

Opg 2.1

$f_{\lambda, \beta}(x, y)$, $y > 0$, $x = 0, 1, \dots$, $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}_{>0}^2$, beobachtet
at v_1 ; v_2 habe;

Base measure:

$$\frac{y^x}{(x!)^2} \cdot m(xv)$$

$$\text{For } f_{\lambda, \beta}(x, y) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \frac{y^x}{\beta^{x+1} x!} e^{-y/\beta}$$

$$= \frac{1}{(x!)^2} y^x e^{-\lambda} \frac{1}{\beta} \left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^x e^{-y/\beta}$$

$$= \frac{1}{(x!)^2} y^x e^{-\lambda} \frac{1}{\beta} e^{\log\left(\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^x\right) - y/\beta}$$

$$= \frac{1}{(x!)^2} y^x e^{-\lambda} \frac{1}{\beta} e^{x \log \frac{\lambda}{\beta} - y/\beta}$$

$$\Theta_1 := \log \frac{\lambda}{\beta} \quad \rightarrow \quad = \frac{1}{(x!)^2} y^x e^{-\lambda} \frac{1}{\beta} e^{x \Theta_1 - y \Theta_2},$$

Sei v : kan varige $(\Theta_1, \Theta_2) = \Theta$ som kanonisk parameter.

Bemerk $\Theta \in \Theta = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}) \subseteq \mathbb{R}^2$, si Θ to dim.
kanonisch stile spore fkt:

$$v: \text{varf} \underline{t}(x, y) = (t_1, t_2)(x, y) = (x, -y).$$

Matstat opg 1.1 fortset.

Vi har

normal: series konst.

$$V: \text{Se at } \frac{1}{C(\theta)} = e^{-\lambda} \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow C(\theta) = \beta e^{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\theta_2} e^{\frac{\theta_1}{\theta_2}}$$

Sædtes at osse

hunnebaut fler:

$$\Psi(\theta) = \log(C(\theta)) = \log\left(\frac{1}{\theta_2} e^{\frac{\theta_1}{\theta_2}}\right) =$$

~~$$\log_{\theta_2} \cancel{\theta_2} \log e^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} + \log \cancel{\frac{1}{\theta_2}} = e^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} - \log \theta_2.$$~~

alts vil vi få en to dim reguler elsp. fun.

vel et hulme $f_{\lambda, \beta}$.

E. 2

Det vides helt at for $\Sigma \sim \text{Pois}(\lambda)$ vil

$$E\Sigma = \lambda, \quad V\Sigma = \lambda,$$

V: kan osse høre fra T2.16.

Bemærk at fra generel teor: vides det
at både Poisson og DFT-fordelinger

Øpg 5.2 Satset

er minimumsreguler exp-fam., hvorfor v:
 Det ydelse produkt komposition v. BMS S.33
 har Skatte at dette også er tilfældet
 for vores familie, som har tæthedsve $f_{\alpha, \beta}$.

Der T2.16 hænger;

$$\begin{aligned} E(\theta) &= E(t(\bar{\Sigma}, \bar{\Sigma})) \equiv E(\bar{\Sigma}, -\bar{\Sigma}) = \nabla \Psi(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} \Psi(\theta), \frac{\partial}{\partial \theta_2} \Psi(\theta) \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} e^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} - \log \theta_2, \frac{\partial}{\partial \theta_2} e^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} - \log \theta_2 \right) \\ &= \left(e^{\frac{\theta_1}{\theta_2}}, -e^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} - \frac{1}{\theta_2} \right) = (2, -2B - B), \quad \text{Sætter et} \\ &\quad \text{om para.} \\ &\quad t \parallel \lambda, B \end{aligned}$$

$$E\bar{\Sigma} = 2, \quad E(-\bar{\Sigma}) = -2B - B \Leftrightarrow E\bar{\Sigma} = 2B + B = B(2+1).$$

Ligeledes v. T2.16:

$$\begin{aligned} U_\theta(t(\bar{\Sigma}, \bar{\Sigma})) &\equiv U(\bar{\Sigma}, -\bar{\Sigma}) = D^2 \Psi(\theta) = D(\nabla \Psi(\theta)) = \\ &\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \Psi(\theta) & \frac{\partial^2}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \Psi(\theta) \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} \Psi(\theta) & \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \Psi(\theta) \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 2 & -2B \\ -2B & 2B^2 + B^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se Maple

I.2 Fortsat

$$= \begin{pmatrix} \gamma & -2\beta \\ -2\beta & \beta^2(2\gamma+1) \end{pmatrix}, \quad \text{Sættes at}$$

$$V(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda\beta \\ \lambda\beta & \beta^2(2\gamma+1) \end{pmatrix}, \quad \text{så}$$

$$V\bar{x} = \gamma, \quad V\bar{y} = \beta^2(2\gamma+1), \quad \text{cov}(\bar{x}, \bar{y}) = 2\beta.$$

Opg 3

~~T.5.3~~ giver Bem. at en efspr. fun. Specielt er kurven efspr. op af høj, når T.2.29 BMS gælder at sidenne er glatte og lokalt stabile.

Per c. 2.21 hens af for minimal og regulær efspr.-fun. (MREF) vil

$$S_{\bar{x}}(\theta) = t(\bar{x}) - \bar{z}(\theta).$$

Bem. per indre produkt regler v.l. $\overset{\text{BMS 3.3.3}}{D^{n \times n}}$ også vores MREF, som per T.3.7 v.l. har:

$$S_n(\bar{x}, \bar{y})(\theta) = \sum_{i=1}^n S_{x_i, (\bar{x}, \bar{y})}(\theta) = \sum_{i=1}^n (t(x_i, y_i) - z(\theta))$$

c2.22

$$= \sum_{i=1}^n t(x_i, y_i) - n z(\theta)$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) - n \nabla q(\theta)$$

Übung 3.3 Tafel 5

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i, - \sum_{i=1}^n y_i \right) - \left(n \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2}, n \left(-\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2} \right) \right)$$

Se Maple

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n e^{\theta_1}}{\theta_2}, - \sum_{i=1}^n y_i + n \left(\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} + \frac{1}{\theta_2} \right) \right).$$

~~Kein Stab für 1.53! und f. der optimale ist (2, 3);~~

V: Sei $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ Ls von $S_{n, \bar{x}, \bar{y}}(\theta) = 0$ $\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i \right) = \left(n e^{\theta_1}, \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2} \right)$

$$(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \left(\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2}, \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} + \frac{1}{\theta_2} \right)$$

\rightarrow Som v: veel Maple losen für θ_1, θ_2 san zu lösigen m. zu überprüfen.

