1. 无穷小

定义1. 称以0为极限的函数或数列为自变量趋向下的无穷小（量).

常用符号α, β, γ来表示.

例. $\frac{1}{x}$非无穷小, $\frac{1}{x}\ (x \to \infty)$是无穷小.

$\frac{1}{n}\ (n \to \infty)$是无穷小，0是无穷小.

2. 无穷大

定义2. 设$\{x_n\}$为一数列，如果对$\forall M > 0$, $\exists N$, 当$n > N$时，有$|x_n| > M$, 这时称x_n是n趋近于∞时的无穷大量.

同样可定义$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

3. 两者的关系

定理. 无穷大的倒数为无穷小.

非零无穷小的倒数为无穷大.

无穷小的性质

性质1. 有限多个无穷小的和、积仍为无穷小.

无穷多个无穷小的和、积未必是无穷小.

性质2. 有界量与无穷小之积仍为无穷小.

分析. 设 $\lim f(x)=0, |g(x)|\le M.$

$$0\le |f(x)g(x)|\le M|f(x)|\to 0$$

例. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin nx\cos x}{n}.$

因 $\dfrac{\cos x}{n}\to 0$，而 $|\sin nx|\le 1$，故原式=0.

无穷小的性质

性质3. 设$\lim f(x)$, $\lim g(x)$均存在，则$\lim f(x)=\lim g(x)$

$$\Leftrightarrow f(x)=g(x)+\alpha(\text{无穷小}).$$

分析."$\Leftarrow$" $f(x)=g(x)+\alpha$,

两边取极限得$\lim f(x)=\lim g(x)+\lim\alpha$

则有$\lim f(x)=\lim g(x)$

"$\Rightarrow$"由$\lim f(x)=\lim g(x)$,

得$\lim[f(x)-g(x)]=0$,

即$f(x)-g(x)=\alpha(\text{无穷小})$.

例. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}-ax-b\right)=0$, 求$a,b$.

解. 由题意, $\dfrac{1+e^x}{1-e^x}-ax-b=\alpha$(无穷小)

$$a=\frac{1+e^x}{x\left(1-e^x\right)}-\frac{b+\alpha}{x},$$ 两端取极限

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x\left(1-e^x\right)}-\lim_{x\to+\infty}\frac{b+\alpha}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{x\left(1-e^x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+1}{x\left(e^{-x}-1\right)}=0$$

$$b=\frac{1+e^x}{1-e^x}-ax-\alpha=\frac{1+e^x}{1-e^x}-\alpha,$$ 两端取极限

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{1-e^x}-0=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=-1$$

无穷小的比较

例如： $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n^3}$

设α，β都是自变量统一趋向下的无穷小.

1） 若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则称$\alpha$是$\beta$的高阶无穷小，记$\alpha=o(\beta)$.

同时称β是α的低阶无穷小.

2） 若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=c\neq 0$，则称$\alpha$与$\beta$是同阶无穷小.

3） 若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则称$\alpha$与$\beta$是等价无穷小，记$\alpha\sim\beta$.

4） 若$\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=c\neq 0$，则称$\alpha$是$\beta$的$k$价无穷小.

等价无穷小代换

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

解. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{3x}{5x}\quad=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{5x}\quad=\dfrac{3}{5}$

若 $\alpha\sim\alpha',\ \beta\sim\beta'$,

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\alpha'}\cdot\frac{\beta'}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\quad=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$$

定理. 若 $\alpha\sim\alpha',\ \beta\sim\beta'$, 则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

常见的等价无穷小. 如果 $\square\to 0$,

$$\square\sim\sin\square\sim\tan\square\sim\arcsin\square\sim\arctan\square\sim e^{\square}-1\sim\ln(1+\square)\sim\frac{(1+\square)^{\alpha}-1}{\alpha}$$

等价无穷小代换

如果$\square \to 0$,

$$\square \sim \sin\square \sim \tan\square \sim \arcsin\square \sim \arctan\square \sim e^{\square}-1 \sim \ln(1+\square) \sim \frac{(1+\square)^{\alpha}-1}{\alpha}$$

例1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{3n^2-1}\cdot\sin\frac{2}{n}\right)$. $\left(\sin\frac{2}{n}\sim\frac{2}{n}\right)$

解. 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{3n^2-1}\cdot\frac{2}{n}\right)=\frac{2}{3}$

例2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\arctan x}$ $(\arctan x\sim x)$

解. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}$$

例3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^{x}-1\right)\cot\dfrac{\pi}{2}x}{x\ln x-x^{3}\ln x}$

解. 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(e^{x\ln x}-1\right)}{x\ln x\left(1-x^{2}\right)}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}x}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}\quad\left(e^{x\ln x}-1\sim x\ln x\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x\ln x(1+x)(1-x)}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2}x}{\sin\dfrac{\pi}{2}x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\cos\dfrac{\pi}{2}x}{(1-x)}\qquad(\text{令}x-1=t)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)}{-t}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\dfrac{\pi}{2}t}{-t}=\frac{\pi}{4}$$