

4 - ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

“Série Temporal é um conjunto de observações sobre uma variável, ordenado no tempo”, e registrado em períodos regulares. Podemos enumerar os seguintes exemplos de séries temporais: temperaturas máximas e mínimas diárias em uma cidade, vendas mensais de uma empresa, valores mensais do IPC-A, valores de fechamento diários do IBOVESPA, resultado de um eletroencefalograma, gráfico de controle de um processo produtivo.

A suposição básica que norteia a análise de séries temporais é que há um sistema causal mais ou menos constante, relacionado com o tempo, que exerceu influência sobre os dados no passado e pode continuar a fazê-lo no futuro. Este sistema causal costuma atuar criando **padrões não aleatórios** que podem ser detectados em um gráfico da série temporal, ou mediante algum outro processo estatístico.

O objetivo da análise de séries temporais é identificar padrões não aleatórios na série temporal de uma variável de interesse, e a observação deste comportamento passado pode permitir fazer previsões sobre o futuro, orientando a **tomada de decisões**.

Vamos ver alguns gráficos de séries temporais.

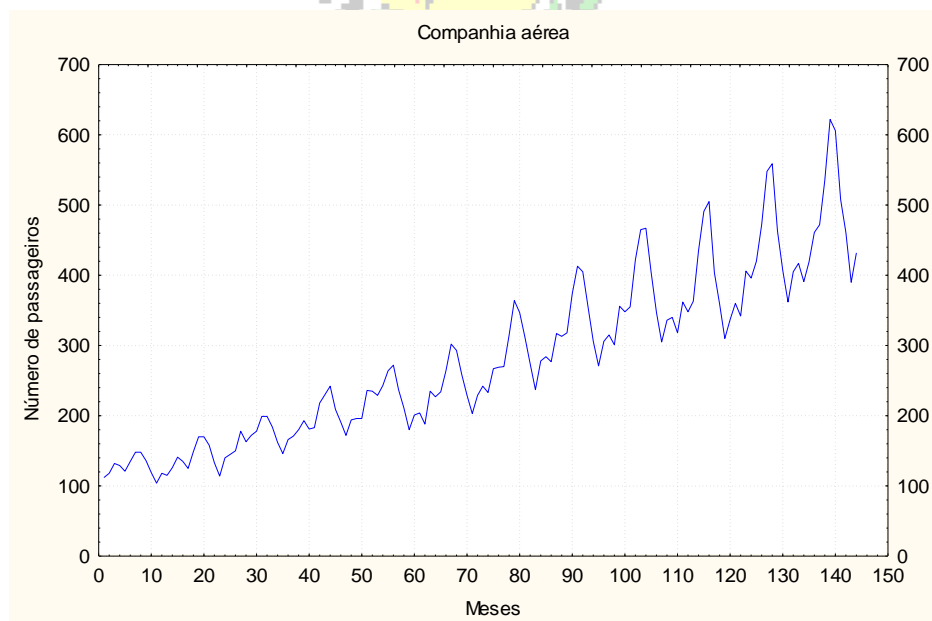


Figura 1 - Número de passageiros transportados

Que padrões não aleatórios podemos identificar na figura 1?

- observe que há uma tendência crescente no número de passageiros transportados (ou pelo menos havia antes de 11 de setembro de 2001...).

- há uma sucessão regular de "picos e vales" no número de passageiros transportados, isso deve ser causado pelas oscilações devido a feriados, períodos de férias escolares, etc., que estão geralmente relacionados às estações do ano, e que se repetem todo ano (com maior ou menor intensidade).

Em outras palavras, identificamos dois padrões que podem tornar a ocorrer no futuro: crescimento no número de passageiros transportados, flutuações sazonais. Tais padrões poderiam ser incorporados a um modelo estatístico, possibilitando fazer previsões que auxiliarão na tomada de decisões.

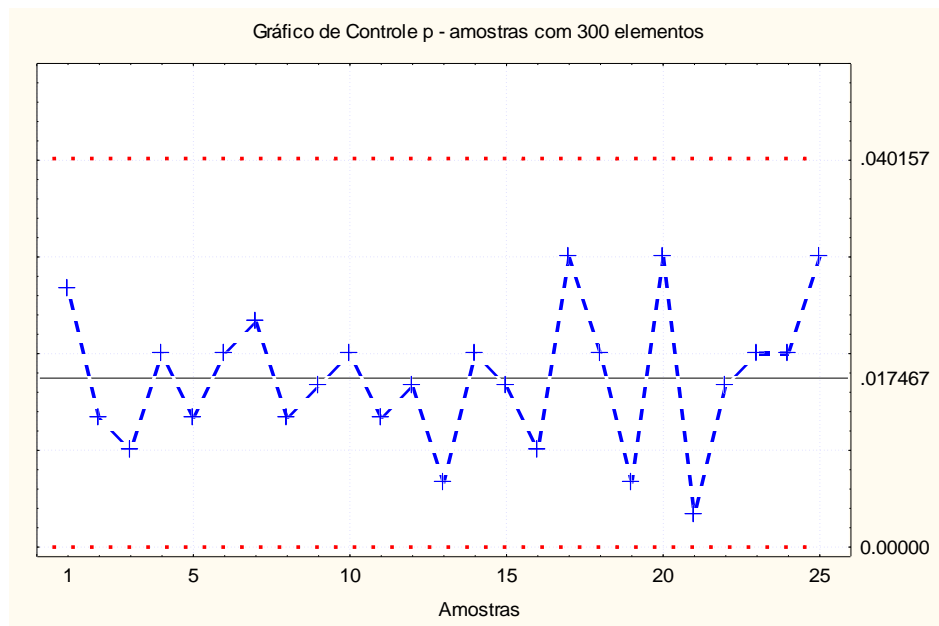


Figura 2 - Gráfico de controle: fração de defeituosos

Na figura 2 temos uma série temporal particular, trata-se de um gráfico de controle de fração de defeituosos, bastante utilizado em Controle Estatístico da Qualidade para avaliar se um processo produtivo está estável, e, portanto, previsível. Neste caso, *não queremos* que haja padrões não aleatórios, se eles existirem o processo está fora de controle estatístico, instável e imprevisível, e não podemos garantir a qualidade dos produtos resultantes: precisamos atuar sobre o processo e fazer as correções necessárias.

Outro exemplo:

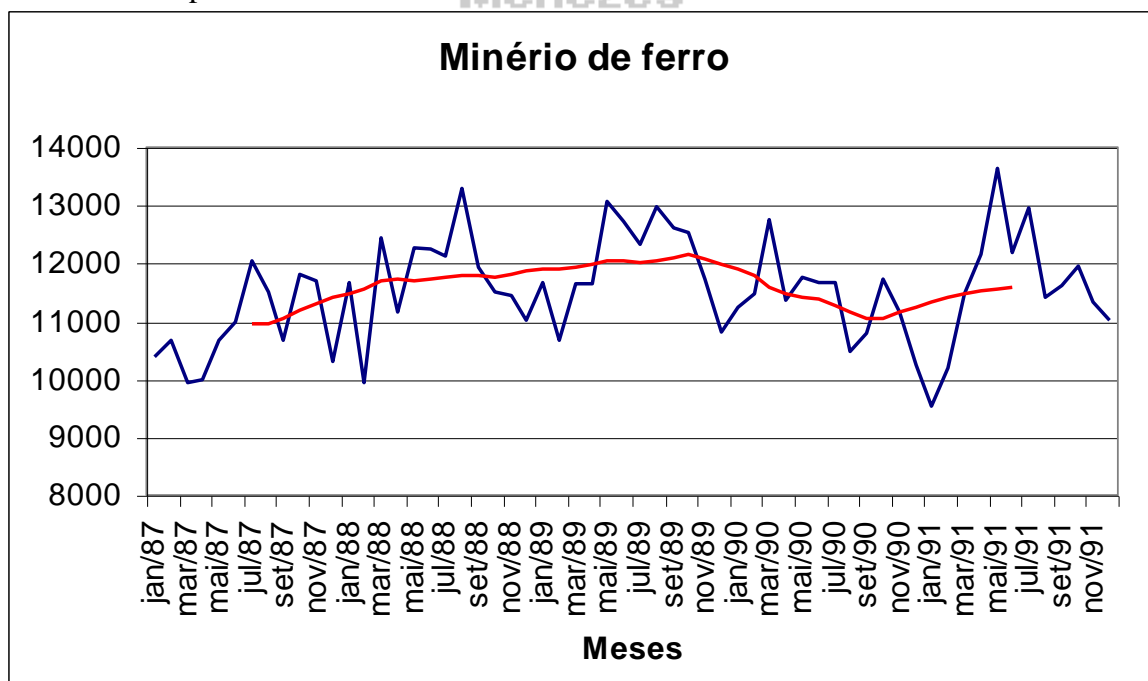


Figura 3 - Produção mensal de minério de ferro no Brasil

No caso da figura 3 a série aparenta comportar-se de forma errática. Em vermelho pode-se ver uma linha¹ que possibilita identificar o nível da produção de minério de ferro, uma tendência,

¹ Veremos posteriormente que se trata de uma média móvel.

que se situa entre 10000 e 12000 milhares de toneladas: neste caso não há tendência crescente ou decrescente, mas é possível identificar o comportamento de longo prazo da série. Aparentemente não há variações regulares, como no caso da figura 1, que configurem sazonalidade.

O problema fundamental é utilizar um modelo que permita incluir os vários tipos de padrões, possibilitando realizar previsões. O ponto de partida é realizar a **decomposição** da série em padrões.

4.1 - Modelo Clássico das Séries Temporais

Segundo o modelo clássico todas as séries temporais são compostas de quatro padrões:

- tendência (T), que é o comportamento de longo prazo da série, que pode ser causada pelo crescimento demográfico, ou mudança gradual de hábitos de consumo, ou qualquer outro aspecto que afete a variável de interesse no longo prazo;
- variações cíclicas ou ciclos (C), flutuações nos valores da variável com duração **superior** a um ano, e que se repetem com certa periodicidade², que podem ser resultado de variações da economia como períodos de crescimento ou recessão, ou fenômenos climáticos como o El Niño (que se repete com periodicidade superior a um ano);
- variações sazonais ou sazonalidade (S), flutuações nos valores da variável com duração **inferior** a um ano, e que se repetem todos os anos, geralmente em função das estações do ano (ou em função de feriados ou festas populares, ou por exigências legais, como o período para entrega da declaração de Imposto de Renda); se os dados forem registrados **anualmente** NÃO haverá influência da sazonalidade na série³;
- variações irregulares (I), que são as flutuações inexplicáveis, resultado de fatos fortuitos e inesperados como catástrofes naturais, atentados terroristas como o de 11 de setembro de 2001, decisões intempestivas de governos, etc.

Aqui é importante salientar que nem sempre uma série temporal, mesmo que o modelo clássico seja considerado apropriado para analisá-la, irá apresentar todos os componentes citados acima:

- a série pode apresentar apenas variações irregulares: não se percebe comportamento crescente ou decrescente de longo prazo (tendência), ou flutuações sazonais ou cíclicas (como as séries das figuras 2 e 3).
- a série pode apresentar apenas tendência e variações irregulares⁴: não são identificadas flutuações sazonais ou cíclicas, apenas o comportamento crescente/decrescente de longo prazo e as variações aleatórias.
- a série pode apresentar apenas variações sazonais e irregulares: o comportamento de longo prazo da série é aproximadamente constante, mas observam-se flutuações dentro dos períodos de um ano, que se repetem todos os anos.
- quaisquer outras combinações possíveis.

A decomposição da série permitirá identificar quais componentes estão atuando naquele conjunto em particular, além de possibilitar obter índices e/ou equações para realizar previsões para períodos futuros da série.

² Alguns autores não incluem as variações cíclicas no modelo clássico da série temporal.

³ Pois não será possível observar se as flutuações se repetem sistematicamente dentro dos anos.

⁴ Não há como se livrar das variações irregulares...

A questão crucial do modelo clássico é decidir como será a equação que relaciona as componentes com a variável. Há duas opções: o modelo aditivo ou o modelo multiplicativo:

- No modelo **aditivo** o valor da série (Y) será o resultado da soma dos valores das componentes (que apresentam a mesma unidade da variável):

$$Y = T + C + S + I \quad \text{ou} \quad Y = T + C + I \quad (\text{se os dados forem registrados anualmente})$$

Nas previsões não temos como incluir a componente irregular no modelo, pois ela é resultado de fatos fortuitos, teoricamente imprevisíveis. Todas as componentes têm a mesma unidade da série: se esta for em milhões de reais todas também terão tal unidade.

- Pode ser usado também o modelo **multiplicativo**, no qual o *produto* das componentes resultará na variável da série:

$$Y = T \times C \times S \times I \quad \text{ou} \quad Y = T \times C \times I \quad (\text{se os dados forem registrados anualmente})$$

Novamente, não incluímos a componente irregular. Há, porém, uma diferença crucial: apenas a tendência tem a mesma unidade da variável. As demais componentes têm valores que modificam a tendência: assumem valores em torno de 1 (se maiores do que 1 aumentam a tendência, se menores diminuem a tendência, se exatamente iguais a 1 não causam efeito). Na figura 5 observe a escala vertical do gráfico das componentes cíclicas, sazonais e irregulares: são valores próximos de 1, enquanto a escala da figura 4 tem a mesma escala para o valor original da série e a tendência (em milhões de dólares). Isso ocorreu porque decompusemos a série temporal usando um modelo multiplicativo.

Chamando a variável de interesse de Y, a equação de sua série temporal seria: $Y = f(T, C, S, I)$. Podemos observar as componentes nas figuras 4 e 5.

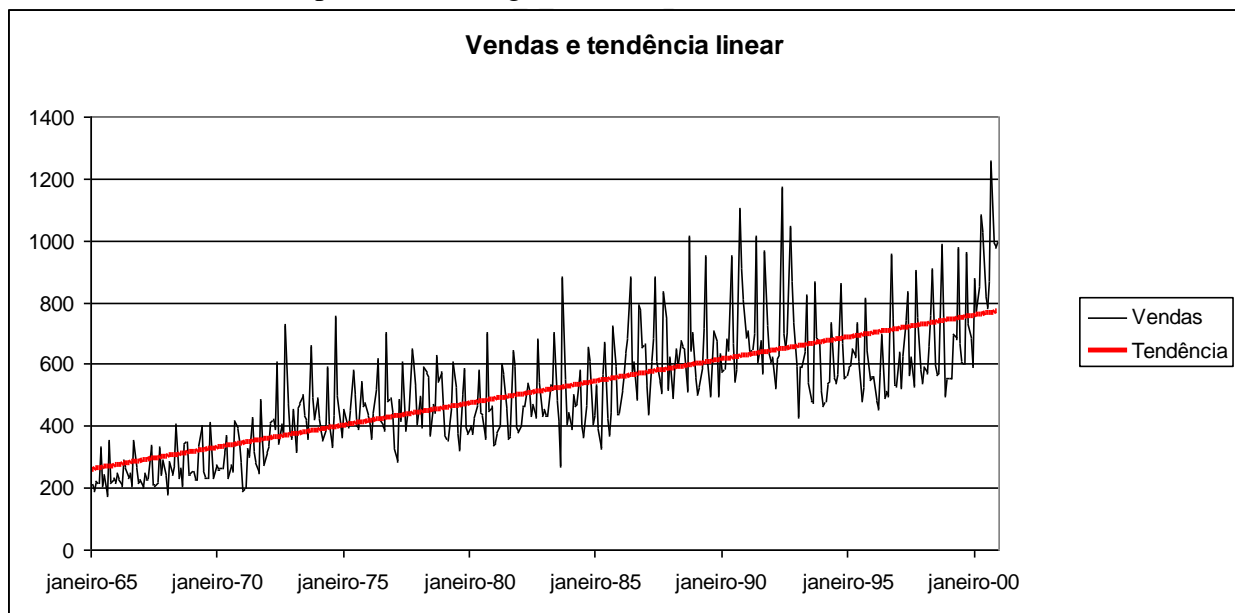


Figura 4 - Série original e tendência linear

Na figura 4 podemos observar uma série temporal de vendas (em milhões de dólares), e a tendência, no caso uma reta (tendência linear), que mostra um crescimento no longo prazo.

Na figura 5 podemos observar as três outras componentes. Observe que a cada 5 ou 6 anos ocorre um ciclo, uma mudança nos valores da variável (a linha azul). Há também variações sazonais, que se repetem todos os anos, devido provavelmente às estações (a linha vermelha). Por fim, há variações erráticas, que não apresentam regularidade, mas que talvez se relacionem com eventos inesperados ocorridos no período, as variações irregulares (linha verde).

