

Finančni instrumenti osnovani na razpršenosti

Žan Jarc



Mentorica: prof. dr. Damjana Kokol Bukovšek

Somentor: dr. Aleš Toman

Fakulteta za matematiko in fiziko

25. marec 2020




Vsebina predstavitve:

- Volatilnost trga
- ~~Izračun~~ indeksa Standard & Poor's 500
- Indeks volatilnost
- Primer izračuna indeksa VIX
- Primerjava vrednosti indeksov S&P 500 in VIX
- VIX terminske pogodbe
- VIX opcije

Volatilnost trga (1)

- **Finančni trg** sestavljajo vrednostni papirji, katerih vrednosti se v času spreminjajo.
- Zaradi spreminjanja vrednosti vsak vrednostni papir ali pa portfelj papirjev ustvarja donose in izgube.
- Če donos ali izgubo delimo z začetno vrednostjo papirja ali portfelja, temu rečemo **donosnost**, ki je izražena v odstotkih in je lahko pozitivna ali negativna.
- Razpršenost donosnosti je lahko večja ali manjša. Standardnemu odklonu porazdelitve donosnosti rečemo **volatilnost**.

Volatilitnost trga (2)

- Investitorji lahko s pomočjo informacije o volatilitnosti potencialne naložbe ugotovijo,  ko tvegana je njihova investicija.
- Pri vlaganju v finančno naložbo z nizko volatilitnostjo se pričakuje, da bodo donosi investicije morda nizki, vendar precej netvegani, medtem ko nam lahko investicija v finančno naložbo z visoko volatilitnostjo prinese višje donose, vendar tudi večje tveganje.
- Finančni inštrumenti na osnovi volatilitnosti so bili zasnovani, da vlagateljem ponudijo možnost, da trgujejo z razpršenostjo in s tem zavarujejo svoj portfelj pred nenadnimi nihaji.

Izračun indeksa Standard & Poor's 500







- **Indeks Standard & Poor's 500** ali indeks **S&P 500** je pokazatelj stanja na ameriškem finančnem trgu, ki se najpogosteje uporablja.
- Je kapitalizacijsko utežen indeks.

$$\text{S\&P 500} = \sum_{i=1}^{500} \frac{P_i \cdot Q_i}{D},$$

- P_i cena delnice i -tega podjetja.
- Q_i število razpoložljivih delnic za trgovanje i -tega podjetja.
- Pri izračunavi uporablja tudi delitelj D (angl. *divisor*).

Opcije na vrednost indeksa S&P 500

- Indeks S&P 500 ni le uporaben za reprezentacijo ameriškega gospodarstva ampak tudi predstavlja dobro dolgoročno investicijo. 
- Direktno v indeks ne moremo investirati, lahko pa izoblikujemo portfelj delnic, ki je ekvivalenten sestavi indeksa.
- Kratica SPX.
- ~~Kot večina indeksnih opcij~~ je denarno poravnana opcija in je evropskega tipa.
- Tedenske in mesečne opcije.
- Pogodbeni množitelj 100\$. 

- Indeks **Cboe Volatility Index** ali **VIX** je bil razvit za napovedovanje pričakovane volatilnosti.
- Indeks prikazuje 30 dnevno pričakovano volatilnost nakupnih in prodajnih opcij na indeks S&P 500, ki se ne splačajo (angl. *out-of-the-money* 
~~se~~ zapadejo čez več kot 23 in manj kot 37 dni.
- Odraža pričakovanje , kako bo trg nihal v prihodnjih 30 dneh.

