

# Funkcije več spremenljivk

Karmen Zupančič, Žiga Flajs, Jakob Svetina

Mentor: Žan Hafner Petrovski



## Povzetek

V članku spoznamo funkcije več spremenljivk in se previdno dotaknemo pomembnih tem iz analize. Začnemo z grafi funkcij dveh spremenljivk, potem pa se osredotočimo na polarne in sferične koordinate, s pomočjo katerih pridemo do sicer že znanih rezultatov, ampak na za nas nov in širše uporaben način. Zaključimo s posebno funkcijo, ki predstavlja razširitev funkcije fakulteta, na pozitivna realna števila.

## 1 Uvod

Vsak naj bi poznal funkcije ene spremenljivke, saj se jih obravnava že v osnovni šoli. Kdor potem nadaljuje šolanje, se z njimi še bolje spozna, redki pa se spoznajo s funkcijami več spremenljivk. Grafi takih funkcij so dosti težje predstavljeni kot grafi funkcij ene spremenljivke, ki jih lahko dokaj enostavno upodobimo na ravnini. Čim več spremenljivk nastopa v prostoru iz katerega slikamo, tem bolj zapleteni so grafi funkcij, zapletenost pa v tem primeru vodi do večje svobode in nam odpira vrata do bolj abstraktnih idej.

## 2 Funkcije dveh spremenljivk

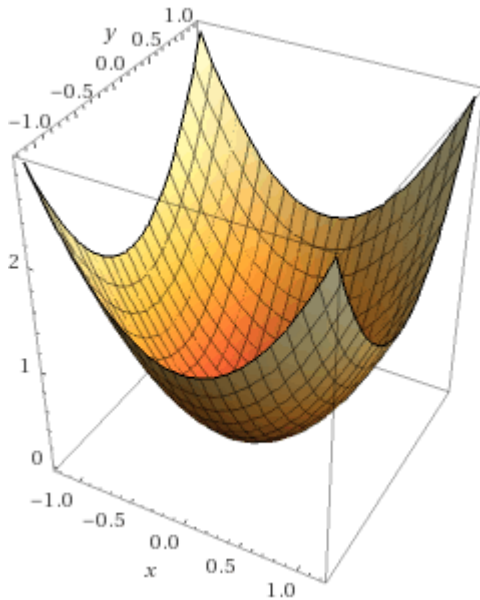
**Definicija 1.** *Funkcija dveh neodvisnih spremenljivk je predpis, ki vsakemu paru  $(x, y)$  iz podmnožice ravnine predpiše natančno določeno realno število. Velja torej:*

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f : (x, y) \mapsto z = f(x, y).$$

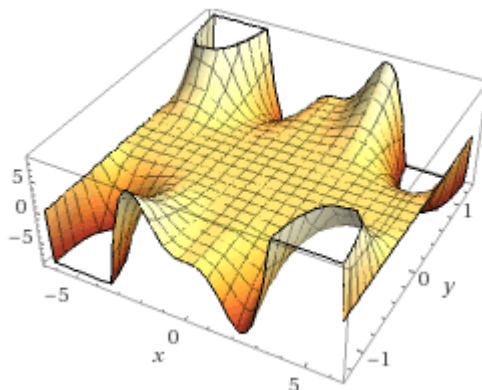
Realno število, ki je prirejeno spremenljivkam, v trirazsežnem prostoru pomeni višino nad točko  $(x, y)$  v ravnini. Upodabljali bomo le funkcije z do dvema spremenljivkama, za funkcije treh ali večih spremenljivk pa je upodabljanje njihovega grafa na ljudem predstavljen način težje. Za razliko od funkcij ene spremenljivke upodabljamo grafe lepih funkcij dveh spremenljivk kot ploskev v  $\mathbb{R}^3$ , ki ima enačbo  $z - f(x, y) = 0$ . Spoznali smo nekaj grafov preprostih funkcij, ogledali pa smo si tudi primere zahtevnejših funkcij dveh spremenljivk.

