Matstat E2021

Opg 1.1

$f_{\lambda,\beta}(x,y)$, $y>0$, $x=0,1,\dots$, $(\lambda,\beta)\in\mathbb{R}^2_{>0}$, bemærk at vi vil have;

Base measure:

$\frac{y^x}{(x!)^2}\cdot m\times\nu$

For $f_{\lambda,\beta}(x,y) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}\frac{y^x}{\beta^{x+1}x!}e^{-y/\beta}$

$= \frac{1}{(x!)^2}y^x e^{-\lambda}\frac{1}{\beta}\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^x e^{-y/\beta}$

$= \frac{1}{(x!)^2}y^x e^{-\lambda}\frac{1}{\beta}e^{\log\left(\left(\frac{\lambda}{\beta}\right)^x\right)-y\frac{1}{\beta}}$

$= \frac{1}{(x!)^2}y^x e^{-\lambda}\frac{1}{\beta}e^{x\log\frac{\lambda}{\beta}-y\frac{1}{\beta}}$

$\theta_1 := \log\frac{\lambda}{\beta}$
$\theta_2 := \frac{1}{\beta}$ $\rightarrow$ $= \frac{1}{(x!)^2}y^x e^{-\lambda}\frac{1}{\beta}e^{x\theta_1-y\theta_2}$,

Så vi kan vælge $(\theta_1,\theta_2)=\underline{\theta}$ som kanonisk parameter.
Bemærk $\underline{\theta}\in\Theta=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0})\subseteq\mathbb{R}^2$, så Θ to-dim.
↳ Bemærk Θ åben $\Rightarrow$ regulær.

Kanonisk stikprøve fkt:

vi vælger $\underline{t}(x,y)=(t_1,t_2)(x,y)=(x,-y)$.

Matstat opg I.1 fortsat.

Vi får

normaliserings konst.:

Vi ser at $\frac{1}{c(\theta)} = e^{-\lambda}\frac{1}{\beta} \iff c(\theta) = \beta e^{\lambda}$

$= \frac{1}{\theta_2} e^{e^{(\theta_1)}/\theta_2}$ således at også

kummulant fkt.:

$\psi(\theta) = \log(c(\theta)) = \log\left(\frac{1}{\theta_2} e^{e^{\theta_1}/\theta_2}\right) =$

$\cancel{\log\frac{1}{\theta_2}} \log e^{e^{\theta_1}/\theta_2} + \log\frac{1}{\theta_2} = e^{\theta_1/\theta_2} - \log\theta_2.$

altså vil vi få en to dim regulær eksp. fam. ved tætheder $f_{\lambda,\beta}$.

1.2)

Det vides kendt at for $X \sim Pois(\lambda)$ vil

$EX = \lambda, \; VX = \lambda.$

Vi kan også komme frem til dette via T2.16.

Bemærk at fra generel teori vides det at både Poisson og Γ-fordelingen

Opg 1.2 forts.

er minimale regulære exp.-fam., hvorfor vi:
per ydre produkt komposition v. BMS 3.31
kan slutte at dette også er tilfældet
for vores familie, som har tætheden $f_{\lambda,\beta}$.

Per T2.16 haves:

$$\tau(\theta) = E(t(X,Y)) \equiv E(X,-Y) = \nabla\varphi(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\varphi(\theta), \frac{\partial}{\partial\theta_2}\varphi(\theta)\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} - \log\theta_2, \frac{\partial}{\partial\theta_2}\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2} - \log\theta_2\right)$$

$$= \left(\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2}, -\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2}\right) = (\lambda, -\lambda\beta - \beta),$$ således at

om para. til λ, β

$$EX = \lambda, \quad E(-Y) = -\lambda\beta - \beta \iff EY = \lambda\beta + \beta = \beta(\lambda+1).$$

ligeledes v. T2.16:

$$V_\theta(t(X,Y)) \equiv V_\theta(X,-Y) = D^2\varphi(\theta) = D(\nabla\varphi(\theta)) =$$