Primer izračuna indeksa VIX (1)

- Izračun vrednosti indeksa VIX na dan 4. marca 2020.
- Vrednost indeksa S&P 500 je bila na ta dan 3089,78, vrednost indeksa VIX pa 31,99.
- Zaradi lažje preglednosti, **se uporabi** za izračun le opcije na vrednost indeksa S&P 500, ki zapadejo čez 27 ali 31 dni.

| Datum zapadlosti | Nakupna opcija | Nakupna premija nakupne opcije | Prodajna premija nakupne opcije | Izvirna cena | Prodajna opcija | Nakupna premija prodajne opcije | Prodajna premija prodajne opcije | Povprečna premija nakupne opcije | Povprečna premija prodajne opcije | Absolutna razlika povprečne premije nakupne in prodajne opcije |
|-------------------------|---------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-----------------|---------------------|--|---|-------------------------------------|---|---|
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C01800000 | 1280 | 1292,2 | 1800 | SPXW200406P01800000 | 0,65 | 0,95 | 1286,1 | 0,8 | 1285,3 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C01900000 | 1180,4 | 1192,6 | 1900 | SPXW200406P01900000 | 0,9 | 1,2 | 1186,5 | 1,05 | 1185,45 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C01950000 | 1130,4 | 1142,6 | 1950 | SPXW200406P01950000 | 1,05 | 1,35 | 1136,5 | 1,2 | 1135,3 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02000000 | 1080,9 | 1093,1 | 2000 | SPXW200406P02000000 | 1,25 | 1,55 | 1087 | 1,4 | 1085,6 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02050000 | 1031,2 | 1043,5 | 2050 | SPXW200406P02050000 | 1,5 | 1,8 | 1037,35 | 1,65 | 1035,7 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02100000 | 981,3 | 993,6 | 2100 | SPXW200406P02100000 | 1,75 | 2,05 | 987,45 | 1,9 | 985,55 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02150000 | 931,7 | 944 | 2150 | SPXW200406P02150000 | 2,1 | 2,4 | 937,85 | 2,25 | 935,6 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02200000 | 882,2 | 894,5 | 2200 | SPXW200406P02200000 | 2,55 | 2,85 | 888,35 | 2,7 | 885,65 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02250000 | 832,8 | 845,1 | 2250 | SPXW200406P02250000 | 3,1 | 3,4 | 838,95 | 3,25 | 835,7 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02300000 | 783,8 | 796 | 2300 | SPXW200406P02300000 | 3,7 | 4,1 | 789,9 | 3,9 | 786 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02350000 | 734,4 | 746,7 | 2350 | SPXW200406P02350000 | 4,5 | 4,9 | 740,55 | 4,7 | 735,85 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02400000 | 685,4 | 697,7 | 2400 | SPXW200406P02400000 | 5,5 | 6 | 691,55 | 5,75 | 685,8 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02425000 | 660,5 | 672,6 | 2425 | SPXW200406P02425000 | 6,1 | 6,6 | 666,55 | 6,35 | 660,2 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02450000 | 637 | 649,2 | 2450 | SPXW200406P02450000 | 6,8 | 7,3 | 643,1 | 7,05 | 636,05 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02475000 | 612,5 | 624,8 | 2475 | SPXW200406P02475000 | 7,5 | 8 | 618,65 | 7,75 | 610,9 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02500000 | 588,4 | 600,7 | 2500 | SPXW200406P02500000 | 8,4 | 8,9 | 594,55 | 8,65 | 585,9 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02525000 | 564,7 | 575,8 | 2525 | SPXW200406P02525000 | 9,3 | 9,9 | 570,25 | 9,6 | 560,65 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02550000 | 541,6 | 552,6 | 2550 | SPXW200406P02550000 | 10,3 | 11 | 547,1 | 10,65 | 536,45 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02575000 | 518,6 | 527,8 | 2575 | SPXW200406P02575000 | 11,5 | 12,2 | 523,2 | 11,85 | 511,35 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02600000 | 495,2 | 503,4 | 2600 | SPXW200406P02600000 | 12,8 | 13,5 | 499,3 | 13,15 | 486,15 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02625000 | 471,8 | 479,8 | 2625 | SPXW200406P02625000 | 14,3 | 15 | 475,8 | 14,65 | 461,15 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02650000 | 448,5 | 456,3 | 2650 | SPXW200406P02650000 | 15,9 | 16,7 | 452,4 | 16,3 | 436,1 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02660000 | 439,3 | 447 | 2660 | SPXW200406P02660000 | 16,6 | 17,3 | 443,15 | 16,95 | 426,2 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02670000 | 430,4 | 437,9 | 2670 | SPXW200406P02670000 | 17,4 | 18,1 | 434,15 | 17,75 | 416,4 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02675000 | 425,5 | 433,6 | 2675 | SPXW200406P02675000 | 17,8 | 18,5 | 429,55 | 18,15 | 411,4 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02680000 | 421 | 428,4 | 2680 | SPXW200406P02680000 | 18,1 | 18,9 | 424,7 | 18,5 | 406,2 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02690000 | 413,4 | 417,5 | 2690 | SPXW200406P02690000 | 18,9 | 19,7 | 415,45 | 19,3 | 396,15 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02700000 | 404 | 408,1 | 2700 | SPXW200406P02700000 | 19,8 | 20,5 | 406,05 | 20,15 | 385,9 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C02710000 | 385 | 389,1 | 2710 | SPXW200406P02710000 | 20,7 | 21,3 | 387,05 | 21 | 376,05 |

Primer izračuna indeksa VIX (2)

| Datum zapadlosti | Nakupna opcija | Nakupna premija nakupne opcije | Prodajna premija nakupne opcije | Izvršilna cena | Prodajna opcija | Nakupna premija prodajne opcije | Prodajna premija prodajne opcije | Povprečna premija nakupne opcije | Povprečna premija prodajne opcije | Absolutna razlika povprečne premije nakupne in prodajne opcije | Minimalna razlika | T | R | F |
|-------------------------|---------------------|--------------------------------|---------------------------------|----------------|---------------------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|--|-------------------|----------|----------|---------|
| 2020-03-31 00:00:00.000 | SPXW200331C03085000 | 86,6 | 87,6 | 3085 | SPXW200331P03085000 | 84,7 | 85,9 | 87,1 | 85,3 | 1,80 | 1,80 | 0,004543 | 0,015849 | 3086,80 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | SPXW200406C03085000 | 94,1 | 95,4 | 3085 | SPXW200406P03085000 | 92,5 | 93,7 | 94,75 | 93,1 | 1,65 | 1,65 | 0,004726 | 0,008577 | 3086,65 |

- T čas zapadlosti**

$$T = \frac{M_{\text{današnji dan}} + M_{\text{dan poravnave}} + M_{\text{ostali dnevi}}}{\text{minute v letu}},$$

- R netvegana obrestna mera** glede na krivuljo donosa ameriških zakladnih obveznic
- F termska vrednost indeksa, določena na osnovi premij indeksnih opcij**

$$F = K \cdot e^{RT} \cdot (c - p)$$

- Za vsak dan zapadlosti opcij določimo K_0 , ki je prva izvršilna cena opcije, manjša ali enaka od izračunane vrednosti F za tisti dan.

Primer izračuna indeksa VIX (3)


- Pri izbiri prodajnih opcij, ki bodo uporabljene za izračun indeksa VIX, so primerne le tiste z izvršilno ceno manjšo ali enako K_0 . Najprej se izberejo tiste prodajne opcije, ki imajo izvršilno ceno takoj pod K_0 . Nadaljujemo iskanje primernih prodajnih opcij z nižjo izvršilno ceno, ki imajo nakupno premijo večjo od 0. Ko se pri iskanju pojavita dve zaporedni opciji z nakupno premijo enako nič se iskanje konča in nobena prodajna opcija z nižjo izvršilno ceno ni vključena za izračun indeksa.

