# 微元法

## 1.方 法：

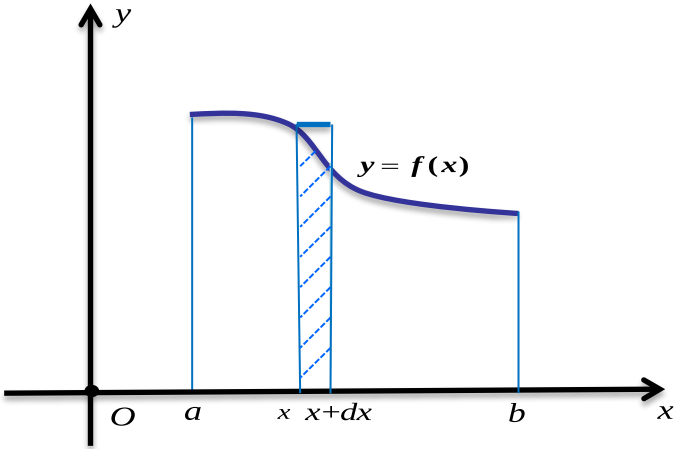
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

1）所求量满足可加性；

2）存在实数区间$[a,b]$与所求量对应；

3）$\forall x\in[a,b]$,点区间$[x,x+\mathrm{d}x]$所对应分量$\mathrm{d}S=f(x)\mathrm{d}x$,

则$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



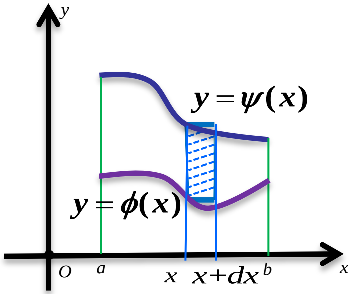

## 2.函 数 平 均 值：

设$f(x)$在$[a,b]$上可积,则$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为$f(x)$在$[a,b]$上的平均值.

# 平面图形面积

## 直角坐标系下：

$X-$型：$\begin{cases} a \le x \le b \\ \phi(x) \le y \le \psi(x) \end{cases}$




由微元法，$\forall x \in [a,b]$，点区间$[x, x+\mathrm{d}x]$所对应的面积微元

$$\mathrm{d}S = [\psi(x)-\phi(x)]\mathrm{d}x,$$

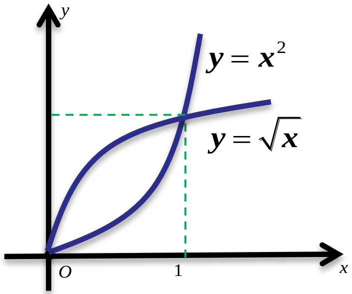
故图形面积为$S = \int_a^b [\psi(x)-\phi(x)]\mathrm{d}x.$

$Y-$型：$\begin{cases} a \le y \le b \\ \phi(y) \le x \le \psi(y) \end{cases}$ 同理，面积为$S = \int_a^b [\psi(y)-\phi(y)]\mathrm{d}y.$