**Zgled 1.** *Funkcija  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Graf funkcije je dvorazsežna ploskev v trirazsežnem prostoru.*



Slika 1: Graf funkcije  $f(x, y) = x^2 + y^2$

**Zgled 2.** Primer zahtevnejše funkcije  $g(x, y) = x^2 \sin(x) y^3$ .



Slika 2: Graf funkcije  $g(x, y) = x^2 \sin(x) y^3$

### 3 Volumen krogle

Z različnimi metodami bomo izračunali volumen krogle. Začnimo s to, ki smo jo spoznali že v gimnaziji, kasneje pa bomo do iste formule prišli še na drug način.

**Zgled 3.** Izračun prostornine vrtenine, ki nastane z vrtenjem grafa funkcije  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Graf te funkcije nad zaprtim intervalom  $[-1, 1]$  je ravno zgornja polovica enotstke krožnice, zato je rotacijsko telo enotska sfera, integral pa predstavlja volumen krogle, ki jo označimo s  $K$ .

Uporabimo formulo  $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$  in rezultat hitro sledi:

$$\begin{aligned} V(K) &= \pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}^2 dx \\ &= \pi \left( x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \pi \left( 1 - \frac{1}{3} \right) - \pi \left( -1 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi. \end{aligned}$$

### 4 Izrek o zamenjavi spremenljivk v integralu

Najprej se bomo seznanili s primerom zamenjave ene spremenljivke, potem pa bomo spoznali še zamenjavo dveh in treh spremenljivk v integralu.

Naj bo  $f$  zvezna na  $[a, b]$  in  $\phi$  zvezno odvedljiva funkcija, ki interval  $[\alpha, \beta]$  preslika bijektivno na interval  $[a, b]$  tako, da je  $\phi(\alpha) = a$  in  $\phi(\beta) = b$ . Tedaj je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Na podoben način lahko zamenjamo več spremenljivk.

**Izrek 1.** Naj bo  $U \subset \mathbb{R}^n$  odprta množica z volumnom različnim od 0 in  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  dovolj lepa preslikava. Naj bo  $|\det Dg(t)| \neq 0$  za vse  $t \in U$ . Za vsako integrabilno funkcijo  $f : g(U) \rightarrow \mathbb{R}$  velja:

$$\int_{g(U)} f(x)dV = \int_U f(g(t))|\det Dg(t)|dV$$

## 5 Računanje determinante reda 2 in 3

Oglejmo si, kako izračunati determinanto reda 2 in 3. Navedene so eksplisitne formule za njihov izračun:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

## 6 Polarne koordinate

Polarni koordinatni sistem je ravninski koordinatni sistem, ki je osnova za sferični koordinatni sistem. Točko v polarnem koordinatnem sistemu podamo z dvema polarnima koordinatama:

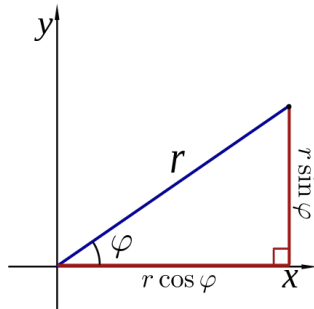
- $r$  - razdalja od točke do koordinatnega izhodišča
- $\phi$  - kot med  $x$ -osjo in smerjo krajevnega vektorja točke

Da iz polarnih koordinat dobimo koordinati kartezičnega koordinatnega sistema  $x$  in  $y$ , uporabimo preslikavo  $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  s sledečim predpisom:

$$g(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

Kartezični koordinati torej z  $r$  in  $\phi$  izrazimo takole:

- $x = r \cos \phi$
- $y = r \sin \phi$



Slika 3: Grafični prikaz izražave kartezičnih koordinat s polarnimi.

## 7 Sferične koordinate

Sferični ali krogelni koordinatni sistem je sistem koordinat v trirazsežnem prostoru. Za določanje lege točke v prostoru vedno potrebujemo tri koordinate. Pri sfernem koordinatnem sistemu uporabljamo sferične koordinate:

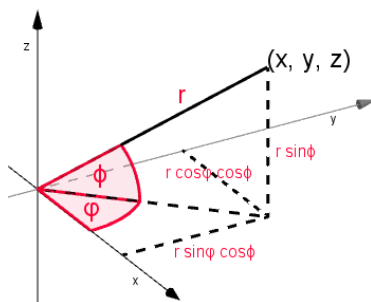
- $r$  - razdalja od točke do koordinatnega izhodišča (dolžina krajevnega vektorja  $\vec{r}$ )
- $\phi$  - kot med  $x$ -osjo in smerjo pravokotne projekcije krajevnega vektorja  $\vec{r}$  na  $xy$ -ravnino
- $\theta$  - kot med  $xy$ -ravnino in vektorjem  $\vec{r}$

