
承诺书

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会,可将我们的论文以任何形式进行公开展示(包括进行网上公示,在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等)。

(指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责)

日期: 2019 年 08 月 18 日

(请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。)

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2019 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人						
备 注						

送全国评阅统一编号（由赛区组委会填写）：

全国评阅随机编号（由全国组委会填写）：

（请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。）

基于非稳态导热的高温作业专用服装设计

摘要

本文通过传热学知识, 结合了克兰克-尼科尔森方法, 追赶法与相似对角化法等一
系列方法, 加上一些数值求解的技巧, 构建了一套预测在高温环境下防护服内部的温度
变化趋势的体系, 并用这套体系预测了皮肤表面温度在特定条件下的变化, 与实验数据
符合较好. 之后, 继续使用这一套模型预测高温防护服在不同情况下的温度变化, 来辅助
防护服的设计, 简化高温防护服的设计流程

关键字: 克兰克-尼科尔森方法 曲线拟合 非线性优化模型 受力分析

目录

一、问题重述	3
1.1 问题背景	3
1.2 问题重述	3
二、问题分析	3
2.1 问题一的分析	3
2.2 问题二的分析	4
2.3 问题三的分析	4
三、模型假设	4
四、符号说明	5
五、模型建立与求解	5
5.1 问题一：确定温度分布情况	5
5.2 问题二：确定 II 层介质最优厚度	9
5.3 问题三：确定 II、IV 层介质最优厚度	10
六、模型的评价和推广	11
6.1 模型优点	11
6.2 模型缺点	12
6.3 模型推广	12
七、参考文献	12
参考文献	12
附录 A C-N 方法的 matlab 代码	13

一、问题重述

1.1 问题背景

服装作为人与环境之间的中间体，它的功能，逐渐由最原始的遮体避寒，发展出许多不同的功能特性，以此来保证人类能适应现代快速发展的社会，能够从事相应的，有不同要求的生产活动。现代材料学、工程学、以及基础科学的快速发展，使得服装有了更为复杂多样，且更为有效的功能。因而不同环境下的服装性能被愈加重视。

现代工业生产中，不可避免会出现有与普通环境完全不同的工作环境，包括高温、低温、缺氧、无菌、辐射等，其中高温环境作为生产与作业中最常出现的一种情况，高温作业专用服装的设计被高度重视，国内外在该方面拥有广泛而深入的研究。

在本文中，将建立高温作业专用服装的数学模型，分析在不同温度、不同时间、不同材质情况下的高温作业专用服的隔热情况，并由此根据环境对皮肤温度进行合理评估，进而通过温度要求对服装厚度和材料选取实现最优设计。

1.2 问题重述

高温环境下工作时人们需要穿着专用服装以避免灼伤。专用服装通常由三层织物材料构成，I层与外界环境接触，III层与皮肤之间还存在空隙，空隙记为IV层。

为设计专用服装，将体内温度控制在 37°C 的假人放置在实验室的高温环境中，测量假人皮肤外侧的温度。为了降低研发成本、缩短研发周期，请你们利用数学模型来确定假人皮肤外侧的温度变化情况，并解决以下问题：

(1) 专用服装材料的某些参数值由附件 1 给出，对环境温度为 75°C 、II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟的情形开展实验，测量得到假人皮肤外侧的温度（见附件 2）。建立数学模型，计算温度分布，并生成温度分布的 Excel 文件（文件名为 problem1.xlsx）。

(2) 当环境温度为 65°C 、IV 层的厚度为 5.5 mm 时，确定 II 层的最优厚度，确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

(3) 当环境温度为 80 时，确定 II 层和 IV 层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一要求建立温度在时间和空间上的分布函数，在各阻热层各向同性的假设下，仅需考虑一维情况下的温度分布。考虑热量传输过程，该过程有 75°C 和 37°C 两个恒温