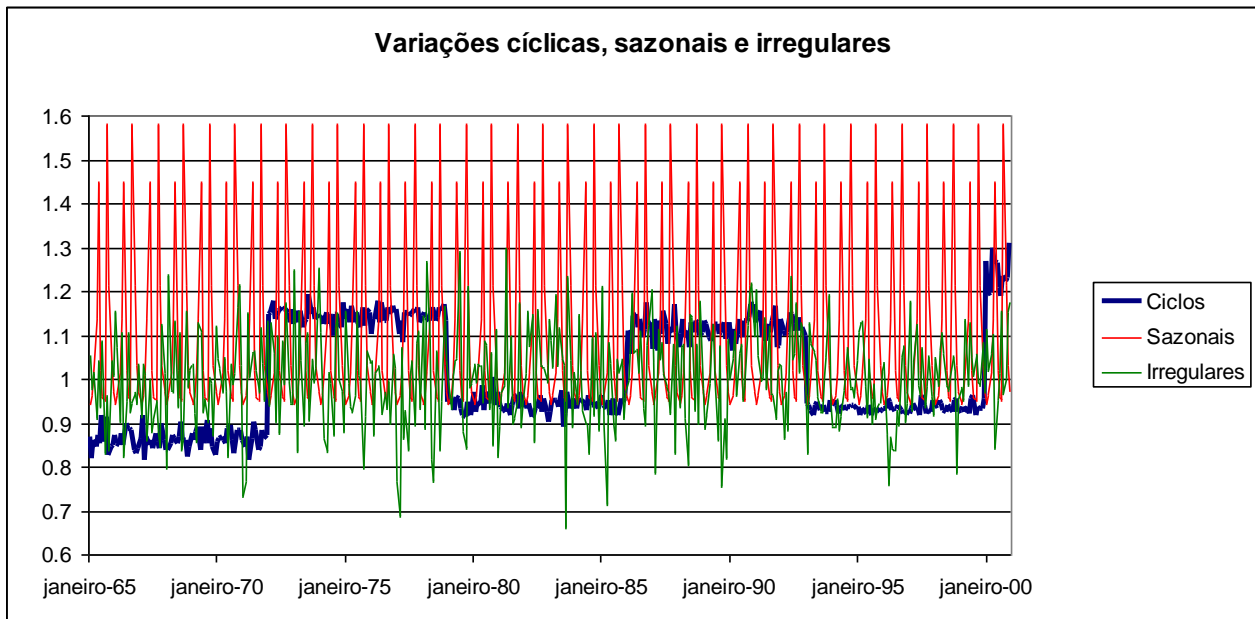


Figura 5 - Componentes cíclicas, sazonais e irregulares.

Qual é o melhor modelo? Dependerá dos dados da própria série, das características intrínsecas do problema. Apresentaremos posteriormente medidas que possibilitam avaliar a adequação das previsões feitas por um modelo.

4.2 - Obtenção da Tendência

A tendência descreve o comportamento da variável retratada na série temporal no longo prazo. Há três objetivos básicos na sua identificação: avaliar o seu comportamento para utilizá-lo em previsões, removê-la da série para facilitar a visualização das outras componentes, ou ainda identificar o nível da série (o valor ou faixa típica de valores que a variável pode assumir, se não for observado comportamento crescente ou decrescente no longo prazo). A obtenção da tendência pode ser feita de três formas: através de um modelo de regressão (como o modelo linear - reta), através de médias móveis, ou através de ajuste exponencial (que não deixa de ser uma média móvel).

4.2.1 - Obtenção de tendência linear

Utiliza o método dos mínimos quadrados para obter os coeficientes da reta que melhor se ajusta aos dados (ver seção 3.2.4). A diferença aqui é que a variável independente será sempre o tempo (mensurado diretamente, por exemplo, anos de 1970, 1971, ou através de contagem de períodos, 1, 2, 3). É importante ressaltar que através de programas estatísticos, ou mesmo uma planilha eletrônica como o Microsoft Excel é possível ajustar outros modelos que não o linear.

Para o caso linear, a reta de tendência será: $T = a + b \times t$

Onde T é o valor da tendência, t é o valor do tempo, b é o coeficiente angular da reta (se positivo indica tendência crescente, se negativo a tendência é decrescente) e a é o coeficiente linear da reta. As equações dos coeficientes estão expressas a seguir.

$$b = \frac{n \times \sum_{i=1}^n (t_i \times y_i) - \sum_{i=1}^n t_i \times \sum_{i=1}^n y_i}{n \times \sum_{i=1}^n (t_i^2) - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b \times \sum_{i=1}^n t_i}{n}$$

Onde y_i é um valor qualquer da variável registrada na série temporal, t_i é o período associado a y_i , e n é o número de períodos da série. Para encontrar os coeficientes basta calcular os somatórios (tal como em análise de regressão linear simples).

Exemplo 4.1 - Os dados a seguir apresentam o patrimônio líquido (em milhões de reais) de um banco de 1985 a 1995. Supondo que o modelo linear seja apropriado para descrever a tendência da série, encontre os coeficientes da reta de mínimos quadrados. Faça a previsão de tendência para os anos de 1996 e 1997.

Ano	Patrimônio (R\$1.000.000)
1985	30
1986	32
1987	32
1988	35
1989	37
1990	38
1991	42
1992	41
1993	44
1994	46
1995	47

A variável dependente é o saldo de vendas: será o Y . Há 11 períodos: $n = 11$. O próximo passo é encontrar os somatórios necessários para obter os coeficientes. Mas ao invés de usarmos os anos, o que poderia complicar nossos cálculos, vamos trabalhar com períodos, sendo 1985 o período 1, 1986 o 2 e assim por diante. A tabela ficaria então (já incluindo as colunas $t \times y$ e t^2):

Ano	Patrimônio (Y) (R\$1.000.000)	Tempo (t)	t.Y	t ²
1985	30	1	30	1
1986	32	2	64	4
1987	32	3	96	9
1988	35	4	140	16
1989	37	5	185	25
1990	38	6	228	36
1991	42	7	294	49
1992	41	8	328	64
1993	44	9	396	81
1994	46	10	460	100
1995	47	11	517	121
Soma	424	66	2768	506

Substituindo os valores nas equações:

$$b = \frac{n \times \sum_{i=1}^n (t_i \times y_i) - \sum_{i=1}^n t_i \times \sum_{i=1}^n y_i}{n \times \sum_{i=1}^n (t_i^2) - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2} = \frac{11 \times 2768 - 66 \times 424}{11 \times 506 - (66)^2} = 1,76$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b \times \sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{424 - (1,76 \times 66)}{11} = 27,96$$

Então a equação de tendência é: $T = 27,96 + 1,76 \times t$

O ano de 1996 corresponderá ao período 12, e 1997 ao período 13 da série temporal. Substituindo estes valores na equação acima:

$$T_{1996} = 27,96 + (1,76 \times 12) = 49,08$$

$$T_{1997} = 27,96 + (1,76 \times 13) = 50,84$$

Podemos então apresentar um gráfico (feito no Microsoft Excel) da série original, a reta de tendência e a projeção para os anos de 1996 e 1997.

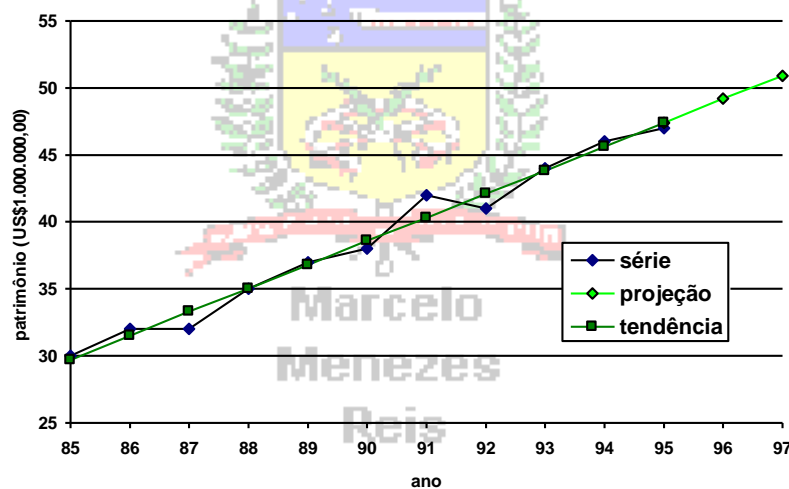


Figura 6 - Patrimônio líquido de um banco: série anual, tendência linear e projeção

4.2.2 - Obtenção de tendência por médias móveis

As médias móveis são uma forma alternativa de obtenção da tendência ou nível de uma série temporal. Calcula-se a média dos primeiros n períodos da série, colocando o resultado no período exatamente no *centro* deles. Progressivamente, vamos acrescentando um período seguinte e desprezando o primeiro da média imediatamente anterior, e calculando novas médias, que vão se *movendo* até o fim da série. O número de períodos (n) é chamado de ordem da série.

Exemplo 4.2 - Os dados a seguir, que representam as vendas anuais das fábricas (em milhões de unidades), em todo o mundo, de carros, caminhões e ônibus fabricados pela General Motors Corporation de 1970 a 1992. Obtenha a tendência da série por médias móveis de 3, 5 e 7 períodos, e plote-as em um gráfico junto com os dados originais⁵.

⁵ Adaptado de LEVINE, D. M., BERENSON, M. L. e STEPHAN, D. – *Estatística: Teoria e Aplicações usando o Excel*. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

Ano	Vendas	Ano	Vendas	Ano	Vendas
1970	5,3	1978	9,5	1986	8,6
1971	7,8	1979	9,0	1987	7,8
1972	7,8	1980	7,1	1988	8,1
1973	8,7	1981	6,8	1989	7,9
1974	6,7	1982	6,2	1990	7,5
1975	6,6	1983	7,8	1991	7,0
1976	8,6	1984	8,3	1992	7,2
1977	9,1	1985	9,3		

Primeiramente vamos apresentar um gráfico da série original, para observar se não seria possível ajustar uma reta como tendência da série. Veja a figura 7.

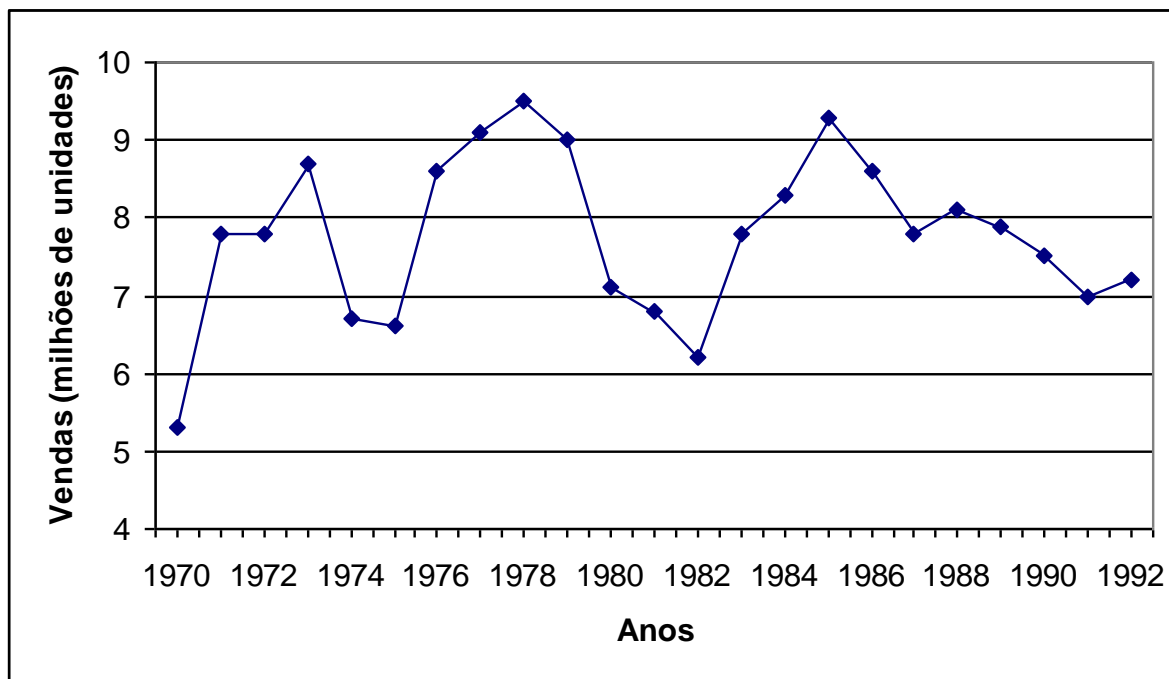


Figura 7 - Vendas da GM (milhões de unidades)

Não parece haver um comportamento crescente, ou decrescente, no longo prazo. Poderia se afirmar que a série não tem tendência, e que não seria apropriado ajustar uma equação de reta aos dados. Não obstante, há interesse em obter o nível da série, em que patamar estão as vendas da GM.

Vamos aplicar médias móveis de 3, 5 e 7 períodos e observar os resultados.

Médias Móveis de 3 períodos

Devemos juntar os períodos de 3 em 3, sempre acrescentando o próximo e desprezando o primeiro do grupo anterior, colocando o resultado no período central (2º período):

1970 - 1971 - 1972 com resultado em 1971; 1971 - 1972 - 1973 com resultado em 1972;
 1972 - 1973 - 1974 com resultado em 1973; 1973 - 1974 - 1975 com resultado em 1974;
 1974 - 1975 - 1976 com resultado em 1975; 1975 - 1976 - 1977 com resultado em 1976;
 1976 - 1977 - 1978 com resultado em 1977; e assim por diante, até chegar a
 1990 - 1991 - 1992 com resultado em 1991.

A tabela com os resultados:

Ano	Vendas (Y) - em milhões	Total Móvel 3 períodos	Média Móvel 3 períodos
1970	5,3	-	-
1971	7,8	20,9	6,97
1972	7,8	24,3	8,10
1973	8,7	23,2	7,73
1974	6,7	22	7,33
1975	6,6	21,9	7,30
1976	8,6	24,3	8,10
1977	9,1	27,2	9,07
1978	9,5	27,6	9,20
1979	9	25,6	8,53
1980	7,1	22,9	7,63
1981	6,8	20,1	6,70
1982	6,2	20,8	6,93
1983	7,8	22,3	7,43
1984	8,3	25,4	8,47
1985	9,3	26,2	8,73
1986	8,6	25,7	8,57
1987	7,8	24,5	8,17
1988	8,1	23,8	7,93
1989	7,9	23,5	7,83
1990	7,5	22,4	7,47
1991	7	21,7	7,23
1992	7,2	-	-

Observe que ao calcularmos médias móveis alguns períodos ficam sem tendência, porque os resultados das médias são postos no centro dos períodos.

Média móvel de 5 períodos

Devemos juntar os períodos de 5 em 5, sempre acrescentando o próximo e desprezando o primeiro do grupo anterior, colocando o resultado no período central (3º período):

1970 - 1971 - 1972 - 1973 - 1974 com resultado em 1972;

1971 - 1972 - 1973 - 1974 - 1975 com resultado em 1973;

1972 - 1973 - 1974 - 1975 - 1976 com resultado em 1974;

1973 - 1974 - 1975 - 1976 - 1977 com resultado em 1975;

1974 - 1975 - 1976 - 1977 - 1978 com resultado em 1976; e assim por diante, até chegar a

1988 - 1989 - 1990 - 1991 - 1992 com resultado em 1990.

A tabela com os resultados:

Ano	Vendas (Y) - em milhões	Total Móvel 5 períodos	Média Móvel 5 períodos
1970	5,3	-	-
1971	7,8	-	-
1972	7,8	36,3	7,26
1973	8,7	37,6	7,52
1974	6,7	38,4	7,68
1975	6,6	39,7	7,94
1976	8,6	40,5	8,1
1977	9,1	42,8	8,56
1978	9,5	43,3	8,66
1979	9	41,5	8,3
1980	7,1	38,6	7,72
1981	6,8	36,9	7,38
1982	6,2	36,2	7,24
1983	7,8	38,4	7,68
1984	8,3	40,2	8,04
1985	9,3	41,8	8,36
1986	8,6	42,1	8,42
1987	7,8	41,7	8,34
1988	8,1	39,9	7,98
1989	7,9	38,3	7,66
1990	7,5	37,7	7,54
1991	7	-	-
1992	7,2	-	-

Novamente, alguns períodos ficam sem tendência, porque os resultados das médias são postos no centro dos períodos. Aqui, como as médias agrupam 5 períodos, dois ficam sem tendência no início e dois ao final da série.

Média móvel de 7 períodos

Devemos juntar os períodos de 7 em 7, sempre acrescentando o próximo e desprezando o primeiro do grupo anterior, colocando o resultado no período central (5º período):

1970 - 1971 - 1972 - 1973 - 1974 - 1975 - 1976 com resultado em 1973;
 1971 - 1972 - 1973 - 1974 - 1975 - 1976 - 1977 com resultado em 1974;
 1972 - 1973 - 1974 - 1975 - 1976 - 1977 - 1978 com resultado em 1975;
 1973 - 1974 - 1975 - 1976 - 1977 - 1978 - 1979 com resultado em 1976;
 1974 - 1975 - 1976 - 1977 - 1978 - 1979 - 1980 com resultado em 1977;
 1975 - 1976 - 1977 - 1978 - 1979 - 1980 - 1981 com resultado em 1978;
 e assim por diante, até chegar a
 1986 - 1987 - 1988 - 1989 - 1990 - 1991 - 1992 com resultado em 1989.

