# 第二换元积分法

$$\int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int f(u)\mathrm{d}u = \int f(g(x))\mathrm{d}g(x)$$

——第一换元积分公式

$$\int f(u)\mathrm{d}u \overset{u=g(x)}{=} \int f(g(x))\mathrm{d}g(x) = \int f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$$

——第二换元积分公式

1. $\int f\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x.$ 做法：设 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$

例1. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x,$ 令 $\sqrt[6]{x}=t$

$$=\int \frac{1}{t^3+t^2}\mathrm{d}t^6 \quad =6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=6\int \frac{t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int \frac{(t+1)\left(t^2-t+1\right)-1}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$=6\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|\right)+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$$

2. $\int f\left(\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)\mathrm{d}x.$

做法：将$Ax^2+Bx+C$配方，简化后得到以下三种积分：

1) $\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)\mathrm{d}x.$ 令$x=a\sin t$(或$a\cos t$)

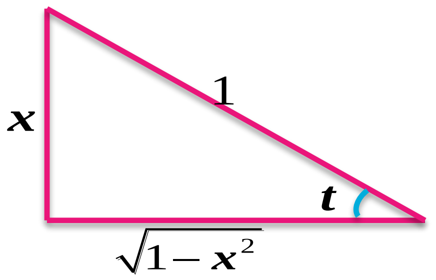
2) $\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)\mathrm{d}x.$ 令$x=a\tan t$(或$a\cot t$)

3) $\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)\mathrm{d}x.$ 令$x=\dfrac{a}{\cos t}$(或$\dfrac{a}{\sin t}$)

# 第二换元积分法

**例2.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x$，令 $x=\sin t$

$$=\int \frac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}\sin t=\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t$$




$$=\int \frac{1}{\sin t}\mathrm{d}t-\int \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$=\ln\left|\frac{1}{\sin t}-\cot t\right|+\cos t+C$$

$$=\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+\sqrt{1-x^2}+C$$

# 有理函数的积分

**定义.** 有理函数是两个多项式的商所表示的函数

$$R(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}$$

**分类:**

$n\geq m$时，$R(x)$称为**假分式**；

$n<m$时，$R(x)$称为**真分式**.

**例如.** $\dfrac{1}{x+1},\dfrac{1}{x^2-x+2},\dfrac{x}{x^2+1},\dfrac{x}{x-2},\dfrac{x^3}{x^2-1}$

## 有理函数的分解：

**结论1：** 假分式=多项式+真分式

例. $$\frac{x^4}{x^2+x+1}=\frac{x^2\left(x^2+x+1\right)-x^3-x^2}{x^2+x+1}$$

$$=x^2+\frac{-x\left(x^2+x+1\right)+x}{x^2+x+1}$$

$$=x^2-x+\frac{x}{x^2+x+1}$$

**结论2：** 真分式$=\sum$ 最简分式

**最简分式有如下四种：**

1）$\dfrac{1}{x+a}$　　2）$\dfrac{1}{(x+a)^n}\ (n\geq 2)$

3）$\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$　　4）$\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\ (n\geq 2)$

$$p^2-4q<0$$

**定理.** 对有理真分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，若 $Q(x)$ 在实数域上能分解成

$$(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{t},$$

则 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 可唯一的分解成下式：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^{\alpha}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\cdots$$

# 有理函数的积分举例

1）$\dfrac{1}{x+a}$；　2）$\dfrac{1}{(x+a)^n}(n\geq 2)$；　3）$\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$；　4）$\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}(n\geq 2)$

例1. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$,　　$\left((x^2+2x+2)'=2x+2\right)$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right|-\int\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)-\arctan(x+1)+C$$

例2. $\int \frac{x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\mathrm{d}x$, $\left(\left(x^2+2x+2\right)'=2x+2\right)$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\mathrm{d}x-\int \frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\mathrm{d}\left(x^2+2x+2\right)-\int \frac{1}{\left(\left(x+1\right)^2+1\right)^2}\mathrm{d}\left(x+1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x^2+2x+2\right)}$$

$$\left(J_n=\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^n}\mathrm{d}x\text{——分部积分}\right)$$

# 三角函数万能代换

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}};\quad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}};\quad \tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}.$$

例1. $\displaystyle\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\left(1+\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{4\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}x,\qquad 令u=\tan\frac{x}{2}$$

$$=\int\frac{(1+u)^2(1+u^2)}{4u}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{u^2+2u+1}{2u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4}u^2+u+\frac{1}{2}\ln|u|+C=\cdots\cdots$$

# 分段函数积分

例2. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1 \\ 3x^2-1, & x>1 \end{cases}$，求$\int f(x)\mathrm{d}x$

解. $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+x+C_1, & x<1 \\ x^3-x+C_2, & x>1 \end{cases}$

由$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)$,

$$\frac{1}{2}+1+C_1=C_2$$

故$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2+x+C, & x\le 1 \\ x^3-x+C+\dfrac{3}{2}, & x>1 \end{cases}$