源在 75°C 边界上主要考虑热对流, 在中间四层介质中热量主要以热传导方式进行传递, 皮肤表面和 37°C 恒温源之间仍然主要考虑热对流形式。

因此, 问题一需要建立基于热传导的温度分布模型, 由傅里叶定律和能量守恒定律推导出四层介质的热传导方程。根据初始时刻的温度分布都为 37°C 建立初始条件, 与热传导过程温度场的连续性建立各层介质之间的衔接条件, 和高温恒温热源以及低温恒温热源处的热对流方程 (传热系数未知) 来确定方程的边界条件。

由于向前差分方程在 Δx 过小, Δt 过大时, 会出现振荡情况, 因此考虑将微分方程转化为精度较高的克兰克-尼科尔森差分方程 [1]。

由于求出的系数矩阵 $\mathbf{R}_p, \mathbf{R}_n$ 都是三对角矩阵, 可以快速求逆, 再加上对不动点的利用, 可以快速求出皮肤表面温度关于时间的变化曲线, 该曲线与热对流方程的传热系数有关, 利用附件 2 测量所得假人皮肤外侧温度, 通过最小二乘法求出皮肤表面温度关于时间函数与实际情况最接近时的传热系数, 最后由求得的传热系数求出温度在时间和空间上的分布并生成表格。

2.2 问题二的分析

问题一建立了温度在时间和空间上的分布函数, 由高温恒温热源、低温恒温热源、传热系数、各介质相关性质可以求出任意时间和空间上的温度值;

问题二是求解 II 层介质最优厚度的一个最优化问题, 从服装成本最低与穿着舒适度最高两方面考虑需求取 II 层介质厚度的最小值, 其约束条件为假人皮肤外侧温度 60 分钟时不超过 47°C, 55 分钟时不超过 44°C。因此我们使用二分查找法, 对 II 层介质的所有可能厚度进行遍历, 最终求出满足约束条件的最小厚度。

2.3 问题三的分析

问题三是求解 II, IV 两层的最优厚度的一个多目标的优化问题。

类似于问题二, 需要求取满足约束条件情况下的 II, IV 两层的厚度使服装成本最低和穿着舒适度最高。该问题约束条件为假人皮肤外侧温度 30 分钟时不超过 47°C, 25 分钟时不超过 44°C。考虑对 II 介质与 IV 介质厚度进行双重循环遍历, 寻找到满足约束条件的 II、IV 两层厚度范围, 最终根据服装成本最低和穿着舒适度最高的目标确定 II, IV 两层的最优厚度。

三、模型假设

- 假设各层介质都是各向同性;
- 假设恒温源处的热辐射和热传导可以忽略, 仅考虑热对流;
- 假设每层介质的热传导率在各个方向相同;

- 假设衣服形状规则，各层介质可被视为平行材料不发生扭曲；
- 假设温度测量准确，皮肤表面各处温度相同；
- 假设长时间的实验过程衣服材料的导热率等参数保持不变；
- 热对流仅仅发生在边界一小段距离内.

四、符号说明

符号	意义
x	位置
k	热传导率
ρ	密度
c	比热容
t	时间
$u(x,t)$	温度
q	热流量
h	固体表面的平均表面换热系数
a	加粗小写字母表示向量
A	加粗大写字母表示矩阵
A^n	矩阵的 n 次幂

五、模型建立与求解

5.1 问题一：确定温度分布情况

问题的分析 问题一主要求解皮肤表面的温度变化曲线, 通过观察测量数据可以发现, 在 90 分钟的时候, 防护服内已经达到了热平衡.

由此, 我们可以确定两侧换热系数的关系, 并且在建立差分方程后, 根据总方差最小的原则, 取到一组合适的换热系数, 并且以此预测皮肤表面的温度变化曲线.

模型的建立 给定区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 每个区间上都有热力学参数: k_i, ρ_i, c_i , 三者分别为该区间上热传导率、密度和比热容, 其中 $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

从而可以得到热传导方程 [2]:

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \rho c|_{x_{i-1} < x < x_i}$$

由于该高温服装由多层不同材质的物料组成, 所以在不同介质交换处, 由 $\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \rho c$ 可得:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} k_{i+1} \frac{\partial u(x_i + \delta)}{\partial x} - \int_{x_i}^{x_i + \delta} \frac{\partial u}{\partial t} \rho_{i+1} c_{i+1} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} k_i \frac{\partial u(x_i - \delta)}{\partial x} - \int_{x_i}^{x_i - \delta} \frac{\partial u}{\partial t} \rho_i c_i dx = q(x_i)$$

