Kromatično število Kneserjevih grafov

Žan Hafner Petrovski

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

12. maj 2017

Definicije

Definicija

Graf $K(n,k)$, $n \geq k \geq 1$ *in* $n,k \in \mathbb{N}$, *imenujemo Kneserjev, če je množica vozlišč* $V(n,k)$ *družina vseh* k*-elementnih podmnožic množice* $\{1,2,\ldots,n\}$. *Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.*

Definicije

Definicija

Graf $K(n,k)$, $n \geq k \geq 1$ in $n,k \in \mathbb{N}$, imenujemo Kneserjev, če je množica vozlišč $V(n,k)$ družina vseh k-elementnih podmnožic množice $\{1,2,\ldots,n\}$. Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.

Definicija

Preslikavo $c : V \to \{1,\ldots,m\}$, ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo barvanje vozlišč grafa. Barvanje vozlišč je pravilno, če sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.

Definicije

Definicija

Graf $K(n,k)$, $n \geq k \geq 1$ in $n,k \in \mathbb{N}$, imenujemo Kneserjev, če je množica vozlišč $V(n,k)$ družina vseh k-elementnih podmnožic množice $\{1,2,\ldots,n\}$. Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.

Definicija

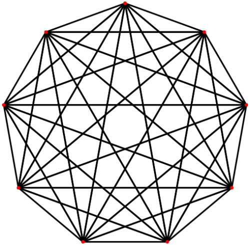
Preslikavo $c : V \to \{1,\ldots,m\}$, ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo barvanje vozlišč grafa. Barvanje vozlišč je pravilno, če sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.

Definicija

Najmanjše naravno število m, za katero obstaja pravilno barvanje vozlišč grafa G z m barvami, imenujemo ***kromatično število****. Označimo ga s $\chi(G)$.*

Lastnosti

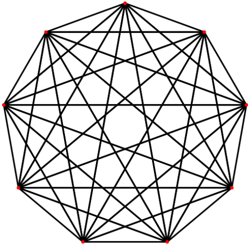
1. $K(n,1)$ je poln graf za $n \in \mathbb{N}$



Slika: Poln graf K_9

Lastnosti

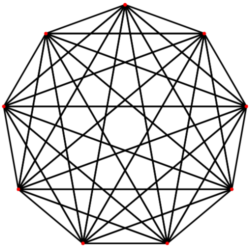
1. $K(n,1)$ je poln graf za $n \in \mathbb{N}$
2. $K(2n,n)$ je enak $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ kopijam potnega grafa P_2



Slika: Poln graf K_9

Lastnosti

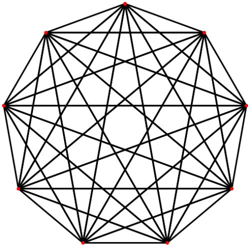
1. $K(n, 1)$ je poln graf za $n \in \mathbb{N}$
2. $K(2n, n)$ je enak $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ kopijam potnega grafa P_2
3. število vozlišč $|V(n, k)| = \binom{n}{k}$



Slika: Poln graf K_9

Lastnosti

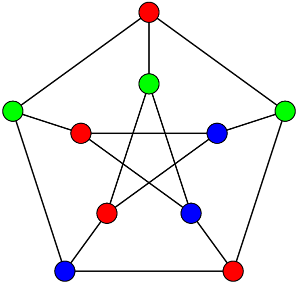
1. $K(n,1)$ je poln graf za $n \in \mathbb{N}$
2. $K(2n,n)$ je enak $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$ kopijam potnega grafa P_2
3. število vozlišč $|V(n,k)| = \binom{n}{k}$
4. $K(n,k)$ je regularen stopnje $\binom{n-k}{k}$



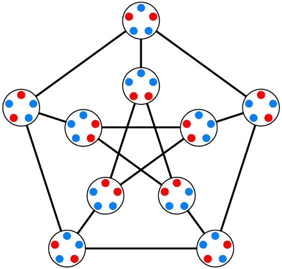
Slika: Poln graf K_9

Zgled

Petersenov graf oziroma $K(5,2)$.



Slika: Primer barvanja s 3 barvami



Slika: Prikaz povezav med disjunktnimi množicami

Kneserjeva domneva

Trditev

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(2k+d,k)$ lahko pobarvamo z $d+2$ barvama.

Kneserjeva domneva

Trditev

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(2k+d,k)$ lahko pobarvamo z $d+2$ barvama.

Izrek (Kneser)

Za kromatično število Kneserjevega grafa velja

$$\chi(K(2k+d,k)) = d+2.$$

Kneserjeva domneva

Trditev

Vozlišča Kneserjevega grafa $K(2k+d,k)$ lahko pobarvamo z $d+2$ barvama.

Izrek (Kneser)

Za kromatično število Kneserjevega grafa velja

$$\chi(K(2k+d,k)) = d+2.$$

Izrek (Ekvivalentno)

Če družino k-elementnih podmnožic množice $\{1,2,\ldots,2k+d\}$ razdelimo na $d+1$ razredov, $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_{d+1}$, potem obstaja i tako, da V_i vsebuje par disjunktnih k-elementnih množic A in B.

Potrebovali bomo:

Izrek (Borsuk-Ulam)

Za vsako zvezno preslikavo $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ d-sfere v d-prostor, obstajata antipodni točki x^* in $-x^*$, ki ju f slika v isto točko, torej $f(x^*) = f(-x^*)$.

Potrebovali bomo:

Izrek (Borsuk-Ulam)

Za vsako zvezno preslikavo $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ d-sfere v d-prostor, obstajata antipodni točki x^* in $-x^*$, ki ju f slika v isto točko, torej $f(x^*) = f(-x^*)$.

Izrek (Lyusternik-Shnirel'man)

Če je d-sfera S^d pokrita z $d+1$ množicami,

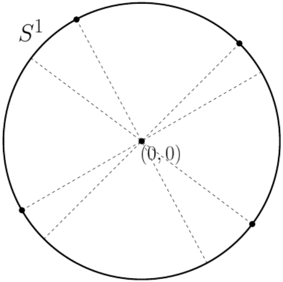
$$S^d = U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_d \cup U_{d+1},$$

tako, da je vsaka izmed prvih d množic $U_1, U_2, \ldots, U_d$ bodisi odprta bodisi zaprta, potem ena izmed $d+1$ množic vsebuje par antipodnih točk x^* in $-x^*$.

Splošna lega točk na sferi

Definicija

Točke iz množice $\{1, 2, \ldots, 2k + d\}$ *so v **splošni legi** na sferi* $S^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+2}$*, če nobenih* $d + 2$ *točk iz omenjene množice ne leži na hiperravnini skozi središče sfere.*



Slika: Primer za $d = 0$, postavitev 4 točk sfero S^1