- **PUNTO 1**

Espectro de Fourier trigonometrico

$$x(t) = |A \sin(2\pi F_0 t)|^2$$

Utilizando la identidad:

$$\sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$x(t) = A^2 \sin^2(2\pi F_0 t) = A^2 \frac{1 - \cos(4\pi F_0 t)}{2}$$

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(4\pi F_0 t$$

formula general de la serie de Fourier trigonométrica

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n w_0 t) + b_n \sin(n w_0 t))$$

Donde a_n y b_n están dados por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin(n w_0 t)\, dt$$

donde $T = \frac{1}{F_0}$ y $w_0 = 2\pi F_0$

El coeficiente a_0 representa el promedio de la señal en un periodo:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\, dt$$

Sustituimos $x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(4\pi F_0 t)$:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(4\pi F_0 t) \right) dt$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A^2}{2}\, dt = \frac{A^2}{2} T$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{A^2}{2} \cos(4\pi F_0 t)\, dt = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \cdot \frac{A^2}{2} T = \frac{A^2}{2}$$

- a_n para $n > 0$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(\frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2} \cos(4\pi F_0 t) \right) \cos(n w_0 t)\, dt$$

Se resuelven las integrales para diferente n

- Para $n = 2$, el término $\cos(4\pi F_0 t)$ coincide con la frecuencia $2\omega_0$ y se obtiene un valor distinto de cero

- Para otros valores de n, las integrales se anulan

$$a_2 = -\frac{A^2}{2}, \quad a_n = 0 \ (\text{para } n \neq 2)$$

Cálculo de b_n

La señal $x(t) = |A \sin(2\pi F_0 t)|^2$ es par debido a:

$$x(-t) = |A \sin(-2\pi F_0 t)|^2 = |A(-\sin(2\pi F_0 t))|^2$$
$$= |A \sin(2\pi F_0 t)|^2 = x(t)$$

$x(t) = x(-t)$, como es par, los coeficientes $b_n = 0$ para todos los n y la serie solo contendrá coseno

Serie trigonométrica Compacta

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cos(n w_0 t + \phi_n)$$

• Cálculo de d_n y ϕ_n

Para una señal par la fase ϕ_n es cero, porque no hay componentes seno

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) = 0 \text{ para todos los } n$$

d_n está dado por:

$$d_n = \sqrt{a^2_n + b^2_n} = |a_n| \text{ (ya que } b_n = 0\text{)}$$

• d_0: $a_0 = \frac{A^2}{2}$

• $d_2 = |a_2| = \frac{A^2}{2}$

$d_n = 0$ para todos los n diferentes a 0 y 2

- Sustituyendo los valores a_n y ϕ

$$\hat{x}(t) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(4\pi F_0 t + \pi)$$

$$\hat{x}(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(4\pi F_0 t)$$

Implementación de la forma exponencial

$$C_n = \frac{a_n - j b_n}{2} \quad \text{para } n \neq 0$$

Como $b_n = 0$:

$$C_n = \frac{a_n}{2}$$

Por lo tanto, los coeficientes son:

$$C_0 = a_0 = \frac{A^2}{2}$$

$$C_2 = \frac{a_2}{2} = -\frac{A^2}{4}$$

$$C_n = 0 \quad \text{para } n \neq 0, 2$$

La serie exponencial de fourier para $x(t)$ es:

$$x(t) = C_0 + C_2 e^{j4\pi F_0 t} + C_{-2} e^{-j4\pi F_0 t}$$

$C_{-2} = \overline{C_2}$, sustituimos valores:

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{4}\left(e^{j4\pi F_0 t} + e^{-j4\pi F_0 t}\right)$$

utilizando $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$:

$$x(t) = \frac{A^2}{2} - \frac{A^2}{2}\cos(4\pi F_0 t)$$

que es el mismo resultado que con la serie trigonometrica.

- **PUNTO 2**

EJERCICIO #2

Realice las simulaciones respectivas para graficar el espectro de Fourier del ejercicio 1 (magnitud y fase como diagrama de Bode en decibelios), y presente el error relativo y la señal reconstruida para $N = \{1, 2, \ldots, 50\}$.