此外, 在这个高温工作服的两端, 都有空气存在。空气层与其他固体介质层有着巨大的差异。空气层具有流体性质, 所以在两端, 还要考虑对流换热的存在。对流换热是流体的导热和热对流两种基本方式共同作用的结果。在左端, 由牛顿冷却公式 $q = h\Delta u$ 因而有:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} k \frac{\partial u(\delta)}{\partial x} - h[u(0) - u_w] - \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial t} \rho c dx = 0$$

右端在高温工作服表面也是类似的空气流动, 同样是这样的原理和公式。

在单一介质内部, 我们采用克兰克-尼科尔森差分法 (C-N 方法) 做差分, 将每一部分看做一个小单元, 分析它热量的变化

$$(q_{i+1} - q_i) \Delta t = \rho c \Delta x$$

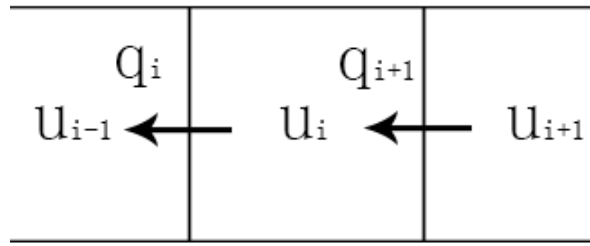


图 1 区块模拟图

可以得到:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2u_i^n}{\Delta x^2} \right) k = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \rho c$$

我们可以记: $r = \frac{k\Delta t}{2\rho c\Delta x^2}$ 整理上式可以得到:

$$-ru_{i+1}^{n+1} + (1 + 2r)u_i^{n+1} + -ru_{i-1}^{n+1} = ru_{i+1}^n + (1 - 2r)u_i^n + ru_{i-1}^n$$

这就是单一介质内部的温度变化与分布规律。

由于实际上的高温工作服, 由多层复合材质组成, 层与层之间存在着不同的导热系数, 所以单一介质的传热规律在不同层之间不能很好符合。在介质交界处我们需要另外考虑。

假设小区块分成两半, 每一半介质不同, 记前一种介质的热传导率为 k_p , 后一种介质的热传导率为 k_n , ρc 是前后两种介质单位体积热容的平均值, 有:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{k_n u_{i+1}^{n+1} + k_p u_{i-1}^{n+1} - (k_p + k_n) u_i^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{k_n u_{i+1}^n + k_p u_{i-1}^n - (k_p + k_n) u_i^n}{\Delta x^2} \right] = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \rho c$$

在两端处, 以左端为例:

$$\frac{1}{2} \left[k \frac{u_2^{n+1} - u_1^{n+1}}{\Delta x} - h_l(u_1^{n+1} - u_w) + k \frac{u_2^n - u_1^n}{\Delta x} - h_l(u_1^n - u_w) \right] = \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} \rho c \frac{\Delta x}{2}$$

根据这样多重线性映射的关系, 得到递推式:

$$\mathbf{R}_n \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{R}_p \mathbf{u}^n + \mathbf{q}$$

记:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{R}_p$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{q}$$

有递推关系式

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{u}^n + \mathbf{b}$$

记这个映射有不动点:

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{A} \mathbf{u}_s + \mathbf{b}$$

则有:

$$\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}_s = \mathbf{A}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_s)$$

即:

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{A}^n(\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_s) + \mathbf{u}_s$$

显然的:

$$\mathbf{u}_s = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}$$

这样就可以快速的求解任意时刻的温度分布:

$$\mathbf{u}|_{t=t_0} = \mathbf{A}^{\frac{t_0}{\Delta t}}(\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}_s) + \mathbf{u}_s$$

模型的求解 记 h_l, h_r 分别为左右两边的换热系数, u_l, u_r 分别为左右两边的温度, u_{wl}, u_{wr} 分别为左右两边的环境温度根据稳态的热平衡, 我们可以列出如下关系式:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{L_i}{k_i} + \frac{1}{h_l} + \frac{1}{h_r} = \frac{u_{wr} - u_{wl}}{q}$$

