常系数齐次线性微分方程

1. 定义

称$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=f(x)$为$n$阶常系数线性齐次微分方程，其中$a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$为常数.

如果$f(x)\equiv 0$，称为n阶常系数线性齐次方程.

如果$f(x)\neq 0$，称为n阶常系数线性非齐次方程.

2. n阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

设其解为$y=e^{\lambda x}$，将$y'=\lambda e^{\lambda x},y''=\lambda^2e^{\lambda x},\cdots,y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$代入

得$\lambda^n e^{\lambda x}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\cdots+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_0e^{\lambda x}=0$

$\Rightarrow \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$，称此方程为原方程的特征方程

称此方程的根为原方程的特征根.

常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

$\Rightarrow \lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$，(特征方程)

(1) 如果λ是单实特征根， 则$y=e^{\lambda x}$.

(2) 如果λ是k实特征根， 则方程基础解系中对应的k个解$y_1=e^{\lambda x},y_2=xe^{\lambda x},\cdots,y_k=x^{k-1}e^{\lambda x}$

以$y''+py'+qy=0$为例，

设λ是二重实特征根,则$\lambda^2+p\lambda+q=0$

两个特征根$\lambda_1+\lambda_2=2\lambda=-p$, 将$y=xe^{\lambda x}$代入方程，

因$y'=e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x}$，$y''=2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x}$

$$2\lambda e^{\lambda x}+\lambda^2xe^{\lambda x}+p\left(e^{\lambda x}+\lambda xe^{\lambda x}\right)+qxe^{\lambda x}$$
$$=\left(\lambda^2+p\lambda+q\right)xe^{\lambda x}+(2\lambda+p)e^{\lambda x}=0$$

(3) 如果$\lambda=\alpha\pm i\beta$是单复特征根,则方程基础解系中对应的两个解$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

由欧拉公式，$e^{i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$

$$\left.\begin{aligned} y_1&=e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x\\ y_2&=e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$是方程的解.

$\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$也是方程的解.

(4) 如果$\lambda=\alpha\pm i\beta$是方程的k重复特征根，

则方程基础解系中对应的$2k$个解

$$\begin{aligned} &y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x, && y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x,\\ &xe^{\alpha x}\cos\beta x, && xe^{\alpha x}\sin\beta x,\\ &\cdots && \cdots\\ &x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, && x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,\end{aligned}$$

例1. 求方程$y''+3y'+2y=0$的通解.

解： 特征方程$\lambda^2+3\lambda+2=0$

特征根为$\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$

故通解为$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

例2. 求方程$y''+2y'+y=0$的通解.

解： 特征方程$\lambda^2+2\lambda+1=0$

特征根为$\lambda_1=\lambda_2=-1$

故通解为$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

例3. 求方程$y'' + y = 0$的通解.

解： 特征方程$\lambda^2+1=0$

特征根为$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

故通解为$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

例4. 求方程$y^{(4)} + 2y''' - y'' = 0$的通解.

解： 特征方程$\lambda^4+2\lambda^3-\lambda^2=0$

$$\Rightarrow \lambda^2\left(\lambda^2+2\lambda-1\right)=0$$

特征根为$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1+\sqrt{2}, \lambda_4 = -1-\sqrt{2}$

故通解为$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\left(-1+\sqrt{2}\right)x} + C_4 e^{\left(-1-\sqrt{2}\right)x}$

常系数非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

例1. 求方程$y'' - y = x^2$的特解.

解： 设$y^* = ax^2 + bx + c$, $y^{*\prime} = 2ax + b$,

$y^{*\prime\prime} = 2a$,代入方程，$2a - ax^2 - bx - c = x^2$

$\Rightarrow a = -1, b = 0, c = -2$,故方程特解为$y^* = -x^2 - 2$

例2. 求方程$y'' - y' = x^2$的特解.