V: für Lösungen:

$$(\theta_1, \theta_2) = \left(\log \frac{\bar{x}_n(\bar{x}_n + 1)}{\bar{y}_n}, \frac{\bar{x}_n + 1}{\bar{y}_n} \right).$$

~~Die~~ vgl C2.21 Videos at $i_n(\underline{\theta}) = n i(\underline{\theta}) = n \cdot k(\underline{\theta})$

Maple

$$= n \begin{pmatrix} \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} & -\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} \\ -\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} & \frac{2e^{\theta_1}}{\theta_2^3} + \frac{1}{\theta_2} \end{pmatrix}$$

$$= n D^2 Q(\underline{\theta})$$

Øpg 5.3 Fortsat

Som før vores udrognede $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ fra scorelign. da
 Pois og Exp res. n.s. også vil være res. def. i tilfældet
 at der ikke er en glat fun. vil have at

$$\hat{\underline{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \left(\log \frac{\bar{x}_n(\bar{x}_n+1)}{\bar{y}_n}, \frac{\bar{x}_n+1}{\bar{y}_n} \right). \quad \begin{array}{l} \text{Bem. et løsnigen} \\ \text{vil være unikke} \\ \text{BMST 3.22.} \end{array}$$

V: Kunne da finde $\mu(E)$ for Z, B_N , også
 ala. BMST 3.21.

Bemerk at v: $\mu(\underline{\theta}) = (\log \frac{Z}{B}, \frac{1}{B})$,
 således at $(Z, B) = \left(\frac{e^{\underline{\theta}_1}}{\underline{\theta}_2}, \frac{1}{\underline{\theta}_2} \right) = \phi(\underline{\theta})$, således

at v: Res 73.21; BMST har at

$$\hat{\underline{\theta}} = (\hat{Z}, \hat{B}) = \phi(\hat{\underline{\theta}}) = \left(\begin{pmatrix} \frac{\bar{x}_n(\bar{x}_n+1)}{\bar{y}_n} \\ \frac{\bar{x}_n+1}{\bar{y}_n} \end{pmatrix}, \frac{\bar{y}_n}{\bar{x}_n+1} \right)$$

$$= \left(\bar{x}_n, \frac{\bar{y}_n}{\bar{x}_n+1} \right).$$

OPg 1.4

Bemerk at v: v. OPg 1.3 kan se. At
opg C4.14 kan vi gøre et sym. fordeling af

MLE:

$$V: \text{først at } \hat{\gamma} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \sim N(\gamma), D\phi /$$

ds.

$$\sim N((\hat{\alpha}, \hat{\beta}), D\phi(\theta)_{n(\theta)}^{-1} D\phi(\theta)^T)$$

$$\xrightarrow{d} \sim N((\hat{\alpha}, \hat{\beta}), \left(\begin{array}{cc} \frac{e^{\theta_1}}{n\theta_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2 n(e^{\theta_1} + \theta_2)} \end{array} \right)).$$

Maple.

$$\therefore N((\hat{\alpha}, \hat{\beta}), \left(\begin{array}{cc} \frac{n}{\theta_2} & 0 \\ 0 & \frac{\theta_2^2}{n(\hat{\alpha} + \hat{\beta})} \end{array} \right)).$$

OPG 1.5

• For $H_0: \lambda \in B$ gælder en hvilken parameter rum i den store model (som tidligere er vist MREF af dim 2) til nuken at være i det.

- V: har parametrum $B = R_{\geq 0}$.

- Bem.; $\varphi: B \rightarrow \mathbb{H}$, $\varphi(B) = (\mathcal{B}, \mathcal{B})$ er kreat glat, og ~~er~~ injektiv, med $\varphi^{-1} = \varphi$, da φ er homeomorf.

Bemerk til sidst $\varphi(\mathbb{H}) = (\mathcal{I}, \mathcal{I})$ altid fuldray \mathcal{I} . $\varphi(\mathcal{B})$

↳ Ergo vil H_0 specificere en én-dim kurum exp. fam.

Opg 1.G

V: bogen PL.30 f.1 af transformerer den
følgende adjegte Scorefkt;

$$S_{n, \bar{x}, \bar{y}, H_0}(\beta) = ((x_i - y_i) - E(\varphi(\beta)))^2 J(\beta)$$

Score under H_0

$$= ((x_i - y_i) - \left(\frac{e^\beta}{\beta}, - \frac{e^\beta}{\beta^2} - \frac{1}{\beta} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$= \left(x_i - \frac{e^\beta}{\beta}, \frac{e^\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} - y_i \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x_i - \frac{e^\beta}{\beta} + \frac{e^\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} - y_i$$

↳ Rør T 1.3f

$$S_{n, \bar{x}, \bar{y}, H_0}(\beta) = \sum_{i=1}^n S_{\bar{x}, \bar{y}_i, \bar{z}_i, H_0}(\beta)$$

$$= -\frac{ne^\beta}{\beta} + \frac{ne^\beta}{\beta^2} + \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$$

opg 1.6 Lektor

V: Sev at

$$\sum_{H_0}^n S_n(\beta) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{y}) = \frac{n\bar{x}}{\beta} - \frac{n\bar{y}}{\beta^2} - \frac{n}{\beta}$$

Her er selv synlig: vi's fået noget godt i udgangspunktet da det at der

\hookrightarrow Det er imidlertid ikke ligeligt
at man som her kan få et løse
scoreligninger for at finde MLE.
(heller ikke nogen λ).

opg 1.7

$(\hat{\theta})$

Hvis V: harde MLE fra opg 1.6

Ville V: ~~kan~~ kunne støtte os af
at de tidlige beregninger og egenbef. vis
symptofibra for $\Delta = 2l(\hat{\theta}) - 2l_{H_0}(\hat{\beta})$.

Kvordan i denne sammenhæng kan vi udgøre en storpræst
af Δ ved brug af data, med χ^2_{2-1} test støtter
først desværre at værdsætte hypotesen.