$$\begin{pmatrix} \partial^2/\partial\theta_1^2\,\varphi(\theta) & \frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\varphi(\theta) \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta_2\partial\theta_1}\varphi(\theta) & \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2}\varphi(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda\beta \\ -\lambda\beta & 2\lambda\beta^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

se Maple

I.2 fortsat

$$= \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda\beta \\ -\lambda\beta & \beta^2(2\lambda+1) \end{pmatrix},$$ således at

$$V((X,Y)) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda\beta \\ \lambda\beta & \beta^2(2\lambda+1) \end{pmatrix},$$ så

$$VX = \lambda, \quad VY = \beta^2(2\lambda+1), \quad \mathrm{cov}(X,Y) = \lambda\beta.$$

<u>Opg 1.3</u>

~~T 1.37 giver~~ Bem. at en eksp. fam. specielt er lineær eksp. og at det per T 2.29 BMS gælder at sådanne er glatte og lokalt stabile.

Per C. 2.21 haves at for minimal og regulære eksp.-fam. (MR EF) vil

$$S_{\underline{X},1}(\theta) = t(\underline{x}) - \tau(\underline{\theta}).$$

Bem. per indre produkt regler vil $\mathcal{P}^{\otimes n}$ også være (← BMS 5.31) MREF, som per T 1.37 vil have;

$$S_{n,(X,Y)}(\underline{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} S_{1,(X_i,Y_i)}(\theta) \overset{C2.21}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(t(x_i,y_i) - \tau(\underline{\theta})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t(x_i,y_i) - n\tau(\underline{\theta})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i, -y_i) - n\nabla\varphi(\underline{\theta})$$

Opg. 1.3 fortsat

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i, -\sum_{i=1}^n y_i\right) - \left(n\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2}, n\left(-\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} - \frac{1}{\theta_2}\right)\right)$$

Se Maple

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{ne^{\theta_1}}{\theta_2}, -\sum_{i=1}^n y_i + n\left(\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} + \frac{1}{\theta_2}\right)\right).$$

~~Ved brug af 1.13 kan vi det opgave til~~
~~$t(\lambda, \beta)$;~~

Vi ser at $S_{n,\underline{X},\underline{Y}}(\underline{\theta}) = 0$ $\cancel{\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i\right) = \left(\frac{ne^{\theta_1}}{\theta_2}, n\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2}\right)}$

$$(\bar{x}_n, \bar{y}_n) = \left(\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2}, \frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} + \frac{1}{\theta_2}\right)$$

$\hookrightarrow$ som vi ved Maple løser for θ_1, θ_2 som to ligninger m. to ubekendte.

Vi får løsningen;

$$(\theta_1, \theta_2) = \left(\log \frac{\bar{x}_n(\bar{x}_n + 1)}{\bar{y}_n}, \frac{\bar{x}_n + 1}{\bar{y}_n}\right).$$

~~Vi~~ ved C2.21, vides at $i_n(\underline{\theta}) = n\,i(\underline{\theta}) = n \cdot \mathcal{K}(\underline{\theta})$
/T1.37

$= n\, D^2\psi(\underline{\theta})$

Maple

$$= n\begin{pmatrix} e^{\theta_1}/\theta_2 & -\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} \\ -\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2^2} & \frac{2e^{\theta_1}}{\theta_2^3} + \frac{1}{\theta_2^2} \end{pmatrix}$$

Opg 1.3 fortsat

Som før vores udregnede (θ_1, θ_2) fra scoreligningerne da Pois og $\Gamma^{1/\eta}$ pos. n.s. også vil være pos. def. Således at ~~der~~ idet vi har en glat fkn. vil have at

$$\underline{\hat{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \left(\log \frac{\overline{X}_n(\overline{X}_n+1)}{\overline{Y}_n}, \frac{\overline{X}_n+1}{\overline{Y}_n}\right).$$

Bem. at løsningen vil være unik pr BMS T3.22.

Vi kan da finde MLE for λ, β v. omparam. ala. BMS T3.21.

