随机过程大作业

Zanue
上海交通大学电子信息与电气工程学院

日期：June 3, 2022

摘　　要

本文使用 Python 语言的 NumPy 库、Matplotlib 库对布朗运动和随机微分方程进行探究。本文首先模拟生成了具有不同方差的布朗运动轨道。接下来，本文对两个不同的随机微分方程进行了仿真，探究不同的参数对轨道的影响，并使用 Monte Caro 方法计算特定时间的解的期望和方差。

关键词: 布朗运动，随机微分方程，Monte Caro 方法，Python 仿真

1　定义

1.1　布朗运动

若一个随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 满足：

1. $X(t)$ 是独立增量过程；
2. $\forall s, t > 0, X(s+t) - X(s) \sim N(0, c^2 t)$, 即 $X(s+t) - X(s)$ 是数学期望为 0，方差为 $c^2 t$ 的正态分布；
3. $X(t)$ 关于 t 是连续函数，

则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是**布朗运动**或**维纳过程**。当 $c = 1$ 时，称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是**标准布朗运动**。[2]

1.2　随机微分方程

设 $(\omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个完备的概率空间，$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ 为一个满足通常条件的 $\sigma-$ 域流，$B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ 为关于 $(P, \mathbb{F})$ 的标准布朗运动。设 $a(t, x)$ 和 $b(t, x)$ 为两个关于 t, x 的可测函数，给定一个关于 $\mathcal{F}_0$ 可测的随机变量 η，我们考虑如下随机微分方程 [3]:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = a(t, X_t)\mathrm{d}t + b(t, X_t)\mathrm{d}B_t, \\ X_0 = \eta \end{cases} \tag{1}$$

1.3　Monte Caro 方法

Monte Caro 方法也称统计模拟法、统计试验法。是把概率现象作为研究对象的数值模拟方法。是按抽样调查法求取统计值来推定未知特性量的计算方法。Monte Caro 是摩纳哥的著名赌城，该法为表明其随机抽样的本质而命名。故适用于对离散系统进行计算仿真试验。在计算仿

真中，通过构造一个和系统性能相近似的概率模型，并在数字计算机上进行随机试验，可以模拟系统的随机特性。[1]

2 布朗运动的模拟

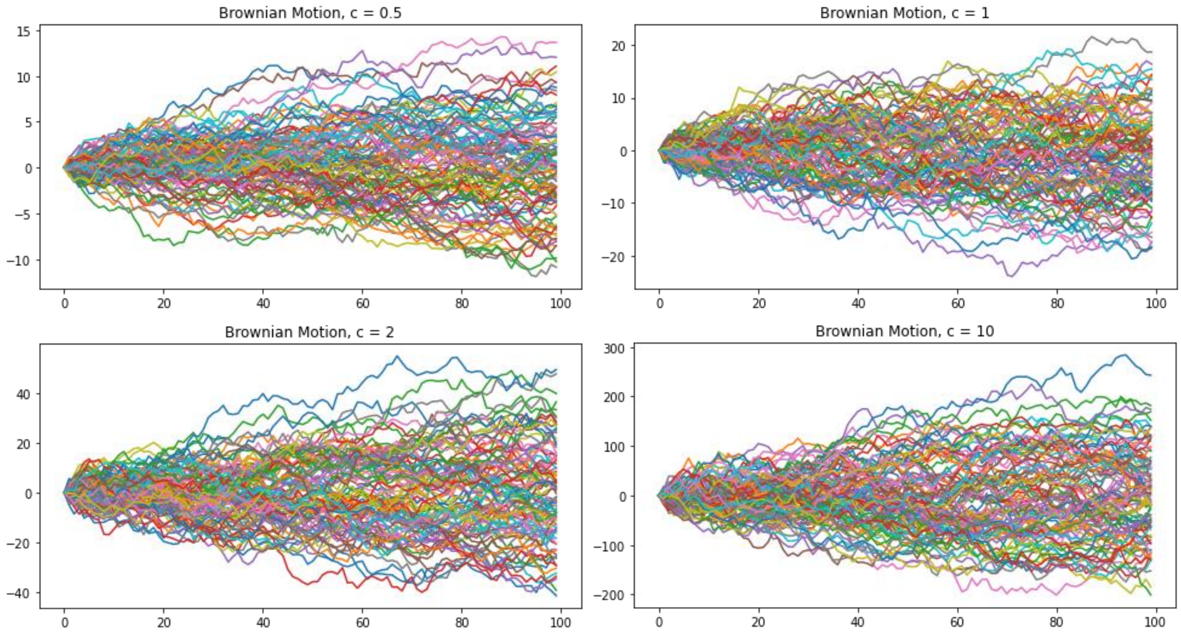

图 1: 不同方差下的布朗运动轨迹

如图1, 在 $c = 0.5, 1, 2, 10$ 的不同情况下，布朗运动的轨迹趋势相似，但向外扩展的程度（方差）逐渐增大。

3 随机微分方程一的模拟

已知随机微分方程一为：

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \alpha(v - X_t)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B_t \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

