d -prostor, obstajata antipodni točki x^ in $-x^*$, ki ju f slika v isto točko, torej $f(x^*) = f(-x^*)$.*

Izrek (Borsuk-Ulam)

Za vsako zvezno preslikavo $f : S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ d -sfere v d -prostor, obstajata antipodni točki x^ in $-x^*$, ki ju f slika v isto točko, torej $f(x^*) = f(-x^*)$.*

Izrek (Lyusternik-Shnirel'man)

Če je d -sfera S^d pokrita z $d + 1$ množicami,

$$S^d = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_d \cup U_{d+1},$$

tako, da je vsaka izmed prvih d množic U_1, U_2, \dots, U_d bodisi odprta bodisi zaprta, potem ena izmed $d + 1$ množic vsebuje par antipodnih točk x^ in $-x^*$.*

Galeov izrek in splošna lega točk na sferi

Izrek (Gale)

Za vsak $d \geq 0$ in vsak $d \geq 1$ obstaja taka postavitve $2k + d$ točk na d -dimenzionalno sfero S^d , da vsaka odprta polsfera vsebuje vsaj k izmed teh točk.

Galeov izrek in splošna lega točk na sferi

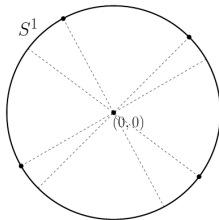
Izrek (Gale)

Za vsak $d \geq 0$ in vsak $d \geq 1$ obstaja taka postavitve $2k + d$ točk na d -dimenzionalno sfero S^d , da vsaka odprta polsfera vsebuje vsaj k izmed teh točk.

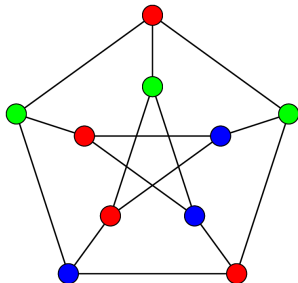
Definicija

*Točke iz množice $\{1, 2, \dots, 2k + d\}$ so v **splošni legi** na sferi $S^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+2}$, če nobenih $d + 2$ točk iz omenjene množice ne leži na hiperravnini skozi središče sfere.*

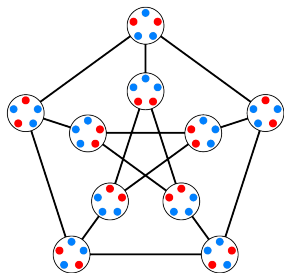
Slika: Primer za $d = 0$, postavitve 4 točk sfero S^1



Petersenov graf oziroma $K(5, 2)$.



Slika: Primer barvanja s 3 barvami



Slika: Prikaz povezav med disjunktними množicami