A tabela com os resultados:

Ano	Vendas (Y) - em milhões	Total Móvel 7 períodos	Média Móvel 7 períodos
1970	5,3	-	-
1971	7,8	-	-
1972	7,8	-	-
1973	8,7	51,5	7,36
1974	6,7	55,3	7,90
1975	6,6	57	8,14
1976	8,6	58,2	8,31
1977	9,1	56,6	8,09
1978	9,5	56,7	8,10
1979	9	56,3	8,04
1980	7,1	55,5	7,93
1981	6,8	54,7	7,81
1982	6,2	54,5	7,79
1983	7,8	54,1	7,73
1984	8,3	54,8	7,83
1985	9,3	56,1	8,01
1986	8,6	57,8	8,26
1987	7,8	57,5	8,21
1988	8,1	56,2	8,03
1989	7,9	54,1	7,73
1990	7,5	-	-
1991	7	-	-
1992	7,2	-	-

Aqui, como as médias agrupam 7 períodos, três ficam sem tendência no início e três ao final da série. Construindo o gráfico da série original com as médias móveis:

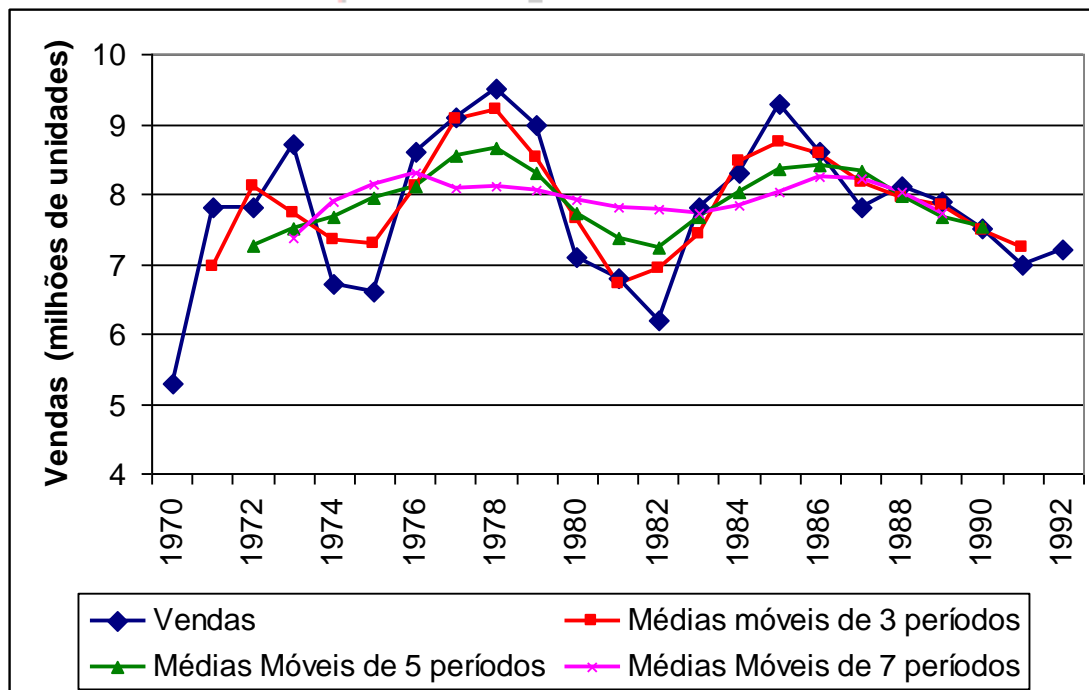


Figura 8 - Vendas da GM e médias móveis de 3, 5 e 7 períodos

Quanto maior o número de períodos da série agrupados pela média móvel mais "alisada" fica a linha de tendência (média móvel de 7 períodos): esta representa melhor o comportamento de longo prazo, indicando uma ligeira oscilação em torno de 8 milhões de unidades vendidas (este é o **nível** da série). E quanto menor o número de períodos mais a tendência acompanhará os dados originais (média móvel de 3 períodos). Por este motivo, quando uma série apresenta muitas irregularidades é comum "alisá-la" através de médias móveis.

Mas o que aconteceria se o número de períodos fosse par? Se possível, devemos escolher um número ímpar de períodos, para que o resultado seja colocado em um período central que tem correspondente na série temporal. Contudo, se a série temporal for registrada trimestralmente, e queremos obter a sua tendência por médias móveis, devemos utilizar médias móveis de 4 períodos (porque há 4 trimestres no ano), para que possamos obter a tendência sem influência da sazonalidade. Se a série for registrada mensalmente, devemos utilizar médias móveis de 12 períodos. Nestes dois casos os períodos "centrais" (que começariam em 2,5° e 6,5° respectivamente) não têm correspondente na série original, o que tornará impossível remover a tendência da série para observar outras componentes. As médias móveis precisam ser **centralizadas**: calculam-se novas médias móveis, a partir das calculadas com 4 ou 12 períodos, mas agora de 2 períodos, colocando seus resultados em períodos que têm correspondentes na série.

Exemplo 4.3 - Uma corretora de seguros está avaliando os contratos obtidos ao longo de vários anos. A série foi registrada trimestralmente. Obtenha a tendência da série utilizando médias móveis.

Ano	Trimestre			
	I	II	III	IV
1993	24	21	11	9
1994	20	20	7	6
1995	15	14	5	6
1996	13	12	4	5

Como a série é registrada trimestralmente, e a tendência deve ser obtida por médias móveis, é preciso calcular médias móveis de 4 períodos, pois há 4 trimestres no ano. Contudo, como este número de períodos é par, médias móveis de 2 períodos, calculadas a partir daquelas de 4 períodos, precisam ser obtidas para obter resultados centrados.

Trim.	Con.	Total móvel 4 per.	Total móvel 2 per. (centrado)	Média Móvel 2 per. (centrada)
1993 I	24			
1993 II	21			
		65		
1993 III	11		126	15,75
		61		
1993 IV	9		121	15,125
		60		
1994 I	20		116	14,5
		56		
1994 II	20		109	13,625
		53		
1994 III	7		101	12,625
		48		
1994 IV	6		90	11,25
		42		
1995 I	15		82	10,25
		40		
1995 II	14		80	10
		40		
1995 III	5		78	9,75
		38		
1995 IV	6		74	9,25
		36		
1996 I	13		71	8,875
		35		
1996 II	12		69	8,625
		34		
1996 III	4			
1996 IV	5			

As linhas mais escuras na tabela acima indicam os períodos "centrais" das médias móveis de ordem 4, que não têm correspondente na série original. Para facilitar o nosso trabalho calculamos apenas os totais móveis de 4 períodos, acompanhe:

- os primeiros 4 períodos são os 4 trimestres de 1993: 1993 I, 1993 II, 1993 III, 1993 IV; o total móvel deles (igual a 65) deve ficar no centro destes períodos, ou seja entre 1993 II e 1993 III, que é um período inexistente na série original;
- em seguida desprezamos 1993 I e incluímos 1994 I: 1993 II, 1993 III, 1993 IV, 1994 I; o total móvel (igual a 61) deve ficar entre 1993 III e 1993 IV, novamente inexistente na série original;
- prosseguimos até os 4 últimos períodos: 1996 I, 1996 II, 1996 III, 1996 IV; o total móvel (igual a 34) deve ficar entre 1996 II e 1996 III.

Agora precisamos centralizar obter as médias móveis centradas. Primeiramente calculamos os totais móveis de 2 períodos, juntando 2 totais móveis de 4 períodos calculados anteriormente:

- o total móvel de 4 períodos que está entre 1993 II e 1993 III, com o que está entre 1993 III e 1993 IV, cujo resultado (126) deverá ficar em 1993 III (passando a ter correspondente na série original);
- o total móvel de 4 períodos que está entre 1993 III e 1993 IV, com o que está entre 1993 IV e 1994 I, cujo resultado (121) deverá ficar em 1993 IV (passando a ter correspondente na série original);
- prosseguimos até os últimos 2 totais móveis de 4 períodos: entre 1996 I e 1996 II, e entre 1996 II e 1996 III, cujo resultado (69) deverá ficar em 1996 II.

Dividimos os totais móveis de 2 períodos por oito (porque agrupamos dois conjuntos de 4 períodos), e obtemos as médias móveis centradas. Repare que faltam médias móveis para exatamente 2 períodos no início da série e para exatamente 2 no final, porque as médias móveis iniciais envolvem 4 períodos (porque há 4 trimestres no ano). Se a série fosse mensal faltariam 6 períodos no início e 6 no final.

Vamos ver como ficam a série original e a tendência em um gráfico:

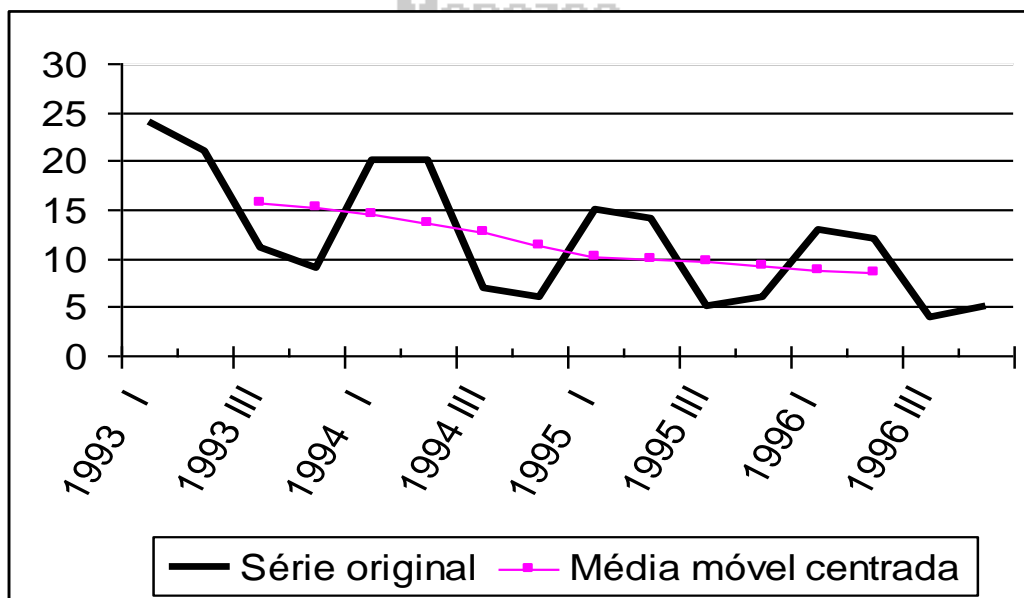


Figura 9 - Número de contratos: série original e médias móveis de 4 períodos (centradas)

É interessante observar que a tendência do número de contratos é decrecente. Supondo que fossem dados atuais e desejássemos fazer previsões para o futuro, trata-se de um inquietante sinal para a corretora de seguros. Se o mercado encontra-se retraído o mau desempenho seria explicável, mas mesmo assim é preocupante que no longo prazo o número de contratos está caindo, a não ser que o valor individual dos contratos compense esta redução.

4.2.3 - Ajuste Exponencial

O ajuste exponencial é uma outra forma de obter a tendência de uma série temporal. Apresenta algumas vantagens em relação às médias móveis:

- permite realizar previsões de curto prazo (para o período seguinte da série), o que não é possível por médias móveis.
- leva em conta todos os valores previamente observados ao período sob análise, e não somente os "mais próximos" dele, como ocorre nas médias móveis.

Na realidade o ajuste exponencial fornece uma média móvel *exponencialmente ponderada* ao longo da série temporal: ou seja, cada previsão ou valor ajustado depende de todos os valores prévios. Os pesos designados para os valores observados decrescem ao longo do tempo, ou seja, o valor observado mais recentemente recebe o maior peso, o valor anterior o segundo maior e o valor observado inicialmente recebe o menor peso: isso é bom senso, imagina-se que os dados mais recentes devam ter mais influência nas previsões do que os mais antigos. O ajuste exponencial é uma das ferramentas disponíveis no suplemento Análise de Dados do Microsoft Excel.

Para realizar o ajuste exponencial basta aplicar a seguinte fórmula para um período de tempo i qualquer:

$$E_i = W \times Y_i + (1 - W) \times E_{i-1}$$

Onde:

i - um período de tempo qualquer;

Y_i - valor da série original no período i ;

E_i - valor da série exponencialmente ajustada no período i ;

E_{i-1} - valor da série exponencialmente ajustada no período $i - 1$ (período anterior);

W - constante de regularização ou coeficiente de ajuste ($0 < W < 1$);

Considera-se que o primeiro valor da série original será igual ao primeiro valor ajustado, isto significa que o ajuste realmente começa a partir do segundo período da série. Como cada valor ajustado leva em conta o valor ajustado imediatamente anterior (multiplicado pela constante de regularização) teoricamente todos os valores prévios da série contribuem para o valor ajustado.

A escolha da constante de regularização W é crucial para o ajuste exponencial, mas é um processo subjetivo. Não obstante, é possível estabelecer uma regra de escolha:

- se o interesse é simplesmente obter a tendência, eliminando o efeito das outras componentes, o valor de W deverá ser próximo de zero;
- se houver interesse, porém, em realizar previsão com a série é recomendável que o valor de W seja mais próximo de 1, de maneira a refletir melhor o comportamento da série no curto prazo.

Exemplo 4.4 - Faça o ajuste exponencial da série de vendas do Exemplo 4.2 (usando $W = 0,25$; $W = 0,5$; $W = 0,75$ e $W = 0,10$). Construa um gráfico conjunto da série original com os quatro ajustes.

Ano	Vendas (Y)	Ano	Vendas (Y)	Ano	Vendas (Y)
1970	5,3	1978	9,5	1986	8,6
1971	7,8	1979	9,0	1987	7,8
1972	7,8	1980	7,1	1988	8,1
1973	8,7	1981	6,8	1989	7,9
1974	6,7	1982	6,2	1990	7,5
1975	6,6	1983	7,8	1991	7,0
1976	8,6	1984	8,3	1992	7,2
1977	9,1	1985	9,3		

Vamos demonstrar os cálculos para $W = 0,25$.

Vamos considerar que o primeiro valor da série, Y_{1970} , será igual ao primeiro valor ajustado, E_{1970} . Podemos então realizar o ajuste para o ano de 1971:

$$E_{1971} = W \times Y_{1971} + (1 - W) \times E_{1970} = (0,25 \times 7,8) + (1 - 0,25) \times (5,3) = 5,93 \text{ milhões}$$

Para o ano de 1972:

$$E_{1972} = W \times Y_{1972} + (1 - W) \times E_{1971} = (0,25 \times 7,8) + (1 - 0,25) \times (5,93) = 6,39 \text{ milhões}$$

O processo segue até o final da série. De maneira análoga podemos obter o ajuste para $W = 0,5$ e $W = 0,75$. Os valores ajustados estão na tabela a seguir:

Ano	Vendas (Y) - em milhões	W = 0,25	W = 0,50	W = 0,75	W = 0,10
1970	5,3	5,3	5,3	5,3	5,3
1971	7,8	5,93	6,55	7,18	5,55
1972	7,8	6,39	7,18	7,64	5,78
1973	8,7	6,97	7,94	8,44	6,07
1974	6,7	6,90	7,32	7,13	6,13
1975	6,6	6,83	6,96	6,73	6,18
1976	8,6	7,27	7,78	8,13	6,42
1977	9,1	7,73	8,44	8,86	6,69
1978	9,5	8,17	8,97	9,34	6,97
1979	9	8,38	8,98	9,08	7,17
1980	7,1	8,06	8,04	7,60	7,16
1981	6,8	7,74	7,42	7,00	7,13
1982	6,2	7,36	6,81	6,40	7,04
1983	7,8	7,47	7,31	7,45	7,11
1984	8,3	7,68	7,80	8,09	7,23
1985	9,3	8,08	8,55	9,00	7,44
1986	8,6	8,21	8,58	8,70	7,55
1987	7,8	8,11	8,19	8,02	7,58
1988	8,1	8,11	8,14	8,08	7,63
1989	7,9	8,05	8,02	7,95	7,66
1990	7,5	7,92	7,76	7,61	7,64
1991	7	7,69	7,38	7,15	7,58
1992	7,2	7,57	7,29	7,19	7,54

E o gráfico é mostrado na figura 10:

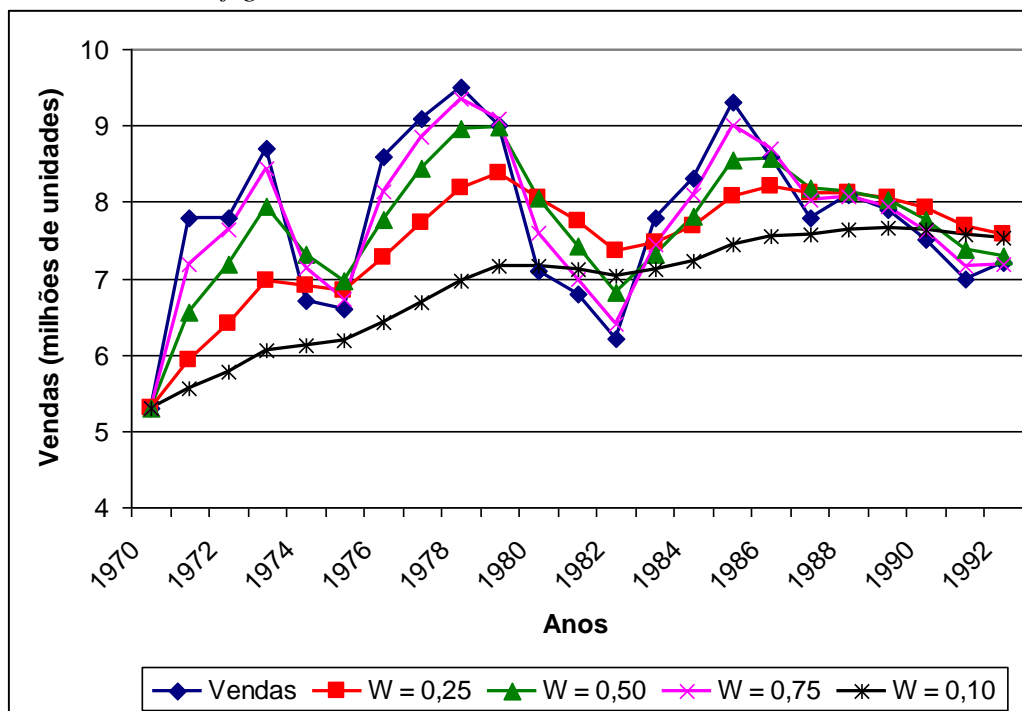


Figura 10 - Ajuste exponencial com vários valores de W

Quanto menor o valor de W mais "alisada" é a série, com as variações de curto prazo sendo amortizadas, possibilitando visualizar o comportamento de longo prazo da série, seja ele crescente/decrescente ou estacionário: para $W = 0,1$ é fácil perceber uma tendência crescente nas vendas, mas que parece estar se estabilizando. À medida que o valor de W aproxima-se de 1 o ajuste exponencial torna-se mais próximo da série original, o que pode ser útil na previsão para o ano de 1993.