Da iz polarnih koordinat dobimo koordinate kartezičnega koordinatnega sistema  $x$ ,  $y$  in  $z$ , uporabimo preslikavo  $g : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$  s predpisom:

$$g(r, \phi, \theta) = (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, r \sin \theta)$$

Dobimo koordinate:

- $x = r \cos \phi \cos \theta$
- $y = r \sin \phi \cos \theta$
- $z = r \sin \theta$



Slika 4: Grafični prikaz izražave kartezičnih koordinat s sferičnimi.

## 8 Parcialni odvod

Denimo, da je  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija dveh spremenljivk.

Parcialna odvoda po  $x$  in po  $y$  funkcije  $f$  v točki  $(a, b)$  definiramo (podobno kot odvod pri funkciji ene spremenljivke) kot limiti ustreznih parcialnih diferenčnih kvocientov (pri pogoju, da ti dve limiti obstajata):

$$f_x(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

$$f_y(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}$$

Parcialna odvoda torej izračunamo tako, da odvajamo funkcijo na  $x$  oziroma na  $y$  po znanih pravilih za odvajanje funkcij ene spremenljivke, pri čemer smatramo drugo spremenljivko za konstanto.

**Zgled 4.** Za funkcijo  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$  je  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y$  in  $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$ .

## 9 Jacobijeva matrika

Jacobijeva matrika preslikave  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  oziroma  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je matrika, ki jo sestavljajo parcialni odvodi prvega reda. Komponentne funkcije preslikave  $g$  slikajo iz domene  $g$  v  $\mathbb{R}$  in jih je toliko kot je dimenzija prostora v katerega slika  $g$ .

Če je prostor dvodimenzionalen, izgledajo tako:

$$g(x_1, x_2) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2))$$

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Če je prostor trodimenzionalen, pa izgledajo tako:

$$g(x_1, x_2, x_3) = (g_1(x_1, x_2, x_3), g_2(x_1, x_2, x_3), g_3(x_1, x_2, x_3))$$

$$g_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Matrika reda 2 ima obliko:

$$Jg(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Matrika reda 3 ima obliko:

$$Jg(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

## 10 Ploščina kroga in volumen krogle

**Naloga 1.** *S pomočjo polarnih koordinat in parcialnih odvodov izpelji formulo za računanje ploščine kroga.*

Najprej izračunamo parcialne odvode polarnih koordinat:

- $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \phi$
- $\frac{\partial x}{\partial \phi} = r(-\sin \phi)$
- $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \phi$
- $\frac{\partial y}{\partial \phi} = r \cos \phi$

Vstavimo jih v Jacobijevo matriko in izračunamo njeno determinanto.

$$\det(Jg)(r, \phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r$$

Dobimo determinanto diferenciala preslikave  $g$ , ki jo vstavimo v dvojni integral:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \int_0^R |\det Jg| \, dr \, d\phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^R d\phi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\phi \\
 &= \left. \frac{R^2}{2} \phi \right|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{R^2}{2} 2\pi \\
 &= \pi R^2
 \end{aligned}$$

Ugotovimo, da smo dobili formulo za računanje ploščine kroga:

$$S = \pi r^2.$$

**Naloga 2.** *S pomočjo sferičnih koordinat in parcialnih odvodov izpelji formulo za volumen krogle.*

Podobno kot prej izračunamo parcialne odvode in jih vpišemo v matriko, s katero izračunamo determinanto:

$$\begin{aligned}
 &\det(Jg)(r, \phi, \theta) = \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \cos \theta & -r \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \theta & r \cos \phi \cos \theta & -r \sin \phi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} = r^2 \cos \theta
 \end{aligned}$$

