函数的连续性

1. 增量. 设$y=f(x)$在x_0的邻域有定义， 自变量由x_0变到x， 称$\vartriangle x=x-x_0$

为x_0点自变量的增量， 相应地,$\vartriangle y=f(x)-f(x_0)$为函数增量.

2. 连续. 设$f(x)$在x_0的邻域或单侧邻域内有定义， 且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$或

$\lim\limits_{\vartriangle x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称$f(x)$在$x_0$点处连续.

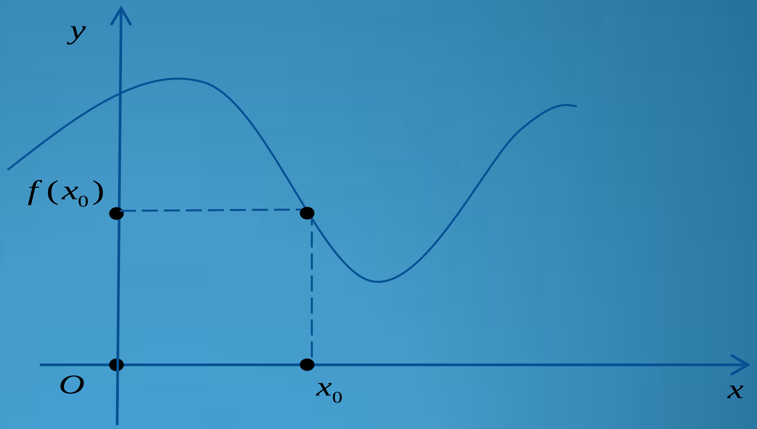
$\Leftrightarrow f(x_0^+)=f(x_0^-)=f(x_0)$

1) 若$f(x_0^+)=f(x_0)$,

称$f(x)$在x_0处右连续；

2) 若$f(x_0^-)=f(x_0)$,

称$f(x)$在x_0处左连续.



连续函数

设$f(x)$在(a,b)上每一点都连续，则称$f(x)$在(a,b)上连续或说$f(x)$是(a,b)上的连续函数，记为$f(x)\in C(a,b)$.

函数的间断点

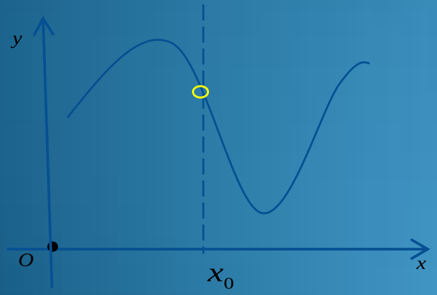
设$y=f(x)$在x_0的去心邻域(或单侧邻域)有定义，且$f(x)$在x_0处不连续，则称x_0为$f(x)$的间断点.

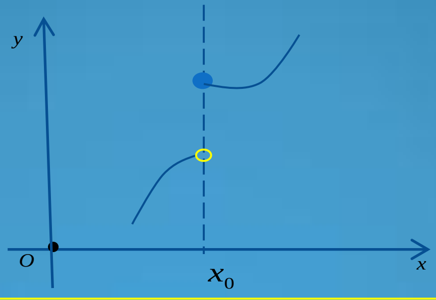
函数间断点的分类：

1）若x_0为$f(x)$的间断点，且$f(x_0^+)$和$f(x_0^-)$都存在，则称此间断点为第一类间断点.

若$f(x_0^+)=f(x_0^-)\neq f(x_0)$，则称此$x_0$为第一类可去间断点；

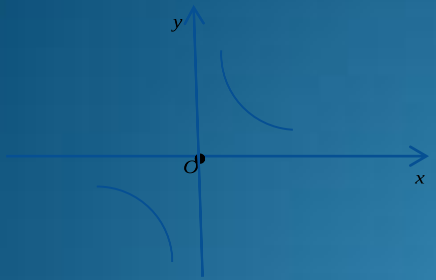
若$f(x_0^+)\neq f(x_0^-)$，则称此x_0为第一类跳跃间断点.





