Opgave 1

Lad $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, være en reel $n \times n$ ortogonal matrix.

Vis at $\det(Q) = \pm 1$

Opgave 2

Lad $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, være en reel $n \times n$ ortogonal matrix.

Vis at Q bevarer standard indre produktet, dvs.

$$< x, y >= x^T y =< Qx, Qy >$$

Opgave 3

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Find Q således at
$$D = Q^{-1} A Q$$
er en diagonal matrix med egenværdierne for A.
2. Find en ortonormal basis for rummet udspændt af A.

Opgave 4

Antag at $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er symmetrisk og at A^{-1} eksisterer.

Vis at A^{-1} også er symmetrisk.

Opgave 5

Lad

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vis, at (v_1, v_2) er ortogonale mht. standard indre produktet $< \cdot, \cdot >$ på $\mathbb{R}^3$, altså at de er lineært uafhængige.
2. Find en vektor v_3, så (v_1, v_2, v_3) er en basis for $\mathbb{R}^3$.
3. Find en ortonormal basis (u_1, u_2, u_3) for $\mathbb{R}^3$ udfra (v_1, v_2, v_3).
4. Vis, at matricen $P = (u_1 \;\; u_2 \;\; u_3)$ er ortonormal.

Opgave 6

Lad $V = \mathbb{R}^2$, og definer afbildningen $<< \cdot, \cdot >>: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$<< \cdot, \cdot >> = 3x_1y_1 + 4x_2y_2.$$

1. Vis at $<< \cdot, \cdot >>: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ er et indre produkt.
2. Find normen af vektorerne

   $$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   mht. $<< \cdot, \cdot >>$
3. Er x og y ortogonale mht. $<< \cdot, \cdot >>$?
4. Er x og y ortogonale mht. $< \cdot, \cdot >$ (standard indre produkt)?
5. Find den 2×2 matrix B der definerer $<< \cdot, \cdot >>$, dvs. find B så

   $$< x, y >_B = x^T B y = << x, y >>$$

Opgave 7

Lad $A \in \mathbb{R}$ være en reel $n \times n$ matrix, og lad $A_{(i)}$ betegne den i'te søjle i A og A_{ij} elementet i den i'te række og j'te søjle af A.

Sandt eller falskt? (Begrund dine svar)

1. Hvis der eksisterer i, j således at $A_{(i)} = A_{(j)}$ er $\det(A) \neq 0$?
2. Gælder det altid at hvis $A_{ij} \neq 0, \forall i, j$ er $\det(A) \neq 0$?

Opgave 8

Definer mængden $V = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 2x_2\} \subset \mathbb{R}^2$. Lad $V^\perp$ betegne det *ortogonale komplement* til V, dvs.

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 | \ < x, y >= 0, \forall y \in V\}$$

Vis at $V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 = -\frac{1}{2}x_2\}$ og lav en skitse af V og $V^\perp$ i $\mathbb{R}^2$.

Opgave 9

MI opgave 19.7:

Lad $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ være en stokastisk (søjle)-vektor. Antag at X har endeligt andet moment og vis at kovarians matricen for X er givet ved

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}XX^T - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^T$$

Opgave 10

MI opgave 19.9:

Lad Σ være en symmetrisk, positiv semi-definit $n \times n$ matrix. Vis at der eksisterer en stokastisk vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ med kovarians matrix $\Sigma = \mathbb{V}X$.