(- f. h. ikke $\hat{\beta}$, da det kan vi desv. ikke.)

(o)

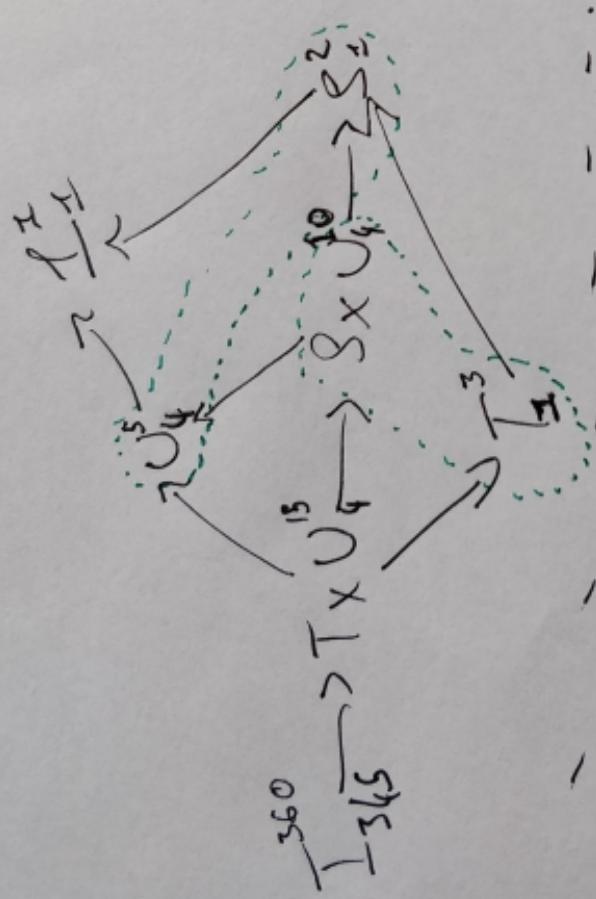
~~Topsoil~~

Organic 2.1, 2.2 ; R.

Oppgave 2.3

Fra R ses at tabellen for

$\text{TA}(S \times V)$ er pent opdet; to bladene, som er bestemt av, hvorvidt der er tale om en placebo-vare eller ej. V: for diabetisk eller ikke-diabetisk.



V: Ser at V: bør tilhøre en $\text{TA}(S \times V)$ etter at man ser at det ikke er mulig å få et sannsynligt element i V av nabolandet.

$S \times V = \emptyset$, idet V: for R har at $S \times V$ tabellen har "fullstendig" for V, spesielt når man ser inn Stk. - om Punkt.

Opgave 2.4

Se $R!$ Den del \mathbb{I} af opgaven;

Del 2:

Vi ser at fra opg 2.3 vi

$$L_{TxV} = V_T + V_{SxV} + V_0 + V_S + V_I + V_{TxV}, \text{ hvor}$$

$$L_T + L_{SxV} = (V_{SxV} + V_0 + V_S + V_I) + V_T, \text{ således}$$

at $V_i : L_T + L_{SxV}$ mægter L_{TxV} ; for hold t.'s

$$L_{TxV}. \text{ Ego } L_T + L_{SxV} \subseteq L_{TxV}.$$

Vi ser samtidigt at

$$\dim L_{TxV} = 15, \text{ og at } \dim (L_T + L_{SxV}) =$$

$$4 + 4 + 1 + 1 + 1 = 11.$$

Opgeve 2.5 i ~~R~~

OPS 3.1, 3.2 ikke løst

MatStat Eksamen 2021

Eksamens nummer: 1

Eksamensdato 24. juni, 2021

Opgave 2

Vi kan starte med at indlæse data:

```
library(tidyverse)
vaccine <- read_csv("covid19vaccine.txt", col_types = cols(U = col_factor(), T = col_factor()))
```

Opgave 2.1

(Primære besvarelse af opgaven her i R)

Vi er i delopgave 2.1 og 2.2 blevet bedt om kun at bruge datasættet for `vaccine_uge5`, som er givet ved

```
vaccine_uge5 <- filter(vaccine, U == 5)
```

Vi kan yderligere subsette vores datasæt ved:

```
vaccine_uge5Ind <- subset(vaccine_uge5, select = c(3,5))
head(vaccine_uge5Ind)
```

```
## # A tibble: 6 x 2
##   T          X
##   <fct>    <dbl>
## 1 KK      6175.
## 2 VZ      1742.
## 3 KK      1081.
## 4 PL       3.38
## 5 PL       5.89
## 6 KK     1174.
```

Vi kan på basis af dette fitte to `lm` modeller ud fra faktoren `T`, med respons hhv. X , $\log(X)$. Dette kan gøres i R ved følgende:

```
model <- lm(X~T,data=vaccine_uge5Ind)
logmodel <- lm(log(X)~T,data=vaccine_uge5Ind)
```

Følgende hjemmelavede plotfunktion benyttes til at plotte hhv. std. res. og QQplot for hver af de to modeller.