| Datum zapadlosti | Izvršilna cena | Prodajna opcija | Nakupna premija prodajne opcije | Prodajna premija prodajne opcije |
|-------------------------|----------------|---------------------|---------------------------------|----------------------------------|
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 1200 | SPXW200331P01200000 | 0,05 | 0,25 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 1300 | SPXW200331P01300000 | 0,1 | 0,3 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 1350 | SPXW200331P01350000 | 0,1 | 0,3 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 1400 | SPXW200331P01400000 | 0,15 | 0,35 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 1425 | SPXW200331P01425000 | 0,15 | 0,35 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 1450 | SPXW200331P01450000 | 0,2 | 0,4 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 1475 | SPXW200331P01475000 | 0,2 | 0,4 |

Primer izračuna indeksa VIX (4)

- Podoben postopek se opravi tudi za iskanje primernih nakupnih opcij, le da se pri tem iskanju upošteva le opcije z izvršilno ceno večjo od K_0 . V izračun se vključijo najprej tiste nakupne opcije, ki imajo izvršilno ceno takoj nad K_0 in nato še vse ostale z višjo izvršilno ceno in nakupno premijo večje od 0. Kot pri izbiri prodajnih opcij, se iskanje nakupnih opcij za izračun indeksa končna, ko se pri razvrščanju naleti na dve zaporedni nakupni opciji, z nakupno premijo enako 0.



| Datum zapadlosti |  Nakupna opcija | Nakupna premija nakupne opcije | Prodajna premija nakupne opcije | Izvršilna cena |
|-------------------------|--|--------------------------------|---------------------------------|----------------|
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 4100 SPXW200331C04100000 | | 0 | 0,1 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 4000 SPXW200331C04000000 | | 0 | 0,05 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 3900 SPXW200331C03900000 | | 0 | 0,15 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 3850 SPXW200331C03850000 | | 0 | 0,15 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 3800 SPXW200331C03800000 | | 0 | 0,15 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 3750 SPXW200331C03750000 | | 0 | 0,2 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 3700 SPXW200331C03700000 | | 0 | 0,2 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 3675 SPXW200331C03675000 | | 0 | 0,2 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 3650 SPXW200331C03650000 | | 0,05 | 0,25 |
| 2020-03-31 00:00:00.000 | 3640 SPXW200331C03640000 | | 0,05 | 0,25 |

Primer izračuna indeksa VIX (5)

- S tem postopkom so izbrane vse prodajne in nakupne opcije, ki bodo upoštevane pri izračunu indeksa VIX.
- Za i -to opcijo z izvršilno ceno K_i določimo ΔK_i kot:

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$$

- Za vsak čas zapadlosti T_j izračunamo σ_j^2 :

$$\sigma_j^2 = \frac{2}{T_j} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{R_j T_j} Q(K_i) - \frac{1}{T_j} \left(\frac{F_j}{K_0} - 1 \right)^2, \quad \text{za } j = 23, 24, \dots, 37,$$

kjer je $Q(K_i)$ povprečje nakupne in prodajne premije i -te opcije.

Primer izračuna indeksa VIX (6)

| Datum zapadlosti | Izvršilna cena | Nakupna opcija | Nakupna premija nakupne opcije | Prodajna premija nakupne opcije | Doprinos opcije po izvršilni ceni |
|-------------------------|----------------|---------------------|--------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3090 | SPXW200406C03090000 | 90,9 | 92,1 | 0,0000479 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3095 | SPXW200406C03095000 | 87,8 | 89 | 0,0000461 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3100 | SPXW200406C03100000 | 84,6 | 85,9 | 0,0000444 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3105 | SPXW200406C03105000 | 81,5 | 82,8 | 0,0000426 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3110 | SPXW200406C03110000 | 78,5 | 79,7 | 0,0000409 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3115 | SPXW200406C03115000 | 75,5 | 76,7 | 0,0000392 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3120 | SPXW200406C03120000 | 72,5 | 73,7 | 0,0000375 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3125 | SPXW200406C03125000 | 69,6 | 70,8 | 0,0000359 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3130 | SPXW200406C03130000 | 66,8 | 67,9 | 0,0000344 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3135 | SPXW200406C03135000 | 64 | 65,1 | 0,0000328 |
| 2020-04-06 00:00:00.000 | 3140 | SPXW200406C03140000 | 61,2 | 62,3 | 0,0000313 |

$$\sigma_1^2 = 1,511730404, \sigma_2^2 = 1,677280934$$

Primer izračuna indeksa VIX (7)

