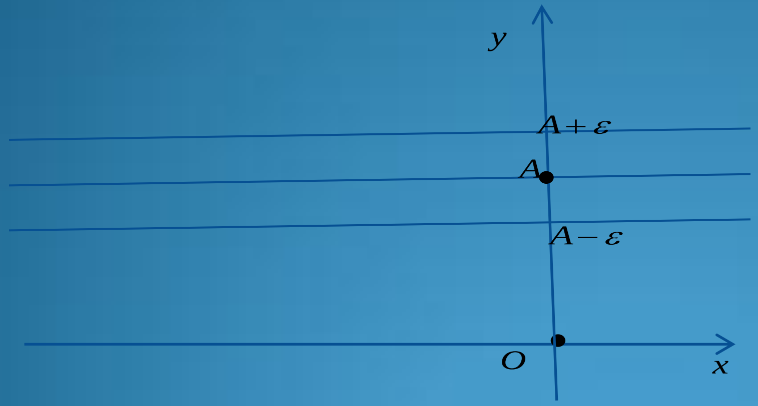
函数极限的概念

定义1. 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上有定义，A是一实数，对$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$使得当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$或$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$ 则称$f(x)$在趋向于正无穷大时有极限或收敛，A为其极限值，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\text{或}f(x)\to A\left(x\to+\infty\right).$$

定义2. 设$f(x)$在$(-\infty,b)$上有定义，A是一实数，对$\forall\varepsilon>0,\exists X>0$，使得当$-x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$或$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$. 则称$f(x)$在趋向于负无穷大时有极限或收敛，$A$为其极限值，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A\text{或}f(x)\to A(x\to-\infty).$$



定义3. 设$f(x)$在$(-\infty,b)$和$(a,+\infty)$上有定义，A是一实数，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使得当$|x|>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$或$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.
则称$f(x)$在趋向于无穷大时有极限或收敛，A为其极限值，记为
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$或$f(x)\to A(x\to\infty)$.

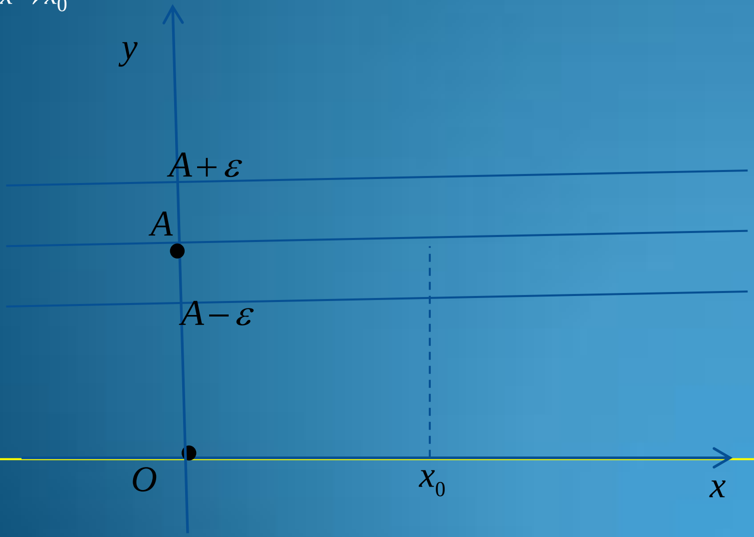
定理. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

函数极限的概念

定义4. 设$f(x)$在x_0的去心邻域内有定义，A是一实数，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$或$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.

则称$f(x)$在趋向于x_0时有极限或收敛，A为其极限值，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\text{或}f(x)\to A\left(x\to x_0\right).$$



定义5. 设$f(x)$在x_0的右侧邻域内有定义，A是一实数，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$0<x-x_0<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$或$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.
则称$f(x)$在x_0点有右极限，A为其极限值，记为$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$,

也记$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)=f(x_0+0)$.

定义6. 设$f(x)$在x_0的左侧邻域内有定义，A是一实数，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$0<x_0-x<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$或$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$.
则称$f(x)$在x_0点有左极限，A为其极限值，记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,

也记$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)=f(x_0-0)$.

定理. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=A$

1. 函数极限的性质

性质1. （唯一性）若一个函数 $f(x)$收敛，则其极限值必唯一.

性质2. （局部有界性）如果一个函数有极限，则此函数在自变量趋近点附近有界.

性质3. （保序性）若$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B,$则

1）当$A>B$时，则在自变量趋近点附近有$f(x)>g(x)$;

2）若在自变量趋近点附近有$f(x)>g(x)$，则$A\geq B$.

2. 函数极限的运算

定理1. (四则运算)设$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B,$ 则

$$\lim\left(f(x)\pm g(x)\right)=A\pm B, \lim\left(f(x)g(x)\right)=AB,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

定理2. (复合运算)设$y=f(\varphi(x))$是由$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合成的函数,如果$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,且在$x_0$的某去心$\delta_0$邻域内$\varphi(x)\neq u_0$, 又$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,则

$$\lim_{x\to x_0}f\left(\varphi(x)\right)=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

分析: 由$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$, $\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0$,使得$0<|u-u_0|<\eta$时, 恒有

$$|f(u)-A|<\varepsilon.$$

由$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$, 对$\eta>0,\exists\delta:0<\delta<\delta_0$,使得$0<|x-x_0|<\delta$时, 恒有

$$0<|\varphi(x)-u_0|<\eta.$$

反例. $f(u)=\begin{cases}0, & u=0\\ 1, & u\neq 0\end{cases}$ $\varphi(x)=0$ 此时$\lim\limits_{u\to 0}f(u)=1$, 而$\lim\limits_{x\to 0}f(\varphi(x))=0$.

函数极限的定式

性质1. 若$f(x)$是基本初等函数，并在x_0点邻域有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

性质2. 若$f(x)$是初等函数，并在x_0点邻域有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

例1. 求$\lim\limits_{x\to 1} e^x \arctan x=\dfrac{\pi}{4}e$

例2. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{5x^2+2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x^2}}{5+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=\dfrac{3}{5}$

例3. 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=0$