Løsning af ikke-lineære ligninger

Newton's metode

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Newton's metode

For Newton's metode antager vi at f er to gange kontinuert differentiabel.

Newton's metode

For Newton's metode antager vi at f er to gange kontinuert differentiabel. Vi ønsker at løse

$$f(r) = 0$$

mht. r, og vi antager at r er et simpelt nulpunkt, i.e. $f(r) = 0$ men $f'(r) \neq 0$.

Newton's metode

For Newton's metode antager vi at f er to gange kontinuert differentiabel. Vi ønsker at løse

$$f(r) = 0$$

mht. r, og vi antager at r er et simpelt nulpunkt, i.e. $f(r) = 0$ men $f'(r) \neq 0$.
Approksimer f ved en første ordens Taylorudvikling:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Newton's metode

For Newton's metode antager vi at f er to gange kontinuert differentiabel. Vi ønsker at løse

$$f(r) = 0$$

mht. r, og vi antager at r er et simpelt nulpunkt, i.e. $f(r) = 0$ men $f'(r) \neq 0$.

Approksimer f ved en første ordens Taylorudvikling:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

Højresiden, uden o–funktionen, definerer en linie

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

som er tangenten til f i $(x_0, f(x_0))$. Dette kan let ses ved at denne linies punkter (x, y) opfylder

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Newton's metode

For Newton's metode antager vi at f er to gange kontinuert differentiabel. Vi ønsker at løse

$$f(r) = 0$$

mht. r, og vi antager at r er et simpelt nulpunkt, i.e. $f(r) = 0$ men $f'(r) \neq 0$.

Approksimer f ved en første ordens Taylorudvikling:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|).$$

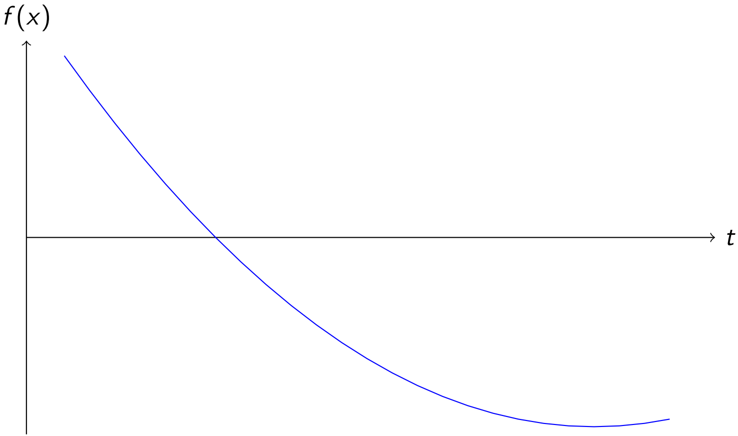
Højresiden, uden o–funktionen, definerer en linie

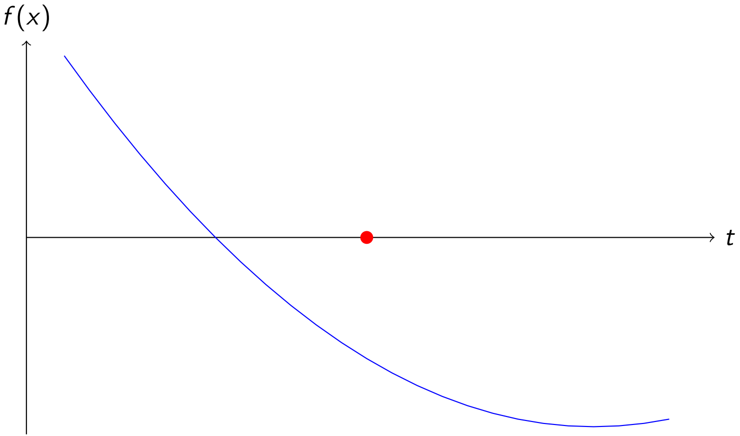
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