**例1.** 求曲线$y = x^2$和$x = y^2$所围图形面积.

**解：** $S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \mathrm{d}x$

$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$



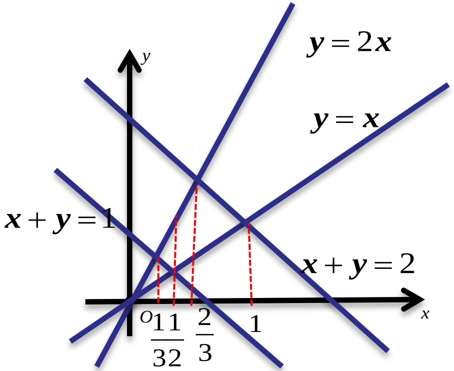

**例2.** 求由$y = x$，$y = 2x, x + y = 1, x + y = 2$所围图形面积.

**解：** $S = \int_{1/3}^{1/2} [2x - (1 - x)] \mathrm{d}x$

$+ \int_{1/2}^{2/3} [2x - x] \mathrm{d}x$

$+ \int_{2/3}^{1} [2 - x - x] \mathrm{d}x$

$= \cdots$

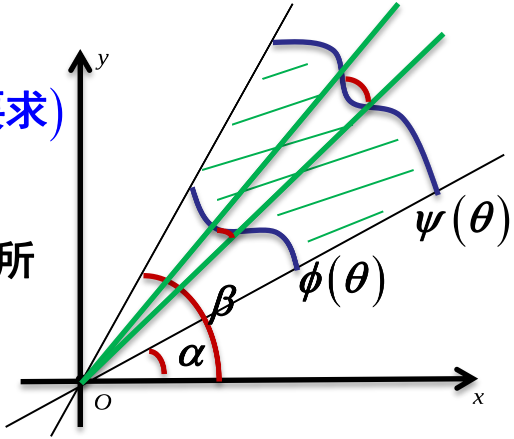


# 平面图形面积



极坐标系下：

$$\begin{cases}\alpha \le \theta \le \beta \\ \phi(\theta) \le r \le \psi(\theta)\end{cases} \qquad \begin{cases} a \le r \le b \\ \phi(r) \le \theta \le \psi(r)\end{cases}$$ （不做要求）

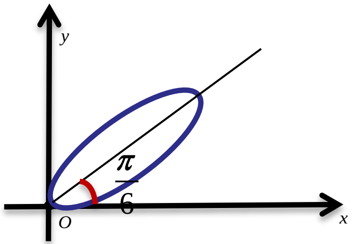



由微元法，$\forall \theta \in [\alpha,\beta]$，点区间$[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$所对应的面积微元

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\left[\psi^2(\theta) - \phi^2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta,$$

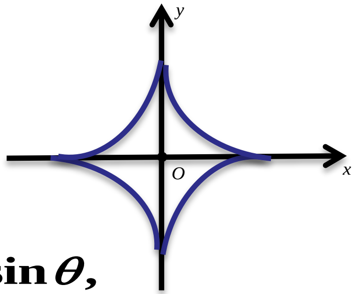
故图形面积为$S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \left[\psi^2(\theta) - \phi^2(\theta)\right]\mathrm{d}\theta.$

**例1.** 求三叶玫瑰线$r = a\sin 3\theta\,(a>0)$所围图形面积.




**解：** $S = 6\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{1}{2}(a\sin 3\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$

例2. 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\,(a>0)$所围图形面积.




分析：令$x^{\frac{1}{3}}=X, y^{\frac{1}{3}}=Y, a^{\frac{1}{3}}=A,$

则$X^2+Y^2=A^2,$

$$\Rightarrow x^{\frac{1}{3}}=X=A\cos\theta,\ y^{\frac{1}{3}}=Y=A\sin\theta,$$

$$\Rightarrow x=A^3\cos^3\theta=a\cos^3\theta, y=a\sin^3\theta$$

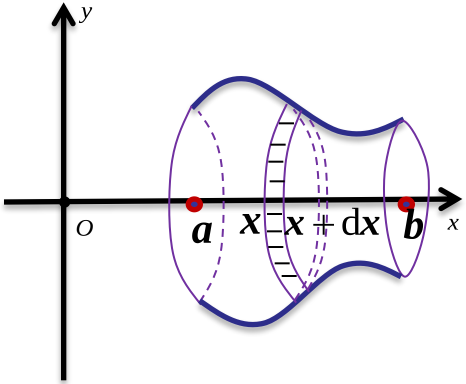
解：曲线参数方程$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}$

$$S=4\int_0^a y\,\mathrm{d}x \quad =4\int_{\pi/2}^{0} a\sin^3\theta\,\mathrm{d}a\cos^3\theta$$

$$=12a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

# 旋转体体积

1. 由曲线$y=f(x), x=a, x=b$及$x$轴所围图形绕$x$轴旋转一周所形成旋转体体积




由微元法，$\forall x\in[a,b]$,点区间$[x,x+\mathrm{d}x]$所对应的体积微元

$$\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\mathrm{d}x,$$

故体积为$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$

2. 由曲线$x=f(y), y=a, y=b$及$y$轴所围图形绕$y$轴旋转一周所形成旋转体体积

$$V=\pi\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y.$$

例1. 求半径为$R$的球体体积.

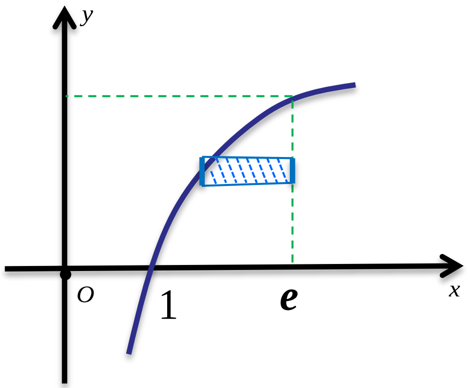
解： 将球看成$x^2+y^2=R^2$所围图形绕$x$轴旋转成的旋转体

$$V=\pi\int_{-R}^{R}y^2\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi R^3$$

例2. 求由$y=\ln x$, 直线$x=e$及$x$轴所围图形绕$x=e$旋转所得旋转体体积.