又由热平衡: $h_r(u_l - u_{wl}) = q$ 不难得出 h_r, h_l 的关系:

$$h_l = \frac{\alpha h_r}{1 + \beta h_r}$$

其中参数 $\alpha = 2.4296, \beta = 0.2821$ 不难发现 h_r 大致在 80 120 之间, 我们在这个区间上二分查找一个 h_r , 使得计算数据与原始数据的总标准差:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - \hat{u}_i)^2}{N}}$$

取得最小值计算可得 h_r 大致为: 100.63, h_l 大致为 8.319, 相对应的 $S = 0.052$ $S - h_r$ 的关系见下图:

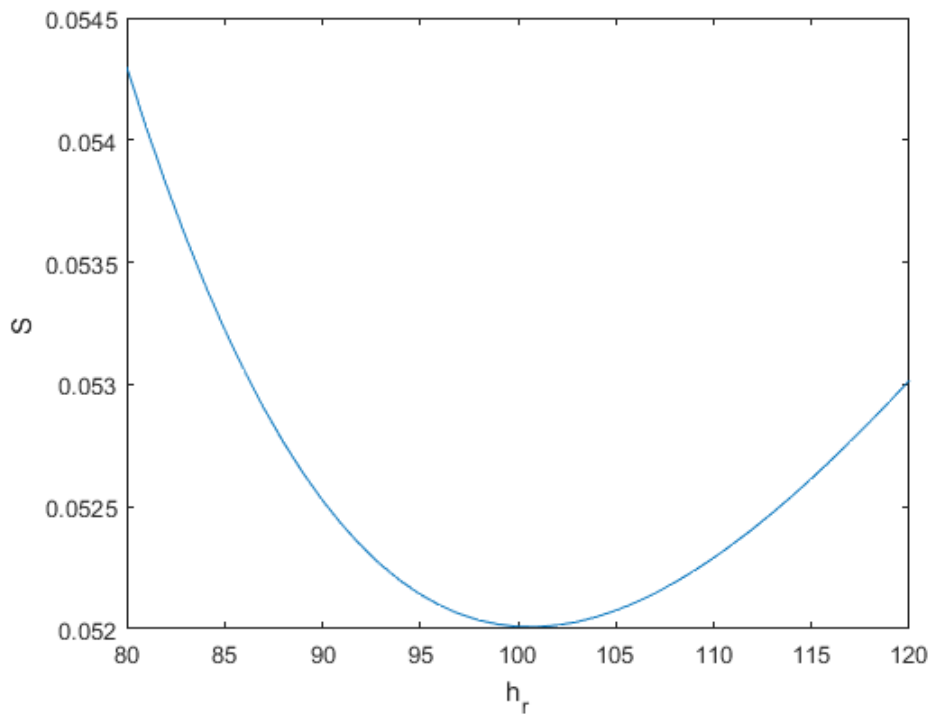


图 2 $S - h_r$ 的关系

结果的分析和检验 将实际测量的皮肤表面温度变化曲线与理论得到的皮肤表面温度变化曲线绘制在一张图上

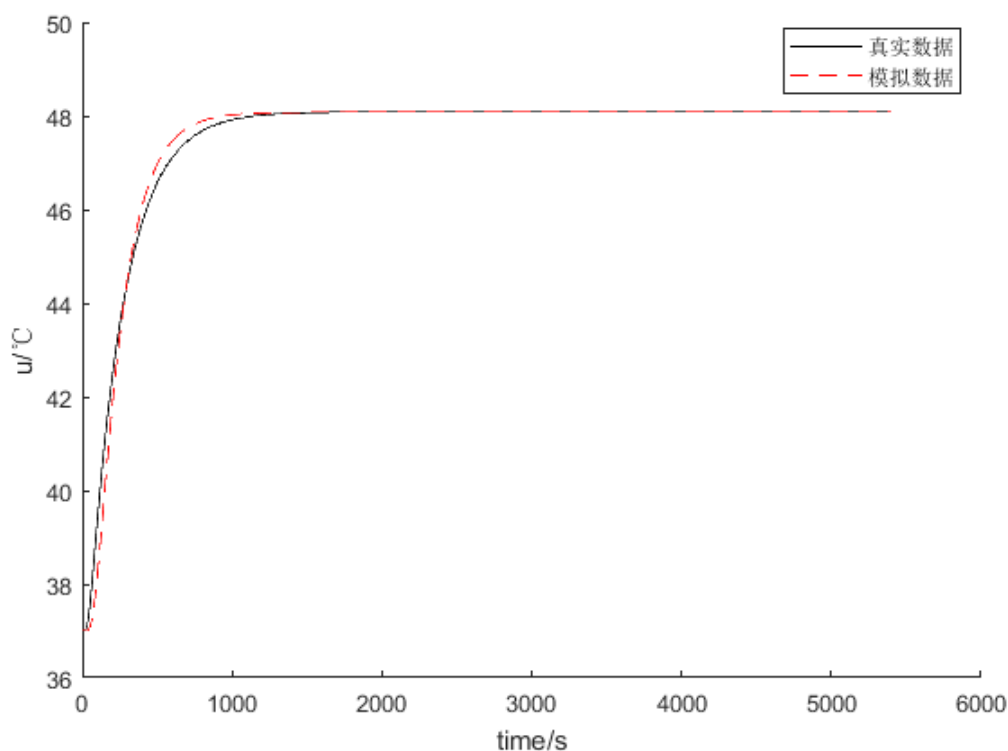


图 3 实际数据与计算结果的对比

5.2 问题二：确定 II 层介质最优厚度