Por exemplo, se quiséssemos realizar a previsão para o ano de 1993, o valor previsto seria aquele ajustado para o ano imediatamente anterior (1992): para $W = 0,25$ $Vendas_{1993} = 7,57$ milhões; para $W = 0,50$ $Vendas_{1993} = 7,29$ milhões; para $W = 0,75$ $Vendas_{1993} = 7,19$ milhões; para $W = 0,10$ $Vendas_{1993} = 7,59$ milhões. Qual destas previsões é a mais apropriada? Como se trata de uma previsão de **curto prazo** é recomendável escolher as previsões feitas para valores mais altos de W , 0,5 ou 0,75, que mostram melhor as flutuações. Sendo assim, espera-se que as vendas em 1993 estejam entre em 7,29 e 7,19 milhões de unidades. Assim que os dados de 1993 estivessem disponíveis poderíamos fazer a previsão sobre 1994, e assim por diante.

Compare a curva para $W = 0,10$ da figura 10, que indica uma tendência crescente de vendas, com a média móvel de 7 períodos da figura 8, que indica estabilização em torno de 8 milhões. Em qual das duas confiar? Lembre-se de que o ajuste exponencial leva em conta todos os valores anteriores ao período, e que a média móvel apenas aqueles definidos no seu período (3, 5, 7), e que maior peso é dado aos valores dos períodos mais próximos, o que pode representar maior acuracidade, pois são mais recentes.

4.2.4 - Remoção da Tendência

Uma vez identificada a tendência, seja por equações ou por médias móveis, ela pode ser removida da série, para facilitar a visualização das outras componentes:

$$Y - T = C + S + I \quad \text{para um modelo aditivo}$$

$$\frac{Y}{T} = C \times S \times I \quad \text{para um modelo multiplicativo}$$

Vejamos como ficaria a série mostrada na figura 5 com a remoção da tendência, pelos modelos aditivo e multiplicativo (ambas supondo uma tendência linear):

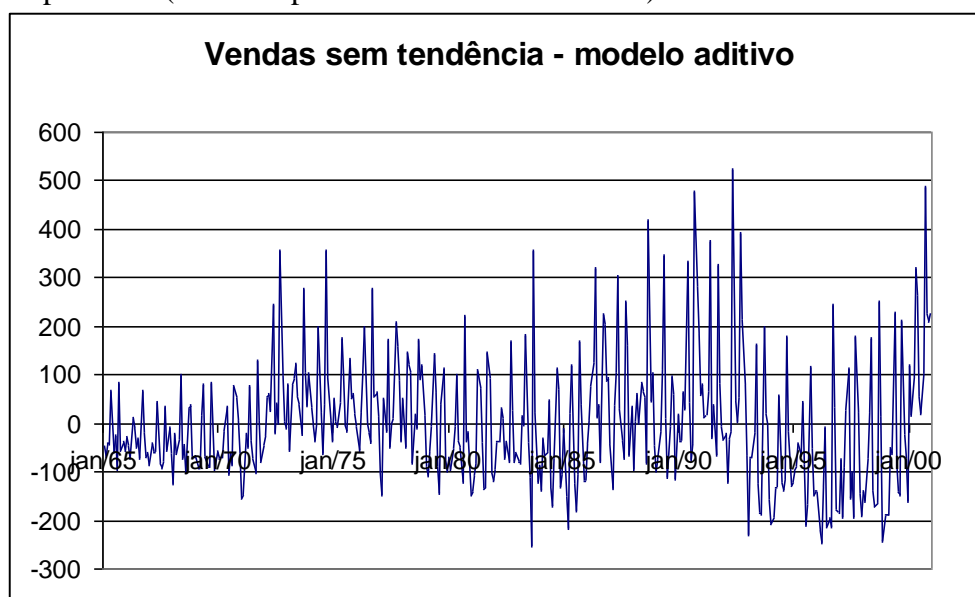


Figura 11- Série temporal de vendas (figura 5) com tendência removida – modelo aditivo

Observe a escala do gráfico. Os valores oscilam em torno de zero: se maiores do que zero indicam componentes que aumentam a tendência, se menores que diminuem. A escala do gráfico é semelhante a da figura 5 (milhões de dólares).

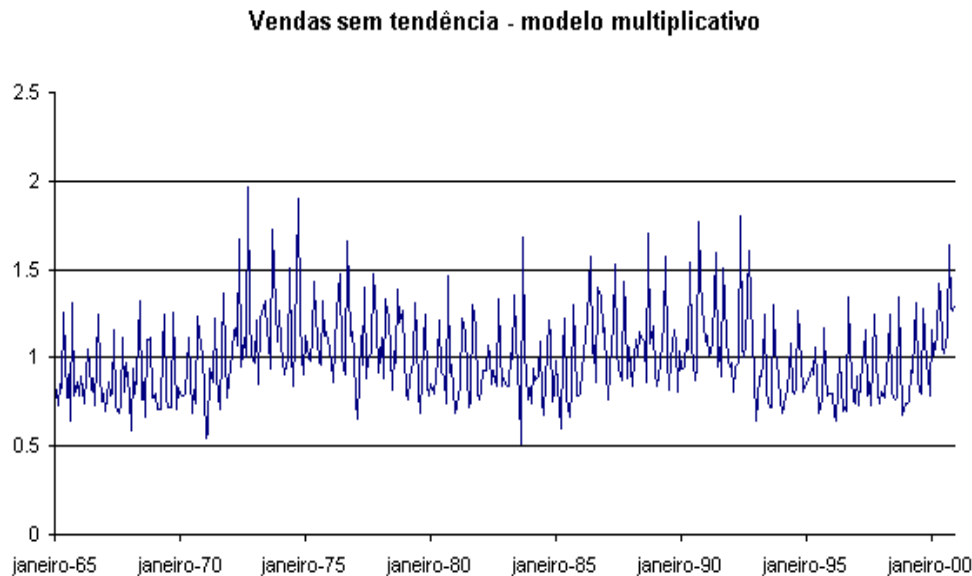


Figura 12 - Série temporal de vendas (figura 5) com tendência removida – modelo multiplicativo

Observe a escala do gráfico, com valores em torno de 1: a tendência foi removida, restaram apenas as componentes cíclicas, sazonais e irregulares que modificam a tendência em um modelo multiplicativo.

Marcelo
Menezes

4.3 - Obtenção das variações sazonais

Conforme visto na seção 4.1 as variações sazonais são oscilações de curto prazo, que ocorrem sempre dentro do ano, e que se repetem sistematicamente ano após ano. Obviamente uma série temporal registrada anualmente (ou seja, os valores dos dias, meses, trimestres, são resumidos em um valor anual) **não tem** componente sazonal.

No modelo multiplicativo as variações sazonais são representadas pelos **índices sazonais**, ou fatores sazonais, um para cada período em que o ano é dividido (se a série é registrada mensalmente há 12 índices, se trimestralmente há 4 índices, etc.). Os índices sazonais modificam a tendência, ao serem somados (modelo aditivo) ou multiplicados por ela:

- no modelo aditivo, se todos os índices forem próximos ou exatamente iguais a zero então as componentes sazonais parecem não exercer grande efeito sobre a série; se os índices forem substancialmente diferentes de zero, tanto positivos como negativos, o valor da tendência será modificado por eles, indicando influência das componentes sazonais na série.
- no modelo multiplicativo, se todos os índices sazonais forem aproximadamente iguais a 1 então as componentes sazonais parecem não exercer grande efeito sobre a série; se os índices forem substancialmente diferentes de 1, pelo menos 5% acima ou abaixo em alguns dos meses ou trimestres, o valor da tendência será modificado por eles, indicando que as componentes sazonais afetam a série.

Quando se usa o modelo aditivo a soma de todos os índices sazonais precisa ser igual, ou

muito próxima, de zero. Quando se usa o modelo multiplicativo a soma precisa ser igual ao período da sazonalidade: se a série é trimestral deve ser igual a 4 (4 trimestres no ano), se é mensal deve ser igual a 12, e assim por diante. Em alguns casos é preciso fazer pequenas correções para garantir tal comportamento.

Para obter as variações sazonais recomenda-se que a série temporal tenha, no mínimo, **quatro anos completos** (16 trimestres, 48 meses, por exemplo). Caso contrário, será mais difícil confirmar a existência da regularidade inerente às variações sazonais (alguns programas estatísticos simplesmente não apresentam os resultados para séries menores).

Há vários métodos para a obtenção dos índices sazonais, entre eles o método da razão para a média móvel (ou método da média móvel percentual). Ele consiste em:

- 1) obter médias móveis de ordem igual ao número de períodos sazonais (4 se a série é trimestral, 12 se é mensal);
- 2) obter médias móveis de 2 períodos, centradas, a partir das médias móveis calculadas no passo 1;
- 3) obter os índices sazonais para cada período:
 - no modelo ADITIVO, **subtraindo** dos valores originais da série as médias móveis centradas calculadas no passo 2;
 - no modelo MULTIPLICATIVO, **dividindo** os valores originais da série pelas médias móveis centradas calculadas no passo 2;
- 4) obter medidas de síntese dos índices calculados no passo 3, que representarão cada período sazonal (por exemplo, a mediana dos índices sazonais de todos os janeiros existentes na série).
 - no modelo ADITIVO, calcular a **média aritmética** simples dos valores correspondentes ao período sazonal (média dos índices obtidos em todos os janeiros da série, por exemplo);
 - no modelo MULTIPLICATIVO, calcular a média aritmética simples dos valores correspondentes ao período sazonal, **sem incluir** os valores **máximo** e **mínimo**⁶ (imagine que há os índices 1,05; 1,054; 1,061; 1,07; 1,072; 1,08, a média seria calculada excluindo os valores 1,05 e 1,08, mínimo e máximo respectivamente); uma solução alternativa seria calcular a mediana dos índices de cada período.
- 5) fazer as correções necessárias para que a soma dos índices seja coerente (igual a zero para o aditivo e igual à ordem da sazonalidade no multiplicativo):
 - no modelo ADITIVO, somar todos os índices calculados no passo 4 e **dividir** a soma pela ordem da sazonalidade (4 se trimestral, 12 se mensal, etc.); o resultado deverá ser subtraído de cada um dos índices, garantindo que a soma deles seja igual a zero.
 - no modelo MULTIPLICATIVO, somar todos os índices calculados no passo 4, **subtrair** da soma a ordem da sazonalidade (4 se trimestral, 12 se mensal, etc.), e dividir a subtração pela ordem da sazonalidade (novamente, 4 se trimestral, 12 se mensal, etc.); subtrair o resultado de 1; o resultado deverá ser multiplicado por cada um dos índices, garantindo que a soma deles seja igual à ordem da sazonalidade.

Os passos 1 e 2 são virtualmente idênticos ao procedimento para obtenção de tendência por médias móveis visto na seção 4.2.2 (quando o número de períodos é par).

Exemplo 4.5 - Obtenha os índices sazonais, tanto pelo modelo aditivo quanto pelo multiplicativo, para a série de contratos de seguros apresentada no Exemplo 4.3. Interprete os resultados encontrados.

Há dados disponíveis para quatro anos completos, de 1993 a 1996. Veja os resultados na tabela abaixo:

⁶ Também chamada de média interna, ou medial average (em inglês).

Pelo modelo aditivo.

Trimestre	No. de Contratos	Totais Móveis 4 períodos	Totais Móveis 2 períodos (centrados)	Médias Móveis 2 períodos (centradas)	Índices sazonais
1993 I	24				
1993 II	21				
		65			
1993 III	11		126	15,75	-4,750
		61			
1993 IV	9		121	15,125	-6,125
		60			
1994 I	20		116	14,5	5,500
		56			
1994 II	20		109	13,625	6,375
		53			
1994 III	7		101	12,625	-5,625
		48			
1994 IV	6		90	11,25	-5,250
		42			
1995 I	15		82	10,25	4,750
		40			
1995 II	14		80	10	4,000
		40			
1995 III	5		78	9,75	-4,75
		38			
1995 IV	6		74	9,25	-3,25
		36			
1996 I	13		71	8,875	4,125
		35			
1996 II	12		69	8,625	3,375
		34			
1996 III	4				
1996 IV	5				

Temos que encontrar 4 índices sazonais, já que há 4 trimestres no ano. Como a série é registrada trimestralmente, e a tendência deve ser obtida por médias móveis, é preciso calcular médias móveis de 4 períodos, pois há 4 trimestres no ano. Contudo, como este número de períodos é par, médias móveis de 2 períodos, calculadas a partir daquelas de 4 períodos, precisam ser obtidas para obter resultados centrados. O procedimento inicial é semelhante ao feito no Exemplo 4.3, até a obtenção das médias móveis de 2 períodos centradas.

Para obter os índices sazonais devemos dividir os valores originais da série pelas médias móveis centradas, a partir de 1993 III até 1996 II, cujos resultados estão na última coluna da tabela acima. Os índices para cada trimestre serão:

Trimestre I => 5,500 4,750 4,000

Trimestre II => 6,375 4,000 3,375

Trimestre III=> -4,750 -5,625 -4,75

Trimestre IV=> -6,125 -5,250 -3,25

Os índices somente foram calculados para os períodos em que havia médias móveis de 2 períodos centradas.

Como é um modelo aditivo precisamos calcular a média de cada trimestre. Então os índices sazonais serão:

Trimestre I = 4,792 Trimestre II = 4,583 Trimestre III = -5,042 Trimestre IV = -4,875

Observe que há uma diferença considerável entre os índices. No primeiro trimestre do ano o número de contratos aumenta em cerca de 5, no segundo aumenta outros 5, e no terceiro e quarto trimestres sofre uma queda de 5. Estas oscilações são grandes demais para ter ocorrido por acaso, há influência da sazonalidade na série de contratos. Somando os índices vamos obter -0,5417, indicando que é preciso realizar uma correção. Como a sazonalidade tem ordem 4, divide-se a soma por 4 obtendo -0,135417. Subtraindo de cada índice este valor:

Trimestre I = $4,792 - (-0,135417) = 4,9271$

Trimestre II = $4,583 - (-0,135417) = 4,7188$

Trimestre III = $-5,042 - (-0,135417) = -4,9063$

Trimestre IV = $-4,875 - (-0,135417) = -4,7396$

E a soma dos quatro índices é virtualmente igual a zero.

Pelo modelo multiplicativo:

Trimestre	No. de Contratos	Totais Móveis 4 períodos	Totais Móveis 2 períodos (centrados)	Médias Móveis 2 períodos (centradas)	Índices sazonais
1993 I	24				
1993 II	21				
		65			
1993 III	11		126	15,75	0,698
		61			
1993 IV	9		121	15,125	0,595
		60			
1994 I	20		116	14,5	1,379
		56			
1994 II	20		109	13,625	1,468
		53			
1994 III	7		101	12,625	0,554
		48			
1994 IV	6		90	11,25	0,533
		42			
1995 I	15		82	10,25	1,463
		40			
1995 II	14		80	10	1,400
		40			
1995 III	5		78	9,75	0,513
		38			
1995 IV	6		74	9,25	0,649
		36			
1996 I	13		71	8,875	1,465
		35			
1996 II	12		69	8,625	1,391
		34			
1996 III	4				
1996 IV	5				

Temos que encontrar 4 índices sazonais, já que há 4 trimestres no ano. Como a série é registrada trimestralmente, e a tendência deve ser obtida por médias móveis, é preciso calcular médias móveis de 4 períodos, pois há 4 trimestres no ano. Contudo, como este número de períodos é par, médias móveis de 2 períodos, calculadas a partir daquelas de 4 períodos, precisam ser obtidas para obter resultados centrados. O procedimento inicial é semelhante ao feito no Exemplo 4.3, até a obtenção das médias móveis de 2 períodos centradas.