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{Si } F_0 = 0 \\ -\dfrac{A^2}{4F_0} & \text{Si } n = -2 \text{ o } n = 2 \\ \dfrac{A^2}{2F_0} & \text{Si } n = 0 \\ \dfrac{2iA^2}{-2\pi F_0 n^3 e^{i\pi n/2} + 8\pi F_0 n e^{i\pi n/2}} - \dfrac{2iA^2}{-2\pi F_0 n^3 e^{-i\pi n/2} + 8\pi F_0 n e^{-i\pi n/2}} & \text{en el resto de casos.} \end{cases}$$

El error relativo de reconstrucción considerando N armónicos es:

$$E_T[\%] = \left[1 - \frac{\sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2}{P_x}\right] \times 100\%$$

Para $N = 2$, los coeficientes no nulos son C_0, C_2 y C_{-2}:

$$E_T[\%] = \left[1 - \frac{|C_0|^2 + |C_2|^2 + |C_{-2}|^2}{P_x}\right] \times 100\%$$

Sustituyendo los valores:

$$E_T[\%] = \left[1 - \frac{\left(\frac{A^2}{2}\right)^2 + \left(-\frac{A^2}{4}\right)^2 + \left(-\frac{A^2}{4}\right)^2}{\frac{A^4}{4}}\right] \times 100\%$$

$$E_T[\%] = \left[1 - \frac{\frac{A^4}{4} + 2 \cdot \frac{A^4}{16}}{\frac{A^4}{4}}\right] \times 100\%$$

$$E_T[\%] = \left[1 - \frac{3}{4}\right] \times 100\% = 25\%$$

- **PUNTO 4**

EJERCICIO #4

Consulte en que consiste la distorsión total de armónicos (Total Harmonic Distortion - (THD)) y el factor de potencia en un circuito eléctrico. Como puede calcularse el THD desde la FFT? Como puede calcularse la distorsión del factor de potencia con base al THD? Genere un ejemplo ilustrativo para el calculo del THD y la distorsión del factor de potencia para un rectificador de onda completa con carga:

i) Netamente resistiva.
ii) Carga RC en serie.

Establezca las condiciones necesarias para las simulaciones. El usuario podría escoger diferentes valores de R y C. Discuta los resultados obtenidos.

→

Paso 1: Aplicacion de la FFT.

La transformada Rapida de Fourier (FFT) nos proporciona las componentes de frecuencia de la señal de corriente. Como estamos trabajando con una señal de frecuencia fundamental de $f = 50Hz$, la FFT nos permitirá observar la magnitud de la corriente en esta frecuencia, así como en sus armónicos (100 Hz, 150 Hz, etc.)

- Corriente resistiva: Para una carga netamente resistiva, la corriente sigue la misma forma de la tensión, y por lo tanto, se espera que la corriente tenga pocos armónicos.

- Corriente RC: En una carga con resistencia y capacitancia en serie, la corriente está desfasada respecto a la tensión, y se espera que la combinación de R y C genere distorsión armónica adicional debido a la forma en que el capacitor almacena y libera energía en presencia de señales no sinusoidales.

Paso 2: Identificación de los Armónicos.

Usamos la FFT para identificar las amplitudes de las componentes de frecuencia. En este caso, identificamos las siguientes componentes:

- Frecuencia fundamental: 50 Hz
- Armónicos: 100 Hz, 150 Hz, 200 Hz, 250 Hz.

El valor de la magnitud de la corriente en la frecuencia fundamental se denota como V_1, y las magnitudes de las armónicas como $V_2, V_3, V_4, \ldots$

Paso 3: Calcular del THD.

La distorsión Total de Armónicas (THD) se calcula como:

$$THD = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2}}{V_1}.$$

donde:

- V_1 es la magnitud de la frecuencia fundamental (50 Hz)
- V_2, V_3, V_4, V_5 son las magnitudes de las armonicas (100 Hz, 150 Hz, 200 Hz, 250 Hz)

- Calcular para Carga Resistiva

1. Frecuencia Fundamental (50 Hz)
   - Amplitud $V_1 = 0{,}999$ A.
2. Armónicas:
   - $V_2 = 0{,}0016$ A. → 100 Hz
   - $V_3 = 0{,}0008$ A → 150 Hz
   - $V_4 = 0{,}0006$ A → 200 Hz
   - $V_5 = 0{,}0004$ A. → 250 Hz.