问题的分析 在问题一中求出最符合实验结果的传热系数 h ，问题 2 需要求解满足约束条件下的 II 层介质最优厚度，该问题为单一变量的优化问题，目标为服装成本最低与穿着舒适度最高。易知当材料厚度最小时成本最低且舒适度最高。因此问题 2 为在满足条件：

$$\begin{cases} u|_{x=0mm, t=3300s} < 44^{\circ}C \\ u|_{x=0mm, t=3600s} < 47^{\circ}C \end{cases}$$

情况下，求取 II 层介质厚度 L_2 的最小值 $\min L_2$ 。

模型的求解 采用二分查找的方法, 确定 II 层介质的最小厚度，在 II 层介质的允许厚度中进行枚举，得出不同介质厚度相对应的 55 分钟和 60 分钟时的温度 u_{3300} ，通过（**** 约束条件）找到 II 层介质的临界值，该临界值即为所求目标： \min_2 。

通过 matlab 所得 II 层厚度 L_2 与 55 分钟的皮肤表面温度 u_{3300} 的关系如图：

由图可知， $L_2 = 20.9mm$ 时, u_{3300} 恰好小于 $44^{\circ}C$ 一点，而 60 分钟的皮肤表面温度 u_{3600} 达不到 $47^{\circ}C$ ，由此可得满足约束条件的 II 层厚度的临界值为 $20.9mm$ ，由上面分析可知，该临界厚度为 II 层介质最优厚度。所以最终得到 L_2 的最优厚度为 $20.9mm$