- Za končni izračun indeksa VIX moramo izračunati 30-dnevno uteženo povprečje σ_j^2 :

$$VIX = 100 \cdot \sqrt{\frac{1}{N_{37} - N_{23}} \left\{ \sum_{j=23}^{37} T_j \sigma_j^2 |N_j - N_{\text{mesec}}| \right\} \cdot \frac{N_{\text{leto}}}{N_{\text{mesec}}}},$$

kjer je:

- N_j število minut do zapadlosti opcije, ki zapade čez j dni
- N_{leto} število minut v letu ($365 \cdot 1440 = 525.600$)
- N_{mesec} število minut v mesecu ($30 \cdot 1440 = 43.200$)

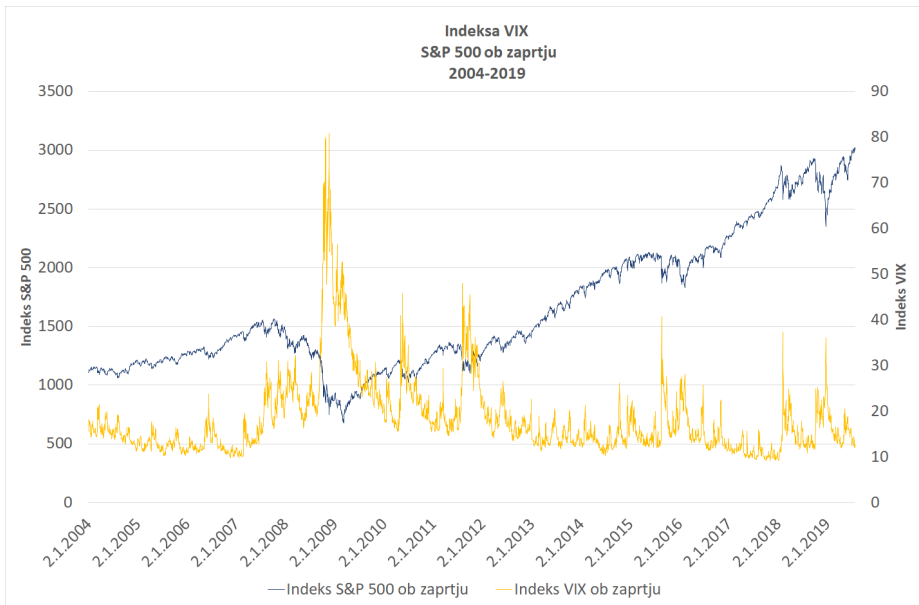
Primer izračuna indeksa VIX (8)

Za poenostavljen zgled lahko izračnemo indeks VIX kot:

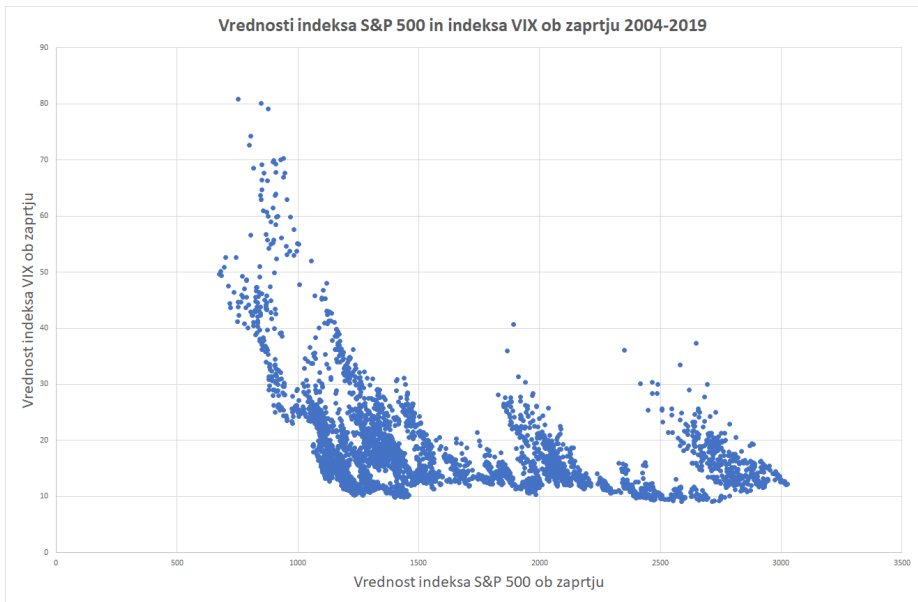
$$VIX = 100 \cdot \sqrt{\frac{1}{N_{37} - N_{23}} \left\{ T_1 \sigma_1^2 |N_{27} - N_{\text{mesec}}| + T_2 \sigma_2^2 |N_{31} - N_{\text{mesec}}| \right\} \cdot \frac{N_{\text{leto}}}{N_{\text{mesec}}}}$$

$$VIX = 30,84$$

Primerjava vrednosti indeksov S&P 500 in VIX (1)



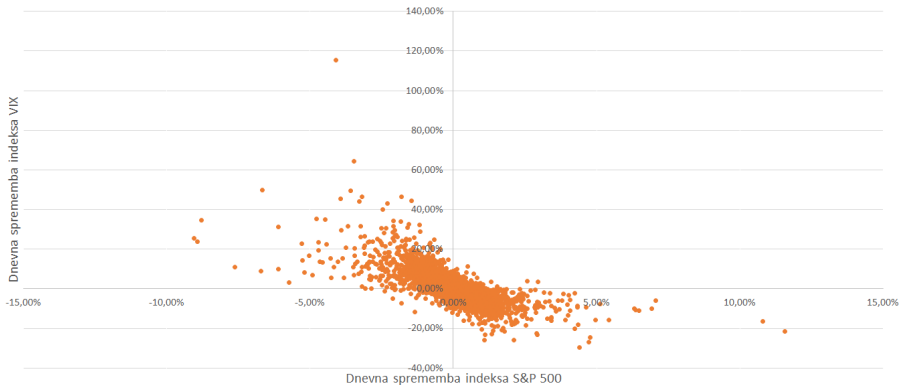
Primerjava vrednosti indeksov S&P 500 in VIX (2)



Primerjava vrednosti indeksov S&P 500 in VIX (3)



Dnevne spremembe indeksa S&P 500 in indeksa VIX 2004-2019



VIX terminske pogodbe

- VIX terminske pogodbe (angl. *VIX futures*) so bili prvič predstavljeni leta 2004 in jih lahko najdemo pod oznako VX (mesečne terminski pogodbe) in VX01 do VX53 (tedenske terminski pogodbe). Vrednosti terminske pogodbe z bližanjem ročnosti konvergirajo k vrednosti VIX.
- Pogodbeni množitelj 1000\$.
- Terminski posli imajo ročnost na sredo **zjutraj**, ki je 30 dni pred petkom, ko zapadejo SPX opcije.
- **Settlement value** ni določen z vrednostjo indeksa VIX na dan poravnave, temveč z vrednostjo **volatility index settlement - VRO** (angl. *Special Opening Quotation*).



Opcije na vrednost indeksa VIX

- VIX opcije so bile prvič na voljo leta 2006 in jih najdemo pod kratico VIX.
- Opcije so evropske in so denarno poravnane.
- Pogodbeni množitelj 100\$.
- Imajo podobno kot terminske pogodbe, ročnost na sredo, ki je 30 dni pred petkom, ko zapadejo opcije na vrednost indeksa S&P 500.
- Vrednost opcij VIX je vezana na VIX terminski posel z enako ročnostjo in ne na vrednost indeksa VIX.