Para obter os índices sazonais devemos dividir os valores originais da série pelas médias móveis centradas, a partir de 1993 III até 1995 II, cujos resultados estão na última coluna da tabela acima. Os índices para cada trimestre serão:

Trimestre I => 1,379 1,463 1,465
 Trimestre II => 1,468 1,400 1,391
 Trimestre III=> 0,698 0,554 0,513
 Trimestre IV=> 0,595 0,533 0,649

Os índices somente foram calculados para os períodos em que havia médias móveis de 2 períodos centradas. Precisamos calcular a média de cada trimestre, excluindo os valores máximo e mínimo.. Neste caso, como há apenas 3 valores basta excluir os extremos. Então os índices sazonais serão:
 Trimestre I = 1,463 Trimestre II = 1,400 Trimestre III = 0,554 Trimestre IV = 0,595

Observe que há uma diferença considerável entre os índices. No primeiro trimestre do ano o número de contratos aumenta cerca de 46,3% ($[1,463 - 1] \times 100$), no segundo aumenta 40%, no terceiro trimestre sofre uma queda de 44,6% ($[0,554 - 1] \times 100$), e no quarto a queda é de 40,5%. Estas oscilações são grandes demais para ter ocorrido por acaso, há influência da sazonalidade na série de contratos. Somando os índices vamos obter 4,013, indicando que é preciso realizar uma correção. Como a sazonalidade tem ordem 4, subtrai-se a soma de 4 e divide-se o resultado por 4 obtendo 0,0032. Subtraindo este valor de 1, teremos 0,9968, multiplicando este resultado pelos índices obtemos os índices corrigidos:

Trimestre I = $1,463 \times 0,9968 = 1,459$

Trimestre II = $1,400 \times 0,9968 = 1,395$

Trimestre III = $0,554 \times 0,9968 = 0,553$

Trimestre IV = $0,595 \times 0,9968 = 0,593$

E a soma dos quatro índices é virtualmente igual a 4.

Podemos remover a sazonalidade da série, dividindo os valores originais de cada período por seu respectivo índice sazonal, pelos modelos aditivo e multiplicativo, e podemos ver o resultado em dois gráficos:

Trimestre	Y	S (multiplicativo)	$T \times C \times I = Y / S$	S (aditivo)	$T + C + I = Y - S$
1993 I	24	1,459	16,453	4,927	19,073
1993 II	21	1,395	15,049	4,719	16,281
1993 III	11	0,553	19,904	-4,906	15,906
1993 IV	9	0,593	15,174	-4,740	13,740
1994 I	20	1,459	13,711	4,927	15,073
1994 II	20	1,395	14,332	4,719	15,281
1994 III	7	0,553	12,666	-4,906	11,906
1994 IV	6	0,593	10,116	-4,740	10,740
1995 I	15	1,459	10,283	4,927	10,073
1995 II	14	1,395	10,032	4,719	9,281
1995 III	5	0,553	9,047	-4,906	9,906
1995 IV	6	0,593	10,116	-4,740	10,740
1996 I	13	1,459	8,912	4,927	8,073
1996 II	12	1,395	8,599	4,719	7,281
1996 III	4	0,553	7,238	-4,906	8,906
1996 IV	5	0,593	8,430	-4,740	9,740

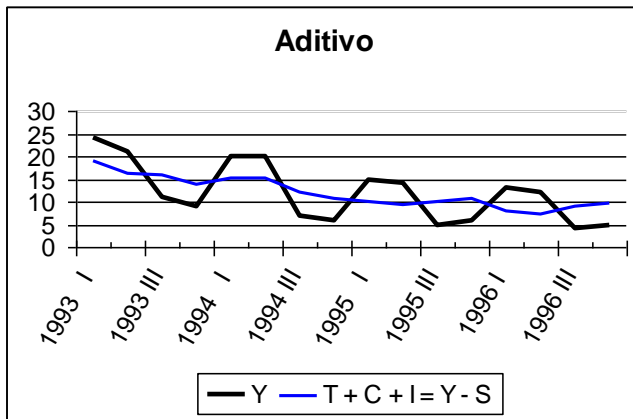


Figura 13 - Série sem sazonalidade – modelo aditivo

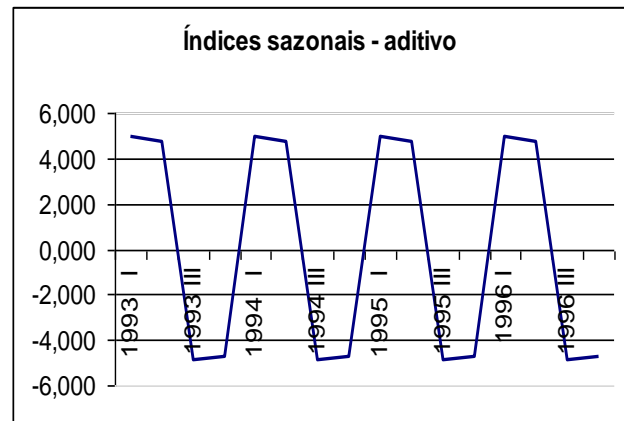


Figura 14 - Índices Sazonais trim.– modelo aditivo

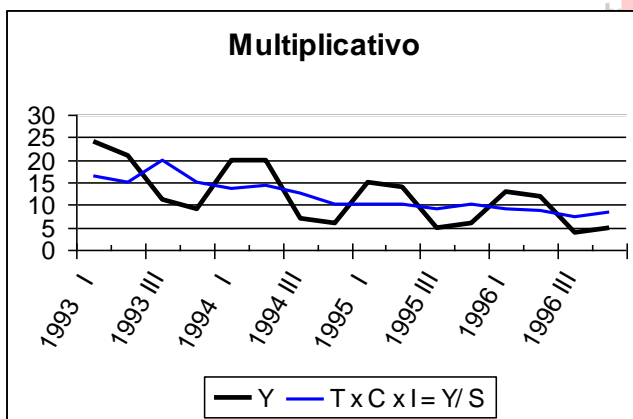


Figura 15 – Série sem sazonalidade – modelo multiplic.

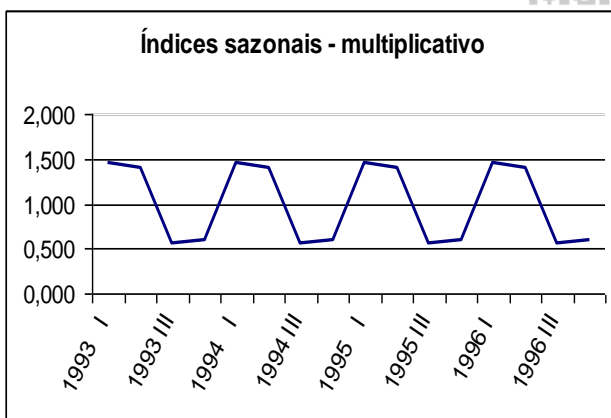


Figura 16 - Índices sazonais - modelo multiplicativo

Qual dos dois modelos é o mais apropriado? Veremos posteriormente medidas da acuracidade dos modelos, que permitirá escolher o mais adequado.

4.4 - Obtenção de variações cíclicas e irregulares⁷

⁷ Embora todos os autores concordem com a presença das componentes irregulares no modelo clássico das séries temporais, não há unanimidade sobre as componentes cíclicas. Assim, o leitor pode encontrar referências sobre séries temporais que desconsideram por completo os ciclos.

Geralmente as variações cíclicas e irregulares são avaliadas em conjunto. Conforme visto anteriormente as variações cíclicas são padrões de longo prazo (superiores a um ano), como por exemplo períodos de crescimento e recessão da economia. Já as variações irregulares são resultado de fatos fortuitos, inesperados. Alguns autores não mencionam as variações cíclicas porque em certos casos a série temporal precisa abranger décadas para que seja possível identificar o comportamento cíclico, e, especialmente em séries sócio-econômicas os dados mais antigos podem estar realmente ultrapassados e contribuir para a construção de um modelo irreal. Não obstante, optou-se por levá-las em conta neste texto para obter um modelo completo.

As variações cíclicas e irregulares são obtidas através da remoção das componentes tendência e sazonalidade (esta última apenas se os dados não forem anuais).

No modelo aditivo:

$$CI = Y - T - S$$

No modelo multiplicativo:

$$CI = \frac{Y}{(T \times S)}$$

Onde Y é o valor original da série, T é a tendência, e S é a componente sazonal (representada através dos índices sazonais).

É costume construir um gráfico de linhas com as variações cíclicas e irregulares, através do qual podemos identificar se os ciclos realmente influenciam a série, qual é sua periodicidade, e ainda se o efeito das variações irregulares é muito grande (e se é possível relacioná-lo com fatos específicos). Às vezes as variações irregulares tornam difícil a visualização dos ciclos, o que pode exigir a aplicação de médias móveis às variações cíclicas e irregulares para "alisá-la", de modo a facilitar a sua identificação.

Para identificar se há ciclos na série os seguintes padrões devem ser observados no gráfico das variações cíclicas e irregulares:

- no modelo **aditivo**, se há alternâncias sistemáticas entre valores maiores e menores do que zero ao longo dos períodos, e se os valores permanecem predominantemente maiores/menores do que zero durante pelo menos 1 ano (por exemplo: 2 anos acima de zero, seguido por 3 abaixo de zero, e assim sucessivamente);
- no modelo **multiplicativo**, se há alternâncias sistemáticas entre valores maiores e menores do que 1 ao longo dos períodos, e se os valores permanecem predominantemente maiores/menores do que 1 durante pelo menos 1 ano (por exemplo: 2 anos acima de 1, seguido por 3 abaixo de 1, e assim sucessivamente);

Os valores zero e 1 são os pontos neutros nos modelos aditivo e multiplicativo respectivamente, se as variações não se afastarem muito de zero (no modelo aditivo) ou de 1 (no modelo multiplicativo) elas não causarão modificações tangíveis na tendência, e portanto não influenciarão na série. A alternância sistemática precisa ser identificada, caso contrário o efeito dos ciclos ou é inexistente ou é inferior ao das componentes irregulares, podendo então ser desprezado no processo de previsão.

Se os ciclos influenciam na série temporal eles precisam ser levados em consideração no modelo. Precisamos calcular índices para os ciclos também, para os períodos de baixa e de alta, havendo dois procedimentos:

- calcula-se a mediana⁸, ou a média sem os valores máximo e mínimo, das variações cíclicas e irregulares para todos os períodos de alta (e baixa) existentes na série; este procedimento agrega informações de toda a série

⁸ Usamos a mediana ao invés da média para evitar que valores discrepantes, causados por variações irregulares, distorçam os resultados.

- calcula-se a mediana, ou a média sem os valores máximo e mínimo, apenas para o último período de alta (e baixa); este procedimento privilegia as informações mais recentes, que podem ser mais úteis em previsões.

Também podemos observar os efeitos das variações irregulares, basta identificarmos eventuais quedas e altas no gráfico e relacionar tais eventos com fatos ocorridos no mesmo período. É importante observar que muitas vezes tais acontecimentos não causam efeito imediato, ou mesmo não causam efeito algum, o que pode surpreender o analista desavisado.

Na figura 17 podemos observar novamente a série temporal da figura 4. Na figura 18 temos esta série após a remoção da tendência e sazonalidade, supondo um modelo aditivo, resultando apenas nas variações cíclicas e sazonais. Na figura 20 temos a mesma situação, mas com o modelo multiplicativo.

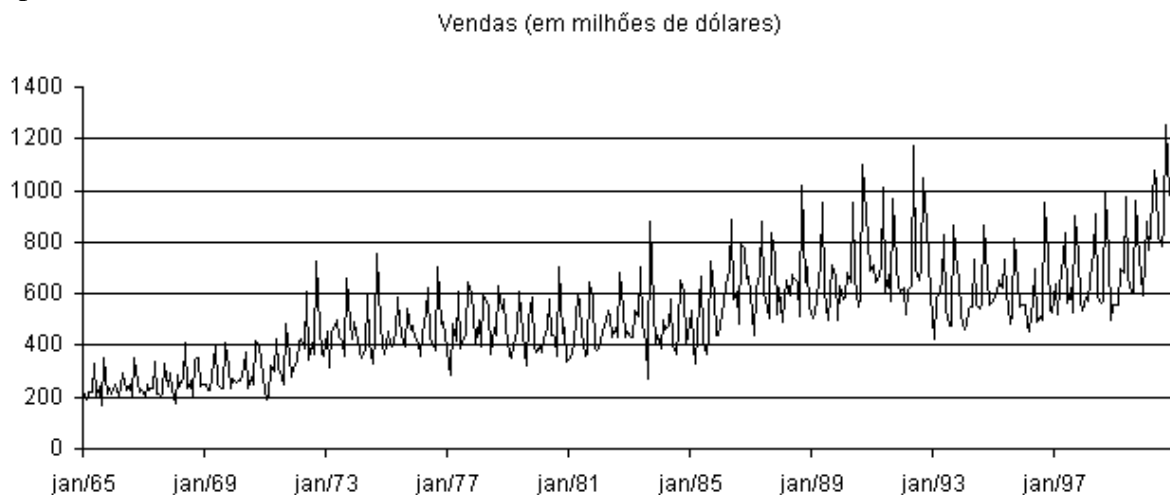


Figura 17 - Série temporal de vendas (figura 3)

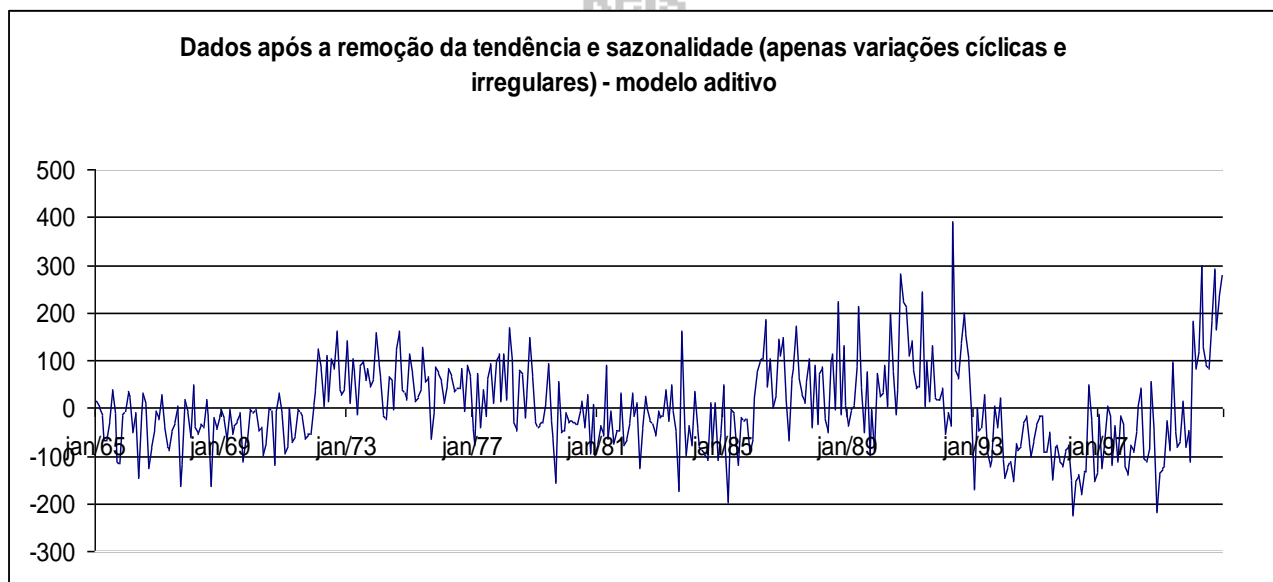


Figura 18 - Série temporal de vendas - apenas variações cíclicas e irregulares - modelo aditivo

Com alguma atenção conseguimos identificar a existência de ciclos, relativamente longos. Observe a alternância sistemática de valores menores e maiores do que zero, por períodos superiores a 1 ano: janeiro de 1965 a dezembro de 1971 baixa, de janeiro de 1972 a dezembro de 1978 alta, etc. Observe, porém, que há pontos que mesmo nos períodos de baixa atingem valores

acima de zero, e em períodos de alta abaixo de zero. Isso ocorre devido à influência das variações irregulares. Contudo, se o efeito das variações irregulares fosse suavizado a visualização seria mais fácil. Aplicando médias móveis de 12 períodos, posteriormente centradas, temos a figura 19:

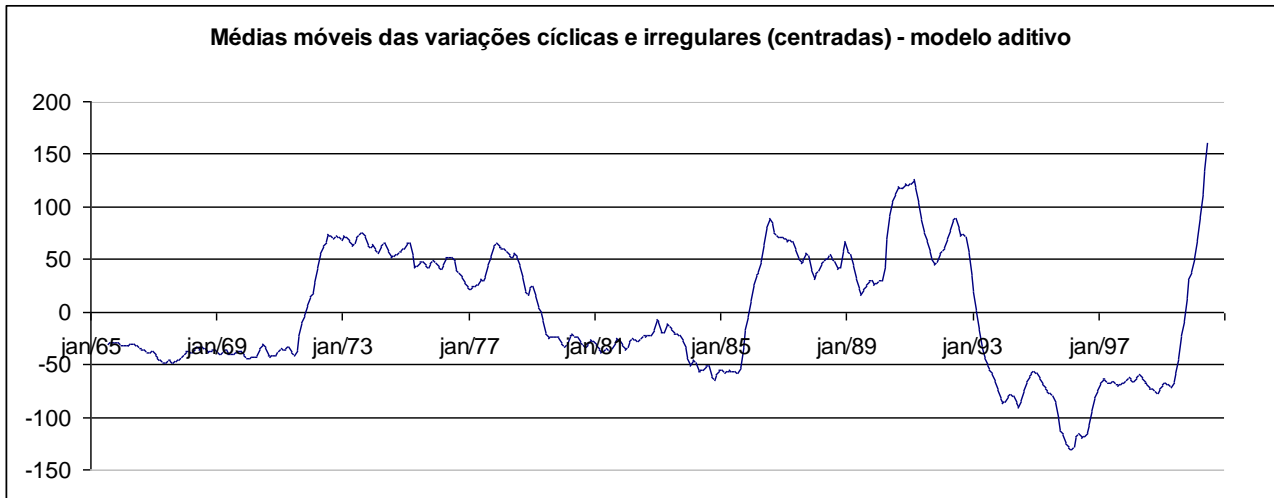


Figura 19 - Série temporal de vendas - médias móveis de 12 períodos das variações cíclicas e irregulares - modelo aditivo