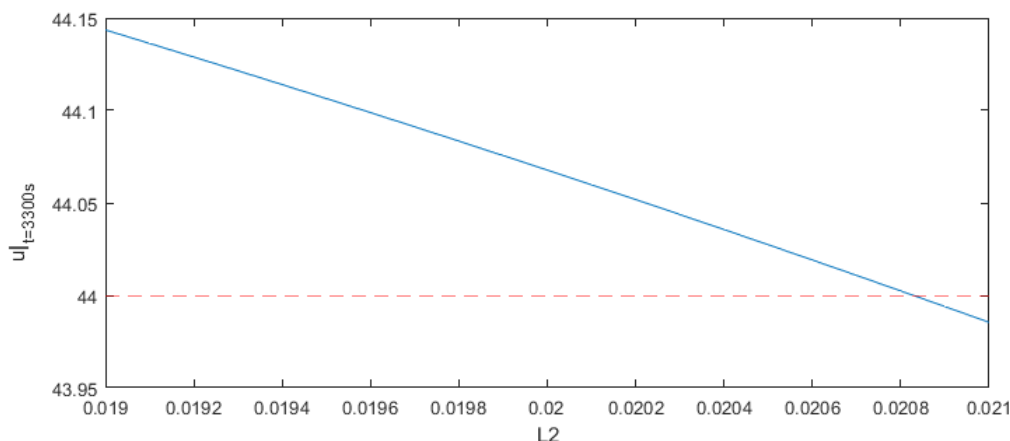


图 4 $L_2 - u_{3300}$

5.3 问题三：确定 II、IV 层介质最优厚度

问题的分析 与问题二类似，问题三仍要求解满足约束条件下的 II、IV 层介质最优厚度，该问题变为双变量的优化问题，目标为服装成本最低与穿着舒适度最高。因此可以考虑求出满足条件：

$$\begin{cases} u|_{x=0mm, t=1500s} < 44^{\circ}C \\ u|_{x=0mm, t=1800s} < 47^{\circ}C \end{cases}$$

的 II、IV 层介质厚度的组合，在所有组合中寻找使服装成本最低、穿着舒适度最高的 II、IV 层介质厚度。

模型的求解 对 II 介质与 IV 介质厚度进行双重循环遍历，寻找到满足约束条件的 II、IV 两层厚度范围，得出不同的 II、IV 厚度与 1500 秒时皮肤表面温度关系如图：

在图 [5] 上做出使得 1500s 时皮肤表面温度为 $44^{\circ}C$ 的 L_2, L_4 曲线（图中绿线），与 1800s 时皮肤表面温度为 $47^{\circ}C$ 的曲线（图中黄线）由约束条件可知在该线右上部分为满足条件的 II、IV 厚度范围。通过取步长为 0.1mm，得到一系列临近分布在图中绿线右上的点，显然这些点是恰好使得温度在 1500s 的时候不超过 $44^{\circ}C$ ，并且厚度尽可能小的：

(24.04, 6.4) (24.24 6.3) (24.44 6.2) (24.54 6.1) (24.84 6.0)

由上述列举的点可以发现， $L_2 = 24.04mm, L_4 = 6.4mm$ 时，使得高温作业专用服装的厚度达到最小值，此时服装成本最低且此时穿着舒适度最高。因此可以得到：满足假人皮肤外侧温度 30 分钟时不超过 $47^{\circ}C$ ，25 分钟时不超过 $44^{\circ}C$ 的 II 层介质最优厚度为 24.04mm，IV 层介质最优厚度为 6.4mm。