Determinanto vstavimo v trojni integral:



$$\begin{aligned}
\iiint_{x^2+y^2+z^2=R^2} 1dV &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R |\det Dg| dr d\phi d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cos \theta dr d\phi d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{r^3}{3} \Big|_0^R d\phi d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{R^3}{3} d\phi d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \phi \cos \theta \frac{R^3}{3} \Big|_0^{2\pi} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\pi R^3}{3} \cos \theta d\theta \\
&= \frac{2\pi R^3}{3} \sin \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 \frac{2\pi R^3}{3} \\
&= \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

Ugotovimo, da smo dobili formulo za računanje volumna krogle:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

## 11 Eulerjeva $\Gamma$ -funkcija

Pri delu s funkcijami z več spremenljivkami smo spoznali tudi funkcijo gama. Prvi je funkcijo zapisal Leonhard Euler leta 1729, ko je pisal pismo svojemu prijatelju matematiku. Odvisna je le od ene spremenljivke  $t$  in je preslikava:  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkcija je zanimiva prav zato, ker če v njo vstavimo celo pozitivno število  $n$ , potem lahko izračunamo fakulteto števila  $n - 1$ .

**Definicija 2.** *Funkcija gama je definirana kot:*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx; t > 0$$

**Izrek 2.** Za  $t \in (1, \infty)$  velja zveza:

$$\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1).$$

Če izrek uporabimo za  $\Gamma(t-1)$ , dobimo

$$\Gamma(t-1) = (t-1)\Gamma(t-2),$$

potem postopek ponovimo za  $\Gamma(t-2)$ . Na isti način nadaljujemo, dokler ne pridemo do  $\Gamma(0) = 1$  in sledi:

$$\Gamma(t) = (t-1)!.$$

*Dokaz izreka 2.* Do zapisanega smo prišli z integriranjem po načinu per partes. Ker se enačbe za per partes na začetku nismo spomnili, smo jo enostavno izpeljali iz pravila za odvajanje produkta funkcij.

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ (u \cdot v)' - u' \cdot v &= u \cdot v' \\ (u \cdot v)' - u' \cdot v &= u \cdot v' \quad \Big| \cdot \int_a^b \\ uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v &= \int_a^b uv' \end{aligned}$$

Uporabimo per partes na funkciji gama.

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx = x^{t-1} e^{-x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} x^{t-2} (t-1) dx \\ &= (t-1) \cdot \int_0^\infty e^{-x} x^{t-2} dx = (t-1)\Gamma(t-1), \end{aligned}$$

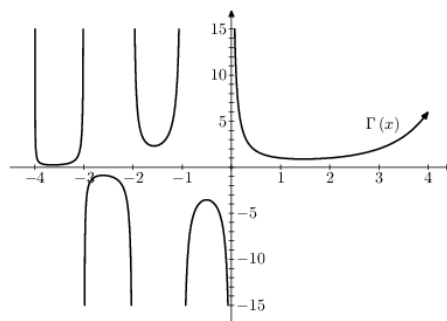
saj je  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{t-1}}{e^x} = 0$ . Pri integraciji per partes smo uvedli novi spremenljivki  $u$  in  $v$ , ki sta:

$$\begin{aligned} u &= x^{t-1} & dv &= e^{-x} dx \\ du &= (t-1)x^{t-2} dx & v &= -e^{-x} \end{aligned}$$

□

Izbrane vrednosti funkcije, pri katerih je spremenljivka  $t \in \mathbb{R}^+$  so zbrane v sledeči tabeli.

$t$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$\Gamma(t)$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2



Slika 5: Graf funkcije  $\Gamma(t)$

Ko se spremenljivka  $t$  bliža neskončnim vrednostim, gre tudi  $\Gamma(t)$  proti neskončnosti. Podobno se zgodi, ko se  $t$  bliža vrednosti 0:

- $\lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(t) = \infty$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma(t) = \infty$

Opisana funkcija nam je v pomoč pri izražanju nekaterih integralov. Mi smo naredili naslednji primer:

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{3}} e^{-3x} dx = \int_0^\infty \left(\frac{u}{3}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-u} \frac{du}{3} = \frac{1}{3^{\frac{4}{3}}} \int_0^\infty u^{\frac{4}{3}-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{3^{\frac{4}{3}}}$$

$$\begin{aligned} 3x &= u & dx &= \frac{du}{3} \\ x &= \frac{u}{3} & x^{\frac{1}{3}} &= \left(\frac{u}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$