Abstract

kk

1 Uvod

2 Funkcije dveh spemenljivk

Definicija 1. ***Funkcija dveh neodvisnih spremenljivk*** *je predpis, ki vsakemu paru (x, y) iz podmnožice ravnine predpiše natančno določeno realno število. Je preslikava $R^2 \to R$.*

$$f : (x, y) \Rightarrow z = f(x, y)$$

Realno število, ki je prirejeno spremenljivkam v trorazsežnem prostoru pomeni višino nad točko. Upodabljamo lahko le funkcije z do tremimi spremenljivkami, za sistem štirih ali večih spemenljivk pa je upodabljanje nemogoče. Za razliko od funkcij z eno spremenljivko upodabljamo funkcije dveh spremenljivk s ploskvijo, ki ima enačbo $u - f(x, y) = 0$. Spoznali smo nekaj preprostih funkcij, ogledali pa smo si tudi primere zahtevnejših funkcij dveh spremenljivk.

Zgled 1. *Funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$ Graf funkcije je dvorazsežni objekt v trorazsežnem prostoru.*

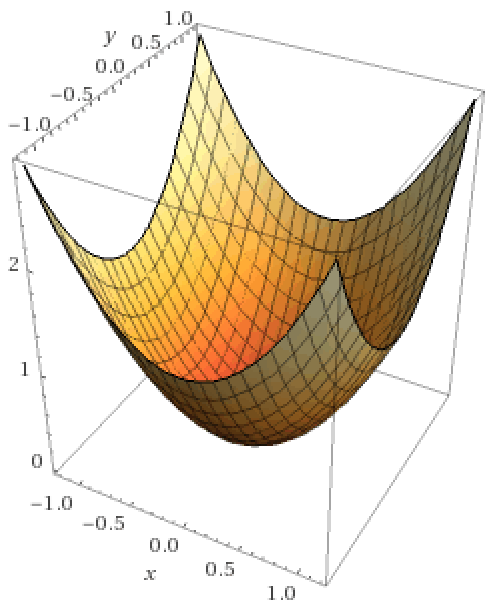

Figure 1: Graf funkcije f(x,y)

Zgled 2. *Primer zahtevnejše funkcije* $g(x, y) = x^2 sin(x) y^3$

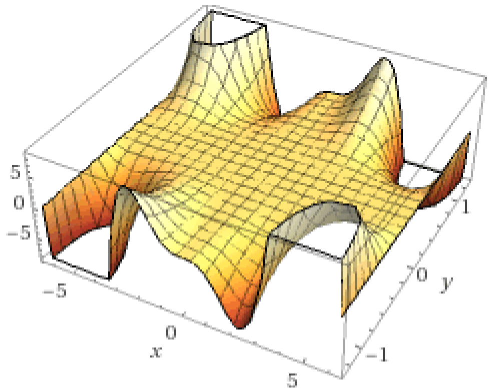

Figure 2: Graf funkcije g(x,y)

3 Volumen krogle

Izračunali smo tudi volumen krogle z različnimi metodami:

Zgled 3. *Izračun prostornine vrtenine, ki nastane z vrtenjem funkcije* $f(x) = \sqrt{(1 - x^2)}$.

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \sqrt{(1 - x^2)}^2 dx = \pi(x - \frac{x^3}{3}) \mid_{-1}^{1} = \pi(1 - \frac{1}{3}) - \pi(-1 + \frac{1}{3})$$

$$V = \frac{4}{3}\pi$$

4 Računanje determinante reda 2 in 3

Poglejmo si kako se računa determinanta reda 2 in 3. Tukaj so eksplicitne formule za njihov izračun.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

5 Zamenjava spremenljivke v integralu

Najprej se bomo seznanili s primerom zamenjave ene spremenljivke potem pa bomo spoznali še zamenjavo dveh in treh spremenljivk v integralu.
Naj bo f zvezna na $[a, b]$ in ϕ zvezno odvedljiva funkcija, ki interval $[\alpha, \beta]$ preslika bijektivno na interval $[a, b]$ tako, da je $\phi(\alpha) = a$ in $\phi(\beta) = b$. Tedaj je

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t$$

Na podoben način lahko zamenjamo več spremenljivk. Naj bo $U \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica z volumnom $\neq 0$ in $g : U \to \mathbb{R}^n$ dovolj lepa preslikava.

Izrek 1. *Naj bo* $\big|\det Dg(t)\big| \neq 0$ *za vse* $t \in U$ *in omejena na* U. *Predpostavimo, da ima* $g(U)$ *volumen. Za vsako integrabilno funkcijo* $f : g(U) \to \mathbb{R}$ *velja:*

$$\int_{g(U)} f(x)\mathrm{d}V = \int_U f(g(t))\big|\det Dg(t)\big|\mathrm{d}V$$