Grafovje in Številje

Prahmed Kavči

30. februar 2718

1 Na Marsu

V teoriji grafov poznamo mnogo različnih tipov grafov. Razlikujemo jih glede na njihove specifične lastnosti. V tem seminarju se bomo ukvarjali s *Kneserjevimi grafi* oziroma podrobneje, s *kromatičnim številom* le-teh. Najprej podajmo nekaj glavnih definicij.

Definicija 1 Graf G *je urejen par* (V, E)*, kjer je* V *množica vseh vozlišč,* E *pa množica vseh povezav med temi vozlišči.*

Definicija 2 *Graf* $K(n, k)$*,* $n \geq k \geq 1$ *in* $n, k \in \mathbb{N}$*, imenujemo* ***Kneserjev****, če je množica vozlišč* $V(n, k)$ *družina vseh* k*-elementnih podmnožic množice* $\{1, 2, \ldots, n\}$*. Dve vozlišči sta povezani natanko takrat, ko sta disjunktni.*

Povejmo še, da za število vozlišč velja $|V(n, k)| = \binom{n}{k}$. V primeru, ko je $n < 2k$, imata vsaki dve k-elementni množici neprazen presek. Tak Kneserjev graf nima nobenih povezav, zato privzemimo, da velja $n \geq 2k$.

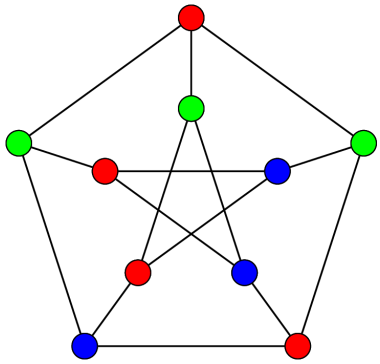
Definicija 3 *Najmanjše število* m*, ki zadošča barvanju vozlišč grafa* G*, imenujemo* ***Kromatično število****. Označimo ga s* $\chi(K(n, k))$*.*

Definicija 4 *Preslikavo* $c : V \to \{1, \ldots, m\}$*, ki slika vozlišča grafa v množico barv, imenujemo* ***barvanje****. Ta preslikava zadošča pogoju, da sta vsaki dve sosednji vozlišči pobarvani z različnima barvama.*

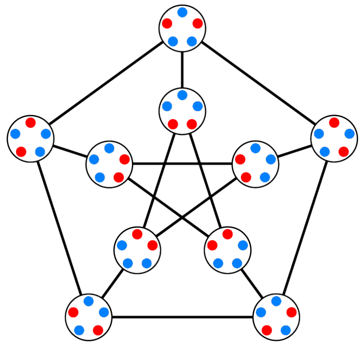
Kromatično število grafa G je torej najmanjše število barv, s katerimi lahko pobarvamo vozlišča grafa tako, da se nobeni dve sosednji vozlišči ne slikata v isto barvo. Množico vozlišč V bi radi predstavili kot disjunktno unijo barvnih razredov $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots \sqcup V_{\chi(G)}$, teh pa želimo, da je najmanj.

Oglejmo si enega najznamenitejših grafov vseh časov.

Zgled 1 *Kneserjev graf $K(5,2)$ je zelo znan primer, imenujemo ga Petersenov graf.*



Slika 1: Primer barvanja tega grafa z z dvema lepima barvama in svetlo zeleno



Slika 2: Prikaz povezav med disjunktnimi množicami

*Ta graf zelo pogosto pride prav pri dokazovanju obstoja nekega tipa grafa ali pa kot protiprimer. Imenuje se po **Juliusu Petersenu**, ki ga je skonstruiral za najmanjši kubični graf, to je, graf, ki je regularen stopnje* 3*, brez mostov in brez barvanja povezav s tremi barvami. Ima* 10 *vozlišč in* 15 *povezav. Če je kdo besedilo bral, ga morda zanima, kaj pomeni, da je graf regularen. Ta podatek lahko zavzet bralec najde na* `https://sl.wikipedia.org/wiki/Regularni_graf`.

