无穷区间上的广义积分

定义1. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上任何有限区间内部都可积，

称此极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$为$f(x)$在$[a,+\infty)$上的广义积分，

记 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$. 若此极限存在，称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，否则称广义积分发散.若

$F'(x)=f(x)$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\left[F(x)-F(a)\right]\triangleq F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

例1. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解： 原式$=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4}$

例2. 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}\mathrm{d}x, 0<\beta<1.$

解： 原式 $\displaystyle=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}\mathrm{d}x$

令 $\displaystyle x=\frac{1}{t}$，$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}\mathrm{d}x=\int_1^0\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{t^\beta}\right)}\mathrm{d}\frac{1}{t}$

$$=\int_1^0\frac{1}{\dfrac{(1+t^2)(1+t^\beta)}{t^2\cdot t^\beta}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t^\beta}{(1+t^2)(1+t^\beta)}\mathrm{d}t$$

上式 $\displaystyle=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\beta)}\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^\beta}{(1+x^2)(1+x^\beta)}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$$

同样可以定义——

定义2. $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t \triangleq F(x)\Big|_{-\infty}^{b}$.

定义3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_{x}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \lim\limits_{x \to +\infty} \int_{c}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

$\triangleq F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$.

瑕积分

定义1. 设$f(x)$在$[a,b)$上可积，而$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$,称极限

$\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$为$f(x)$在$[a,b)$上的瑕积分，记$\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

$\triangleq\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. 若此极限存在，称此瑕积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛，

否则发散.若$F'(x)=f(x)$,则

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to b^-}[F(x)-F(a)]\triangleq F(x)\Big|_a^{b^-}.$$

同样可以定义

定义2. $\lim\limits_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\triangleq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为$f(x)$在$(a,b]$上瑕积分.

定义3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to c^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\lim\limits_{x\to c^+}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$, c为$f(x)$的无界点.

例1. 计算 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

解： 原式 $= \arcsin x\Big|_0^{1^-} = \frac{\pi}{2}$

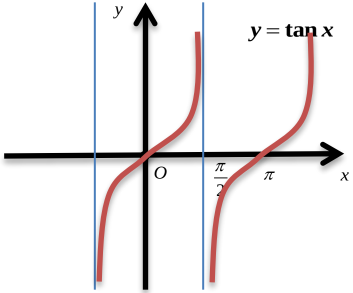
例2. 计算 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

解： 原式 $= \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$= \ln|x|\Big|_{-1}^{0^-} + \ln x\Big|_{0^+}^{1} \quad (\text{不存在})$$

故此瑕积分发散.

例3. 计算 $\int_0^{\pi}\frac{1}{1+3\sin^2 x}\mathrm{d}x.$



解： 原式 $=\int_0^{\pi}\frac{1}{\cos^2 x+4\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+(2\tan x)^2}\mathrm{d}(2\tan x)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+(2\tan x)^2}\mathrm{d}(2\tan x)+\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{1+(2\tan x)^2}\mathrm{d}(2\tan x)$$

$$=\frac{1}{2}\arctan(2\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}^-}+\frac{1}{2}\arctan(2\tan x)\Big|_{\frac{\pi}{2}^+}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2}$$