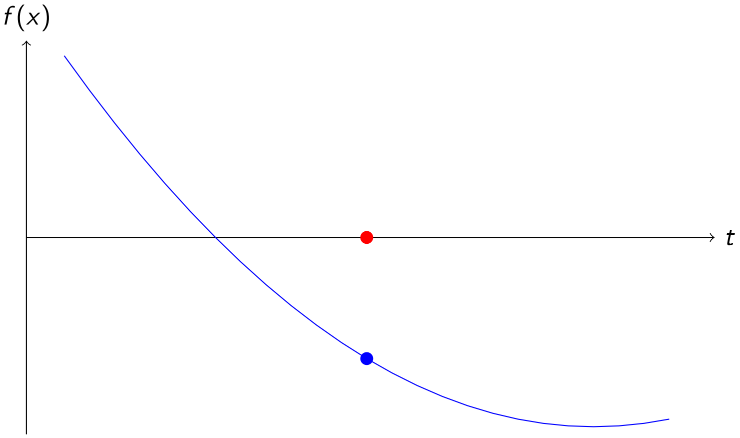
som er tangenten til f i $(x_0, f(x_0))$. Dette kan let ses ved at denne linies punkter (x, y) opfylder

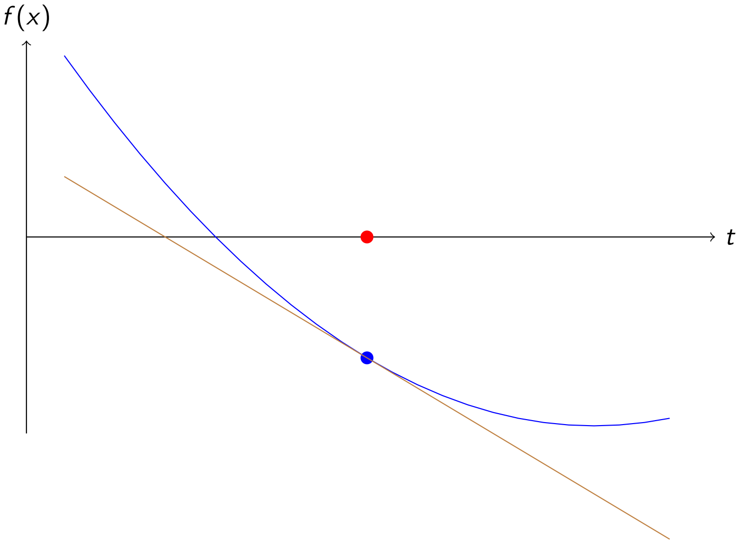
$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

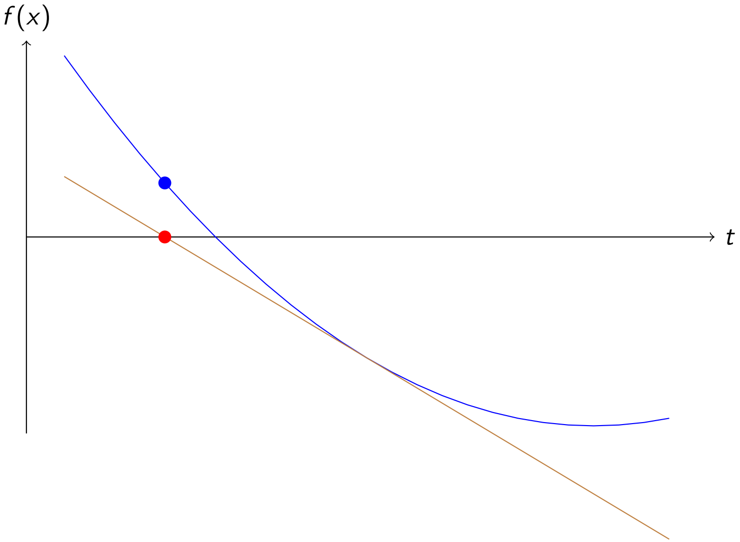
Ideen med Newton's algoritme er at find tangentens skæring med aksen, og tro på at dette er tættere på nulpunktet end det oprindelige x_0. Gentag proceduren indtil konvergens.

