# 定积分的概念

## 问题1.曲边梯形的面积

求曲边梯形$D:\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$的面积$S$.

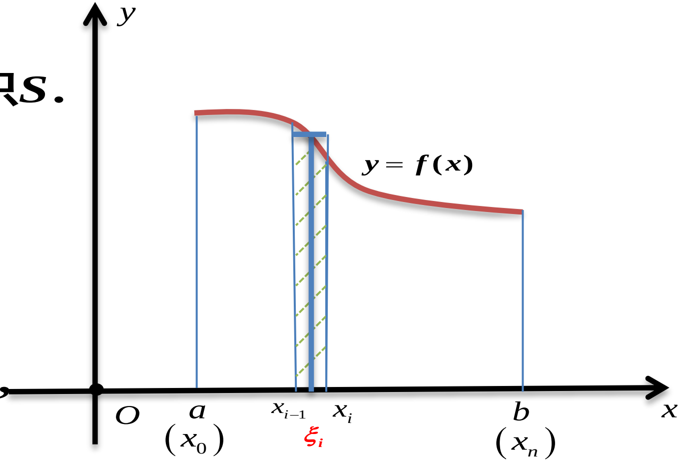
1）分划：在$[a,b]$内**任意**插入$n$-1个点$x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$,将区间分成$n$份；

2）乘积：在$[x_{i-1}, x_i]$内**任意**取一点$\xi_i$，$i=0,1,\cdots,n$, 做乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$;

$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$

3）求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$;

4）取极限：$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, $\lambda = \max_{1\le i\le n}\{|\Delta x_i|\}$

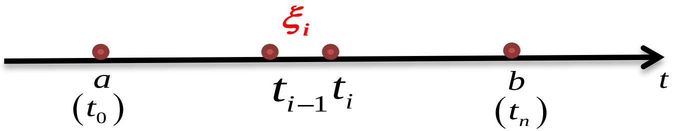





哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

## 问题2. 变速直线运动的路程

设某物体做直线运动，速度为$v=v(t)$，求该物体从时间$a$到$b$走过的路程$s$.




1）分划：在$[a,b]$内**任意**插入$n$-1个点$t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$，将区间分成$n$份；

2）乘积：在$[t_{i-1},t_i]$内**任意**取一点$\xi_i$，$i=0,1,\cdots,n$，做乘积$v(\xi_i)\Delta t_i$；$(\Delta t_i=t_i-t_{i-1})$

3）求和：$\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$；

4）取极限：$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$，$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{|\Delta t_i|\}$



哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

## 定义

设$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，给区间$[a,b]$任意一个分划$\Delta$，即在$[a,b]$任意插入$n-1$个分点$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$使$x_0=a<x_1<x_2<\cdots,x_{n-1}<b=x_n$.然后在每个子区间$[x_{i-1},x_i]$上做乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$，$\xi_i\in[x_{i-1},x_i],\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=0,1,\cdots,n)$.

再将这些乘积加起来，得到$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$, 称为黎曼和. 如果

不论$\Delta$如何选$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$如何取，下述极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$,

$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{|\Delta x_i|\}$都存在且相等，则称$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，

而其极限值称$f(x)$在$[a,b]$上的定积分，记为

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$\int$ ——积分号； $a$——积分上限； $b$——积分下限； $x$——积分变量； $f(x)$——被积函数；

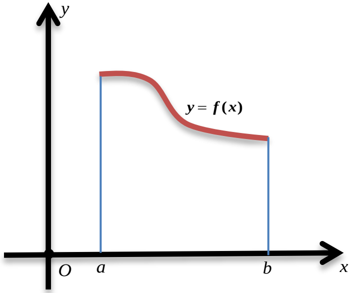


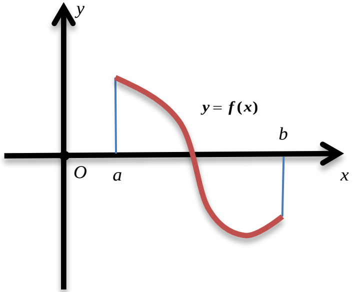
哈爾濱工業大學 HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

# 定积分的意义

## 1.几何意义：

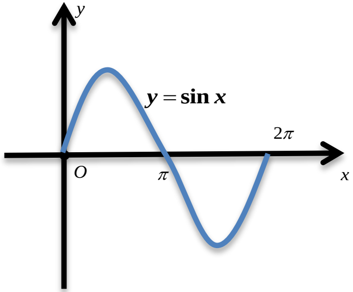
$\int_a^b f(x)\,dx$——曲边梯形面积的代数和.




