线性微分方程解的结构

1. n阶线性方程

形如$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$

的方程为n阶线性方程， 这里$a_{n-1}(x),\cdots,a_1(x),a_0(x)$,

$f(x)$是x的已知函数， $f(x)$称之为方程的非齐次项.

如果$f(x)\equiv 0$， 称为n阶线性齐次方程.

如果$f(x)\neq 0$， 称为n阶线性非齐次方程.

2. 线性方程解的结构

以二阶齐次线性方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$为例.

定理1. 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程的两个解，

则$y=C_1y_1+C_2y_2$也是$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的解.

C_1, C_2是任意常数.

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

证明. 由$y=C_1y_1+C_2y_2$,

$$y'=C_1y_1'+C_2y_2',\ y''=C_1y_1''+C_2y_2''$$

代入$y''+p(x)y'+q(x)y$

$$C_1y_1''+C_2y_2''+p(x)\left[C_1y_1'+C_2y_2'\right]+q(x)\left[C_1y_1+C_2y_2\right]$$

$$=C_1\left[y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1\right]+C_2\left[y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2\right]$$

$$=0$$

定义. 设$y_1,y_2,\cdots,y_n$为定义在区间I内的n个函数,如果存在n个不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n=0$,则称这$n$个函数在区间$I$内**线性相关**,否则称**线性无关**.

线性微分方程解的结构

定理2. 设$y_1, y_2, \cdots, y_n$为I上的n个函数，则

（1）$y_1, y_2, \cdots, y_n$在I上线性相关

$\Leftrightarrow$ 朗斯基行列式 $\equiv 0$

（2）$y_1, y_2, \cdots, y_n$在I上线性无关

$\Leftrightarrow$ 朗斯基行列式 $\not\equiv 0$

朗斯基行列式为
$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

定理3. 设$y_1, y_2, \cdots, y_n$为n阶线性微分方程的线性无关的解，则$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$方程的通解.

3. 线性非齐次方程解的结构

以二阶非齐次线性方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$为例.

定理1. 设y^*是$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$的一个特解，$Y$是$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$的通解，则$y = Y + y^*$是非齐次方程的通解.

解： 将$y = Y + y^*$代入，

$$y'' + p(x)y' + q(x)y$$

$$= \left(Y + y^*\right)'' + p(x)\left(Y + y^*\right)' + q(x)\left(Y + y^*\right)$$

$$= Y'' + p(x)Y' + q(x)Y + \left(y^{*''} + p(x)y^{*'} + q(x)y^*\right)$$

$$= f(x)$$

定理2. 设y_1^*是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$的特解，设y_2^*是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$的特解，那么$y=y_1^*+y_2^*$是$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$的特解.

解： 将$y=y_1^*+y_2^*$代入，

$$y''+p(x)y'+q(x)y$$

$$=\left(y_1^*+y_2^*\right)''+p(x)\left(y_1^*+y_2^*\right)'+q(x)\left(y_1^*+y_2^*\right)$$

$$=y_1^{*\prime\prime}+p(x)y_1^{*\prime}+q(x)y_1^*+\left(y_2^{*\prime\prime}+p(x)y_2^{*\prime}+q(x)y_2^*\right)$$

$$=f_1(x)+f_2(x)$$