Bemærk at vi har $(\theta_1, \theta_2) = \left(\log \frac{\lambda}{\beta}, \frac{1}{\beta}\right)$, således at $(\lambda, \beta) = \left(\frac{e^{\theta_1}}{\theta_2}, \frac{1}{\theta_2}\right) = \phi(\underline{\theta})$, således at vi pr. T3.21 i BMS har at

$$\underline{\hat{\gamma}} = (\hat{\lambda}, \hat{\beta}) = \phi(\hat{\theta}) = \left(\frac{\left(\frac{\overline{X}_n(\overline{X}_n+1)}{\overline{Y}_n}\right)}{\left(\frac{\overline{X}_n+1}{\overline{Y}_n}\right)}, \frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n+1}\right)$$

$$= \left(\overline{X}_n, \frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n+1}\right).$$

Opg I.4

Bemærk at vi v. opg I.3 ~~kan~~ ~~kan~~ ~~P4.2~~ og C4.14 kan regne asymp. fordeling af MLE:

Vi får at $\hat{\gamma} \equiv (\hat{\lambda}, \hat{\beta})$ ~~$\overset{}{\sim}\mathcal{N}\left(\binom{\lambda}{\beta}, D\phi\right.$~~

$$\overset{as.}{\sim} \mathcal{N}\left(\binom{\lambda}{\beta}, D\phi(\theta)\, i_n(\theta)^{-1} D\phi(\theta)^T\right)$$

Maple.

$$\overset{d.}{=} \mathcal{N}\left(\binom{\lambda}{\beta}, \begin{pmatrix} \frac{e^{\theta_1}}{n\theta_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta_2 n (e^{\theta_1} + \theta_2)} \end{pmatrix}\right).$$

$$= \mathcal{N}\left(\binom{\lambda}{\beta}, \begin{pmatrix} \lambda/n & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n(\lambda + \frac{1}{\beta})} \end{pmatrix}\right).$$

Opg 1.5

For $H_0: \lambda = \beta$ indskrænker vi parameterrummet i den store model (som tidligere er vist MREF af dim 2) til nu kun at være 1 dim.

- Vi får parameterrum $B = \mathbb{R}_{>0}$.
- Bem.: $\varphi: B \to \Theta$, $\varphi(\beta) = (\beta, \beta)$ er kont. glat, og injektiv, med $\varphi^{-1} = \varphi$, så φ er homeomorfi.

  Bemærk tilsidst $\varphi'(\beta) = (1, 1)$ altid fuldrang 1.

↳ Ergo vil H_0 specificerer en én-dim krum exp. fam.

Opg 1.G

Vi bruger Pk.30 til at transformere den tidligere udregnede Score Stat;

$$S_{1,\underline{X}_i,\underline{Y}_i,H_0}(\underline{\beta}) = \left((x_{i,1}-y_i) - E(\varphi(\underline{\beta}))\right)^{T} J(\underline{\beta})$$

Score under H_0

$$= \left((x_{i,1}-y_i) - \left(\frac{e^{\beta}}{\beta}, -\frac{e^{\beta}}{\beta^2} - \frac{1}{\beta}\right)\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \left(x_i - \frac{e^{\beta}}{\beta}, \frac{e^{\beta}}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} - y_i\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= x_i - \frac{e^{\beta}}{\beta} + \frac{e^{\beta}}{\beta^2} + \frac{1}{\beta} - y_i$$

↳ Fra T1.37

$$S_{n,\underline{X},\underline{Y},H_0}(\underline{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} S_{1,\underline{X}_i,\underline{Y}_i,H_0}(\underline{\beta})$$

$$= -\frac{ne^{\beta}}{\beta} + \frac{ne^{\beta}}{\beta^2} + \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)$$

Opg 1.6 fortsat

Vi får at

$$S_{n_{H_0}}(\hat{\beta}) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i) = \frac{ne^{\beta}}{\beta} - \frac{ne^{\beta}}{\beta^2} - \frac{n}{\beta}$$

Her er sandsynligvis gået noget galt i udregning. Opdages det at der
<-> det er imidlertidigt ikke ligetil på nogen som helst vis at løse scoreligningen for at finde MLE.
(heller ikke Maple ...).