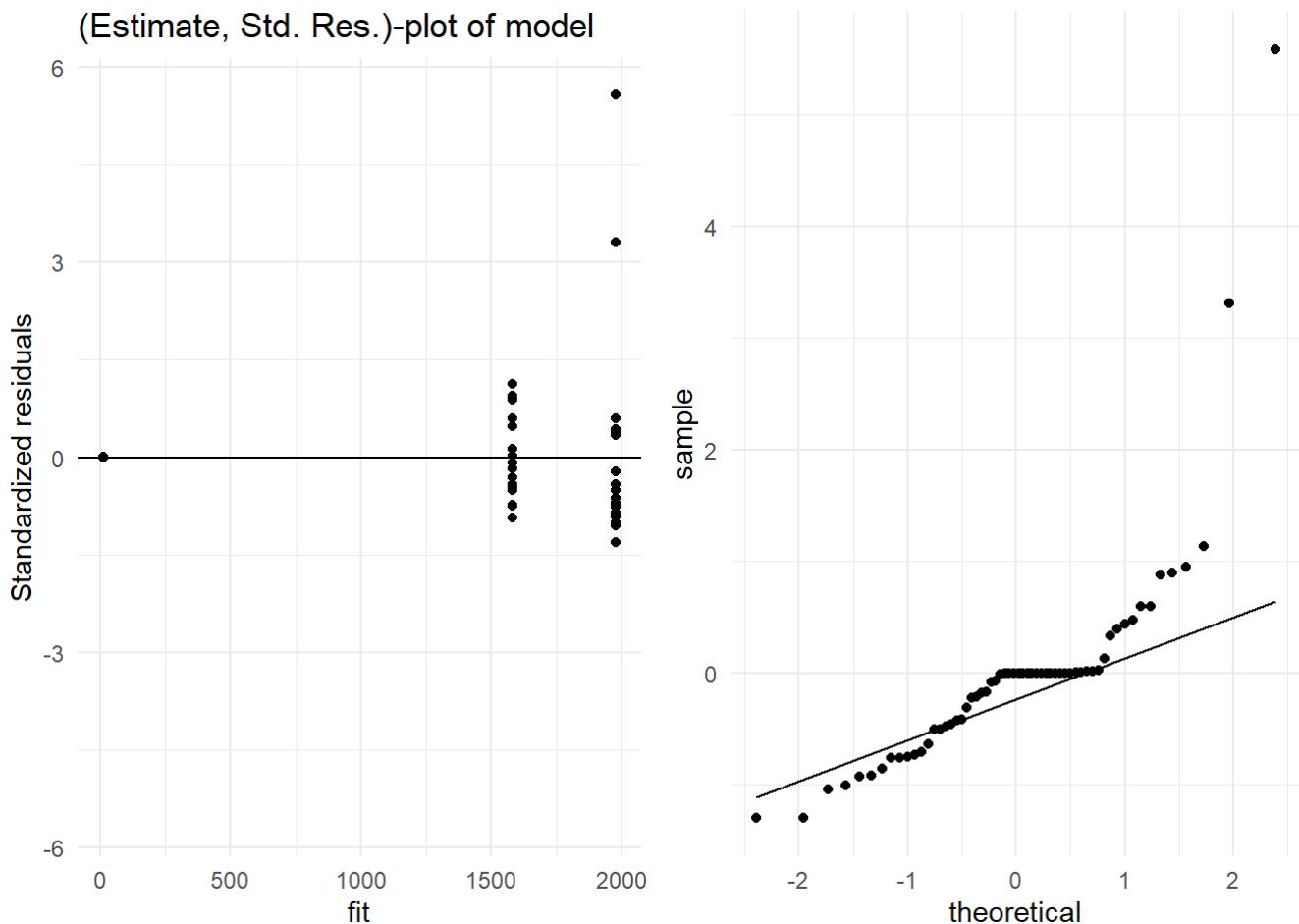
```

library(gridExtra)
Stdresplot <- function(model, main = paste("(Estimate, Std. Res.)-plot of", deparse(substitute(model))), ylab ="Standardized residuals", ...) {
  fit <- fitted(model)
  rst <- rstandard(model)
  qplot(fit, rst, main = main, ylab = ylab, ylim = c(-max(3.2,max(abs(rst))), max(3.2,max(abs(rst)))) )+geom_hline(yintercept = 0) #Largest symmetric interval (around 0) of (-3.2,3.2) or (-Largest absolute rst, Largest absolute rst)
}
QQplotdraw <- function(model, main = paste("Normal QQ-plot of", deparse(substitute(model))), xlab = "Theoretical Quantiles", ylab ="Sample Quantiles", ...) {
  rst <- rstandard(model)
  #data$name <- getCall(lm_LT)$data
  ggplot(data = eval(getCall(model)$data), main = main, xlab = xlab, ylab = ylab) + geom_qq()
  () + geom_qq_line() + aes(sample = rst)
} #main, xLab, yLab call do not work for some reason
StdresQQPlot <- function(model,...) {
  p1 <- Stdresplot(model,...)
  p2 <- QQplotdraw(model,...)
  #library(gridExtra)
  grid.arrange(p1,p2, ncol = 2)
}

```

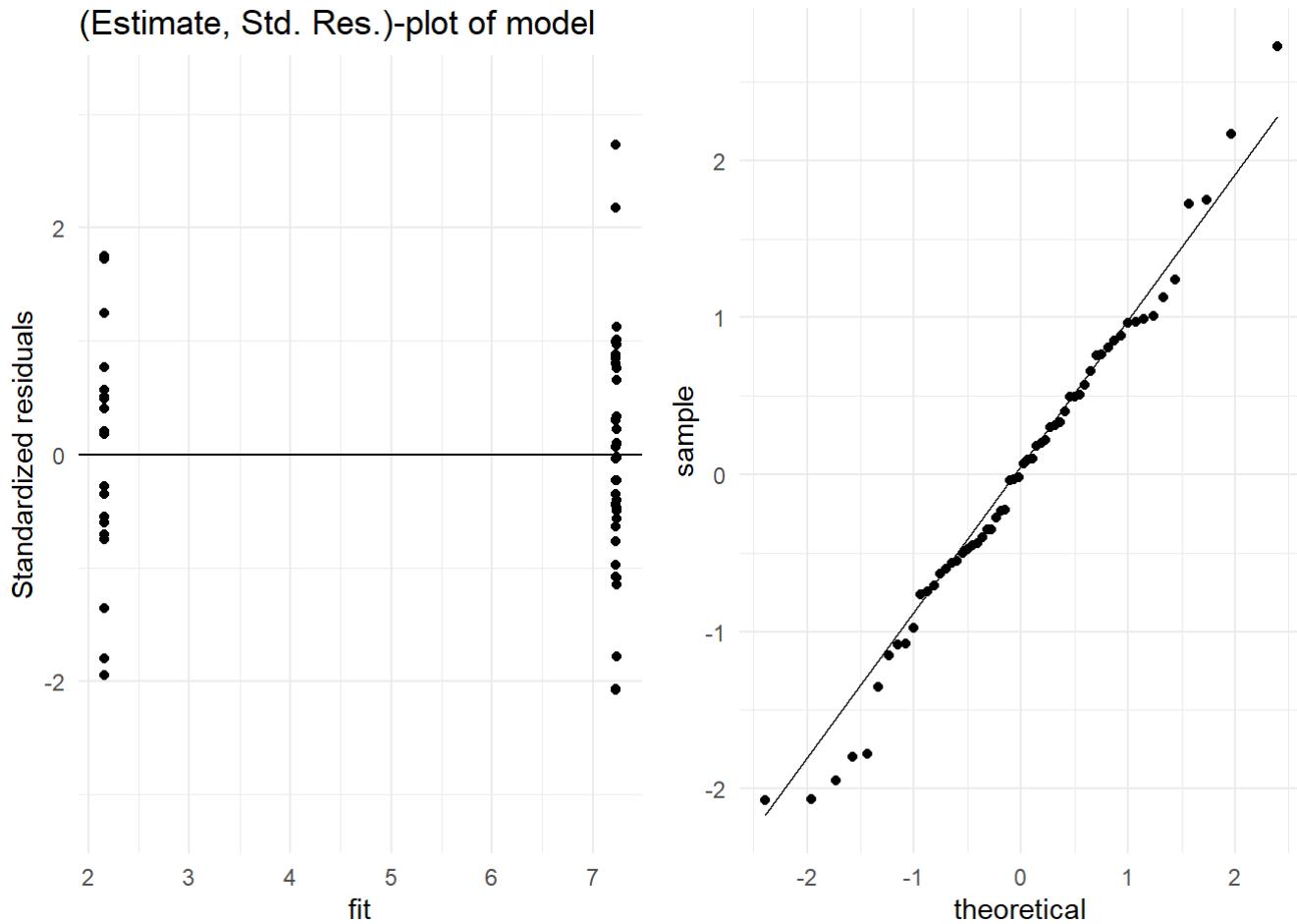
Således at vi kan plotte:

```
StdresQQPlot(model)
```



```
StdresQQPlot(logmodel)
```

