罗尔中值定理

设函数$f(x)$满足：

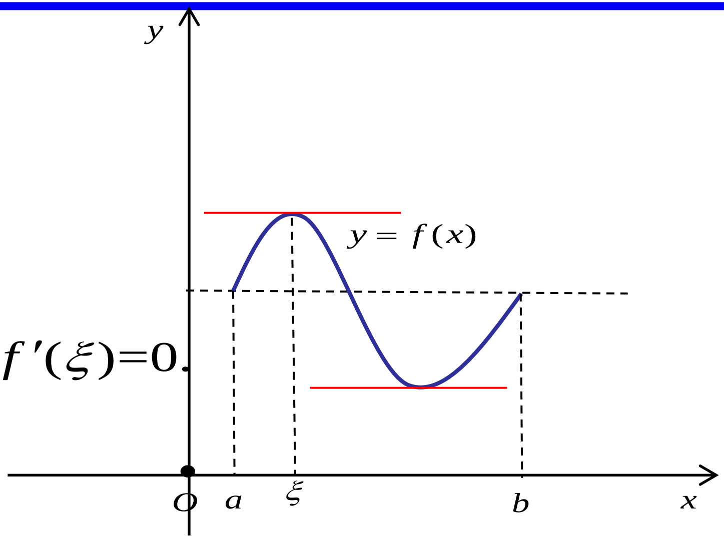
(1)在$[a,b]$上连续；

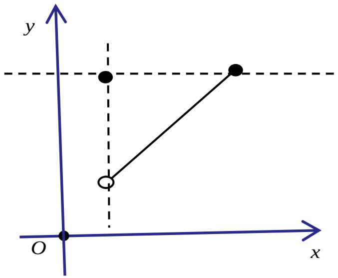
(2)在(a,b)内可导；

(3) $f(a)=f(b)$;

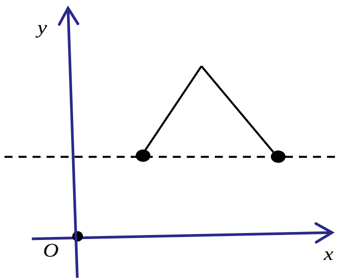
则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$.

或说$f'(x)=0$在(a,b)内有根.

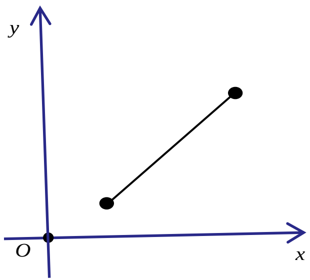




缺条件1

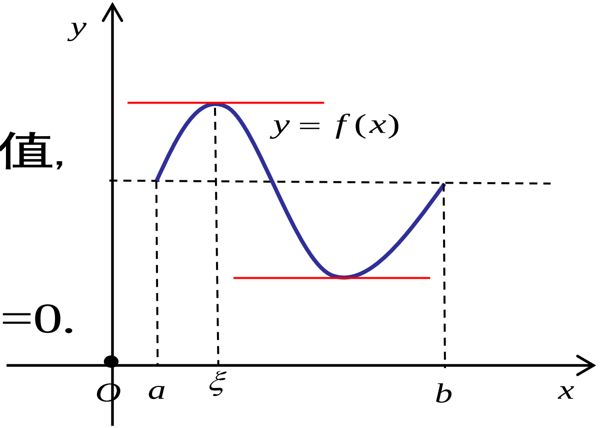


缺条件2



缺条件3

罗尔中值定理



证明： 由$f(x)$在$[a,b]$上连续，

$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值，

分别记为M和m.

如果$M=m$，则$f(x)\equiv C$，即$f'(x)=0$.

如果$M>m$，由$f(a)=f(b)$，

则M与m中至少有一个不在端点处取到，

不妨设$M=f(\xi)\neq f(a), \xi\in(a,b)$.

$$\left.\begin{aligned} f'_+(\xi) &= \lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\le 0 \\ f'_-(\xi) &= \lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\ge 0 \end{aligned}\right\} 0\le f'_-(\xi)=f'(\xi)=f'_+(\xi)\le 0$$

即$f'(\xi)=0$

推论（费马引理）：

设$f(x)$在x的邻域内有定义，且$f(x_0)$是$f(x)$在此邻域内的最值，又$f'(x_0)$存在，则$f'(x_0)=0.$

罗尔中值定理应用举例

例1. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续， 在$(0,1)$内可导， $f(1)=0$

证明： 存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0.$

（分析）. 构造辅助函数, $F'(x)=f(x)+xf'(x)$

证明： 设$F(x)=xf(x)$, 易见$F(x)$在$[0,1]$上连续,

在$(0,1)$内可导, 且$F(0)=F(1)=0$

由罗尔定理， 存在一点$\xi\in(0,1)$, 使$F'(\xi)=0$

即$F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

例2. 设$f(x)$在$[a,b]$上连续， 在(a,b)内可导，

$f(a)=f(b)=0.$

证明： 存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=f'(\xi)$.

