1.定义：

单调上升：$\forall x_1, x_2 \in D$,若$x_1 < x_2$，则$f(x_1) < f(x_2)$

单调下降：$\forall x_1, x_2 \in D$,若$x_1 < x_2$，则$f(x_1) > f(x_2)$

2.判定：

定理1. 若$f(x)$单调上升且$f'(x)$存在，则$f'(x) \geq 0$.

解：$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$\Delta x > 0$时，$f(x+\Delta x) - f(x) > 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$.

$\Delta x < 0$时，$f(x+\Delta x) - f(x) < 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$.

定理2. 设$f(x)$在(a,b)内可导，且$f'(x)>(<)0$，则$f(x)$在(a,b)内单调递增(减).

解： $\forall x_1, x_2 \in D$，若$x_1 < x_2$，$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$

若$f'(x)>0$，则$f(x_2)>f(x_1)$，故单调递增.

例1. 证明$f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$在$(0,+\infty)$上单调递增.

解： $$f'(x)=\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]'=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[x\ln\frac{1+x}{x}\right]'$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln(1+x)-\ln x+x\cdot\frac{x}{1+x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{1}{\xi}-\frac{1}{1+x}\right]>0 \qquad \xi\in(x,x+1)$$

例2. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足$f''(x)>0,\ f(0)<0$

证明：$\dfrac{f(x)}{x}$分别在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上单调递增.

解：$\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，令$g(x)=xf'(x)-f(x)$

令$g'(x)=[xf'(x)-f(x)]'=f'(x)+xf''(x)-f'(x)$

$=xf''(x)$

当$x>0$时，$g'(x)>0.\ \Rightarrow g(x)>g(0)=-f(0)>0$

即$\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'>0,\ \dfrac{f(x)}{x}$在$(0,+\infty)$上单调递增.

同理$\dfrac{f(x)}{x}$在$(-\infty,0)$上单调递增.

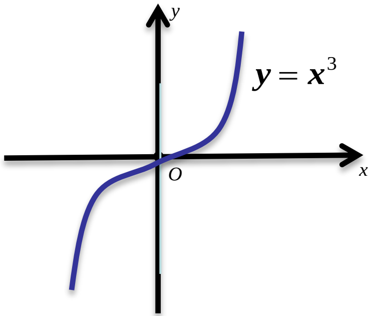
定 义1:

设$f(x)$在x_0邻域内有定义且满足$f(x) \le (\ge) f(x_0)$，则称$f(x_0)$是$f(x)$的极大（小）值，x_0为极大（小）值点.

注：若$f(x_0)$是极值，且在x_0邻域内$f'(x)$存在，则$f'(x_0)=0$.

反之不成立.

例1. $f(x)=x^3$在$x=0$点处.

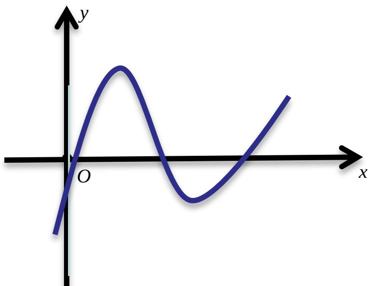


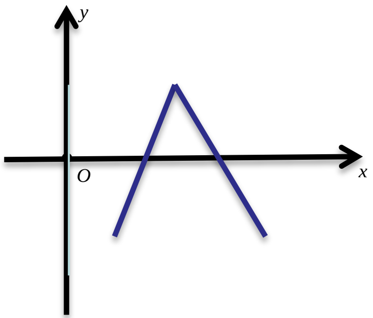
定 义2:

称使$f'(x)=0$的点x_0为$f(x)$的驻点.

定义3:

若$f(x)$在x_0点连续，且$f'(x_0)=0$或$f'(x_0)$不存在，则称x_0是$f(x)$的**极值嫌疑点**.





