

Reeksamen i Statistik 2

25. august 2016

Eksamen varer 4 timer. Alle hjælpemidler er tilladt under eksamen, også computer, men du må ikke have internetforbindelse. Besvarelsen må gerne skrives med blyant.

Eksamenssættet består af tre opgaver med i alt 22 delspørgsmål. De tre opgaver vægtes ens. Data til opgave 3 ligger i filen **benzin.txt** på en USB-stick. Sticken skal afleveres tilbage når eksamen slutter, men udelukkende for at den kan genbruges. Den kan altså ikke indgå som en del af besvarelsen.

Opgave 1

1. Betragt fordelingen med tæthed

$$f_p(x) = (x+1)p^x(1-p)^2 \quad \text{for } x \in \mathbb{N}_0$$

mht tælleområdet på \mathbb{N}_0 . Fordelingen afhænger af parameteren $p \in (0, 1)$.

Du kan uden bevis benytte at f_p er en tæthed.

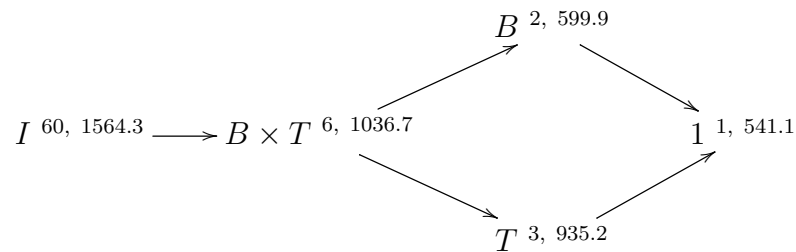
Lad X_1, \dots, X_n være uafhængige og identisk fordelte stokastiske variable med tæthed f_p , med ukendt $p \in (0, 1)$.

- (a) Reparametriser f_p -fordelingen ved $\theta = \log p$ så det fremgår at det er en eksponentiel familie med kanonisk stikprøvefunktion $t(x) = x$.
- (b) Identificer grundmålet. Identificer normeringskonstanten $c(\theta)$.
- (c) Argumenter for at X_1 har momenter af enhver orden. Find middelværdi og varians af X_1 .
- (d) Opskriv likelihoodligningen for θ . Find maksimaliseringsestimatoren for θ . Find maksimaliseringsestimatoren for p .
- (e) Er maksimaliseringsestimatoren for θ veldefineret med sandsynlighed 1? Er maksimaliseringsestimatoren for θ asymptotisk veldefineret? Begrund dine svar.

- (f) Gør rede for at $\hat{\theta}$ er asymptotisk normalfordelt, og angiv parametrene i den asymptotiske fordeling, parametriseret ved θ .
- (g) Gør rede for at \hat{p} er asymptotisk normalfordelt, og angiv parametrene i den asymptotiske fordeling, parametriseret ved p .

Opgave 2

2. Betragt de surjektive faktorer B og T , der antages at være usammenlignelige og geometrisk ortogonale, og deres tilhørende underrum L_B og L_T . Betragt det annoterede faktorstrukturdiagram:



- (a) Udfyld resten af det annoterede faktorstrukturdiagram i den ortogonale dekomposition.
- (b) Test den additive hypotese op mod vekselvirkningsmodellen ved brug af det annoterede faktorstrukturdiagram.
- (c) Test om der er en effekt af faktor B mod den additive hypotese ved brug af det annoterede faktorstrukturdiagram.
- (d) Test om der er en effekt af faktor T mod den additive hypotese ved brug af det annoterede faktorstrukturdiagram.
- (e) Er faktoren $B \times T$ surjektiv?
- (f) Hvor mange observationer er der i datasættet?
- (g) Hvor mange labels er der for faktoren B?
- (h) Er L_B og L_T ægte ortogonale?

Opgave 3

3. Ved en undersøgelse af virkningen af forskellige dæktyper på benzinforbruget af offentlige busser blev følgende forsøg gennemført: 2 busser, A og B , gennemkørte hver 30 gange samme rundstrækning på ca. 10 km. I hver kørsel brugte de en af tre forskellige dæktyper, K , L eller M , således at hver kombination af bus og dæktype blev testet 10 gange, og benzinforbruget i milliliter blev målt. Der var 10 chauffører til at køre de ialt 60 ture.

Data er tilgængelige i filen `benzin.txt` og består af variablene `bus`, `dæk`, `cha` og `benzin`, hvor den sidste angiver benzinforbruget.

Delopgaverne (b), (e), (f) og (g) skal løses i R, og det er nok at angive værdier fundet i output fra analyserne.

- (a) Opstil en varianskomponentmodel med en fast effekt af `bus` og en fast effekt af `dæk`, således at de indgår additivt, og en tilfældig effekt af `cha`. Alle de forklarende variable skal indgå som faktorer.
- (b) Estimer parametrene i modellen, både ved ML-princippet og ved REML-princippet.
- (c) Diskuter forskelle/ligheder i resultaterne mellem de to metoder.
- (d) Når der testes hypoteser vedrørende faste effekter med et kvotienttest, skal man så bruge ML-princippet eller REML-princippet?
- (e) Test om dæktypen påvirker benzinforbruget.
- (f) Undersøg om der er en signifikant forskel på de to bussers benzinforbrug.
- (g) I den endelige model skal du kun beholde de faste effekter, der var signifikante. Angiv estimaterne i den endelige model. Hvilken bus og dæktype vil du anbefale?