(Estimate, Std. Res.)-plot of model



I forhold til modelhypotesen for et ensidet faktor-analyse, kan det på overstående plot ses, at det log-transformerede plot passer langt bedre til antagelserne. Specifikt ser vi at vi ved at log-transformerer får tæmmet de 'outliers' vi har på std. res. plottet for den ikke-transformerede model, således at vi i højere grad kan være tilfredse med linearitets antagelsen i et-faktor modellen. - hertil ser vi at varians homogeniteten ser bedre ud i `logmodel` og specielt ser vi fra QQplottet at det er meget mere rimeligt med normalfordelingsantagelsen, når vi først har log-transformeret. - Vi vil derfor arbejde videre med `logmodel`.

Opgave 2.2

(Primære besvarelse af opgaven her i R)

For at analyserer om der er nogen forskel i effekt ved hver af de to vacciner kan vi kigge på summary;

```
summary(logmodel)
```

```

## 
## Call:
## lm(formula = log(X) ~ T, data = vaccine_uge5Ind)
## 
## Residuals:
##    Min     1Q   Median     3Q    Max 
## -1.43294 -0.39569  0.01726  0.47106  1.88359 
## 
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
## (Intercept) 7.227355  0.158596 45.571 <2e-16 ***
## TVZ         0.006945  0.224289  0.031   0.975    
## TPL        -5.073055  0.224289 -22.618 <2e-16 ***  
## ---      
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1 
## 
## Residual standard error: 0.7093 on 57 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.923, Adjusted R-squared:  0.9203 
## F-statistic: 341.5 on 2 and 57 DF, p-value: < 2.2e-16

```

Vi har KK som intercept parameter, og tester i anden ligne forskellen mellem KK og vz . Det er her værd at bemærke den enormt store p værdi på 0.975 understøtter hypotesen om at der ikke er signifikant forskel mellem logeffekten af VZ og KK vaccinen - hvilket også er understøttet af estimatet for forskellen som er ret lavt som 0.0069452.

Opgave 2.3

(Se besvarelses forklaring på papir)

Vi laver tabel for forskellige faktorer;

```
table(vaccine$S, vaccine$U) # "fuld rang": 10 niveauer
```

```

## 
##      1 2 3 4 5 
## PL 20 20 20 20 20 
## VA 40 40 40 40 40 

```

```
table(vaccine$T, vaccine$U) # "fuld rang": 15 niveauer
```

```

## 
##      1 2 3 4 5 
## KK 20 20 20 20 20 
## VZ 20 20 20 20 20 
## PL 20 20 20 20 20 

```

```
table(vaccine$T, interaction(vaccine$U,vaccine$S)) # "fuld rang": 15 niveauer
```

```

## 
##      1.PL 2.PL 3.PL 4.PL 5.PL 1.VA 2.VA 3.VA 4.VA 5.VA 
## KK    0    0    0    0    0    20   20   20   20   20 
## VZ    0    0    0    0    0    20   20   20   20   20 
## PL    20   20   20   20   20   0    0    0    0    0 

```

Opgave 2.4

(Primære besvarelse af første del af opgaven her i R, anden del i hånden)

Vi skal afgøre om \mathbb{G} er et ortogonalt design. Vi har igen som i opgave 2.3 kun to ikke-trivielle sammenligninger at teste; henholdsvis om vi har geometrisk orthogonalitet mellem S og U og mellem T og $S \times U$. Vi tester den første i R ved den følgende selvlavede funktion;

```
SamhBalanceEquation <- function(x) {
  #Cannot be used with tablesum function,
  # !!! requires connected components (sammenhængende design). !!!
  sx <- sum(x)
  testy <- x
  rs <- apply(x, 1, sum)
  cs <- apply(x, 2, sum)
  nuco <- ncol(x)
  nuro <- nrow(x)
  for (i in 1:nuro) {
    for (j in 1:nuco) {
      if (x[i,j]==rs[i]*cs[j]/sx) {
        testy[i,j] <- TRUE
      } else {
        testy[i,j] <- FALSE
      }
    }
  }
  if (sum(testy) == nuco*nuro) {
    TRUE
  } else {
    FALSE
  }
}
SamhBalanceEquation(table(vaccine$S, vaccine$U)) #TRUE
```

```
## [1] TRUE
```

Funktionen tester om sammenhængende designs opfylder balanceequationen, hvilket funktionen siger at tabellen gør. Per L13.11 i EH vil S og U dermed være parvist geometrisk ortogonale. Vi har set i opgave 2.3 at tabellen for T og $S \times U$ har balancede komponenter, således at vi ved Sætning 14.8, Eksempel 14.9 i EH kan konkludere at T og $S \times U$ også er parvist geometrisk ortogonale.