极值的判断:

定理. 设x_0是$f(x)$的极值嫌疑点，且$f(x)$在x_0的去心邻域内可导，而$f(x)$由左到右经过x_0点时，$f'(x)$由正（负）变到负（正），则$f(x_0)$是极大（小）值，否则$f(x_0)$不是极值.

例2. 设$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=1$，证明$f(x_0)$是$f(x)$的极小值.

证明:$1=f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$

由保序性，存在x_0邻域，使$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$

1)$x<x_0$时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0\quad\Rightarrow f'(x)<0$

2)$x>x_0$时，$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0\quad\Rightarrow f'(x)>0$

故$f(x_0)$是$f(x)$的极小值.

定理2. 设$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则$f(x_0)$是$f(x)$的极值.

若$f''(x_0)>0$，则$f(x_0)$是极小值；

若$f''(x_0)<0$，则$f(x_0)$是极大值.

函数的最值（I）

1.闭区间连续函数的最值：

步骤：

设$f(x) \in C[a,b]$,

1）首先求$f(x)$在(a,b)内极值嫌疑点$x_1, x_2, \cdots, x_k$;

2）然后计算$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_k), f(a), f(b)$;

3）比较$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_k), f(a), f(b)$,
最大的为最大值，最小的为最小值.

例1. 求$f(x)=\int_0^1 \left|x^2-t^2\right| \mathrm{d}t$在$[0,2]$上的最值.

解：注意到$t\in[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}\int_0^1 (x^2-t^2)\mathrm{d}t = x^2-\dfrac{1}{3} & x\geq 1\\ \int_0^x (x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1 (t^2-x^2)\mathrm{d}t=\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3} & x<1\end{cases}$$

易见$f(x)$在$[0,2]$上连续.

$$f'(x)=\begin{cases}2x, & 1<x<2\\ 4x^2-2x, & 0<x<1\end{cases},$$ 又$f'_+(1)=2$, $f'_-(1)=2$,

$$\Rightarrow f'(1)=2.$$

令$f'(x)=0$ 得$x=\dfrac{1}{2}$

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$, $f(0)=\dfrac{1}{3}$, $f(2)=\dfrac{11}{3}$, 故$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$最小, $f(2)=\dfrac{11}{3}$最大.

2.开区间连续函数的最值:

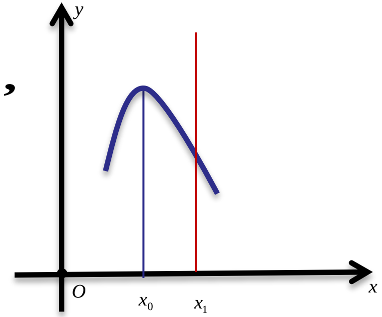
结论: 开区间连续函数若有且仅有一个极值，则此极值为最值.

证明：设$f(x)\in C(a,b)$且只有$x_0\in(a,b)$使$f(x_0)$为极值,

不妨设x_0为极大，若非最大，则存在$x_1\in(a,b)$,

不妨设$x_1>x_0$使$f(x_1)>f(x_0)$

又在x_0点附近有$x_2\in(x_0,b)$使$f(x_2)<f(x_0)$



由$f(x)\in C[x_0,x_1]$,则$f(x)$在$[x_0,x_1]$上有最大最小值.

显然最小值在(x_0,x_3)内取到.

此最小值为函数极小值，矛盾.

3.实际问题中的最值：

结论：若实际问题中已知$f(x)$的最值必然在I内部取到，

$f(x)\in C(I)$，且I内只有一个极值嫌疑点，则此点为最值点.

例. 工厂要加工一批无盖的圆柱形罐头盒子，当给定容积时，问圆柱形半径与高什么关系最省料.

解：设此盒子体积为V,半径为x,高为h,表面积为S

则$h=\dfrac{V}{\pi x^2}$，$S=\pi x^2+2\pi x\left(\dfrac{V}{\pi x^2}\right)=\pi x^2+\dfrac{2V}{x}$

令$S'(x)=2\pi x-\dfrac{2V}{x^2}=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$ 得$h=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$

故$h=x=\sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$时最省料.