

Apellido Paterno	Apellido Materno	Nombres
Rut	Rol	Paralelo

Problema:

- a) **(50 puntos)** Encuentre una parametrización C^1 , simple y regular, cuya proyección en el plano XY esté recorrida en sentido antihorario, de la curva intersección de las superficies dadas por $x^2 + 5y^2 = 5$ y $z = x^2$, con $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Nota: recuerde justificar que la parametrización encontrada es C^1 , simple y regular, y que tiene la orientación pedida.

- b) **(50 puntos)** Para el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz \cos(y^2 z), y^2 \cos(y^2 z) + 1),$$

calcule el trabajo

$$W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

realizado por el campo de fuerzas \vec{F} sobre una partícula que se desplaza por la curva γ del ítem anterior, desde el punto $(\sqrt{5}, 0, 5)$ hasta el $(0, 1, 0)$.

Solución:

- a) Usando coordenadas cilíndricas modificadas (debido al cilindro elíptico):

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{5}r \cos(\theta) \\y &= r \sin(\theta) \\z &= z,\end{aligned}$$

se tiene que los puntos en el cilindro elíptico $x^2 + 5y^2 = 5$ son los que satisfacen que $r = 1$, y los del cilindro parabólico $z = x^2$ son los que satisfacen que $z = x^2 = 5r^2 \cos^2(\theta)$. Por lo tanto, los puntos que están en ambas superficies satisfacen que $x = \sqrt{5} \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$ y $z = 5 \cos^2(\theta)$. Ahora, $x, y \geq 0$ si y solo si $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto, la función $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(\theta) = (\sqrt{5} \cos(\theta), \sin(\theta), 5 \cos^2(\theta)),$$

es una parametrización de la curva pedida. Además, como parte en $\gamma(0) = (\sqrt{5}, 0, 5)$ y termina en $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 1, 0)$ con las primeras dos coordenadas siempre en el primer cuadrante, el recorrido tiene la orientación deseada. Ahora, la parametrización es:

- C^1 pues cada coordenada lo es (de hecho es C^∞).

- Simple: $\gamma(\theta_1) = \gamma(\theta_2) \implies \sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) \implies \theta_1 = \theta_2$ pues \sin es inyectiva en $[0, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto, la parametrización es simple.
- Regular: $\gamma'(\theta) = (-\sqrt{5}\sin(\theta), \cos(\theta), -10\cos(\theta)\sin(\theta)) = (0, 0, 0)$ implica que $\cos(\theta) = 0$ y $\sin(\theta) = 0$. Esto último no ocurre ya que $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Así, $\gamma'(\theta) \neq \vec{0}$ para todo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y por lo tanto, la parametrización es regular.

b) Dado que el cálculo directo usando la parametrización del inciso anterior es claramente muy complicado, buscamos una forma alternativa. Como \vec{F} es de clase C^1 con dominio simplemente conexo, se tiene que $\vec{F} = (P, Q, R)$ es campo gradiente si y solo si se cumple que $P_y = Q_x$, $P_z = R_x$ y $Q_z = R_y$. Veamos,

$$P_y = 2x = Q_x, P_z = 0 = R_x \text{ y } Q_z = 2y \cos(y^2 z) - 2yz \sin(y^2 z)y^2 = R_y.$$

Concluimos que existe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla f$ y así,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\vec{r} = f(0, 1, 0) - f(\sqrt{5}, 0, 5).$$

Encontraremos una tal función f (potencial): Sabemos que f satisface

$$f_x = 2xy, f_y = x^2 + 2yz \cos(y^2 z), f_z = y^2 \cos(y^2 z) + 1.$$

De $f_x = 2xy$ obtenemos que $f(x, y, z) = x^2 y + C(y, z)$, de donde $f_z = C_z$ y, usando que $f_z = y^2 \cos(y^2 z) + 1$ se obtiene que $C(y, z) = \sin(y^2 z) + z + K(y)$, con lo que la función f queda $f(x, y, z) = x^2 y + \sin(y^2 z) + K(y)$. Finalmente, como $f_y = x^2 + 2yz \cos(y^2 z)$ se tiene que $K'(y) = 0$ y por lo tanto obtenemos que un potencial para \vec{F} está dado por $f(x, y, z) = x^2 y + \sin(y^2 z) + z$. Así, el trabajo realizado por \vec{F} es

$$W = f(0, 1, 0) - f(\sqrt{5}, 0, 5) = 0 - 5 = -5.$$