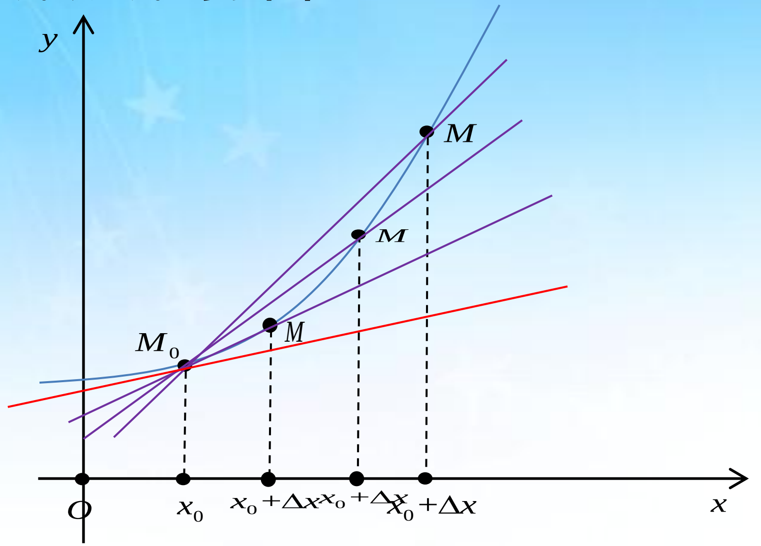
导数的定义

1. 变速直线运动的速度

t_0到$t_0+\Delta t$时间段的平均速度 $\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$

t_0时刻的速度 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t}$

2. 曲线切线的斜率



割线M_0M的斜率 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

切线在M_0点的斜率$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

导数的定义

1. 设$y=f(x)$在x_0点的邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$存在，

则称$y=f(x)$在x_0点可导，称极限值为$y=f(x)$

在x_0点的导数，记为 $y'\big|_{x=x_0}=f'(x_0)=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

2. 设$y=f(x)$在区间(a,b)内每一点都有导数，

则说$f(x)$在区间(a,b)内可导，记为$f(x)\in D(a,b)$.

称$y=f(x)$在(a,b)内求导所得的函数为$f(x)$的导

函数，记为$y'=f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$.

哈尔滨工业大学数学系
Department of Mathematics,HIT

导数的性质

1. 极限定式

如果$f'(x_0)$存在，则 $\lim \dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}=f'(x_0)$

$(\square\to 0)$

2. 左导数、右导数

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$$

左导数

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0)$$

右导数

定理：$f'(x_0)$存在 $\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

哈尔滨工业大学数学系
Department of Mathematics,HIT

3. 可导与连续的关系

定理. 可导 $\Rightarrow$ 连续

分析. 由 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\Rightarrow\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$(无穷小)

$$\Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

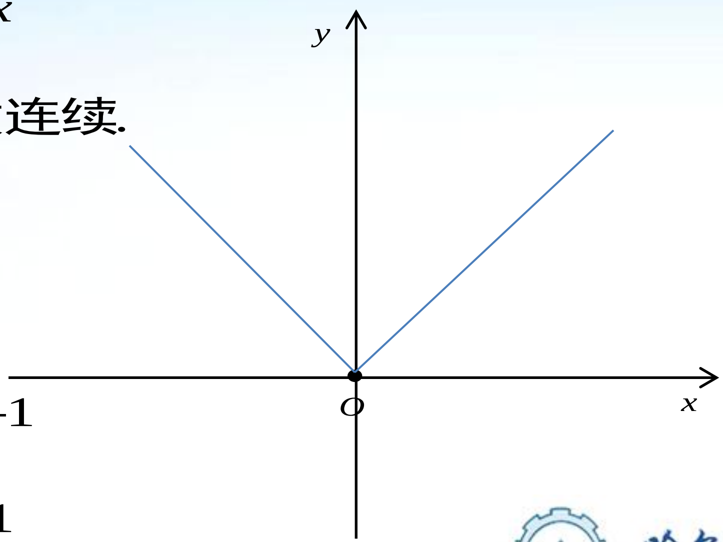
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,\ \text{即函数连续.}$$

反之不成立，连续 $\not\Rightarrow$ 可导

例. $y=|x|$在$x=0$点

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$$



导数的性质

1. 物理意义

$f'(x_0)$是变速直线运动$y=f(x)$在x_0时刻的瞬时速度.

2. 几何意义

$f'(x_0)$是曲线$y=f(x)$在$\left(x_0, f(x_0)\right)$点切线的斜率.