---

konec Marsa

2 Po Marsu

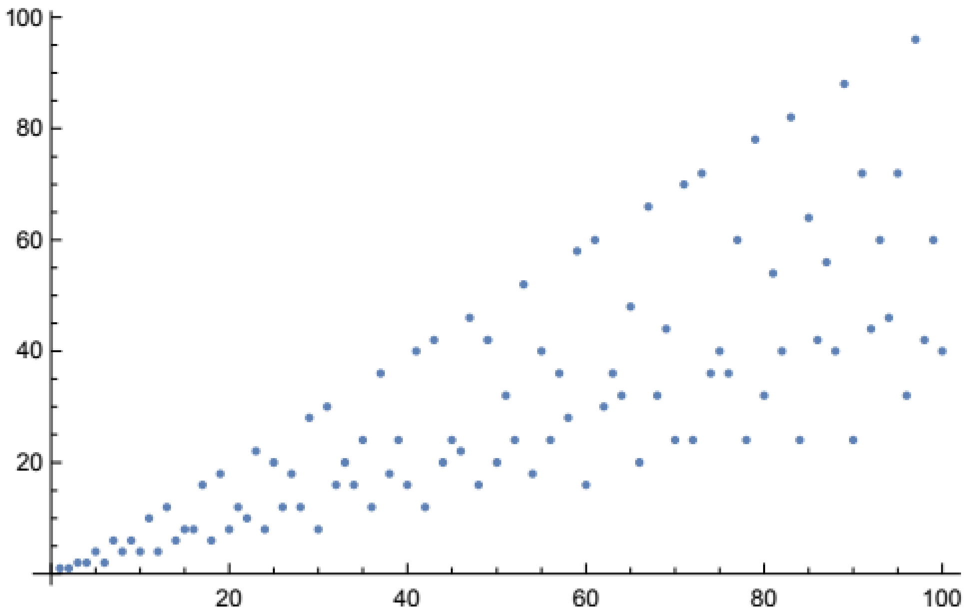
Po padcu z Marsa nas je ujel Euler. Kot naš rešitelj si je privoščil predstaviti nam svojo funkcijo iz teorije števil.

Definicija 5 *Za vse $n \in \mathbb{N}$ s $\varphi(n)$ označimo število celih števil iz množice $\{1, 2, ..., n\}$, ki so tuja številu n. Preslikavo $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ imenujemo Eulerjeva funkcija.*

Tabela prikazuje izračun prvih šest vrednosti funkcije $\varphi(n)$. V n-ti vrstici so krepko natisnjena števila med 1 in n, ki so tuja številu n. Slika pa grafično prikazuje prvih 100 vrednosti funkcije $\varphi(n)$.

n	$\{1, 2, \ldots, n\}$	$\varphi(n)$
1	$\{\mathbf{1}\}$	1
2	$\{\mathbf{1}, 2\}$	1
3	$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3\}$	2
4	$\{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4\}$	2
5	$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 5\}$	4
6	$\{\mathbf{1}, 2, 3, 4, \mathbf{5}, 6\}$	2

Tabela 1: Vrednosti funkcije $\varphi(n)$ za $n = 1, 2, \ldots, 6$



Slika 3: Vrednosti funkcije $\varphi(n)$ za $n = 1, 2, \ldots, 100$

Zapišimo nekaj lastnosti te funkcije:

- $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$
- $\varphi(n) = n\prod_{p|n}(1 - \frac{1}{p})$
- $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

Dokažimo, da zadnja lastnost zagotovo velja za $n = 6$.
*D*okaz:

$$\begin{aligned}\sum_{d|6} \varphi(d) &= \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6)\\ &= 1 + 1 + 2 + 2\\ &= 6\end{aligned}$$

$\square$

Brez konteksta zapišimo še eno najlepših identitet, Eulerjevo seveda:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$