Com o modelo multiplicativo:

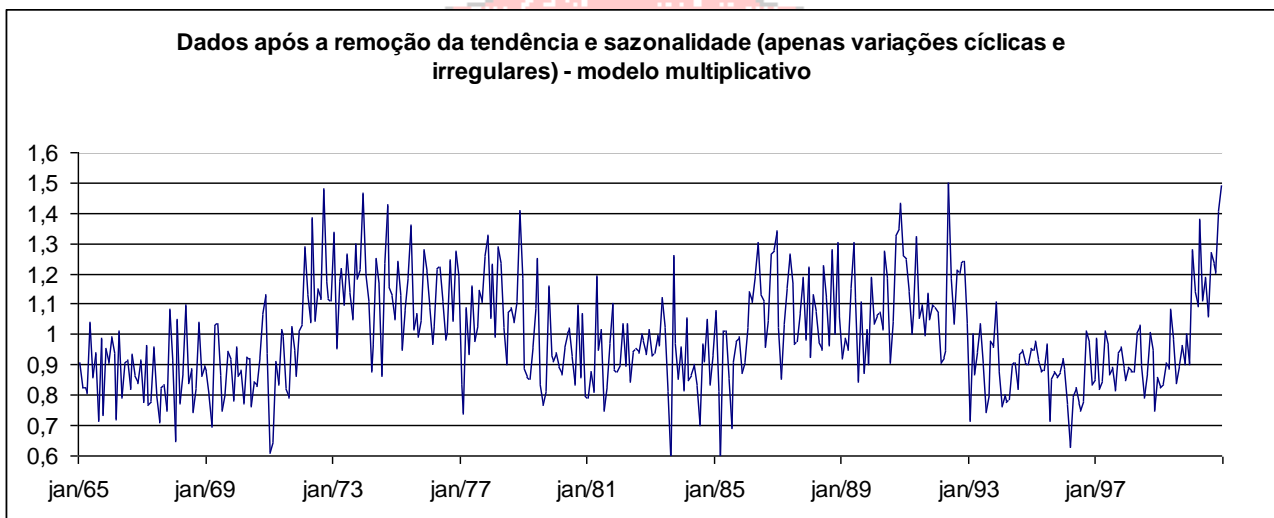


Figura 20 - Série temporal de vendas - apenas variações cíclicas e irregulares – modelo multiplicativo

Com alguma atenção conseguimos identificar a existência de ciclos, relativamente longos. Observe a alternância sistemática de valores menores e maiores do que 1, por períodos superiores a 1 ano: janeiro de 1965 a dezembro de 1971 baixa, de janeiro de 1972 a dezembro de 1978 alta, etc. Novamente, se o efeito das variações irregulares fosse suavizado a visualização seria mais fácil. Aplicando médias móveis de 12 períodos, posteriormente centradas, temos a figura 21:

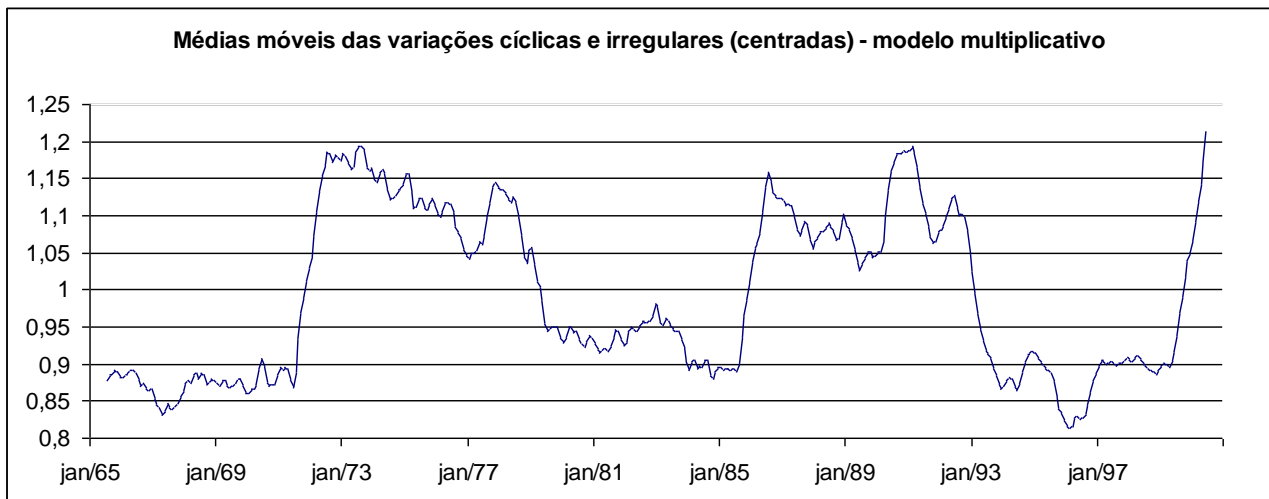


Figura 21 - Série temporal de vendas - médias móveis de 12 períodos das variações cíclicas e irregulares – modelo multiplicativo.

Foi possível verificar, tanto pelo modelo aditivo quanto pelo multiplicativo que as variações cíclicas têm influência sobre os valores da série. Isso obriga a sua consideração ao realizar a previsão dos valores futuros da série: é necessário identificar se os períodos para os quais se quer fazer a previsão serão de alta ou baixa, e obter índices cíclicos (semelhantes aos índices sazonais) para os períodos. Para o caso do exemplo acima a série terminou em dezembro de 2000. Imagine-se que há interesse em fazer a previsão para os anos imediatamente seguintes, 2001 e 2002. Estes dois anos, de acordo com as figuras 18 a 21, serão anos de alta ou baixa? Conforme visto anteriormente, os períodos de alta e baixa costumam inverter-se a cada 7 anos, 84 meses: em 1993 iniciou-se um período de baixa, que durou até fins de 1999, passando a haver um aumento nos índices a partir de 2000, como o período de alta dura cerca de 7 anos espera-se que os anos de 2000 a 2006 sejam períodos de **alta**.

Como obter os índices cíclicos? Vamos obter um valor apenas, que representará os períodos de alta: podemos calcular a mediana dos valores de todos os períodos de alta (1972 a 1978; 1986 a 1992; 2000); ou obter a mediana dos valores do último período completo de alta (1986 a 1992), que seriam dados mais recentes e talvez com maior influência sobre a série.

Outra questão importante. Vamos utilizar os dados das variações cíclicas e irregulares originais (figuras 18 e 20), ou após a aplicação das médias móveis (figuras 19 e 21). A primeira opção permite incluir mais dados (não são excluídos os 6 primeiros e 6 últimos valores da série devido aos cálculos das médias móveis). Contudo, os valores estão bastante “contaminados” pelas variações irregulares. A utilização da mediana para calcular o índice pode minimizar este problema, mas porque não usar os dados já depurados (após a aplicação das médias móveis)?

No presente caso, como se trata de uma série sócio-econômica, e há interesse em mostrar o seu comportamento cíclico, poderíamos escolher os resultados do último período completo de alta, após a aplicação das médias móveis, pois:

- os dados mais antigos podem estar obsoletos;
- as médias móveis “alisaram” a série, reduzindo a influência das variações irregulares.

Resta ainda a dúvida: modelo aditivo ou multiplicativo? Mais adiante apresentaremos medidas para verificar qual dos dois apresenta melhores resultados.

Exemplo 4.6 - Os dados a seguir representam as vendas líquidas (em bilhões de dólares), e a tendência (obtida por uma equação de reta) da Kodak. Remova a tendência da série usando os modelos aditivo e multiplicativo. Você identifica variações cíclicas?

Ano	Vendas	Tendência	CI = Vendas - Tendência	CI = Vendas/Tendência
1978	1,60	0,743587	0,85641	2,15173
1979	2,00	1,566462	0,43354	1,27676
1980	2,70	2,389338	0,31066	1,13002
1981	3,70	3,212213	0,48779	1,15185
1982	4,60	4,035089	0,56491	1,14
1983	4,62	4,857964	-0,23796	0,95102
1984	5,00	5,68084	-0,68084	0,88015
1985	5,78	6,503715	-0,72372	0,88872
1986	6,30	7,326591	-1,02659	0,85988
1987	8,00	8,149466	-0,14947	0,98166
1988	10,25	8,972342	1,27766	1,1424
1989	10,50	9,795217	0,70478	1,07195
1990	11,90	10,61809	1,28191	1,12073
1991	10,20	11,44097	-1,24097	0,89153
1992	10,60	12,26384	-1,66384	0,86433
1993	10,60	13,08672	-2,48672	0,80998
1994	11,50	13,90959	-2,40959	0,82677
1995	13,30	14,73247	-1,43247	0,90277
1996	17,00	15,55535	1,44465	1,09287
1997	18,40	16,37822	2,02178	1,12344
1998	18,90	17,2011	1,69890	1,09877
1999	18,90	18,02397	0,87603	1,0486
2000	18,94	18,84685	0,09315	1,00494

Como a série é anual NÃO HÁ influência da sazonalidade. Podemos simplesmente subtrair a Tendência das vendas (modelo aditivo) ou dividir as Vendas pela Tendência (modelo multiplicativo), obtendo as componentes CI. Os resultados ao lado permitem observar os valores da série com a tendência linear removida. Observe que há alternância entre valores maiores e menores do que zero no modelo aditivo, e 1 no modelo multiplicativo, ao longo dos anos. Contudo tal constatação pode se tornar difícil para séries maiores. É preciso construir os gráficos das variações cíclicas e irregulares.

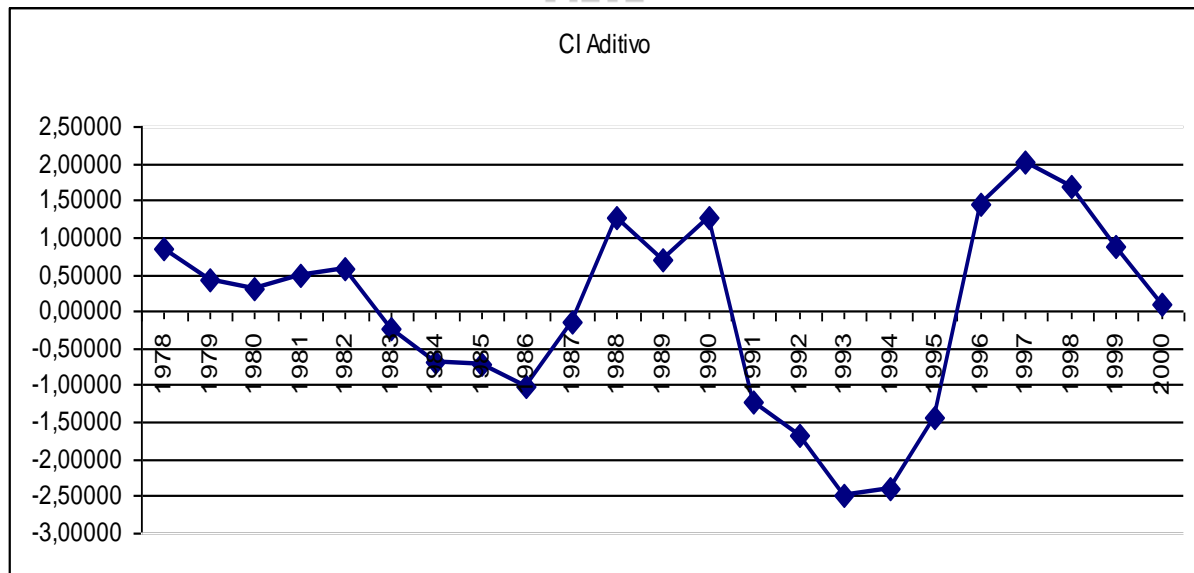


Figura 22 - Vendas líquidas da Kodak - variações cíclicas e irregulares – modelo aditivo

Pelo modelo aditivo é possível identificar uma variação sistemática: nos anos de 1978 a 1982 (5 anos) têm valores MAIORES DO QUE ZERO para as variações CI. De 1983 a 1987 (outros 5 anos), os valores de CI são MENORES DO QUE ZERO. Em 1988 ocorre outra inversão, valores maiores do que zero até 1990. Em 1991, as variações CI voltam a ficar menores do que zero, permanecendo assim até 1995 (5 anos). No ano de 1996 ocorre a última inversão da série, com os

valores tornando a ser maiores do que zero até o ano 2000. Conclui-se então que **HÁ VARIAÇÃO CÍCLICA** nesta série, pois se pode perceber uma alternância entre valores maiores e menores do que zero (das variações CI) a cada 5 anos.

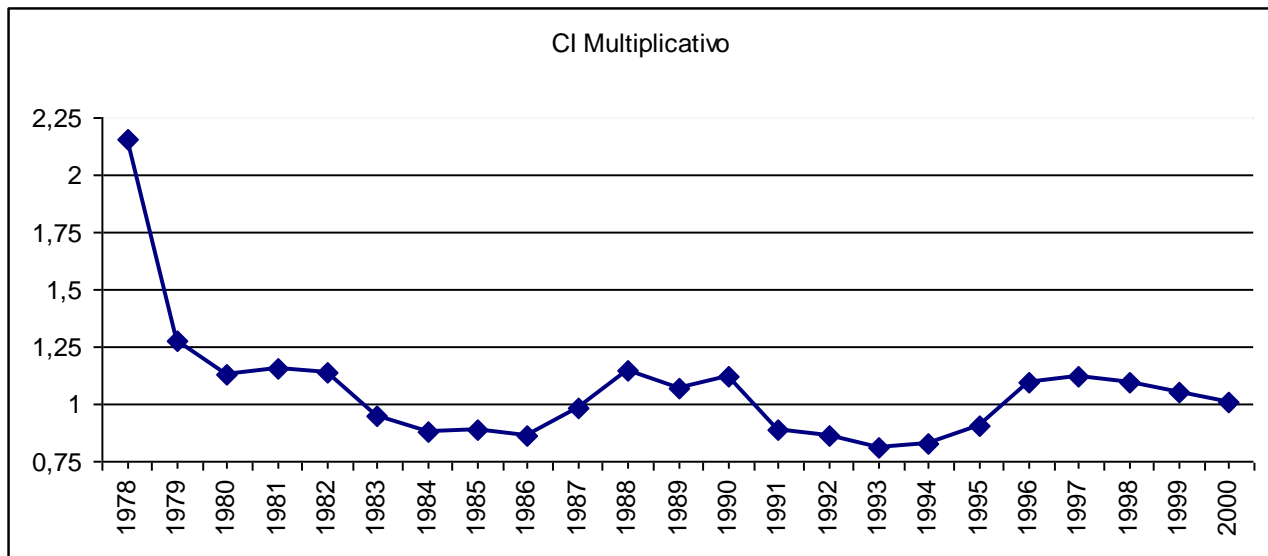


Figura 23 - Vendas líquidas da Kodak - variações cíclicas e irregulares – modelo multiplicativo

Pelo modelo multiplicativo também é possível identificar uma variação sistemática: nos anos de 1978 a 1982 (5 anos) têm valores **MAIORES DO QUE 1** para as variações CI. De 1983 a 1987 (outros 5 anos), os valores de CI são **MENORES DO QUE 1**. Em 1988 ocorre outra inversão, valores maiores do que 1 até 1990. Em 1991, as variações CI voltam a ficar menores do que 1, permanecendo assim até 1995 (5 anos). No ano de 1996 ocorre a última inversão da série, com os valores tornando a ser maiores do que 1 até o ano 2000. Conclui-se então que **HÁ VARIAÇÃO CÍCLICA** nesta série, pois pode-se perceber uma alternância entre valores maiores e menores do que 1 (das variações CI) a cada 5 anos.

Como há variações cíclicas na série elas devem ser levadas em conta na previsão que será feita. Observando os gráficos das variações CI acima, o ano de 2000 parece ser o último de um ciclo de alta. É razoável imaginar que os anos de 2001 a 2005 serão anos de baixa: a tendência precisará ser multiplicada pelos índices de ciclos de baixa. Mas quais índices de ciclos de baixa escolher? Observe que tanto nos ciclos de alta, quanto nos de baixa **NÃO HÁ** grande variação entre os valores de CI: se calcularmos a mediana dos valores de CI para um grupo de cinco anos (referente a um ciclo de baixa) teremos uma boa estimativa da componente CI para utilizar na previsão. Devemos utilizar o último ciclo de baixa disponível, que vai de 1991 a 1995, com os seguintes valores:

- pelo modelo aditivo, -1,24097; -1,66384; -2,48672; -2,40959; -1,43247. Ordenando os 5 valores e calculando a mediana obtemos -1,66384: este deverá ser o valor de CI que será somado à tendência da série, se o modelo aditivo for usado.

- pelo modelo multiplicativo, 0,8915; 0,8643; 0,8100; 0,8268; 0,9028. Ordenando os 5 valores e calculando a mediana obtemos 0,8643: este deverá ser o valor de CI que será multiplicado pela tendência da série, se o modelo multiplicativo for usado.

4.5 - Recomposição

A recomposição consiste em agregar todas as componentes identificadas na análise de séries temporais, para que seja possível realizar a melhor previsão possível. Ao fazer a recomposição, levando em conta todas as componentes que causam influência na série é possível avaliar qual modelo, aditivo ou multiplicativo, apresenta melhores resultados.

No modelo aditivo: $\hat{Y} = T + S + C$

No modelo multiplicativo: $\hat{Y} = T \times S \times C$

Onde T é a tendência (definida por uma equação, médias móveis ou ajuste exponencial - seção 4.2), S é a componente sazonal (definida pelos índices sazonais - seção 4.3), e C é a componente cíclica (definida por índices - seção 4.4).

Exemplo 4.7 – Faça a recomposição da série a seguir, supondo um modelo aditivo.

Aditivo: $\hat{Y} = T + C + S$

T	C	S
90	-22	-5
94	-22	-4
98	-22	-4
102	-22	-6
106	-22	-7
110	-22	-3
114	-22	-1
118	-22	5
122	-22	5

Para fazer a recomposição da série devemos somar as componentes da série, já que é um modelo aditivo.

O resultado está na tabela a seguir.

Aditivo: $\hat{Y} = T + C + S$

T	C	S	Y
90	-22	-5	63
94	-22	-4	68
98	-22	-4	72
102	-22	-6	74
106	-22	-7	77
110	-22	-3	85
114	-22	-1	91
118	-22	5	101
122	-22	5	105

Para fazer previsões para períodos futuros basta obter os valores de tendência, aplicar os índices sazonais apropriados (se houver influência da sazonalidade), e os índices das variações cíclicas (se houver influência delas) identificando se os períodos para os quais desejamos fazer as previsões serão de alta ou baixa.

Exemplo 4.8 - Faça a recomposição da série a seguir, supondo um modelo multiplicativo.

Multiplicativo: $\hat{Y} = T \times C \times S$

T	C	S
90	0,7	0,90
94	0,7	0,92
98	0,7	0,92
102	0,7	0,86
106	0,7	0,82
110	0,7	0,94
114	0,7	0,95
118	0,7	1,10
122	0,7	1,10

Para fazer a recomposição da série devemos multiplicar as componentes da série, já que é um modelo multiplicativo.

O resultado está na tabela a seguir.

Multiplicativo: $\hat{Y} = T \times C \times S$

T	C	S	Y
---	---	---	---

Novamente, para fazer previsões para períodos futuros basta obter os valores de tendência, aplicar os índices sazonais apropriados (se houver influência da sazonalidade), e os índices das variações cíclicas (se houver influência delas) identificando se os períodos para os quais

90	0,7	0,9	56,7
94	0,7	0,92	60,536
98	0,7	0,92	63,112
102	0,7	0,86	61,404
106	0,7	0,82	60,844
110	0,7	0,94	72,38
114	0,7	0,95	75,81
118	0,7	1,1	90,86
122	0,7	1,1	93,94

4.5.1 – Medição da acuracidade do modelo

Em várias partes do texto mencionou-se que seriam apresentadas medidas para avaliar qual modelo, aditivo ou multiplicativo, apresenta menores erros, ou seja, é mais acurado: o resultado das suas previsões, feitas por **recomposição**, aproxima-se mais dos dados originais da série. Serão apresentadas quatro medidas que possibilitam avaliar os modelos.

Erro absoluto médio (EAM):
$$EAM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n |e_t|$$

Erro quadrático médio (EQM):
$$EQM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n e_t^2$$

Erro percentual médio (EPM):
$$EPM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n \left[\left(\frac{e_t}{Y_t} \right) \times 100 \right]$$

Erro percentual absoluto médio (EPAM):
$$EPAM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n \left| \left(\frac{e_t}{Y_t} \right) \times 100 \right|$$

Onde e_t é o erro (diferença entre o valor da série, Y_t , e o valor previsto pela recomposição, \hat{Y}_t), obtido na recomposição em um período genérico t . As duas primeiras medidas dependem da escala dos valores da série, o que dificulta a comparação com outras séries ou mesmo diferentes intervalos de tempo na mesma série. As duas últimas, EPM e EPAM, por serem relativas, não apresentam aqueles problemas⁹. Não obstante, por apresentarem divisão pelos valores da série, podem ser inapropriadas quando a série tiver valores iguais ou próximos a zero. A segunda medida, EQM, semelhante ao desvio padrão, dá maior ênfase a grandes erros do que EAM¹⁰. Pode-se usar todas, o que é fácil de implementar em uma planilha eletrônica, ou já faz parte dos programas estatísticos. O melhor modelo será o que apresentar os valores mais próximos de zero (já que o EPM pode assumir valores negativos).

⁹ MAKRIDAKIS, S., WHEELWRIGHT, S.C., HYNDMAN, R.J. Forecasting: methods and applications . John Wiley & Sons, 3rd edition, 1998, páginas 42-44.

¹⁰ CAMM, J. D., EVANS, J. R. Management Science and decision technology. South-Western College Publishing, 2000, página 103.

Exemplo 4.9 Os dados abaixo contém os valores trimestrais de vendas (em milhões de reais) de um fabricante de eletrodomésticos. Usando o modelo aditivo e o multiplicativo:

- a) obtenha os componentes da série b) interprete os resultados c) faça a recomposição da série
d) avalie qual é o melhor modelo e) faça a previsão de vendas para os 4 trimestres seguintes.

Período	Trimestre	Vendas	Período	Trimestre	Vendas
1	I	20	13	I	32
2	II	18	14	II	29
3	III	22	15	III	35
4	IV	24	16	IV	38
5	I	24	17	I	36
6	II	22	18	II	32
7	III	26	19	III	40
8	IV	29	20	IV	43
9	I	28	21	I	40
10	II	25	22	II	36
11	III	31	23	III	44
12	IV	34	24	IV	48

O primeiro passo é construir um gráfico para os dados da série.

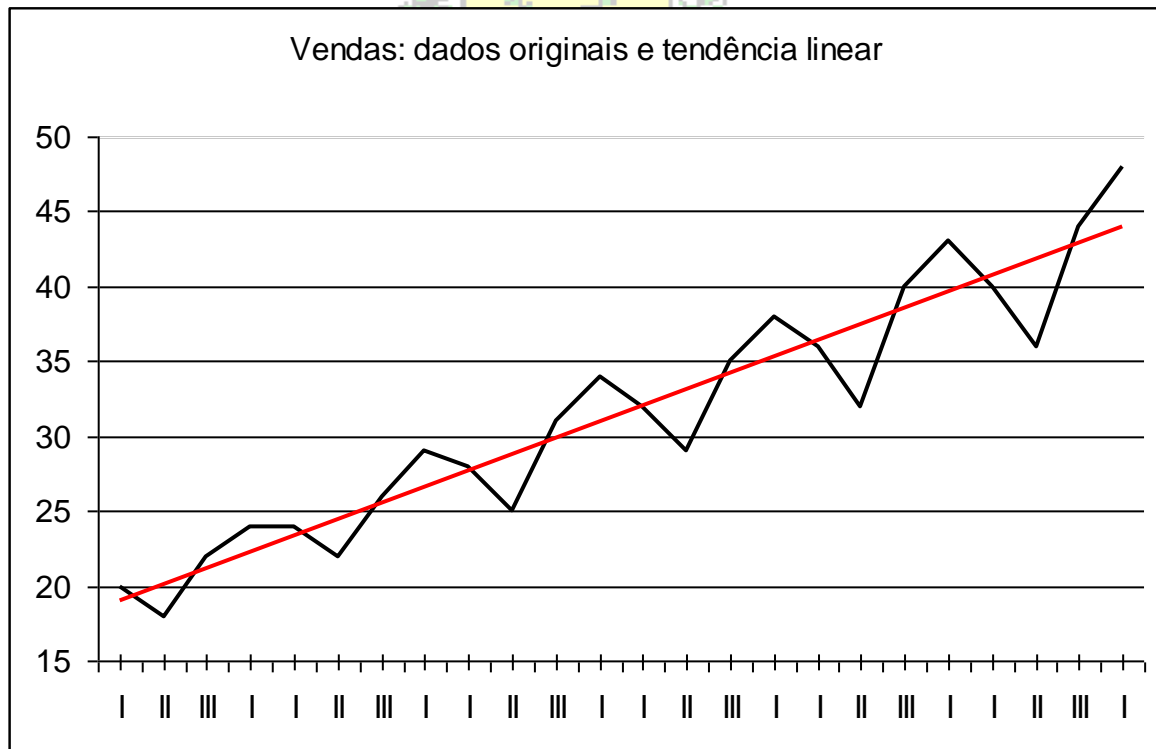


Figura 24 - Vendas de eletrodomésticos - série original

É plenamente viável pensar em ajustar uma reta aos dados. Então podemos obter os coeficientes da reta de mínimos quadrados: $T = a + b \times t$.

Sabemos que $n = 24$ (há 24 períodos na série).

Os somatórios necessários:

$$\sum_{i=1}^{24} t_i = 300 \quad \sum_{i=1}^{24} y_i = 756 \quad \sum_{i=1}^{24} (t_i)^2 = 4900 \quad \sum_{i=1}^{24} (t_i \times y_i) = 10694$$

Substituindo nas equações:

$$b = \frac{n \times \sum_{i=1}^n (t_i \times y_i) - \sum_{i=1}^n t_i \times \sum_{i=1}^n y_i}{n \times \sum_{i=1}^n (t_i^2) - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2} = \frac{24 \times 10694 - 300 \times 756}{24 \times 4900 - (300)^2} = 1,082$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b \times \sum_{i=1}^n t_i}{n} = \frac{756 - (1,082 \times 300)}{24} = 17,978$$

Então $T = 17,978 + 1,082 \times t$. A série apresenta tendência, e esta é crescente.

Podemos calcular as tendências para cada período da série existente:

Período	Equação	Tendência
1	$T = 17,978 + (1,082 \times 1)$	19,060
2	$T = 17,978 + (1,082 \times 2)$	20,142
3	$T = 17,978 + (1,082 \times 3)$	21,223
4	$T = 17,978 + (1,082 \times 4)$	22,305
5	$T = 17,978 + (1,082 \times 5)$	23,387
6	$T = 17,978 + (1,082 \times 6)$	24,469
7	$T = 17,978 + (1,082 \times 7)$	25,550
8	$T = 17,978 + (1,082 \times 8)$	26,632
9	$T = 17,978 + (1,082 \times 9)$	27,714
10	$T = 17,978 + (1,082 \times 10)$	28,796
11	$T = 17,978 + (1,082 \times 11)$	29,877
12	$T = 17,978 + (1,082 \times 12)$	30,959
13	$T = 17,978 + (1,082 \times 13)$	32,041
14	$T = 17,978 + (1,082 \times 14)$	33,123
15	$T = 17,978 + (1,082 \times 15)$	34,204
16	$T = 17,978 + (1,082 \times 16)$	35,286
17	$T = 17,978 + (1,082 \times 17)$	36,368
18	$T = 17,978 + (1,082 \times 18)$	37,450
19	$T = 17,978 + (1,082 \times 19)$	38,531
20	$T = 17,978 + (1,082 \times 20)$	39,613
21	$T = 17,978 + (1,082 \times 21)$	40,695
22	$T = 17,978 + (1,082 \times 22)$	41,777
23	$T = 17,978 + (1,082 \times 23)$	42,858
24	$T = 17,978 + (1,082 \times 24)$	43,940

Agora iremos obter os índices sazonais. Como a série é trimestral teremos que calcular médias móveis de 4 períodos, e depois centrá-las. Vamos apresentar apenas os totais móveis de 2 períodos (calculados a partir dos de 4 períodos), as médias móveis de 2 períodos, centradas, e os índices sazonais para os modelos aditivo e multiplicativo. O procedimento é basicamente o mesmo visto no Exemplo 4.5.

Trimestre	Vendas	Totais móveis de 2 períodos (centrados)	Médias móveis de 2 períodos (centradas)	Índices sazonais (modelo aditivo)	Índices Sazonais (modelo multiplicativo)
I	20				
II	18				
III	22	172	21,5	0,5	1,02326
IV	24	180	22,5	1,5	1,06667
I	24	188	23,5	0,5	1,02128
II	22	197	24,625	-2,625	0,8934
III	26	206	25,75	0,25	1,00971
IV	29	213	26,625	2,375	1,0892
I	28	221	27,625	0,375	1,01357
II	25	231	28,875	-3,875	0,8658
III	31	240	30	1	1,03333
IV	34	248	31	3	1,09677
I	32	256	32	0	1,00000
II	29	264	33	-4	0,87879
III	35	272	34	1	1,02941
IV	38	279	34,875	3,125	1,08961
I	36	287	35,875	0,125	1,00348
II	32	297	37,125	-5,125	0,86195
III	40	306	38,25	1,75	1,04575
IV	43	314	39,25	3,75	1,09554
I	40	322	40,25	-0,25	0,99379
II	36	331	41,375	-5,375	0,87009
III	44				
IV	48				

É preciso obter representantes dos índices sazonais por trimestre.

No modelo aditivo, os valores dos índices e das médias por trimestre:

Trimestre I => 0,5 0,375 0 0,125 -0,25; média = 0,15

Trimestre II => -2,625 -3,875 -4 -5,125 -5,375; média = -4,2

Trimestre III => 0,5 0,25 1 1 1,75; média = 0,90

Trimestre IV => 1,5 2,375 3 3,125 3,75; média = 2,75

A soma das médias vale -0,40, quando deveria ser zero. Os valores precisam então ser corrigidos. Dividindo-se a soma por 4 (pois a sazonalidade é trimestral), e subtraindo o resultado (-0,1) das médias acima temos os valores finais:

Trimestre I => 0,25 Trimestre II => -4,1 Trimestre III => 1 Trimestre IV => 2,85

A soma destes valores é igual a zero, atendendo aos requisitos. Observe que os índices afastam-se de zero, indicando que há influência da sazonalidade: no trimestre I as vendas aumentam cerca de 0,25 milhões, no trimestre II caem 4,1 milhões, no trimestre III aumentam 1 milhão e no trimestre IV aumentam 2,85 milhões.

No modelo multiplicativo, os valores dos índices e das médias excluindo os valores máximo e mínimo por trimestre:

Trimestre I => 0,994 1,000 1,003 1,013 1,021 e sua média sem os extremos é 1,006.

Trimestre II => 0,862 0,866 0,870 0,879 0,893 e sua média sem os extremos é 0,872.

Trimestre III => 1,010 1,023 1,029 1,033 1,046 e sua média sem os extremos é 1,029.

Trimestre IV => 1,067 1,089 1,090 1,096 1,097 e sua média sem os extremos é 1,091.

Somando os índices vamos obter 3,997, indicando que é preciso realizar uma correção. Como a sazonalidade tem ordem 4, subtrai-se a soma de 4 e divide-se o resultado por 4 obtendo -0,0007. Subtraindo este valor de 1, teremos 1,0007, multiplicando este resultado pelos índices obtemos os índices corrigidos::

Trimestre I = 1,006

Trimestre II = 0,872

Trimestre III = 1,029

Trimestre IV = 1,092

E a soma dos quatro índices é virtualmente igual a 4.

Como alguns dos índices distanciam-se substancialmente de 1, HÁ influência da sazonalidade.

Interpretando os índices sazonais: no trimestre I as vendas aumentam cerca de 0,6% em relação à média anual, no trimestre II as vendas caem 13%, no trimestre III as vendas aumentam 2,9%, e no trimestre IV as vendas aumentam 9,2% em relação à média anual.

Para obter as variações cíclicas e irregulares nós precisamos descontar os valores originais da série pelos respectivos valores de tendência e índices sazonais pelo modelo aditivo (subtraindo as componentes das vendas) e pelo multiplicativo (dividindo as vendas pelas componentes).

