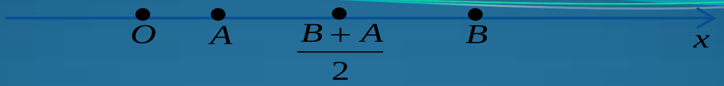
数列极限的性质



性质1. （唯一性）若一个数列$\{x_n\}$收敛，则其极限值必唯一.

(反证法). 假设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$且$A \neq B$, 不妨设$A < B$.

对$\varepsilon = \dfrac{B-A}{2}$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

$\exists N_1$, 当$n > N_1$时，有

$$A - \frac{B-A}{2} < x_n < A + \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2} \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$, $\exists N_2$, 当$n > N_2$时，有

$$\frac{B+A}{2} = B - \frac{B-A}{2} < x_n < B + \frac{B-A}{2} \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 当$n > N$时，有

$\dfrac{B+A}{2} < x_n < \dfrac{B+A}{2}$, 矛盾. 故$A = B$, 即极限值唯一.

数列极限的性质

性质2.（保序性）若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$,则

1）当$B > A$时，存在N,当$n > N$时，$y_n > x_n$;

2）从某项以后有$y_n > x_n$，则$B \geq A$.

(反证法). 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. 不妨设$A < B$.

对$\varepsilon = \dfrac{B-A}{2}$, 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

$\exists N_1$,当$n > N_1$时，有

$$A - \frac{B-A}{2} < x_n < A + \frac{B-A}{2} = \frac{B+A}{2} \qquad \cdots\cdots \quad ①$$

由$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. $\exists N_2$,当$n > N_2$时，有

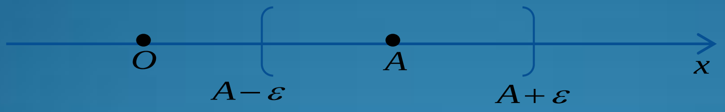
$$\frac{B+A}{2} = B - \frac{B-A}{2} < y_n < B + \frac{B-A}{2}. \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$,当$n > N$时，有

$x_n < \dfrac{B+A}{2} < y_n$.故$A = B$,即极限值唯一.

数列极限的性质

性质3. （有界性）收敛的数列必有界.



反之，不一定成立.

例：$x_n = (-1)^n$.

分析：显然$-1 \le x_n \le 1$, 故$\{x_n\}$有界.

而$\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m} = 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} x_{2m+1} = -1$,

故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

数列极限的四则运算

定理. 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = AB, \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{A}{B}.$$

(分析). $|x_n - A| < \varepsilon$, 当$n > N_1$

$|y_n - B| < \varepsilon$, 当$n > N_2$

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - AB| &= |x_n y_n - Ay_n + Ay_n - AB| \\
&\le |y_n||x_n - A| + |A||y_n - B| \\
&< |y_n|\varepsilon + |A|\varepsilon \\
&\le M\varepsilon + |A|\varepsilon \qquad \text{当} n > \max\{N_1, N_2\}
\end{aligned}$$

数列极限的定式

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}=0(\alpha>0).$

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0,a\neq 1).$

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}a^{n}=0(0<a<1),\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b^{n}}=0(b>1).$

(4). $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

例1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{5n^2+2n+3}.$

方法：上下同除以无穷大因子

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{n^2}}{5+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}=\frac{3}{5}.$$

例2. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{5n^2+2n+3}$.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{5+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}=0.$$

例3. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{5n+3}$.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}=\infty.$$

一般地，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1n^p+a_2n^{p-1}+\cdots+a_{p+1}}{b_1n^q+b_2n^{q-1}+\cdots+b_{q+1}}=\begin{cases}0, & p<q\\ \dfrac{a_1}{b_1}, & p=q\\ \infty, & p>q\end{cases}$$

数列极限的计算

例1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3}\right)$. 方法：利用公式变形

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{n}{3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)-2n^2}{6n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{6n}=\frac{1}{2}.$$

例2. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$. 方法：分子有理化

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0.$$