分部积分法

由$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\Rightarrow \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\mathrm{d}x = f(x)g(x) + C.$$

$$\Rightarrow \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

或$\int g(x)\mathrm{d}f(x) = f(x)g(x) - \int f(x)\mathrm{d}g(x).$

——分部积分公式

例1. $\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - \int x \,\mathrm{d}\ln x$

$$= x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= x\ln x - x + C$$

例2. $\int \arctan x \mathrm{d}x = x\arctan x - \int x \,\mathrm{d}\arctan x$

$$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= x\arctan x - \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}\left(1+x^2\right)$$

$$= x\arctan x - \ln\left(1+x^2\right) + C$$

典型的分部积分（i） $\int g\mathrm{d}f = f\cdot g - \int f\mathrm{d}g.$

例1. $\int \ln x\mathrm{d}x$　　例2. $\int \arctan x\mathrm{d}x$

1. $\int$ 对数函数$\mathrm{d}x$,　$\int$ 反三角函数$\mathrm{d}x$,

2. $\int$ 幂函数×对数函数$\mathrm{d}x$,　$\int$ 幂函数×反三角函数$\mathrm{d}x$,

例3. $\int x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}x^2$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

3. $\int$ 幂函数×三角函数$\mathrm{d}x$， $\int$ 幂函数×指数函数$\mathrm{d}x$，

例4. $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\sin x = \int \cos x\,\mathrm{d}\frac{1}{2}x^2$

$$= \frac{1}{2}x^2\cos x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sin x + \cos x + C$$

例5. $\int x e^x\,\mathrm{d}x$

4. $\int$ 三角函数 $\times$ 指数函数 $\mathrm{d}x$，（一个方向用两次分部积分变成方程再解）

例6. $\int e^x \sin x\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d}e^x$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$$

$$= e^x \sin x - \int \cos x \,\mathrm{d}e^x$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$$

移向，得

$$\int e^x \sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x\right) + C$$

典型的分部积分（ii） $\int g\mathrm{d}f = f\cdot g - \int f\mathrm{d}g.$

5. $\int \frac{1}{\cos^n x}\mathrm{d}x$, $\int \frac{1}{\sin^n x}\mathrm{d}x\,(n\geq 3)$和$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\mathrm{d}x\,(n\geq 2)$

例1. $I_n = \int \frac{1}{\cos^n x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^{n-2} x}\mathrm{d}\tan x$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - \int \tan x\mathrm{d}(\cos x)^{2-n}$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (2-n)\int \frac{\sin x}{\cos x}(\cos x)^{1-n}(-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)\int \frac{\sin^2 x}{\cos^n x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\tan x}{\cos^{n-2} x} - (n-2)(I_n - I_{n-2})$$

例2. $J_n = \int \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\mathrm{d}x \quad \left(J_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} - \int x\mathrm{d}(a^2+x^2)^{-n}$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + n\int x(a^2+x^2)^{-n-1}2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\int \left(\frac{1}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{a^2}{(a^2+x^2)^n}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2nJ_{n-1} - 2na^2J_n \quad (n>1)$$

其他类型的分部积分

$$\int g\mathrm{d}f = f\cdot g - \int f\mathrm{d}g.$$

1. 不同类函数之积

例1. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ $\left(\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}\left(1-x^2\right)$$

$$= -\int \arcsin x\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + C$$

2. 导数重复出现型

例2. $\int \cos \ln x \mathrm{d}x$

$$= x\cos\ln x - \int x \,\mathrm{d}\cos\ln x$$

$$= x\cos\ln x + \int x \cdot \sin\ln x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$= x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int x \,\mathrm{d}\sin\ln x$$

$$= x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int \cos\ln x \,\mathrm{d}x$$

移向，得

$$\int \cos\ln x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\cos\ln x + x\sin\ln x\right) + C$$

3. 含有“不可积函数”类型

例如 $\dfrac{\sin x}{x}, e^{x^2}, \sin x^2, \dfrac{1}{\ln x}, \sqrt{1+x^3}, \dfrac{e^x}{x}$

例3. $\displaystyle\int\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\cdot\ln|x|\right)\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int\ln|x|\,\mathrm{d}\sin x$$

$$=\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sin x\ln|x|-\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\sin x\ln|x|+C$$

4. 含有抽象函数的类型

例4. $\int (f''(x)g(x)-f(x)g''(x))\mathrm{d}x$

$$=\int f''(x)g(x)\mathrm{d}x-\int f(x)\,\mathrm{d}\,g'(x)$$

$$=\int f''(x)g(x)\mathrm{d}x-f(x)g'(x)+\int f'(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int f''(x)g(x)\mathrm{d}x-f(x)g'(x)+\int f'(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

$$=\int f''(x)g(x)\mathrm{d}x-f(x)g'(x)+f'(x)g(x)-\int g(x)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)+C$$