解： $$V=\pi\int_0^1(e-x)^2\,\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^1\left(e-e^y\right)^2\mathrm{d}y$$



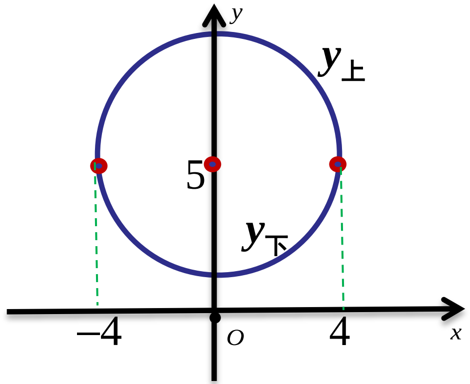
**例3.** 求圆$x^2+(y-5)^2\le 16$绕$x$轴旋转形成旋转体体积.

**解：** $V=2\pi\int_0^4 y_{上}^2\,\mathrm{d}x-2\pi\int_0^4 y_{下}^2\,\mathrm{d}x$

$$=2\pi\int_0^4\left(5+\sqrt{16-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$-2\pi\int_0^4\left(5-\sqrt{16-x^2}\right)^2\mathrm{d}x$$

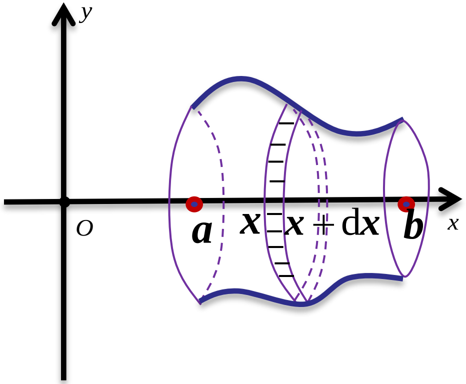
$$=40\pi\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$$



# 横截面积已知的空间体体积



设有一空间体介于$x$轴上$x=a$和$x=b$点的两垂直于$x$轴的平面之间，




过$x$点与$x$轴垂直的平面截空间体所得截面积为$S(x)$

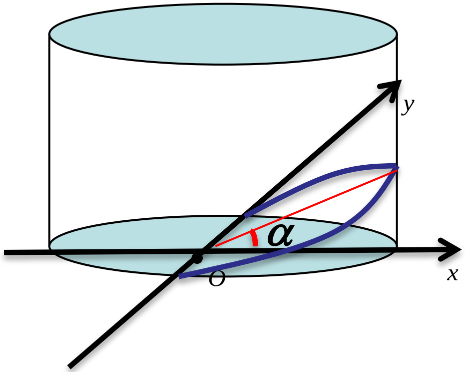
由微元法，$\forall x\in[a,b]$,点区间$[x,x+\mathrm{d}x]$所对应的体积微元

$$\mathrm{d}V=S(x)\mathrm{d}x,$$

故体积为$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$

# 横截面积已知的空间体体积

**例.** 设有一正椭圆圆柱体，其底的长轴、短轴分别为$2a,2b$.用过其底上短轴且与底面成$\alpha$角$\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$的平面截此柱体得到一楔形体，求此楔形体体积$V$.




**解：** 取柱体底面短轴为$y$轴，如图

底面方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$$V=2\int_0^b \frac{1}{2}x\cdot x\tan\alpha\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^b a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\tan\alpha\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}a^2 b\tan\alpha$$

1.直角坐标系下曲线:

设曲线$C: y=f(x), x\in[a,b]$,

弧长微元$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$

由微元法，$S=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx$

例1. 求曲线$y=\ln\left(1-x^2\right), x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$的长度.

