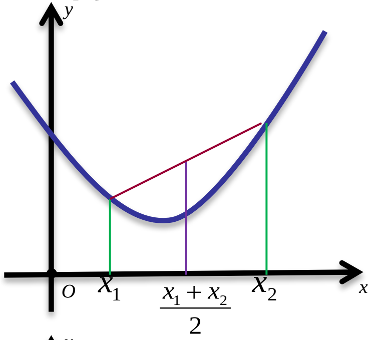
函数（曲线）的凸凹性

1.定 义：

设$f(x)$在区间I上连续，若对$\forall x_1, x_2 \in I$，恒有

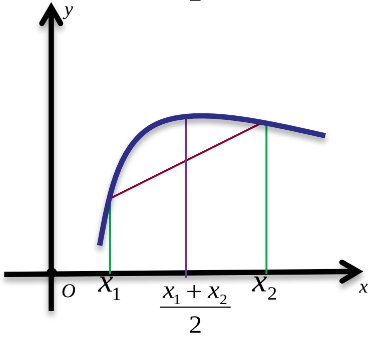
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right],$$

则称$f(x)$(曲线)是下凸的（凹的）.



$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right],$$

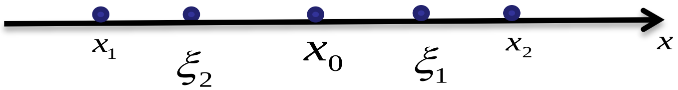
则称$f(x)$(曲线)是上凸的（凸的）.



2.判 定：

定理. 设$f(x)$在区间I上有二阶导数，若$f''(x)\geq 0(\leq 0)$，则$f(x)$为I上的是下凸(上凸）的.

证明： $\forall x_1 < x_2$，记$x_0 = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2)$



$$f(x_2) - f(x_0) = f'(\xi_1)\frac{1}{2}(x_2 - x_1), \quad \xi_1 \in (x_0, x_2)$$

$$f(x_0) - f(x_1) = f'(\xi_2)\frac{1}{2}(x_2 - x_1), \quad \xi_2 \in (x_1, x_0)$$

两式相减，

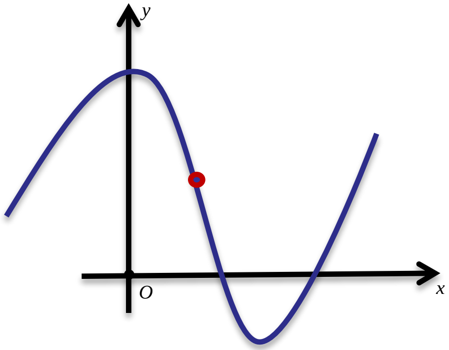
$$f(x_2) + f(x_1) - 2f(x_0) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\left[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)\right],$$

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1) f''(\xi)[\xi_1 - \xi_2] > 0$$

$\Rightarrow f(x_2) + f(x_1) > 2f(x_0) \Rightarrow f(x)$下凸.（上凸同理可得）

3. 定 义：

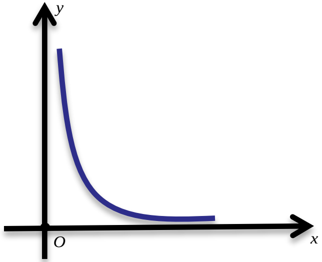
设$f(x)$在x_0点连续，且$y=f(x)$在x_0点左右改变凹向，称点$\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$为$y=f(x)$的**拐点**.

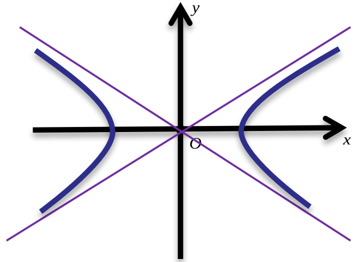


曲线的渐近线

1.定 义：

设Γ为一曲线，l为一直线，若曲线Γ远离原点时与直线l的距离趋近于零，则称l为Γ的一条**渐近线**.





2.分 类：

1） 垂直于x轴的直线做渐近线称为**垂直渐近线**.

直线$x=c$为曲线$y=f(x)$的一条垂直渐近线 $\Leftrightarrow$

点$x=c$为$f(x)$的间断点或端点，

且 $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\infty$或 $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\infty$

2） 一般渐近线(斜渐近线).

直线$y=ax+b$为曲线$y=f(x)$的一条渐近线$\Leftrightarrow$

$y=f(x)$在$-\infty$或$+\infty$处有定义且

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax-b]=0$或$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$

$$\Leftrightarrow a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax].$$

以$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0$为例.

$\Rightarrow f(x)-ax-b=\alpha$(无穷小)$\Rightarrow a=\dfrac{f(x)-b-\alpha}{x}$

两端取极限，得$a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,同理$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$.

特别地，当$a=0$时，$y=b$称为水平渐近线.

曲线的渐近线

例. 求$f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$的渐近线.

解： $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

1) $x=0$是间断点，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1+e^x}{1-e^x}=\infty$

$\Rightarrow x=0$是一垂直渐近线.

2) $$a_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{x(1-e^x)}=0$$

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-0x]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=1$$

$$a_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x(1-e^x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+1}{x(e^{-x}-1)}=0$$

$$b_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=-1$$

$\Rightarrow y=\pm1$是两条水平渐近线.

曲线的作图

步骤：

1）求定义域、值域及特殊点（与x轴、y轴交点）；

2）令$f'(x)=0$,求极值嫌疑点；

3）令$f''(x)=0$,求拐点；

4）求$f(x)$的渐近线（包含向哪个方向趋近）；

5）根据前面信息列表；

6）画图.

哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

例. 作$f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$的图形.

解：$f(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

令$f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$

$\Rightarrow x_1=0,\ x_2=2$

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

因$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2}{(x-1)^3}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2}{(x-1)^3}=+\infty$, $x=1$为垂直渐近线

因$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x(x-1)}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{x-1}-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x-1}=1$

得$y=x+1$为一般渐近线

曲线的作图

列表：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	$+$		$+$
$f(x)$	↗	0	↘	↘	4	↗

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$