Tilsammen kan vi dermed konkludere at vi har med et geometrisk ortogonalt design at gøre.

Opgave 2.5

(Primære besvarelse af opgaven her i R)

Vi har i opgave 2.2 set at når vi udelukkende betragter antistofresponset i slukningen af perioden, er der ikke signifikant forskel mellem de to vacciner. Vi kan undersøge om der i stedet er forskel mellem vaccinerne, eksempelvis i forhold til, hvor hurtigt de kommer til deres antistofrespons.

Vi subsetter derfor vores model til kun at være de to ikke-placebo vacciner;

```
vaccinevacciner <- subset(vaccine, vaccine$T %in% c("VZ", "KK"))
```

Vi opretter modellen i R

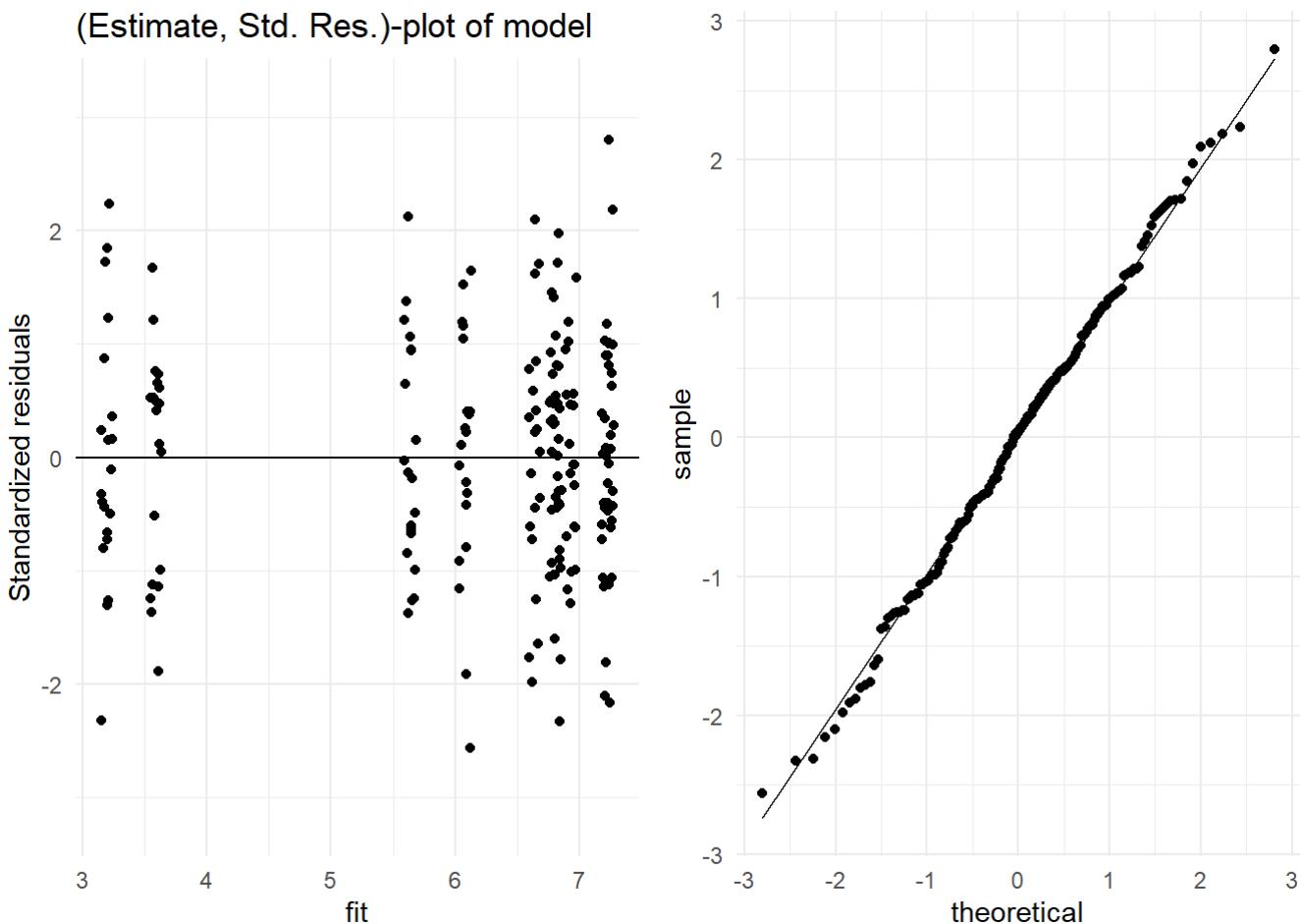
```
interacmodel <- lm(log(X)~Id+U+U:T, data = vaccinevacciner)
summary(interacmodel)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = log(X) ~ Id + U + U:T, data = vaccinevacciner)
##
## Residuals:
##    Min      1Q  Median      3Q     Max 
## -1.71058 -0.44529  0.03116  0.43622  1.87662 
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
## (Intercept) 3.242002  0.175954 18.425 < 2e-16 ***
## Id          -0.001548  0.002782 -0.557  0.57848  
## U2          2.443139  0.217992 11.207 < 2e-16 ***
## U3          2.885532  0.217992 13.237 < 2e-16 ***
## U4          3.443905  0.217992 15.798 < 2e-16 ***
## U5          4.032577  0.217992 18.499 < 2e-16 ***
## U1:TVZ     0.394548  0.218043  1.809  0.07196 .  
## U2:TVZ     1.162915  0.218043  5.333 2.73e-07 ***
## U3:TVZ     0.852026  0.218043  3.908  0.00013 *** 
## U4:TVZ     0.175261  0.218043  0.804  0.42253  
## U5:TVZ     0.004313  0.218043  0.020  0.98424  
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.6893 on 189 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.8123, Adjusted R-squared:  0.8024 
## F-statistic: 81.79 on 10 and 189 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Og kan ved at tegne std. res. og qq plot se, at modellen på log-niveau passer antagelser ganske påent;

```
StdresQQPlot(interacmodel)
```

(Estimate, Std. Res.)-plot of model



Vi laver dermed modellen om at der kan være en selvstående individ effekt, en selvstående ugeeffekt, og at der sammentidigt er en interaktionseffekt mellem uge og hvilken vaccine man er blevet givet.