解: $y'=-\dfrac{2x}{1-x^2}$, $\quad 1+y'^2=1+\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)^2$,

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2}{\left(1-x^2\right)^2}}dx=\cdots$$

# 曲线的弧长的计算



## 2.参数曲线长度：

若曲线为$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$t\in[a,b]$，

由微元法，$s=\int_a^b\sqrt{(\phi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$

## 3.极坐标系下曲线长度：

若曲线为曲线为$r=r(\theta)$，$\theta\in[a,b]$，

由微元法，$s=\int_a^b\sqrt{(r'(\theta))^2+(r(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$

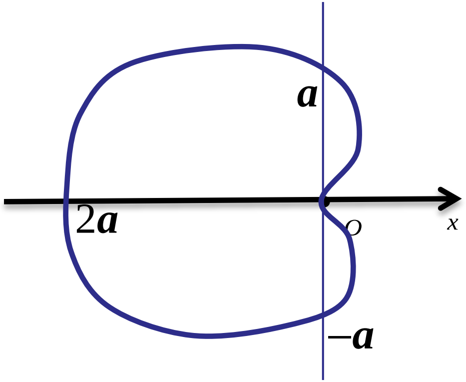
例2. 求心脏线$r=a(1-\cos\theta)$的长度$(a>0)$.

解：$r'=a\sin\theta$

$$r'^2+r^2=a^2\left[\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2\right]$$

$$=a^2[2-2\cos\theta]$$

$$=4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$




故长度$S=\int_0^{\pi}\sqrt{(r'(\theta))^2+(r(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$

$$=2\int_0^{\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$$

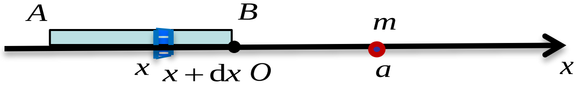
$$=8a$$

## 引力、液体压力、做功:

**例1.** 设有一长度$l$米，质量$M$千克的均匀细杆$AB$(如图)

在细杆延长线上距$B$点$a$米处有

一质量为$m$千克的质点，




求细杆$AB$对质点引力$P$(引力系数$k>0$).

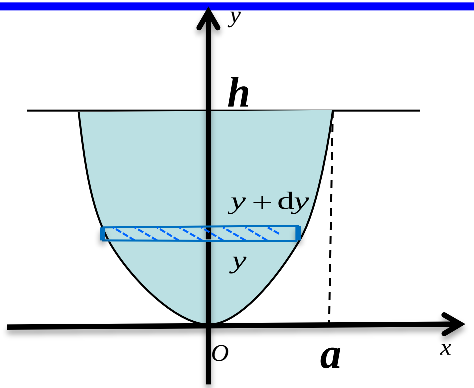
**解:** 如图取坐标，由微元法，$\forall x\in[-l,0]$,

点区间$[x,x+\mathrm{d}x]$所对应的引力微元

$$\mathrm{d}F=\frac{km\frac{M}{l}\mathrm{d}x}{(l-x+a)^2}$$

故引力$P=\int_{-l}^{0}\frac{km\frac{M}{l}}{(l-x+a)^2}\mathrm{d}x$

例2. 设水库有一抛物型闸门（如图），其上沿宽$2a$米，高$h$米，若水库蓄满水，求此闸门所承受的压力$P$(水密度是1).



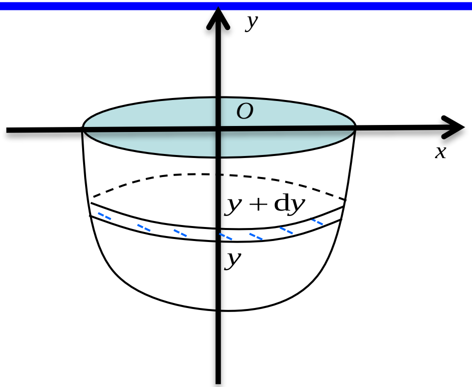

解：如图选取坐标系，

由微元法，$\forall y \in [0,h]$，点区间$[y, y+\mathrm{d}y]$所对应的压力微元

$$\mathrm{d}P = \rho g(h-y)2|x|\mathrm{d}y$$

将$(a,h)$代入$y = Ax^2$，得$A=\dfrac{h}{a^2}$，$\Rightarrow y=\dfrac{h}{a^2}x^2$

故$P=\rho g\int_0^h (h-y)\dfrac{2a}{\sqrt{h}}\mathrm{d}y$




**例3.** 设半径为$R$的半球形容器（如图），让此容器充满水，求将水全部抽出所做的功$W$(水密度是1).

**解：** 如图选取坐标系，

由微元法，$\forall y\in[-R,0]$，将$[y,y+\mathrm{d}y]$层水抽出所做的功

$$\mathrm{d}W=FS=mg(-y)=g\rho\pi x^2\mathrm{d}y(-y)$$

故$W=\int_{-R}^{0}(-\pi yg)(R^2-y^2)\mathrm{d}y$