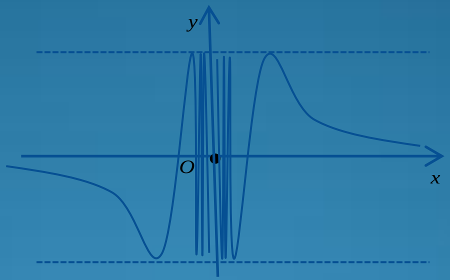
哈尔滨工业大学数学系
Department of Mathematics,HIT

2）左、右极限中至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.



$$y=\frac{1}{x}$$

无穷间断点



$$y=\sin\frac{1}{x}$$

振荡间断点

连续函数性质

定理1. 若$f(x)$和$g(x)$都在点x_0处连续， 则$f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$,

$\dfrac{f(x)}{g(x)}\left(g(x_0)\neq 0\right)$都在点$x_0$处连续.

定理2. 如果$u=\varphi(x)$在点x_0处连续， $u_0=\varphi(x_0)$, 又$y=f(u)$在点x_0处连续， 则复合函数$y=f(\varphi(x))$在点x_0处也连续.

定理3. 单调的连续函数的反函数是单调的连续函数.

定理4. 初等函数在其有定义的邻域内是连续的.

例1. 讨论$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$的连续性.

因$f(x)$在$(-\infty,1)$与$(1,+\infty)$分别为初等函数， 故$f(x)$在其上连续.

因$f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1$，$f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1$，故$f(x)$在1点也连续.

例2. 设$f(x)$对任何实数x_1，x_2满足$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$

且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$，证明$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

证明：取$x_1=x_2=0$, $f(0)=f^2(0)$, 则有$f(0)=0$或$f(0)=1$.

（1）当$f(0)=0$时有$f(x)\equiv 0$, 故$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

（2）当$f(0)=1$时, 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$得$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-1)=0$.

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]&=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x)f(\Delta x)-f(x)]\\&=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}[f(\Delta x)-1]\\&=0.\end{aligned}$$

故$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$.

闭区间连续函数性质

定理1（有界性）. 闭区间上连续函数必有界.

定理2 （最值原理）. 闭区间上连续函数必有最大值和最小值.

定理3 （零点定理）. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续， 且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$， 使得$f(\xi)=0$.

定理4 （介值定理）. 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续， M和m分别 $f(x)$的最大值、 最小值， 则对任何满足$m\le\mu\le M$中 的μ都存在一点$\xi\in[a,b]$， 使得$f(\xi)=\mu$.

定理4（介值定理）. 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，M和m分别$f(x)$的最大值、最小值，则对任何满足$m\le\mu\le M$中的μ都存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\mu$.

证明：令$F(x)=f(x)-\mu$, 则有$F(x)\in C[a,b]$.

设$f(x)$在x_1点取得最大值$f(x_1)=M$，在x_2点取得最小值$f(x_2)=m$.

$$F(x_1)=M-\mu\ge 0,\qquad F(x_2)=m-\mu\le 0$$

(1)若$F(x_1)=0$或$F(x_2)=0$，则x_1或x_2为方程$F(x)=0$的根；

(2)若$F(x_1)$，$F(x_2)$均不为0，即$F(x_1)>0, F(x_2)<0$

由零点定理，方程$F(x)=0$在(a,b)内有根.

综上，方程$f(x)=\mu$在$[a,b]$上必有根.

例. 设$f(x)\in C[0,1]$, $\underset{x\in[0,1]}{Max}\ f(x)=1$, $\underset{x\in[0,1]}{Min}\ f(x)=0$, 证明方程 $f(x)=x$在[0, 1]上必有根.

证明： 令$F(x)=f(x)-x$, 则有$F(x)\in C[0,1]$.

设$f(x)$在x_1点取得最大值$f(x_1)=1$， 在x_2点取得最小值$f(x_2)=0$.

$$F(x_1)=f(x_1)-1\geq 0,\quad F(x_2)=f(x_2)-1\leq 0$$

(1)若$F(x_1)=0$或$F(x_2)=0$， 则x_1或x_2为方程$F(x)=0$的根；

(2)若$F(x_1)$， $F(x_2)$均不为0， 即$F(x_1)>0, F(x_2)<0$

由零点定理， 方程$F(x)=0$在（0,1）内有根.

综上， 方程$f(x)=x$在[0, 1]上必有根.