3.1 调整 α

如图2, 考虑 α 在 $[0, 1]$ 内取值的情形。$\alpha = 0$ 时，随机微分方程退化为布朗运动，结论平凡。$\alpha = 1$ 时，X_t 在 v 附近波动。α 在 $(0, 1)$ 内取值时，随着 α 的增大，曲线由布朗运动 $\alpha = 0$ 逐渐收敛到均值为 v 的高斯过程。

如图3, 考虑 α 在 $(1, \infty)$ 内取值的情形。$\alpha \in (1, 2)$ 时，曲线的开端部分产生一定的波动。$\alpha = 2$ 时，曲线只有波动项无法收敛。$\alpha > 2$ 时，曲线的波动随着时间的推移而急剧增大。

如图4, 考虑 α 在 $(-\infty, 0)$ 内取值的情形。随着时间的推移，曲线急剧下降，并且随着 α 的减小而加剧下降的程度。

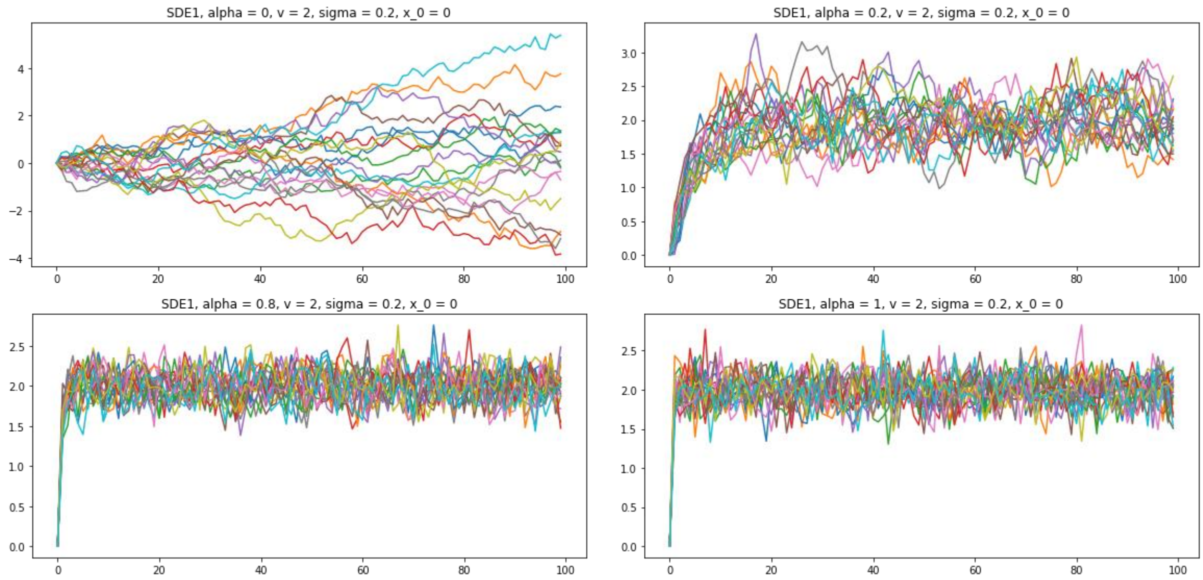

图 2: α 在 $[0, 1]$ 内取值的 X 的轨迹

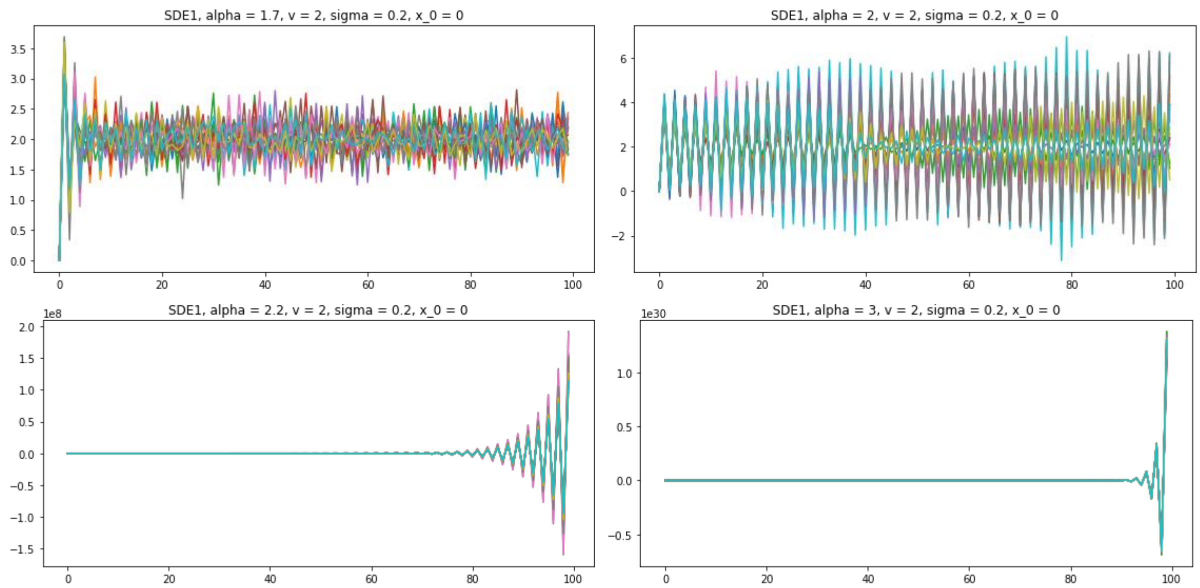

图 3: α 在 $(1, \infty)$ 内取值的 X 的轨迹

3.2 调整 v