解： 设$y^* = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $y^{*\prime} = 3ax^2 + 2bx + c$,

$y^{*\prime\prime} = 6ax + 2b$, 代入方程, $6ax + 2b - 3ax^2 - 2bx - c = x^2$

$\Rightarrow a = -\dfrac{1}{3}, b = -1, c = -2$,故方程特解为$y^* = -\dfrac{1}{3}x^2 - x - 2$

可以设$y^* = x\left(ax^3 + bx^2 + cx\right)$

常系数非齐次线性微分方程

当$f(x)=P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$

可以设$y^*=x^k Q_n(x)$，k为0是方程特征根的重数

一般地，当$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$

可以设$y^*=x^k\left[P_t(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_t(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right]$，

k为$\alpha\pm \mathrm{i}\beta$是方程特征根的重数, $t=\max\{m,n\}$

分类：

1） 当$\alpha=\beta=0$时, $f(x)$为多项式.

2） 当$\alpha\neq 0,\beta=0$时, $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$.

3） 当$\alpha=0,\beta\neq 0$时, $f(x)=P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x$.

例1. 求方程$y''-5y'+6y=(x+1)e^{4x}$的特解.

解： 特征方程$\lambda^2-5\lambda+6=0$,特征根为$\lambda_1=2,\lambda_2=3$

由于4不是方程特征根，

故设特解为$y^*=(ax+b)e^{4x}$

例2. 求方程$y''+y'=x-2+3e^{2x}$的特解.

解： 特征方程$\lambda^2+\lambda=0$,特征根为$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$

由于0是方程1重特征根，2不是方程特征根.

故设特解为$y^*=x(ax+b)+ce^{2x}$

常系数非齐次线性微分方程

例3. 求方程$y''-y=\sin x$的通解.

解： 特征方程$\lambda^2-1=0$，特征根为$\lambda_1=1, \lambda_2=-1$

故齐次方程通解为$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$

又$\alpha\pm i\beta=\pm i$不是方程特征根，

故设特解$y^{*}=a\cos x+b\sin x$

$$y^{*\prime}=-a\sin x+b\cos x$$

$$y^{*\prime\prime}=-a\cos x-b\sin x$$

代入，得$-a\cos x-b\sin x-a\cos x-b\sin x=\sin x$

$$\Rightarrow a=0, b=-\frac{1}{2}$$

故通解为$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}\sin x$

欧拉方程

定义. 称$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 xy' + a_0 y = f(x)$

为**欧拉方程**，其中$a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$为常数.

解法：

做换元$t=\ln x$或$x=e^t$，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}$

$$xy' = x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Dy，\ 令D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

$$x^2y'' = x^2\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{x}\right)' = x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left(D^2-D\right)y$$

$$x^3y''' = x^3\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)' = x^3\left(\frac{2}{x^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}t^3}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}-\frac{2}{x^3}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

$$=\left(D^3-2D-D^2+2D\right)y = D(D-1)(D-2)y$$

规律： $x^n y^{(n)} = D(D-1)\cdots(D-n+1)y$

欧拉方程

例. 求方程$x^2y'' + 4xy' + 2y = \dfrac{1}{x}$的通解.

解： 做变换$x=e^t$, 原方程化为

$$\left[D(D-1)+4D+2\right]y=e^{-t},$$

$$\Rightarrow \left[D^2+3D+2\right]y=e^{-t},$$

特征方程为$\lambda^2+3\lambda+2=0$, 特征根$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$

设特解$y^*=ate^{-t}$, $y^{*\prime}=ae^{-t}-ate^{-t}$,

$y^{*\prime\prime}=-ae^{-t}-ae^{-t}+ate^{-t}$, 代入方程,

$$-ae^{-t}-ae^{-t}+ate^{-t}+3\left(ae^{-t}-ate^{-t}\right)+2ate^{-t}=e^{-t}$$

$\Rightarrow a=1$, 故特解$y^*=te^{-t}$

通解$y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+te^{-t}=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x}$