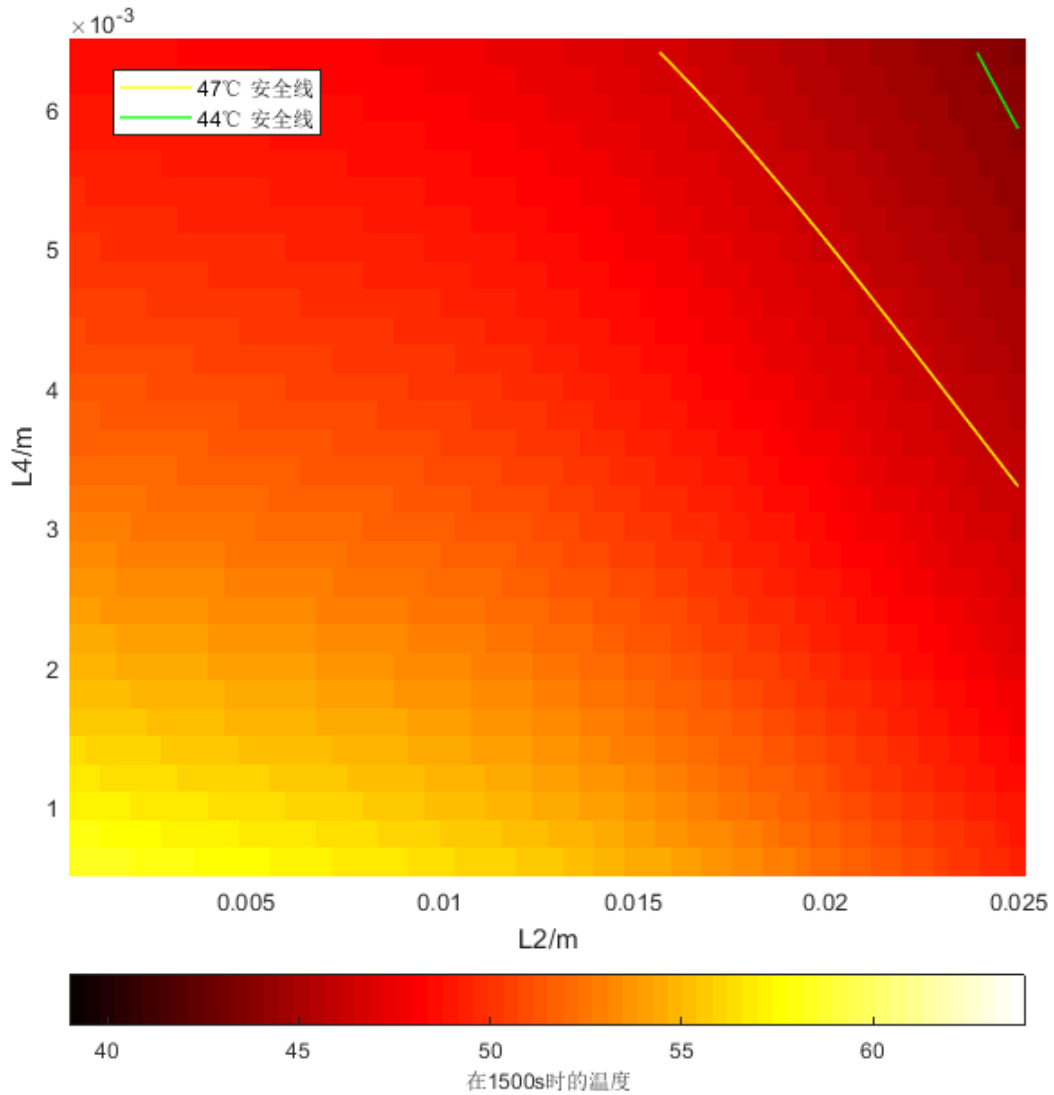


图 5 1500s 后皮肤表面温度与 L_2, L_4 的关系

六、模型的评价和推广

6.1 模型优点

- 利用 Crank-Nicolson 差分格式对连续的模型进行离散化处理进行数值求解, 对前后差分取平均值, 能够获得误差更小的数值解;
- 在求解一定时刻的温度分布 u_t 时, 采用寻找不动点 u_s 后直接做矩阵乘法的方法, 极大提高了运算速度, 可以较快求解;
- 第三类边界条件由牛顿冷却方程得出, 并合理考虑热传导的影响, 使模型的建立更加接近实际情况;

- 由物理传热规律求出两个传热系数之间的关系, 进而减少变量对单一变量进行研究, 结果误差更小;

6.2 模型缺点

- 在进行克兰克—尼科尔森差分法时, 需要对数据进行离散化处理, 会导致结果不精确;
- 边界的对流情况其实十分复杂, 这个模型仅仅考虑了一小段物质建立对流换热方程

6.3 模型推广

在本文中, 我们建立了高温作业专用服装的数学模型, 分析在不同温度、不同时间、不同材质情况下的高温作业专用服的隔热情况, 进而通过温度要求对服装厚度和材料选取实现最优设计。不过我们目前设计的模型是在一维层面的, 可以将其推广到二维, 三维环境, 以更符合现实情况。此外, 我们建立的是一个传热的基本模型, 所以可以将这个模型推广到其他热学问题领域。

七、参考文献

参考文献

- [1] 克兰克——尼科尔森方法 [G/OL]. 维基百科, 2016.7.11[2019.8.15].
- [2] [TK124] 陈维汉. 工程传热学 [M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2011.