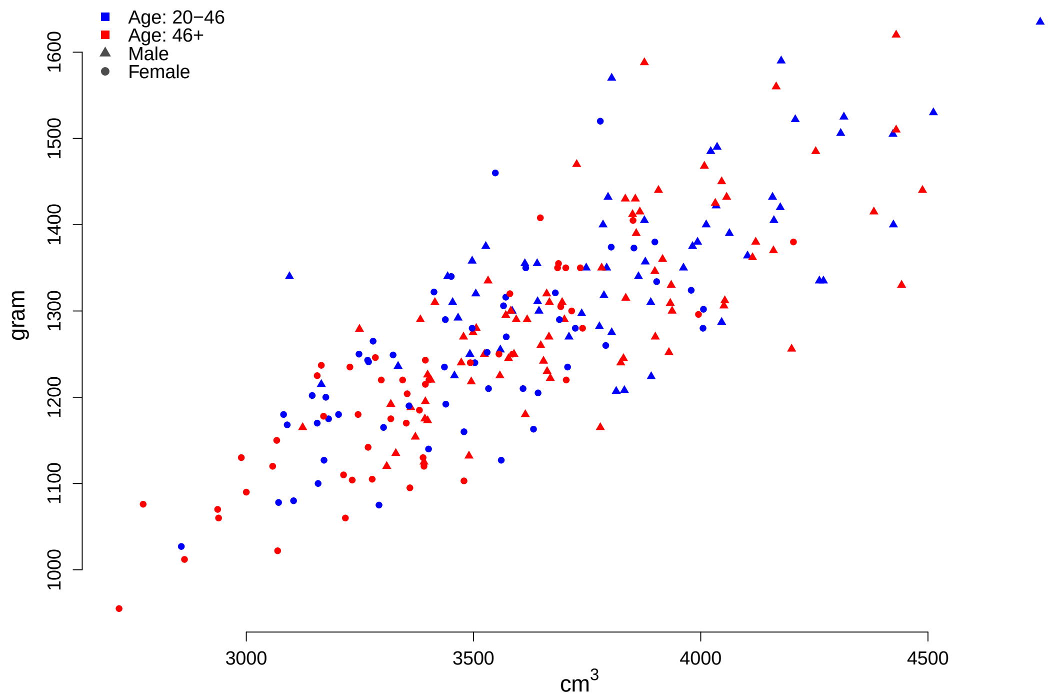
Hint: benyt spektral sætningen til at vise resultatet for en diagonal matrix.

Opgave 11

Indlæs datasættet `brainhead.txt` i `R`. De 4 variable er:

- `gender`= $\begin{cases} 1: & \text{mand} \\ 2: & \text{kvinde} \end{cases}$
- `age`= $\begin{cases} 1: & \text{aldersgruppe 20-46 år} \\ 2: & \text{aldersgruppe} >46 \text{ år} \end{cases}$
- `size`=størrelsen af personens hoved i cm^3
- `weight`=vægten af personens hjerne i gram

1. Start med at plotte data: vægt mod størrelse. Du kan evt. prøve at farve punkterne efter grupperne (se Figur 1).
2. Lav en lineær regression af vægt på størrelse. Hvad betyder koefficienterne?
3. Tegn regressions linjen ind i data plottet.
4. Prøv at lave en regression som før, men hvor du kun benytter data for hhv. mændene (`gender==1`) og kvinderne (`gender==2`). Tegn linjerne i data plottet.
5. Prøv at lave en regression som før, men hvor du kun benytter data for hhv. 20-46 årige (`age==1`) og >46 årige (`age==1`). Tegn linjerne i data plottet.



Figur 1: Data til opgave 14 plottet i grupper.

Opgave 12

Lad I_n betegne $n \times n$ enhedsmatricen, og A^T den transponerede matrix A.

Benyt `R` til følgende opgaver:

1. Lav matricen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Find $A^2 = A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 21 & -4 & 13 \\ -4 & 6 & 3 \\ 13 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

3. Find determinanten af A.

4. Find den inverse matrix A^{-1}, tjek at $A^{-1}A = I_3$.
5. Find egenværdierne til A.
6. Find B så $B^T B = A$, B kaldes også *Cholesky dekompositionen* af A.
7. Kan du finde Q og Λ så $A = Q\Lambda Q^T$, hvor Λ er en diagonal matrix og $QQ^T = I_3$?
8. Lav en ny matrix A^* udfra A, hvor en af søjlerne eller rækkerne består at 0'er.
9. Prøv om du kan invertere A^*. Tjek evt. egenværdierne af A^*.
10. Uden brug af `R`: Kan A, A^*, B antages at være variansmatricer? Hvorfor, hvorfor ikke?

Hint: der eksisterer flere funktioner i `R` *der kan lette ovenstående opgaver betydeligt...!*