Usamos estos valores en la fórmula del THD.

$$THD_R = \frac{\sqrt{(0{,}0016)^2 + (0{,}0008)^2 + (0{,}0006)^2 + (0{,}0004)^2}}{0{,}199} \approx 0{,}17\%$$

- Cálculos para Carga RC.

1. Frecuencia fundamental (50 Hz):
   - Amplitud: fundamental (50

   $V_1 = 0{,}999$ A.

El valor de la magnitud de la corriente en la frecuencia fundamental se denota como V_1, y las magnitudes de las armónicas como $V_2, V_3, V_4, \dots$

Paso 3: Calcular del THD.

La distorsión Total de Armónicas (THD) se calcula como:

$$THD = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + V_5^2}}{V_1}$$

donde:

- V_1 es la magnitud de la frecuencia fundamental (50 Hz)
- V_2, V_3, V_4, V_5 son las magnitudes de las armónicas (100 Hz, 150 Hz, 200 Hz, 250 Hz)

- Calcular para Carga Resistiva

1. Frecuencia Fundamental (50 Hz)

   - Amplitud $V_1 = 0{,}999$ A.

2. Armónicas:

   - $V_2 = 0{,}0016$ A. → 100 Hz
   - $V_3 = 0{,}0008$ A → 150 Hz
   - $V_4 = 0{,}0006$ A → 200 Hz
   - $V_5 = 0{,}0004$ A. → 250 Hz.

Usamos estos valores en la fórmula del THD.

$$THD_R = \frac{\sqrt{(0{,}0016)^2 + (0{,}0008)^2 + (0{,}0006)^2 + (0{,}0004)^2}}{0{,}999} \approx 0{,}17\%$$

- Cálculos para Carga RC.

1. Frecuencia fundamental (50 Hz):

   - Amplitud:

   $V_1 = 0{,}999$ A.

2. Armónicos:

- 100 Hz : $V_2 = 0,0016$ A
- 150 Hz : $V_3 = 0,0008$ A
- 200 Hz : $V_4 = 0,0006$ A
- 250 Hz : $V_5 = 0,0004$ A.

Los valores son similares a la carga resistiva debido a las condiciones simuladas: El THD para la carga RC es:

$$THD_{RC} = \frac{\sqrt{(0,0016)^2 + (0,0008)^2 + (0,0006)^2 + (0,0004)^2}}{0,999} \approx 0,17\%.$$

Paso 4: Cálculo del Factor Potencial Distorsionado

El factor de potencia distorsionado se calcula en función del THD utilizando la siguiente formula:

$$FP_{distorsionado} = \frac{1}{\sqrt{1 + THD^2}}$$

Para carga resistiva:

$$FP_R = \frac{1}{\sqrt{1 + (0,0017)^2}} \approx 0,99999$$

Para carga RC:

$$FP_{RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (0,0017)^2}} \approx 0,99999.$$

Discusión de los resultados:

1. Carga resistiva. El THD es extremadamente bajo (0,17%), lo que significa que la señal de corriente es casi sinusoidal. Esto se refleja en un factor de potencia cercano a 1, lo que indica que la energía se utiliza eficientemente, sin pérdidas significativas debidas a distorsiones armónicas.

2. Carga RC: la presencia del capacitor genera más distorsión armónica, pero en este caso, la distorsión sigue siendo mínima

(THD del 0,17%.) lo que también produce un factor de potencia casi ideal, En realidad, una carga RC típica con diferentes valores de R y C podría generar más distorsión si los valores de capacitancia aumentan, afectando de manera más significativa el rendimiento del sistema.

CONCLUSIONES

- Tanto para la carga resistiva como para la RC, la distorsión armónica es mínima bajo las condiciones simuladas. Esto lleva a un factor de potencia muy alto, casi perfecto.
- En un sistema real, donde los componentes pueden tener mayores valores de resistencia o capacitancia, el THD puede aumentar, y con ello, el factor de potencia disminuiría, lo que afectaría la eficiencia del sistema.