(分析). 构造辅助函数, $F'(x)=\big(f(x)-f'(x)\big)g(x)=0$

即$F'(x)=f(x)g(x)-f'(x)g(x)$, $g'(x)=-g(x)$

证明： 设$F(x)=e^{-x}f(x)$,易见$F(x)$在$[a,b]$上连续，

在(a,b)内可导,且$F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理， 存在一点$\xi\in(a,b)$,使$F'(\xi)=0$

又$F'(\xi)=-e^{-\xi}f(\xi)+e^{-\xi}f'(\xi)=0$

即$f(\xi)=f'(\xi)$.

例3. 设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数， 且$f(0)=f(1)=0$,

又$F(x)=(x-1)^2 f(x)$.

证明： 存在$\xi\in(0,1)$, 使得$F''(\xi)=0$.

（分析）.$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f'(x)$,

但$F'(0)=f''(0)$, $F'(1)=0$, 需找一点$c\in(0,1)$, 使$F'(c)=0$.

证明： 易见$F(x)=(x-1)^2 f(x)$在$[0, 1]$上连续,

在$(0,1)$内可导, 且$F(0)=F(1)=0$

由罗尔定理， 存在一点$c\in(0,1)$, 使$F'(c)=0=F'(1)$.

又$F'(x)$在$[c,1]$内连续， 在$(c,1)$内可导,

再由罗尔定理， 存在一点$\xi\in(c,1)\subset(0,1)$, 使$F''(\xi)=0$

拉格朗日中值定理

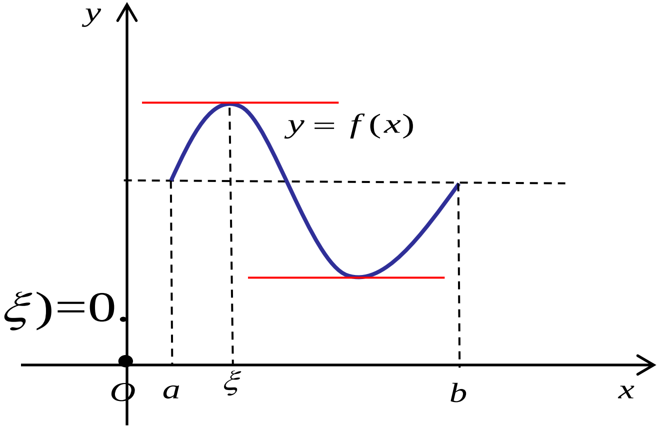
设函数$f(x)$满足：

(1)在$[a,b]$上连续；

(2)在(a,b)内可导；

(3) $f(a)=f(b)$;

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f'(\xi)=0$.



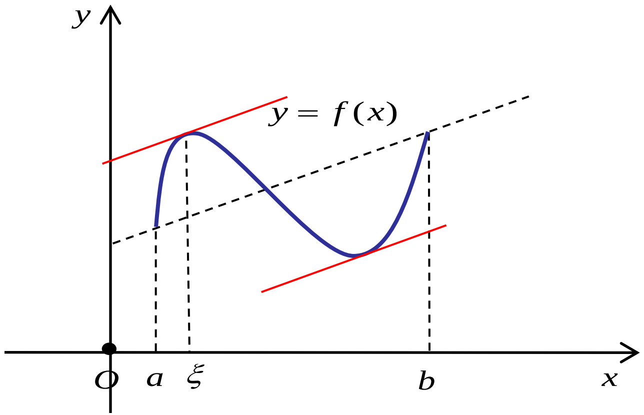
设函数$f(x)$满足：

(1)在$[a,b]$上连续；

(2)在(a,b)内可导；

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，

使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



拉格朗日中值定理

设函数$f(x)$满足：

(1)在$[a,b]$上连续；

(2)在(a,b)内可导；

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(分析) . $F'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

证明： 设$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$,

易见$F(x)$在$[a,b]$上连续， 在(a,b)内可导，

且$F(a)=f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$

$F(b)=f(b)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}b=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=F(a)$

由罗尔定理， 存在一点$\xi\in(a,b)$,使$F'(\xi)=0$

即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理应用举例

更一般地形式：

设函数$f(x)$在(a,b)内可导，对$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$,

存在$\xi \in (a,b)$,使$f'(\xi)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

$$\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)\cdot(x_1-x_2)$$

若记$x_1=x, x_2-x_1=\Delta x$,结论可以表示为

$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\cdot\Delta x.$ (ξ介于$x, x+\Delta x$之间)

$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\cdot\Delta x.$——微分近似计算公式

又称拉格朗日中值定理为有限增量定理，
或微分中值定理.