Modelo aditivo: CI = Vendas - T - S

Trim.	Vendas	T - S	Apenas CI	Trim.	Vendas	T - S	Apenas CI
I	20	19,060 - 0,25	0,69	I	32	32,041 - 0,25	-0,29
II	18	20,142 - (- 4,1)	1,96	II	29	33,123 - (- 4,1)	-0,02
III	22	21,223 - 1,00	-0,22	III	35	34,204 - 1,00	-0,20
IV	24	22,305 - 2,85	-1,16	IV	38	35,286 - 2,85	-0,14
I	24	23,387 - 0,25	0,36	I	36	36,368 - 0,25	-0,62
II	22	24,469 - (- 4,1)	1,63	II	32	37,450 - (- 4,1)	-1,35
III	26	25,550 - 1,00	-0,55	III	40	38,531 - 1,00	0,47
IV	29	26,632 - 2,85	-0,48	IV	43	39,613 - 2,85	0,54
I	28	27,714 - 0,25	0,04	I	40	40,695 - 0,25	-0,94
II	25	28,796 - (- 4,1)	0,30	II	36	41,777 - (- 4,1)	-1,68
III	31	29,877 - 1,00	0,12	III	44	42,858 - 1,00	0,14
IV	34	30,959 - 2,85	0,19	IV	48	43,940 - 2,85	1,21

O gráfico das variações cíclicas e irregulares pelo modelo aditivo é mostrado a seguir:

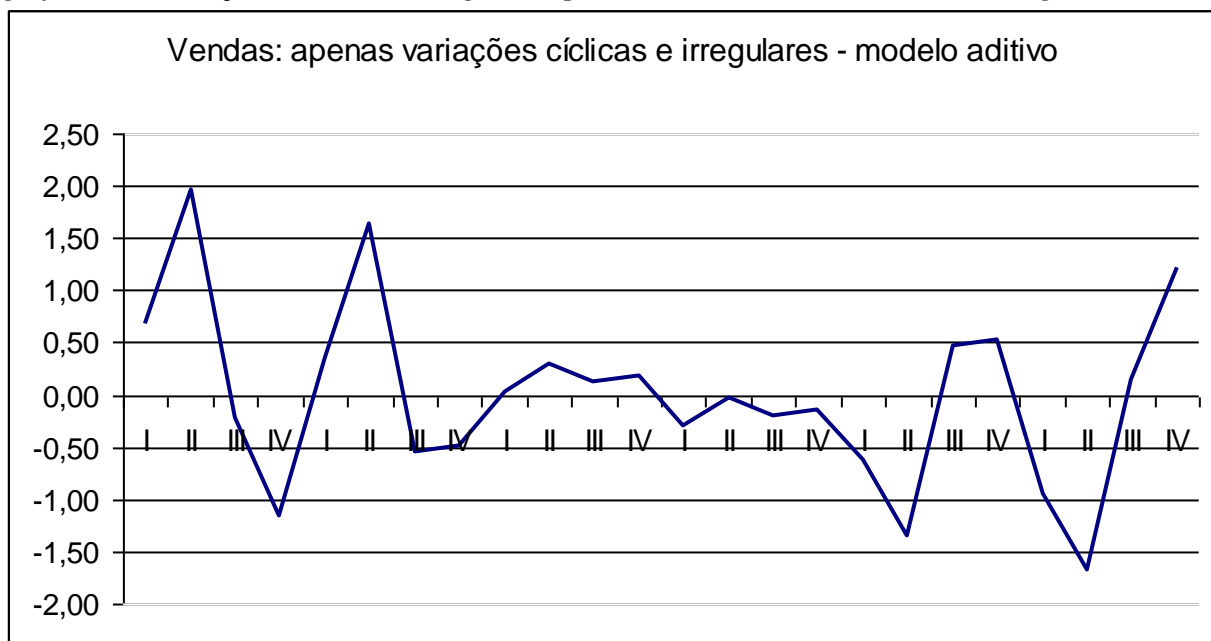


Figura 25 - Vendas trimestrais - apenas variações cíclicas e irregulares – modelo aditivo

Podemos observar na figura 25 que NÃO HÁ alternância sistemática entre valores maiores e menores do que zero, ou seja, não conseguimos identificar a existência de ciclos. Então podemos

desprezar o efeito das variações cíclicas na série temporal: muito provavelmente ou não há realmente ciclos, ou a influência das variações irregulares suplanta os seus efeitos.

Modelo multiplicativo: $CI = \text{Vendas} / (T \times S)$

Trim.	Vendas	$T \times S$	Apenas CI	Trim.	Vendas	$T \times S$	Apenas CI
I	20	$19,060 \times 1,006$	1,043	I	32	$32,041 \times 1,006$	0,992
II	18	$20,142 \times 0,872$	1,025	II	29	$33,123 \times 0,872$	1,004
III	22	$21,223 \times 1,029$	1,007	III	35	$34,204 \times 1,029$	0,994
IV	24	$22,305 \times 1,092$	0,985	IV	38	$35,286 \times 1,092$	0,986
I	24	$23,387 \times 1,006$	1,020	I	36	$36,368 \times 1,006$	0,984
II	22	$24,469 \times 0,872$	1,031	II	32	$37,450 \times 0,872$	0,980
III	26	$25,550 \times 1,029$	0,989	III	40	$38,531 \times 1,029$	1,009
IV	29	$26,632 \times 1,092$	0,997	IV	43	$39,613 \times 1,092$	0,994
I	28	$27,714 \times 1,006$	1,004	I	40	$40,695 \times 1,006$	0,977
II	25	$28,796 \times 0,872$	0,995	II	36	$41,777 \times 0,872$	0,988
III	31	$29,877 \times 1,029$	1,008	III	44	$42,858 \times 1,029$	0,997
IV	34	$30,959 \times 1,092$	1,006	IV	48	$43,940 \times 1,092$	1,000

O gráfico das variações cíclicas e irregulares é mostrado a seguir:

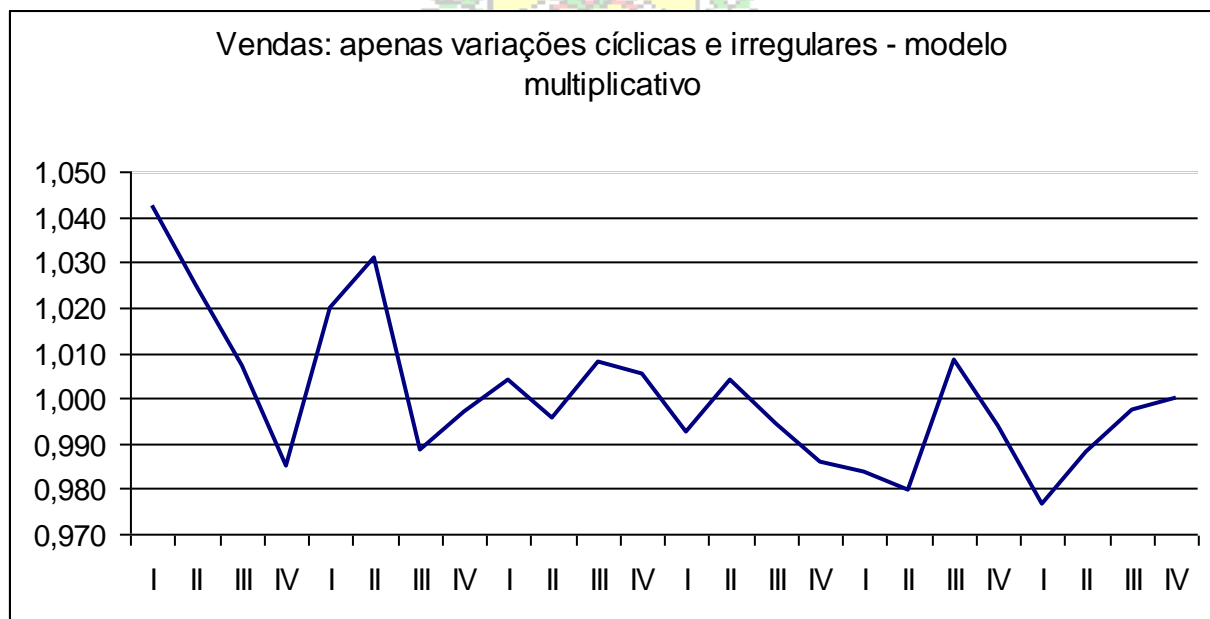


Figura 26 - Vendas trimestrais - apenas variações cíclicas e irregulares – modelo multiplicativo

Podemos observar na figura 26 que **NÃO HÁ** alternância sistemática entre valores maiores e menores do que 1, ou seja, não conseguimos identificar a existência de ciclos. Então podemos desprezar o efeito das variações cíclicas na série temporal: muito provavelmente ou não há realmente ciclos, ou a influência das variações irregulares suplanta os seus efeitos (a mesma conclusão a que chegamos usando o modelo aditivo).

Antes de realizar as previsões para os quatro trimestres seguintes devemos avaliar qual dos dois modelos obteve melhores resultados. É necessário fazer a recomposição da série, usando tendência e índices sazonais (já que não há influência de variações cíclicas), pelo modelo aditivo e pelo multiplicativo, e calcular as medidas apresentadas na seção 4.5.1.

Pelo modelo aditivo: $\hat{Y} = T + S$, e os erros $e_t = \text{Vendas} - \hat{Y}$

Tri.	Vendas (Y)	$\hat{Y} = T + S$	e_t	Tri.	Vendas (Y)	$\hat{Y} = T + S$	e_t
I	20	19,060 + 0,25	0,6900	I	32	32,041 + 0,25	-0,2909
II	18	20,142 + (- 4,1)	1,9583	II	29	33,123 + (- 4,1)	-0,0226
III	22	21,223 + 1,00	-0,2235	III	35	34,204 + 1,00	-0,2043
IV	24	22,305 + 2,85	-1,1552	IV	38	35,286 + 2,85	-0,1361
I	24	23,387 + 0,25	0,3630	I	36	36,368 + 0,25	-0,6178
II	22	24,469 + (- 4,1)	1,6313	II	32	37,450 + (- 4,1)	-1,3496
III	26	25,550 + 1,00	-0,5504	III	40	38,531 + 1,00	0,4687
IV	29	26,632 + 2,85	-0,4822	IV	43	39,613 + 2,85	0,5370
I	28	27,714 + 0,25	0,0361	I	40	40,695 + 0,25	-0,9448
II	25	28,796 + (- 4,1)	0,3043	II	36	41,777 + (- 4,1)	-1,6765
III	31	29,877 + 1,00	0,1226	III	44	42,858 + 1,00	0,1417
IV	34	30,959 + 2,85	0,1909	IV	48	43,940 + 2,85	1,2100

É preciso calcular também os valores absolutos dos erros, os quocientes e_t / Y_t , e os valores absolutos destes quocientes:

Tri.	$ e_t $	$(e_t / Y_t) \times 100$	$ (e_t / Y_t) \times 100 $	Tri.	$ e_t $	$(e_t / Y_t) \times 100$	$ (e_t / Y_t) \times 100 $
I	0,6900	3,4500	3,4500	I	0,2909	-0,9090	0,9090
II	1,9583	10,8792	10,8792	II	0,0226	-0,0780	0,0780
III	0,2235	-1,0158	1,0158	III	0,2043	-0,5839	0,5839
IV	1,1552	-4,8134	4,8134	IV	0,1361	-0,3581	0,3581
I	0,3630	1,5127	1,5127	I	0,6178	-1,7162	1,7162
II	1,6313	7,4150	7,4150	II	1,3496	-4,2174	4,2174
III	0,5504	-2,1171	2,1171	III	0,4687	1,1717	1,1717
IV	0,4822	-1,6627	1,6627	IV	0,5370	1,2487	1,2487
I	0,0361	0,1289	0,1289	I	0,9448	-2,3620	2,3620
II	0,3043	1,2174	1,2174	II	1,6765	-4,6570	4,6570
III	0,1226	0,3955	0,3955	III	0,1417	0,3221	0,3221
IV	0,1909	0,5614	0,5614	IV	1,2100	2,5208	2,5208

Após calcular os somatórios é possível substituir os valores nas expressões, sabendo-se que há 24 períodos:

$$EAM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n |e_t| = \frac{1}{24} \times \sum_{t=1}^{24} |e_t| = \frac{1}{24} \times 15,3078 = 0,6378$$

$$EQM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n e_t^2 = \frac{1}{24} \times 17,2131 = 0,7172$$

$$EPM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n \left[\left(\frac{e_t}{Y_t} \right) \times 100 \right] = \frac{1}{24} \times 6,3332 = 0,2639 \%$$

$$EPAM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n \left| \left(\frac{e_t}{Y_t} \right) \times 100 \right| = \frac{1}{24} \times 55,3139 = 2,3047 \%$$

Agora precisamos repetir o processo para o modelo multiplicativo:

Pelo modelo multiplicativo: $\hat{Y} = T \times S$, e os erros $e_t = \text{Vendas} - \hat{Y}$

Tri.	Vendas (Y)	$\hat{Y} = T \times S$	e_t	Tri.	Vendas (Y)	$\hat{Y} = T \times S$	e_t
I	20	$19,060 \times 1,006$	0,8190	I	32	$32,041 \times 1,006$	-0,2443
II	18	$20,142 \times 0,872$	0,4337	II	29	$33,123 \times 0,872$	0,1126
III	22	$21,223 \times 1,029$	0,1537	III	35	$34,204 \times 1,029$	-0,2081
IV	24	$22,305 \times 1,092$	-0,3611	IV	38	$35,286 \times 1,092$	-0,5384
I	24	$23,387 \times 1,006$	0,4646	I	36	$36,368 \times 1,006$	-0,5987
II	22	$24,469 \times 0,872$	0,6600	II	32	$37,450 \times 0,872$	-0,6611
III	26	$25,550 \times 1,029$	-0,3002	III	40	$38,531 \times 1,029$	0,3380
IV	29	$26,632 \times 1,092$	-0,0868	IV	43	$39,613 \times 1,092$	-0,2641
I	28	$27,714 \times 1,006$	0,1101	I	40	$40,695 \times 1,006$	-0,9532
II	25	$28,796 \times 0,872$	-0,1137	II	36	$41,777 \times 0,872$	-0,4347
III	31	$29,877 \times 1,029$	0,2459	III	44	$42,858 \times 1,029$	-0,1159
IV	34	$30,959 \times 1,092$	0,1874	IV	48	$43,940 \times 1,092$	0,0101

É preciso calcular também os valores absolutos dos erros, os quocientes e_t / Y_t , e os valores absolutos destes quocientes:

Tri.	$ e_t $	$(e_t / Y_t) \times 100$	$ (e_t / Y_t) \times 100 $	Tri.	$ e_t $	$(e_t / Y_t) \times 100$	$ (e_t / Y_t) \times 100 $
I	0,8190	4,0949	4,0949	I	0,2443	-0,7635	0,7635
II	0,4337	2,4094	2,4094	II	0,1126	0,3884	0,3884
III	0,1537	0,6987	0,6987	III	0,2081	-0,5945	0,5945
IV	0,3611	-1,5045	1,5045	IV	0,5384	-1,4168	1,4168
I	0,4646	1,9356	1,9356	I	0,5987	-1,6632	1,6632
II	0,6600	3,0000	3,0000	II	0,6611	-2,0658	2,0658
III	0,3002	-1,1547	1,1547	III	0,3380	0,8450	0,8450
IV	0,0868	-0,2995	0,2995	IV	0,2641	-0,6143	0,6143
I	0,1101	0,3933	0,3933	I	0,9532	-2,3829	2,3829
II	0,1137	-0,4547	0,4547	II	0,4347	-1,2076	1,2076
III	0,2459	0,7931	0,7931	III	0,1159	-0,2635	0,2635
IV	0,1874	0,5511	0,5511	IV	0,0101	0,0210	0,0210

Após calcular os somatórios é possível substituir os valores nas expressões, sabendo-se que há 24 períodos:

$$EAM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n |e_t| = \frac{1}{24} \times \sum_{t=1}^{24} |e_t| = \frac{1}{24} \times 8,4154 = 0,3506$$

$$EQM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n e_t^2 = \frac{1}{24} \times 4,3786 = 0,1824$$

$$EPM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n \left[\left(\frac{e_t}{Y_t} \right) \times 100 \right] = \frac{1}{24} \times 0,7451 = 0,0310 \%$$

$$EPAM = \frac{1}{n} \times \sum_{t=1}^n \left| \left(\frac{e_t}{Y_t} \right) \times 100 \right| = \frac{1}{24} \times 29,5160 = 1,2298 \%$$

Podemos agora sumarizar os resultados:

Medida	Modelo aditivo	Modelo Multiplicativo
EAM	0,6378	0,3506
EQM	0,7172	0,1824
EPM	0,2639%	0,0310%
EPAM	2,3047%	1,2298%

Pela tabela acima observamos que as medidas do modelo multiplicativo são substancialmente MENORES¹¹ do que as do aditivo (EAM e EPAM são quase duas vezes menores, o EQM é cerca de 4 vezes menor, o EPM é cerca de 8 vezes menor). Sendo assim, conclui-se que o modelo MULTIPLICATIVO é o mais apropriado para a série, pois apresenta os menores erros. As previsões para os próximos 4 trimestres podem ser realizadas por este modelo. Para aqueles que acreditam que as diferenças são pequenas demais para justificar o “trabalho” é importante lembrar que decisões serão tomadas a partir das previsões. Mesmo pequenos erros podem levar a catástrofe, portanto todo o esforço para obter o melhor modelo deve ser envidado.

A previsão para os próximos 4 trimestres (25, 26, 27 e 28) incluirá apenas a tendência (por meio da equação linear) e os índices sazonais, resultando:

$$Y_{25} = [(1,082 \times 25) + 17,978] \times 1,006 = 45,3076$$

$$Y_{26} = [(1,082 \times 26) + 17,978] \times 0,872 = 39,2650$$

$$Y_{27} = [(1,082 \times 27) + 17,978] \times 1,029 = 46,3429$$

$$Y_{28} = [(1,082 \times 28) + 17,978] \times 1,092 = 49,1714$$

4.6 - Outros modelos de séries temporais

Além do modelo clássico apresentado neste capítulo podem ser usados os métodos de Holt-Winters para modelos multiplicativos e aditivos. Maiores detalhes em SOARES, J. F., FARIAS, A. A., CESAR, C. C. – Introdução à Estatística, LTC, Rio de Janeiro, 1991.

Há também outras abordagens diferentes do modelo clássico. Entre estes modelos devem ser citados os modelos Auto-Regressivos (AR), os modelos de Médias Móveis Auto-Regressivos de (ARMA) e os modelos de Médias Móveis Integrados Auto-Regressivos (ARIMA). Tais tópicos geralmente são vistos em cursos de pós-graduação.

¹¹ Mais próximos de zero.