如图5，当 $\alpha \in (0, 1)$ 时，轨迹均收敛到 v（在 v 附近波动）。当 α 的取值使得曲线不收敛时，v 的取值对曲线无明显影响。

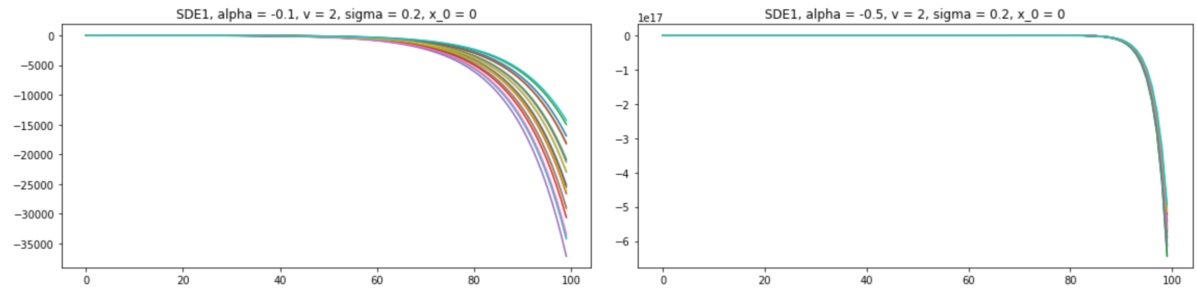

图 4: α 在 $(-\infty, 0)$ 内取值的 X 的轨迹

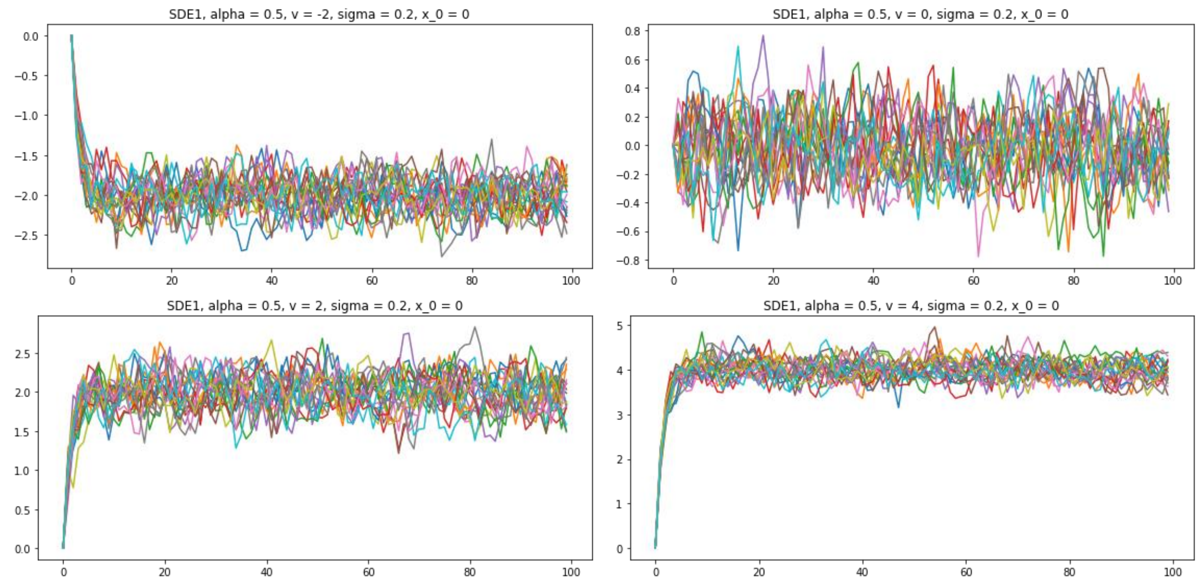

图 5: 不同 v 取值下的 X 的轨迹

3.3 调整 σ

如图6, 7, 在 α 取值不同的情况下，不论曲线是否趋于稳定，σ 的增大都会导致曲线的波动增大。

3.4 调整 x_0

如图8, 当 $\alpha \in [0, 1]$ 时，改变 x_0 会影响 X_t 最终收敛到的值。当 $\alpha < 0$ 时，改变 x_0 会影响 X_t 的走向趋势（向上递增或者向下递减）。如图9, 当 $\alpha \geq 2$ 时，改变 x_0 不会改变曲线波动的趋势。

3.5 Monte Caro 仿真

对各种参数设置下的随机微分方程，分别生成 1000 个不同的 X_1，计算相应的均值和方差，得到 $EX_1 = (1-\alpha)x_0 + \alpha v$, $DX_1 = \sigma^2$.

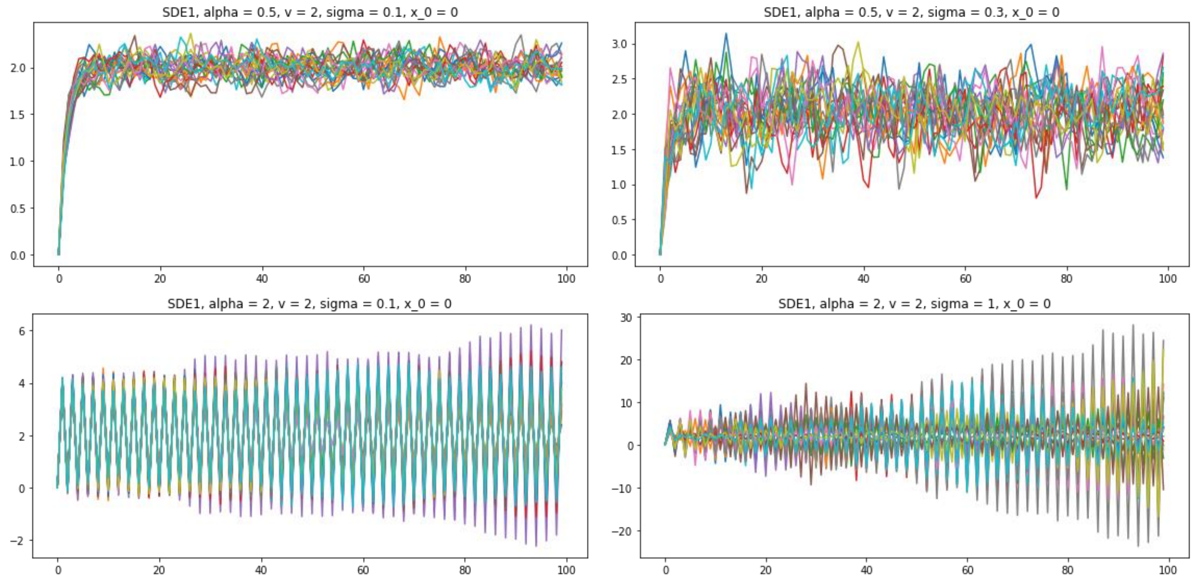

图 6: 不同 σ 取值下的 X 的轨迹

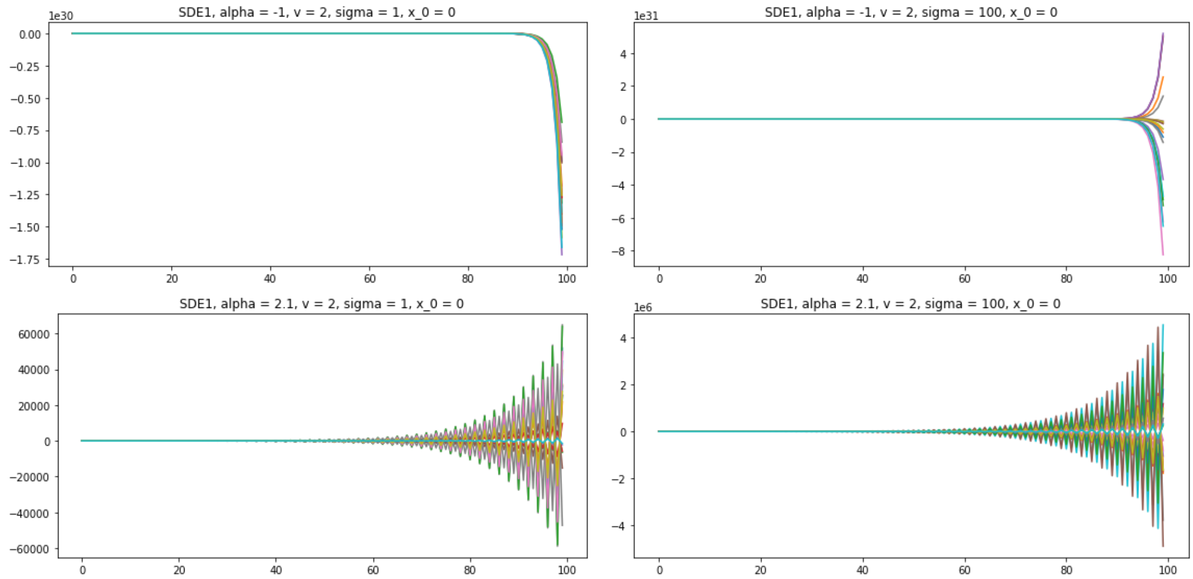

图 7: 不同 σ 取值下的 X 的轨迹

4 随机微分方程二的模拟

已知随机微分方程二为:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = \alpha(v - X_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t \\ \mathrm{d}S_t = \theta(X_t - S_t)\mathrm{d}t + \hat{\sigma}_1 \mathrm{d}B_t + \hat{\sigma}_2 \mathrm{d}W_t \\ X_0 = x_0, S_0 = s_0 \end{cases} \tag{3}$$

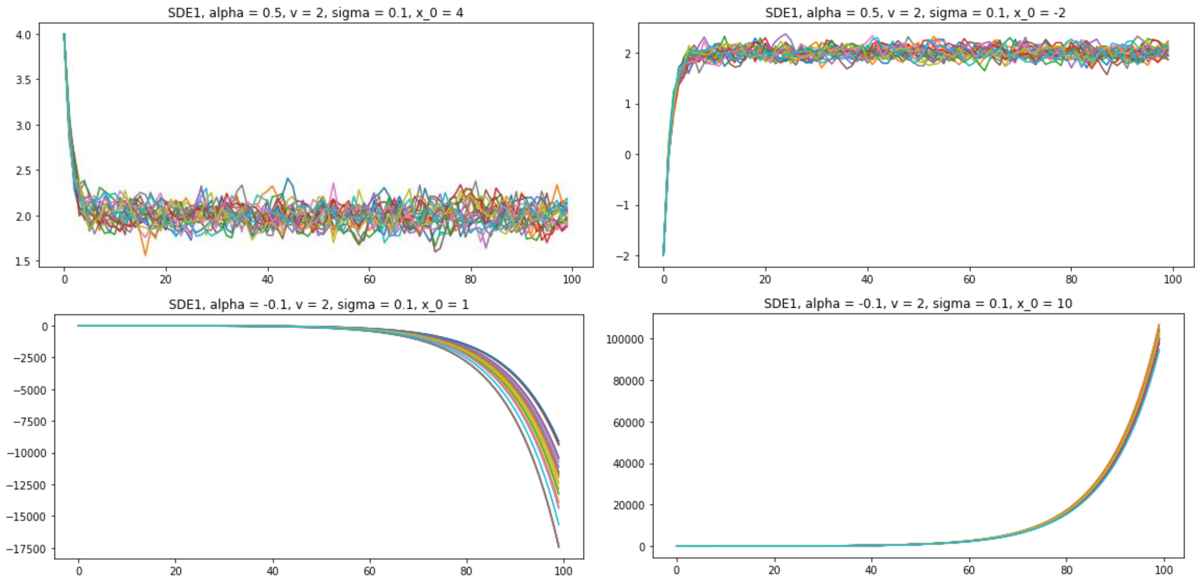

图 8: 不同 x_0 取值下的 X 的轨迹

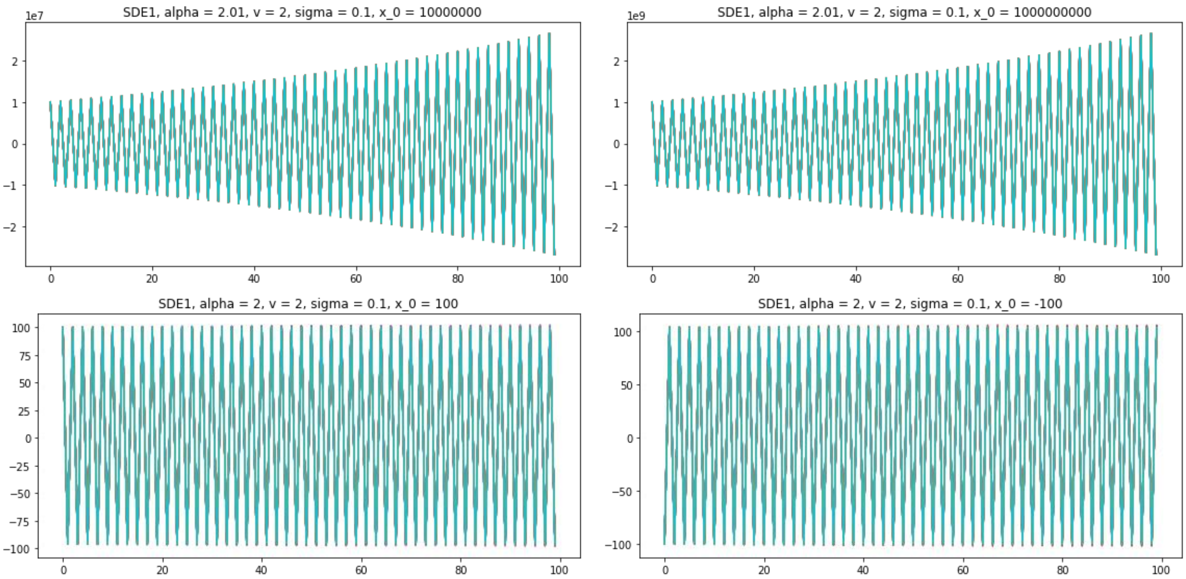

图 9: 不同 x_0 取值下的 X 的轨迹

注意到方程二的第一个式子与方程一相同，故我们只需考虑与方程二的第二个式子相关的参数。

4.1 调整 θ

如图10, 当 $\alpha \in (0, 2)$ 时，调整 θ 的值会影响 S 曲线的波动程度和与 X 的相关位置。θ 的绝对值越小，S 相对于 X 的波动幅度越小。而 S 的波动趋势和 X 相近。

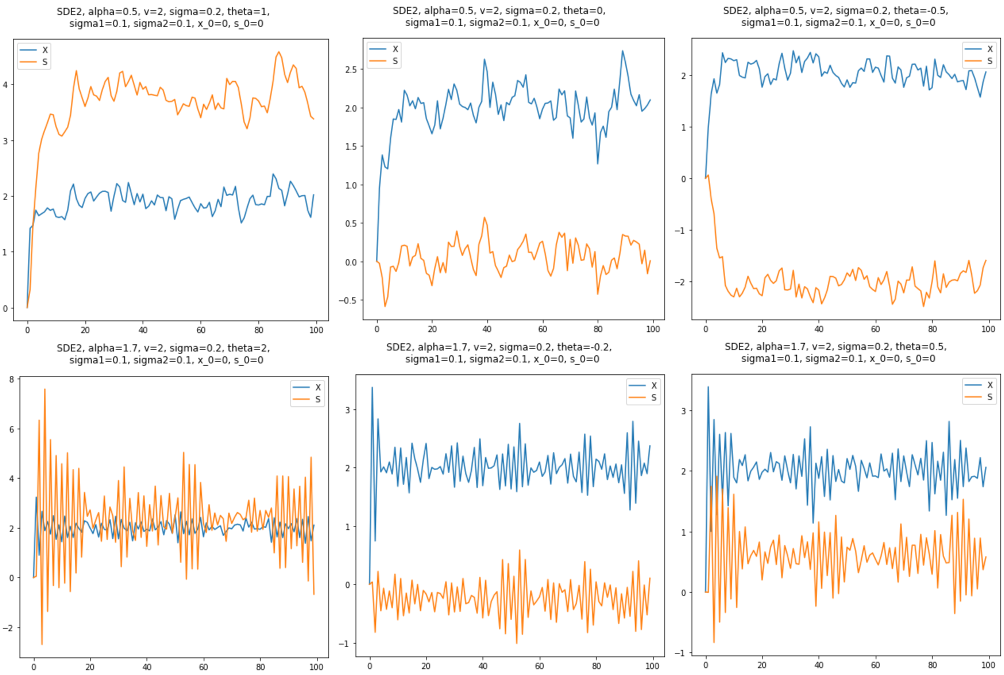

图 10: $\alpha \in (0, 2)$ 时不同 θ 取值下的 X 和 S 的轨迹

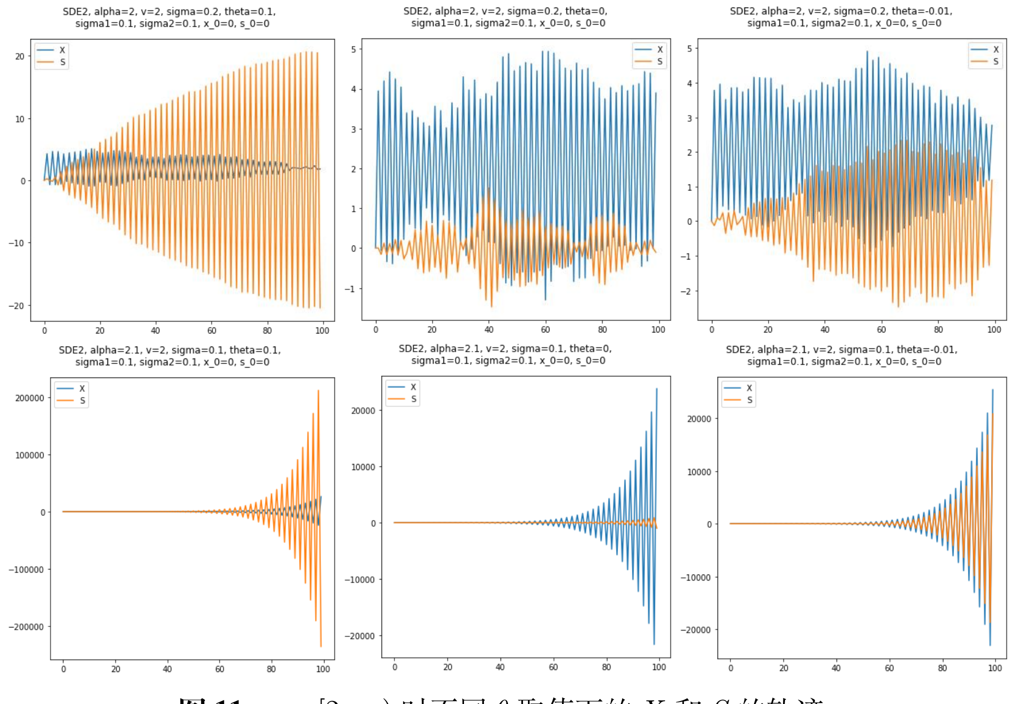

图 11: $\alpha \in [2, \infty)$ 时不同 θ 取值下的 X 和 S 的轨迹

如图11, 当 $\alpha \in [2, \infty)$ 时，调整 θ 的值会影响 S 相对于 X 的位置和 S 的波动情况。θ 的绝对值越小，S 相对于 X 的波动幅度越小。

如图12, 当 $\alpha \in (-\infty, 0)$ 时，X 向无穷远处发散，且 S 也随着 X 而发散，发散程度和 θ 的取值相关。

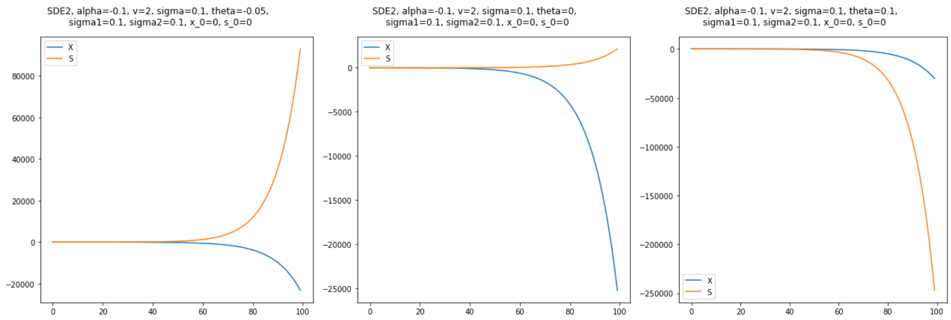

图 12: $\alpha \in (-\infty, 0)$ 时不同 θ 取值下的 X 和 S 的轨迹

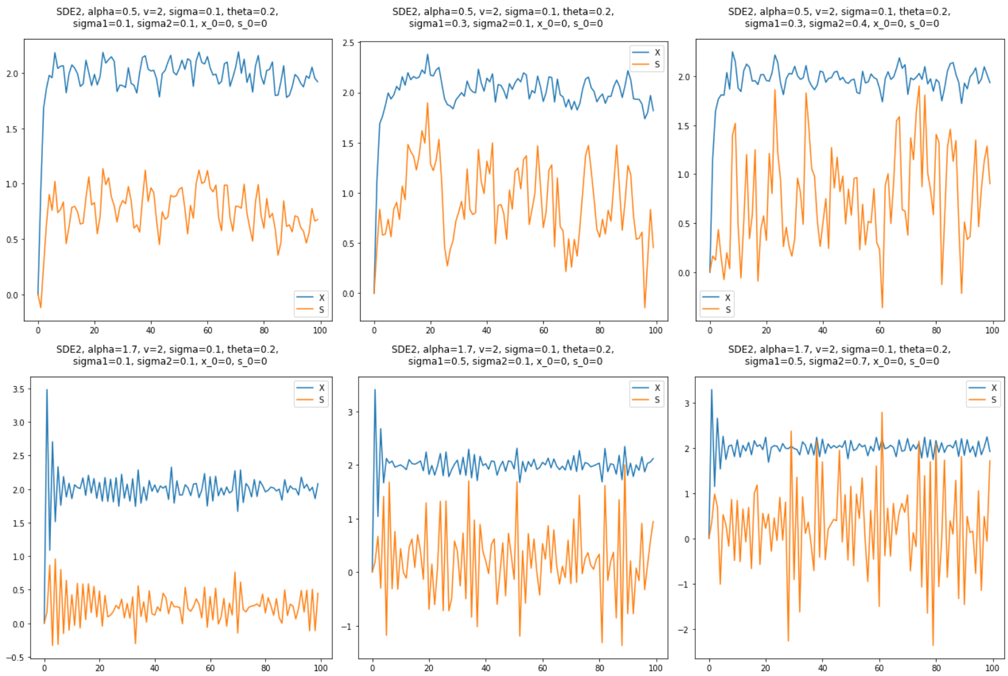

图 13: $\alpha \in (0, 2)$ 时不同 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 取值下的 X 和 S 的轨迹

4.2 调整 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$

如图13和14，调整 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 均会改变曲线的波动（或者发散）程度。一般来说，$\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 越大，曲线的波动（或者发散）程度也越大。

4.3 调整 s_0

如图15，当 X 和 S 都趋向于在某个值附近稳定地波动时，s_0 只会影响曲线的开端而不会影响接下来的过程。当 X 和 S 都发散地波动时，改变 s_0 也会影响曲线发散的程度。

4.4 Monte Caro 仿真

对各种参数设置下的随机微分方程，分别生成 1000 个不同的 S_1，计算相应的均值和方差，得到 $ES_1 = (1-\alpha)s_0 + \theta x_0$, $DS_1 = \hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2$.

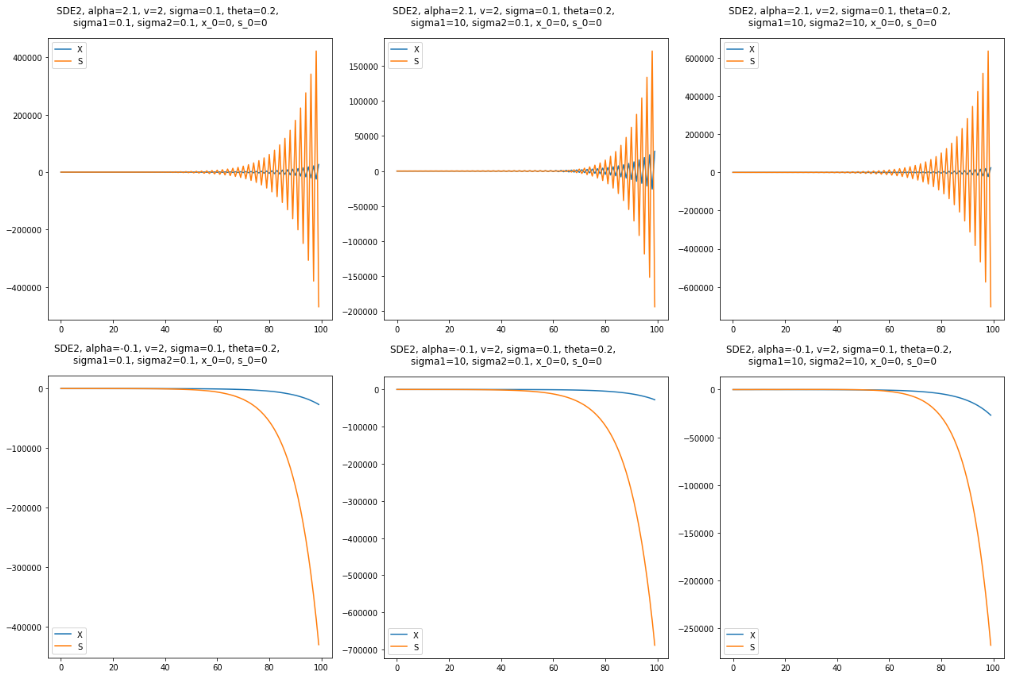

图 14: $\alpha \in (2, \infty) \cup (-\infty, 0)$ 时不同 $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 取值下的 X 和 S 的轨迹

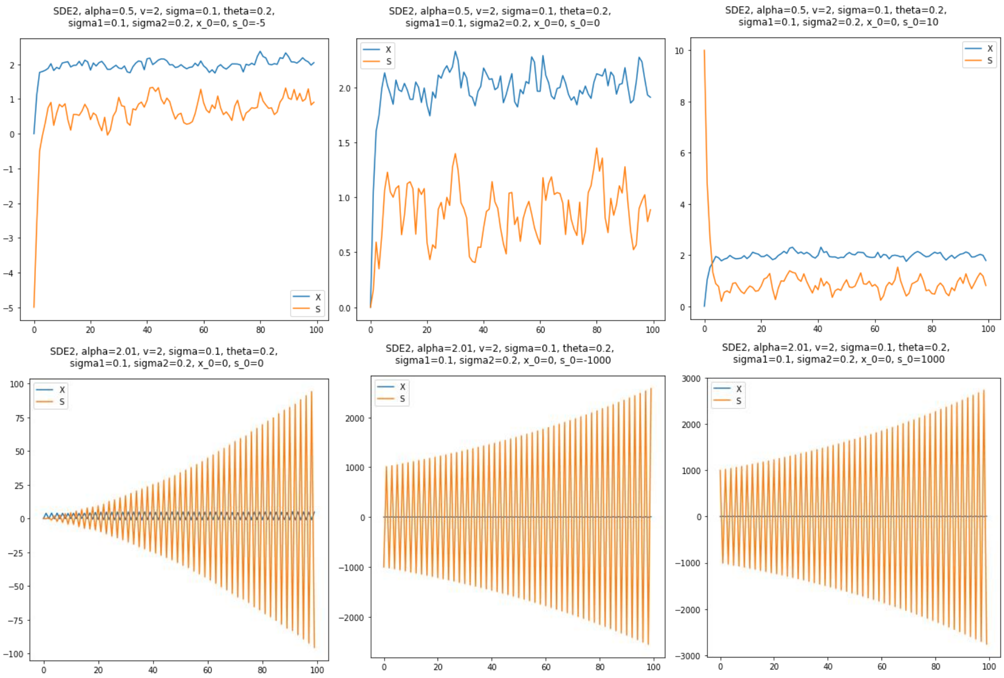

图 15: 不同 s_0 取值下的 X 和 S 的轨迹

5 总结

本文对布朗运动和随机微分方程进行了模拟仿真。本文首先模拟生成了具有不同方差的布朗运动轨道。接下来，本文对两个不同的随机微分方程进行了仿真，探究不同的参数对轨道的影响，并使用 Monte Caro 方法计算特定时间的解的期望和方差。本文发现，在两个随机微分方程中，α 对曲线的影响最大，不同的 α 取值会得到不同类型的曲线轨迹。θ 会一定程度地影响 S 曲线的波动或者发散的程度和曲线相对于 X 曲线的位置。$\sigma, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ 会影响曲线波动或者发散的

程度。x_0, s_0 会影响曲线的初值，在某些情形下也可能影响曲线的发散程度。

参考文献

[1] 萧浩辉. 决策科学辞典. 人民出版社, 1995.

[2] 熊德文 韩东 王桂兰. “布朗运动”. In: 应用随机过程. 北京: 高等教育出版社, Aug. 2016. Chap. 6, pp. 109–110.

[3] 熊德文 韩东 王桂兰. “随机分析基础”. In: 应用随机过程. 北京: 高等教育出版社, Aug. 2016. Chap. 7, pp. 153–154.