```
anova(interacmodel)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Response: log(X)
##              Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
## Id          1  0.32   0.315  0.6636  0.4163
## U           4 365.76  91.440 192.4236 < 2e-16 ***
## U:T         5  22.62   4.523  9.5184 4.1e-08 ***
## Residuals 189  89.81   0.475
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

I U:T linjen i anova testet, tester vi modellen om at der ikke er en interaktionseffekt mellem behandling og uge, mod modellen hvor der   r en interaktionseffekt.

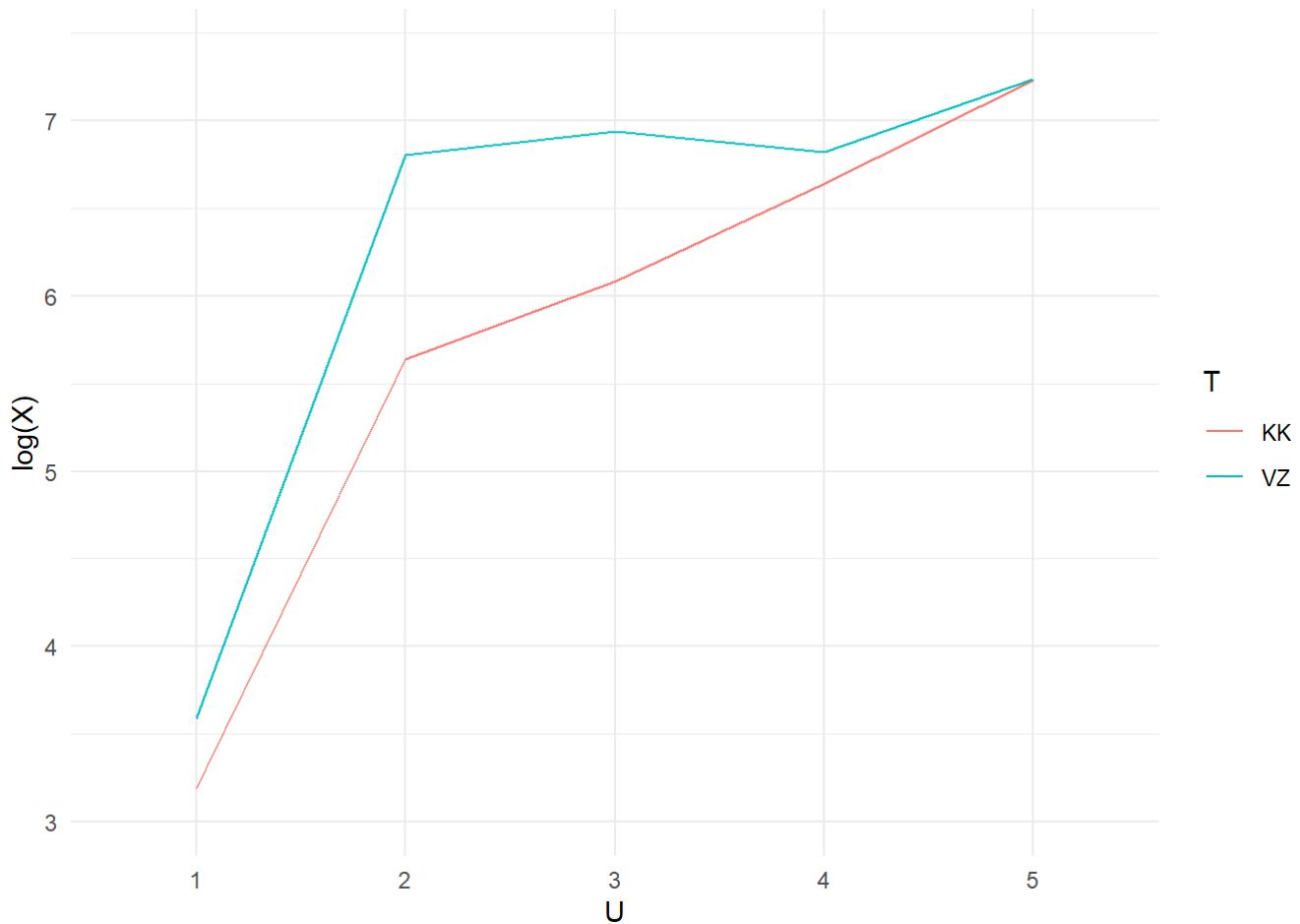
Vi ser en meget lav p værdi således at der i modellen er evidens for at forkaste nul-hypotesen om at der ikke er interaktionseffekt. Vi kan dermed sige at der forekommer evidens for at der er en klar forskel i hvordan de to vacciner virker henover tid. Sammenligner vi med opgave 2.2 vil forskellen i effekten dog efter fem uger være tilstrækkeligt lille til, at vi ikke statistisk kan bemærke forskel.

Vi kan visualisere denne effekt over tid;

```
ggplot(vaccinevacciner, aes(x = U, y = log(X), color = T)) + stat_summary(aes(group = T), geom = "line", fun = "mean")
```

```
## Warning: Ignoring unknown parameters: fun
```

```
## No summary function supplied, defaulting to `mean_se()
```



Opgave 3

Opgave 3.1

Ikke løst. #### Opgave 3.2 Ikke løst.

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{\theta_1}{\theta_2} - \log(\theta_2)} \\
& e^{\lambda - \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)} \tag{1} \\
\text{expand} &= \beta e^\lambda \tag{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi &:= \frac{e^{\theta_I}}{\theta_2} - \log(\theta_2) \\
\psi &:= \frac{e^{\theta_I}}{\theta_2} - \ln(\theta_2) \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{dI} &:= \frac{\partial}{\partial \theta_1} \psi \\
\psi_{dI} &:= \frac{e^{\theta_I}}{\theta_2} \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{d2} &:= \frac{\partial}{\partial \theta_2} \psi \\
\psi_{d2} &:= -\frac{e^{\theta_I}}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2} \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{dI1} &:= \frac{\partial}{\partial \theta_1} \psi_{dI} \\
\psi_{dI1} &:= \frac{e^{\theta_I}}{\theta_2} \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{dI2} &:= \frac{\partial}{\partial \theta_2} \psi_{dI} \\
\psi_{dI2} &:= -\frac{e^{\theta_I}}{\theta_2^2} \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\Psi_{d22} := \frac{\partial}{\partial \theta_2} \Psi_{d2}$$