拉格朗日中值定理应用举例

例1. 设$x>0$,证明:$\dfrac{1}{x}>\ln(1+\dfrac{1}{x})>\dfrac{1}{1+x}$.

(分析).$\ln(1+\dfrac{1}{x})=\ln(1+x)-\ln x=f(1+x)-f(x)$

$f(t)=\ln t,\ t\in[x,x+1]\quad f'(t)=\dfrac{1}{t}$

证明: 设$f(t)=\ln t$, 易见$f(t)$在$[x,1+x]$上连续,

在$(x,1+x)$内可导,由拉格朗日中值定理,

存在一点$\xi\in(x,1+x)$,使$f(1+x)-f(x)=f'(\xi)$

$\Rightarrow\ln(1+x)-\ln x=\dfrac{1}{\xi}\ \Rightarrow\ln(1+\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{\xi}$ 又$x<\xi<x+1$

$\Rightarrow\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{\xi}>\dfrac{1}{1+x}\ \Rightarrow\dfrac{1}{x}>\ln(1+\dfrac{1}{x})>\dfrac{1}{1+x}$.

例2. 设$f(x)$在(a,b)内有二阶导数，且$f''(x)>0$,

证明：对(a,b)内任意两点x_1,x_2,有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)].$$

证明：$f(x_1)+f(x_2)-2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ (不妨设$x_2\ge x_1$)

$$=\left[f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]-\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)\right]$$

$$=f'(c_1)\left(x_2-\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f'(c_2)\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\right)$$

$$=\frac{x_2-x_1}{2}[f'(c_1)-f'(c_2)]$$ (其中c_1介于$x_2,\frac{x_1+x_2}{2}$之间，c_2介于$x_1,\frac{x_1+x_2}{2}$之间.)

$$=\frac{x_2-x_1}{2}(c_1-c_2)f''(\xi)$$ (其中ξ介于c_1,c_2之间)

$\ge 0.$

拉格朗日中值定理的推论

推论1. 在区间I上，若$f'(x)>0(<0)$，则$f(x)$单增（单减）.

证明： 在区间I上任取两点x_1, x_2，设$x_1 < x_2$，

由拉格朗日中值定理，有

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),\ (x_1<\xi<x_2).$$

因为$f'(x)>0,\ x\in I$. 故$f(x_2)-f(x_1)>0$.

推论2. 设$f(x), g(x)$在(a,b)内可导，则$f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)+C$.

证明： "$\Leftarrow$"两边求导，结论显然成立.

"$\Rightarrow$"设$F(x)=f(x)-g(x)$，在区间(a,b)上任取两点x_1, x_2.

$$F(x_1)-F(x_2)=(x_1-x_2)\cdot F'(\xi)=0.\ (\xi介于x_1,x_2之间)$$

故$F(x)$为常值函数，即$f(x)=g(x)+C$.

例. 证明:$\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}=\arctan(n+1)-\arctan n.$

证明: 设$\phi(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2+x+1},\psi(x)=\arctan(x+1)-\arctan x$

$$\phi'(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)^2}\cdot\frac{-2x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-2x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2+1}$$

$$=\frac{-2x-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}$$

$$\psi'(x)=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{-2x-1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+2}=\phi'(x)$$

$\Rightarrow\phi(x)=\psi(x)+C$, 取$x=0$,得$C=0.$

$\Rightarrow\phi(x)=\psi(x)$, 故$\phi(n)=\psi(n).$

柯西中值定理

设函数$f(x)$满足:(1)在$[a,b]$上连续;(2)在(a,b)内可导;

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

设函数为参数方程形式:$\begin{cases} x=g(t) \\ y=h(t) \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} t=\alpha\text{时}, g(\alpha)=a, h(\alpha)=f(a). \\ t=\beta\text{时}, g(\beta)=b, h(\beta)=f(b). \end{array}\right\}\Rightarrow\text{右边}=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{h'(t)}{g'(t)} \quad \Rightarrow\text{左边}=\frac{h'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{h(\beta)-h(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}$$

设函数$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,$g'(x)\neq 0$,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$