**例1.** $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$

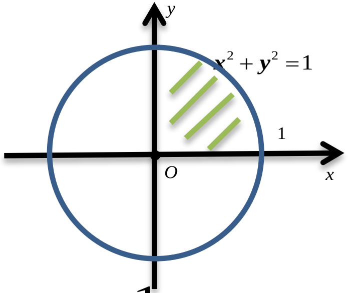
$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,dx$$






哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

例2. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$




考察函数$y=\sqrt{1-x^2}$

由定积分的几何意义，面积为$\frac{1}{4}\pi\cdot 1^2$

即$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi$

## 2.物理意义：

$\int_a^b f(x)\,dx$——以$f(x)$为速度,$[a,b]$时间段的位移.

# 定积分的可积准则

**定理1.(可积的必要条件)**

若$f(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

**例3.** $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \begin{matrix} \nearrow & 0 & \xi_i\text{均取无理数时} \\ \searrow & 1 & \xi_i\text{均取有理数时} \end{matrix}$$

**定理2.(可积的充分条件)**

若$f(x)\in C[a,b]$，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

**定理3.**若$f(x)$在$[a,b]$上除有限个第一类间断点外连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.



哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

# 定积分的性质

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

1. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$（定积分与积分变量无关）

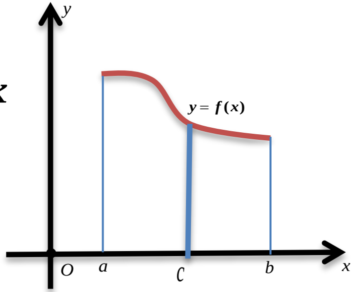
2. $\int_a^b[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

（线性性质）

3. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ （换限性质）

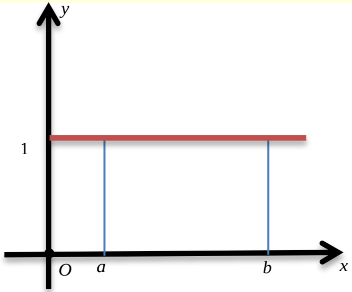
4. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

（拆限性质）



$5. \int_a^b dx = b - a$ （几何性质）

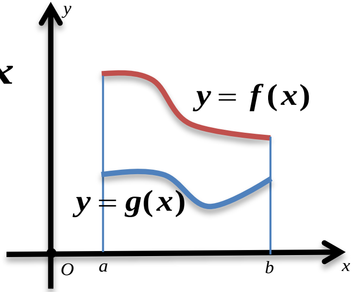
$6. \int_a^a f(x)\,dx = 0$ （一条线的面积为0）




以上为计算性质，下列为关系性质：

$7.$ 若 $f(x) \geq g(x), x \in [a,b]$，则 $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

$8.$ 若 $x \in [a,b]$，则 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

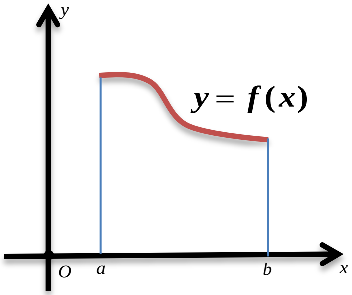



**分析.** $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

9.若$m \le f(x) \le M, x \in [a,b]$,则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a)$$



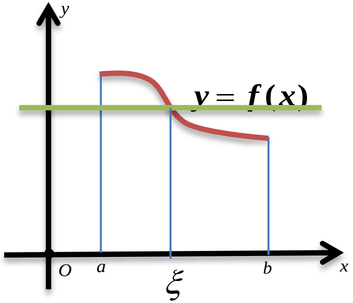

分析.由$m \le f(x) \le M$

$$\Rightarrow \int_a^b m\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b M\mathrm{d}x$$

10.(积分中值定理)

若$f(x) \in C[a,b]$,则至少存在一点$\xi \in [a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$




分析.由$m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a} \le M$

由介值定理可证.


哈爾濱工業大學
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY