原函数与不定积分

1. 概 念

定义1. 设$F(x)$在I上可导，且$F'(x)=f(x)$,称
$F(x)$是$f(x)$在I上的一个**原函数**.

定理. 设$f(x)$在I上有原函数$F(x)$，则$F(x)$在I上
原函数有无穷多，它们之间统一表达式为
$F(x)+C$.(C为任意常数)

分析. 设$f(x)$的任意一个原函数为$G(x)$,
则$G'(x)=f(x)=F'(x)$

$$\Leftrightarrow G(x)=F(x)+C.$$

1. 概 念

定义2. 设$F(x)$是$f(x)$的任一原函数,则$f(x)$的全部原函数的一般表达式$F(x)+C$称为$f(x)$的**不定积分**.

记作$\int f(x)\mathrm{d}x$, 即

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

其中, $\int$ 叫作**积分号**, $f(x)dx$叫作**被积表达式**,

$f(x)$叫作**被积函数**, x叫作**积分变量**.

2.性质

1) $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

2) $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$ 或 $\int \mathrm{d}\, f(x) = f(x)+C$

3) $\int [af(x)]\mathrm{d}x = a\int f(x)\mathrm{d}x,$

4) $\int [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x.$

3.原函数的存在性

1） 连续函数一定有原函数.

2） 第一类间断点处无原函数.

不定积分的基本公式

1) $\int 0\mathrm{d}x = C$;

2) $\int 1\mathrm{d}x = x + C$;

3) $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + C\ (\mu \neq -1)$;

4) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;

5) $\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$;

6) $\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C$;

7) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;

8) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;

9) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$;

10) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

12) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C = -arc\cot x + C$;

例1. $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$

解：原式 $=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$

例2. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

解：原式 $=\int\left(\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$$=-\cot x-\tan x+C$$

例3. $\int \tan^2 x\mathrm{d}x$

解：原式$=\int\left(\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\tan x-x+C$$