$$\Psi_{d22} := \frac{2 e^{\theta_1}}{\theta_2^3} + \frac{1}{\theta_2^2} \quad (8)$$

$$expand \left(subs \left(\left[\theta_1 = \log \left(\frac{\lambda}{\beta} \right), \theta_2 = \frac{1}{\beta} \right], \Psi_{d11} \right) \right) \quad \lambda \quad (9)$$

$$expand \left(subs \left(\left[\theta_1 = \log \left(\frac{\lambda}{\beta} \right), \theta_2 = \frac{1}{\beta} \right], \Psi_{d12} \right) \right) \quad -\lambda \beta \quad (10)$$

$$expand \left(subs \left(\left[\theta_1 = \log \left(\frac{\lambda}{\beta} \right), \theta_2 = \frac{1}{\beta} \right], \Psi_{d22} \right) \right) \quad 2 \lambda \beta^2 + \beta^2 \quad (11)$$

$$subs \left(\left[\theta_1 = \log \left(\frac{\lambda}{\beta} \right), \theta_2 = \frac{1}{\beta} \right], \Psi \right)$$

$$\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} - \ln(\theta_2) \quad (12)$$

differentiate w.r.t. theta_2

$$-\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2} \quad (13)$$

$$subs \left(\left[\theta_1 = \log \left(\frac{\lambda}{\beta} \right), \theta_2 = \frac{1}{\beta} \right], \% \right)$$

$$-\beta \lambda - \beta \quad (14)$$

$$\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} \quad \lambda \quad (15)$$

$$-\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2} \\ -\lambda\beta - \beta \quad (16)$$

restart;

$$sx = \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} \\ sx = \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} \quad (17)$$

solve for theta_1 →

$$\left[\left[\theta_1 = \ln(sx \theta_2) \right] \right] \quad (18)$$

$$\theta_{1s} := \ln(sx \theta_2)$$

$$\theta_{1s} := \ln(sx \theta_2) \quad (19)$$

$$sy = \frac{e^{\theta_{1s}}}{\theta_2^2} + \frac{1}{\theta_2}$$

$$sy = \frac{sx}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_2} \quad (20)$$

solve for theta_2 →

$$\left[\left[\theta_2 = \frac{sx + 1}{sy} \right] \right] \quad (21)$$

$$\theta_{2s} := \frac{sx + 1}{sy}$$

$$\theta_{2s} := \frac{sx + 1}{sy} \quad (22)$$

$$\theta_{1ss} := \ln(sx \cdot \theta_{2s})$$

$$\theta_{1ss} := \ln\left(\frac{sx(sx + 1)}{sy}\right) \quad (23)$$

$$i_n := n \cdot \begin{bmatrix} \Psi_{d11} & \Psi_{d12} \\ \Psi_{d12} & \Psi_{d22} \end{bmatrix}$$

$$i_n := \begin{bmatrix} \frac{n e^{\theta_1}}{\theta_2} & -\frac{n e^{\theta_1}}{\theta_2^2} \\ -\frac{n e^{\theta_1}}{\theta_2^2} & n \left(\frac{2 e^{\theta_1}}{\theta_2^3} + \frac{1}{\theta_2^2} \right) \end{bmatrix} \quad (24)$$

with(*linalg*) :

$$iinv_n := i_n^{-1}$$

$$iinv_n := \begin{bmatrix} \frac{(2 e^{\theta_1} + \theta_2) \theta_2}{n e^{\theta_1} (e^{\theta_1} + \theta_2)} & \frac{\theta_2^2}{n (e^{\theta_1} + \theta_2)} \\ \frac{\theta_2^2}{n (e^{\theta_1} + \theta_2)} & \frac{\theta_2^3}{n (e^{\theta_1} + \theta_2)} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\phi := \begin{bmatrix} \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} \\ \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix}$$

$$\phi := \begin{bmatrix} \frac{\theta_1}{\theta_2} \\ \frac{1}{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\phi_{dI} := \frac{\partial}{\partial \theta_1} \phi$$

$$\phi_{dI} := \begin{bmatrix} \frac{\theta_1}{\theta_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\phi_{d2} := \frac{\partial}{\partial \theta_2} \phi$$

$$\phi_{d2} := \begin{bmatrix} -\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} \\ -\frac{1}{\theta_2^2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$Dphi := \begin{bmatrix} \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} & -\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} \\ 0 & -\frac{1}{\theta_2^2} \end{bmatrix}$$

$$Dphi := \begin{bmatrix} \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} & -\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} \\ 0 & -\frac{1}{\theta_2^2} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$Vari := simplify(Dphi \cdot iinv_n \cdot transpose(Dphi))$$

$$Vari := \begin{bmatrix} \frac{e^{\theta_1}}{n \theta_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2 n (e^{\theta_1} + \theta_2)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$simplify(subs(\left[\theta_1 = \log\left(\frac{\lambda}{\beta}\right), \theta_2 = \frac{1}{\beta}\right], Vari))$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda}{n} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n(\lambda + 1)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

restart;

$$\begin{aligned}
sumsum &:= \sum_{i=1}^n \left(x[i] - \frac{e^\beta}{\beta} + \frac{e^\beta}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} - y[i] \right) \\
sumsum &:= -\frac{n e^\beta}{\beta} + \frac{n e^\beta}{\beta^2} + \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
sumsum_2 &:= -\frac{n e^\beta}{\beta} + \frac{n e^\beta}{\beta^2} + \frac{n}{\beta} + sd \\
sumsum_2 &:= -\frac{n e^\beta}{\beta} + \frac{n e^\beta}{\beta^2} + \frac{n}{\beta} + sd
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
solve(sumsum_2 = 0, \beta) \\
RootOf(-e^{-Z} n Z + Z^2 sd + e^{-Z} n + Z n)
\end{aligned} \tag{34}$$

`assume(beta > 0)`
`solve(sumsum = 0, beta)`
Warning, solve may be ignoring assumptions on the input variables.

$$RootOf\left(-e^{-Z} n Z + Z^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - Z^2 \left(\sum_{i=1}^n y_i\right) + e^{-Z} n + Z n\right) \tag{35}$$