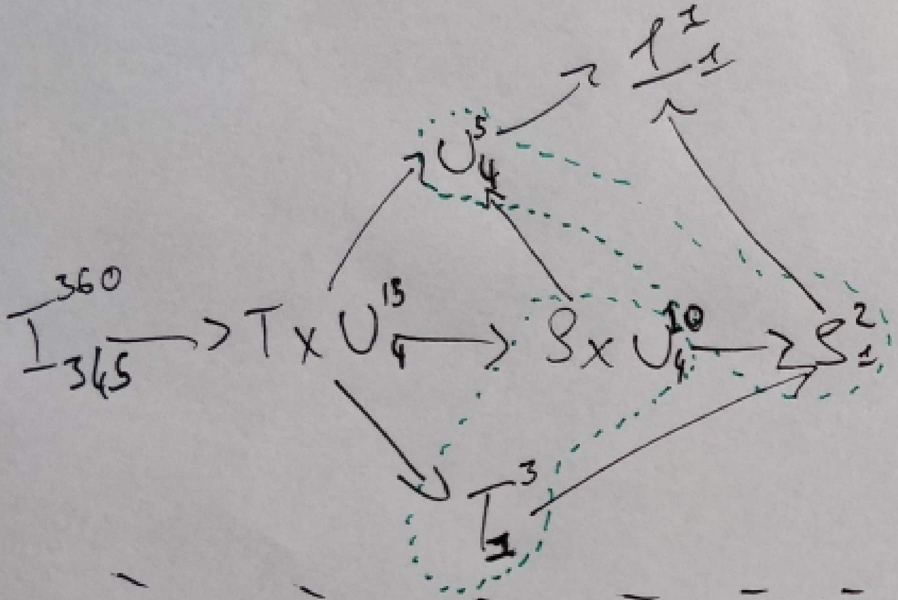
Opg 1.7

~~Hvis~~ vi havde MLE fra opg 1.6 $(\hat{\beta})$
ville vi ~~...~~ kunne støtte os op af de tidligere beregninger og ekesempelvis asymptotikken for $\Lambda = 2l(\hat{\theta}) - 2l_{H_0}(\hat{\beta})$.
hvormed vi kunne sammenligne den udregnede størrelse af Λ ved brug af data, med χ^2_{2-1} -test størrelse for derved at vurdere hypotesen.
(-fik ikke regnet $\hat{\beta}$, så det kan vi desv. ikke.)

~~Opgave 1.1~~

Opgave 2.1, 2.2 i R.

Opgave 23



Fra R ses at tabellen for $T \wedge (S \times U)$ er pænt opdelt i to blokke, som er bestemt af, hvorvidt der er tale om en Placebo-vaccine eller ej. Vi får dermed $T \wedge (S \times U) \in \mathbb{G}$, således at alle u sammenlignlige elementer: $\mathbb{G}$ er $\wedge$-stabile $\Rightarrow \mathbb{G}$ $\wedge$-stabil.

Vi ser at vi bør tjekke om $T \wedge (S \times U) \in \mathbb{G}$, og om $S \wedge U \in \mathbb{G}$ for at kunne konkl. at vi har $\wedge$-stabilt design.

$S \wedge U = 1 \in \mathbb{G}$, idet vi fra R har at $S \times U$ tabellen har "fuld rang", så vi specielt kun har én sammenh.-komponent.

Opgave 2.4

Se R! bar del 1 af opgaven;

Del 2:

Vi ser at fra opg 2.3 vil

$L_{T\times U} = V_T + V_{S\times U} + V_U + V_S + V_1 + V_{T\times U}$, hvor

$L_T + L_{S\times U} = (V_{S\times U} + V_U + V_S + V_1) + V_T$, således

at vi i $L_T + L_{S\times U}$ mangler $L_{T\times U}$ i forhold til $L_{T\times U}$. ergo $L_T + L_{S\times U} \subseteq L_{T\times U}$.

Vi ser som tidligst at

$\dim L_{T\times U} = 15$, og at $\dim(L_{T+S\times U}) =$

$4+4+1+1+1 = 11$.

Opgave 2.5 i R

OPS 3.1, 3.2 ikke løst