微积分基本定理

问题：

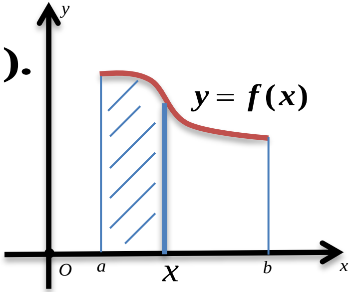
1)已知路程函数$S=S(t)$,求速度$v(t)$.

$$v(t)=S'(t)$$

2)已知速度函数$v(t)$,求$[0,t]$时刻的路程$S(t)$.

$$S(t)=\int_0^t v(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow S'(t)=\left(\int_0^t v(t)\mathrm{d}t\right)'=v(t)$$



定义. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，定积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是x的函数，称此函数$f(x)$在$[a,b]$上的**变限积分函数**，记为

$$\phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$

定理1.（微积分定理第一部分——微分部分）

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x).$

证明： $\phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\phi(x+\Delta x)-\phi(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}f(\xi)\cdot\Delta x$$

$(\xi$介于$x, x+\Delta x$之间$)$

$$=\lim_{\xi\to x} f(\xi)=f(x)$$

变限积分函数

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

例1. 设$f(x)$连续， $\phi(x)=\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$，求$\phi'(x)$.

解： $\phi'(x)=\left(\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right)'=\left(-\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=-f(x)$

例2. 设$f(x)$连续， $\phi(x)=\int_1^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$，求$\phi'(x)$.

解： 设$y=\int_1^u f(t)\mathrm{d}t, u=x^2$

$$\phi'(x)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\left(\int_1^u f(t)\mathrm{d}t\right)'\cdot\left(x^2\right)'$$

$$=2xf(u)=2xf(x^2)$$

一般的变限积分函数：$\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t$

$$\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\phi(x)}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{a}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a}^{\phi(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

公式：$\left(\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right)' = \psi'(x) f(\psi(x)) - \phi'(x) f(\phi(x))$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t.$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

微积分基本定理2

$$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)' = f(x).$$

可以推出$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$为$f(x)$的一个原函数.

记$\phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$\phi(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

若$F'(x)=f(x)$，则$\phi(x)=F(x)+C$

$$\Rightarrow \phi(a)=F(a)+C=0 \Rightarrow C=-F(a)$$

故$\phi(x)=F(x)-F(a)$

所以$\phi(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$

定理.（微积分定理第二部分——积分部分）

设$f(x)\in C[a,b]$, $F'(x)=f(x)$,则$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$

$$=F(x)\big|_a^b$$

例. 计算$\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t$.

$$=-\cos t\big|_0^{\pi}$$

$$=-(\cos\pi-\cos 0)$$

$$=2$$