附录 A C-N 方法的 matlab 代码

```
function u_alltime = getUt(hl,hr)
u_0 = 37;
u_end = 75;
%hl = 8.318143355830285;
%hr = 1.002000000000000e+02;
total_time = 5400;
del_x = 1e-4;
del_t = 0.01;
L1 = 0.6/1000;
L2 = 6/1000;
L3 = 3.6/1000;
L4 = 5/1000;
x43 = L4;

x32 = L4+L3;

x21 = L4+L3+L2;

x0 = 0;
xend = L4+L3+L2+L1;
xp = [x0,x43,x32,x21,xend];
%t = 0:del_t:300;
N = round(xend/del_x+1);
Rp = zeros(N,N);
Rn = zeros(N,N);
delta = zeros(N,1);
r4 = del_t*2.361075976051944e-05/(2*del_x^2);
r3 = del_t*3.441935316092042e-07/(2*del_x^2);
r2 = del_t*2.043973041652856e-07/(2*del_x^2);
r1 = del_t*1.984991527475188e-07/(2*del_x^2);
rs = [r1,r2,r3,r4];

k4 = 0.028;
k3 = 0.045;
k2 = 0.37;
k1 = 0.082;
k = [k4,k3,k2,k1];

rho4 = 1.18;
rho3 = 74.2;
rho2 = 862;
rho1 = 300;
rho = [rho4,rho3,rho2,rho1];
```

```

c4 = 1055;
c3 = 1726;
c2 = 2100;
c1 = 1377;
c = [c4,c3,c2,c1];

%R_n * u_n+1 = R_p * u_n + b

%Rp(1,1) = k4/del_x + h1;
%Rp(1,2) = -k4/(del_x);

%Rn(1,1) = -h1-k4/del_x;
%Rn(1,2) = -k4/(del_x);
d_edge = 0.5*del_x;
Rp(1,1) = - k4/(2*del_x*d_edge) - h1/(2*d_edge) + rho4*c4/del_t;
Rp(1,2) = k4/(2*del_x*d_edge);

Rn(1,1) = k4/(2*del_x*d_edge) + h1/(2*d_edge) + rho4*c4/del_t;
Rn(1,2) = -k4/(2*del_x*d_edge);

delta(1) = h1*u_0/d_edge;

for region = 1:4
    a = round(2 + xp(region)/del_x);
    b = round(xp(region+1)/del_x);
    r = rs(region);
    for index = a:b

        Rp(index,index-1) = r;
        Rp(index,index) = 1-2*r;
        Rp(index,index+1) = r;

        Rn(index,index-1) = -r;
        Rn(index,index) = 1 + 2*r;
        Rn(index,index+1) = -r ;
    end
    index = index + 1;
    % (u_{i+1} - u_{i})*k_{next} = (u_{i} - u_{i-1})*k_{pre}

    if region == 4
        Rp(index,index-1) = k1/(2*del_x*d_edge);
        Rp(index,index) = - k1/(2*del_x*d_edge) - hr/(2*d_edge) + rho1*c1/del_t;
        Rn(index,index) = rho1*c1/del_t + k1/(2*del_x*d_edge) + hr/(2*d_edge);
    end
end

```



```

    Rn(index,index-1) = -k1/(2*del_x*d_edge);
    delta(N) = hr*u_end/(d_edge);
else
    kn = k(region+1);
    kp = k(region);

    rhocm = 0.5*c(region)*rho(region)+0.5*c(region+1)*rho(region+1);

    rn = del_t*kn/(rhocm*2*del_x^2);
    rp = del_t*kp/(rhocm*2*del_x^2);
    Rp(index,index-1) = rp;
    Rp(index,index) = 1-rn-rp;
    Rp(index,index+1) = rn;

    Rn(index,index-1) = -rp;
    Rn(index,index) = 1+rn+rp;
    Rn(index,index+1) = -rn;
end
end

A = Rn\Rp;
b = Rn\delta;
u_s = (eye(N)-A)\b;
u_t = ones(N,1)*37.0;
u_del = u_t - u_s;
A_dt = A^100;

u_alltime = zeros(total_time+1,1);
i = 1;
for time = 0:1:total_time
    u_alltime(i) = u_t(1);
    u_del = A_dt*u_del;
    u_t = u_del + u_s;
    i = i +1;
end
end

```