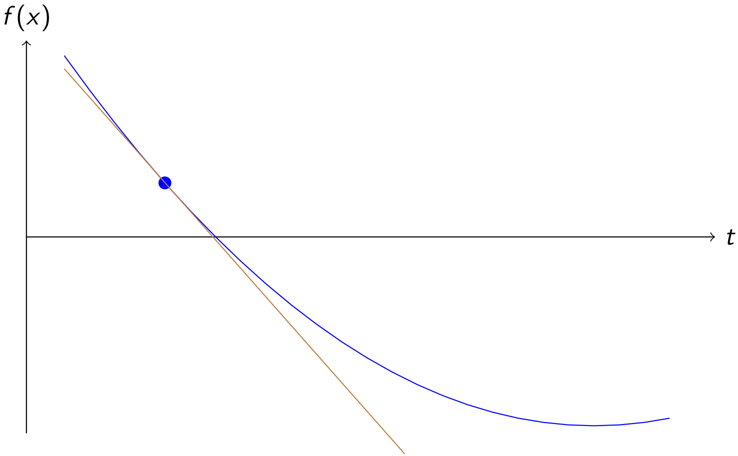

$f(x)$
t


$f(x)$
t

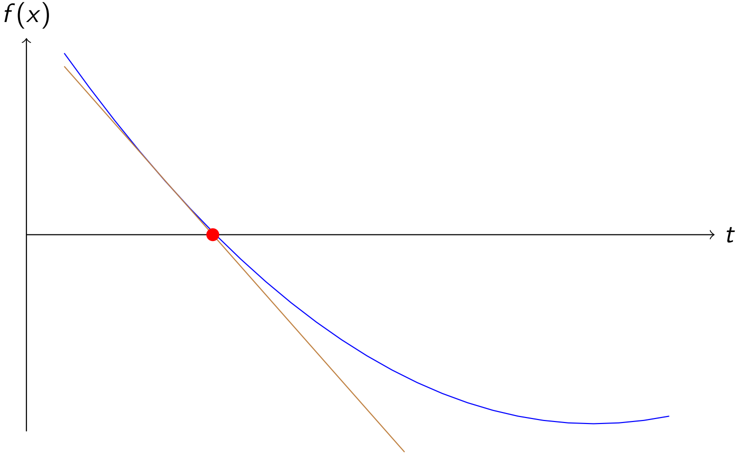

$f(x)$
t


$f(x)$
t


$f(x)$
t



$f(x)$
t


f(x)
t

Formalisering af Newton's metode

Lad r være et simpelt nultpunkt for f, i.e.

$$f(r) = 0 \quad \text{og} \quad f'(r) \neq 0.$$

Formalisering af Newton's metode

Lad r være et simpelt nultpunkt for f, i.e.

$$f(r) = 0 \quad \text{og} \quad f'(r) \neq 0.$$

Vælg x_0 "tæt på" r. Sæt $n = 0$.

Formalisering af Newton's metode

Lad r være et simpelt nultpunkt for f, i.e.

$$f(r) = 0 \quad \text{og} \quad f'(r) \neq 0.$$

Vælg x_0 "tæt på" r. Sæt $n = 0$.

Definer iterativt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Formalisering af Newton's metode

Lad r være et simpelt nultpunkt for f, i.e.

$$f(r) = 0 \quad \text{og} \quad f'(r) \neq 0.$$

Vælg x_0 "tæt på" r. Sæt $n = 0$.

Definer iterativt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Taylor udvikel $f(r)$ omkring x_n:

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(r - x_n)^2$$

for et ξ_n mellem r og x_n.

Formalisering af Newton's metode

Lad r være et simpelt nultpunkt for f, i.e.

$$f(r) = 0 \quad \text{og} \quad f'(r) \neq 0.$$

Vælg x_0 "tæt på" r. Sæt $n = 0$.

Definer iterativt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Taylor udvikel $f(r)$ omkring x_n:

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi_n)(r - x_n)^2$$

for et ξ_n mellem r og x_n.

Antag, at x_n er tilstrækkelig tæt på r så at $f'(x_n) \neq 0$. Dette formaliseres senere.

Divideres med $f'(x_n)$ fås:

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (r - x_n) + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2$$

Divideres med $f'(x_n)$ fås:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (r - x_n) + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\
&\Downarrow \\
0 &= r - x_{n+1} + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2
\end{aligned}
$$

Divideres med $f'(x_n)$ fås:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (r - x_n) + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\
&\Downarrow \\
0 &= r - x_{n+1} + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\
&\Downarrow \\
x_{n+1} - r &= \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2.
\end{aligned}
$$

Divideres med $f'(x_n)$ fås:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (r - x_n) + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\ &\Downarrow \\ 0 &= r - x_{n+1} + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\ &\Downarrow \\ x_{n+1} - r &= \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2. \end{aligned}$$

Definer

$$e_n = x_n - r.$$

Divideres med $f'(x_n)$ fås:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (r - x_n) + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\
&\Downarrow \\
0 &= r - x_{n+1} + \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2 \\
&\Downarrow \\
x_{n+1} - r &= \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}(r - x_n)^2.
\end{aligned}
$$

Definer

$$e_n = x_n - r.$$

Så er

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2. \tag{1}$$

Lad

$$C(\delta) = \frac{1}{2}\frac{\max_{|x-r|\leq\delta}|f''(x)|}{\min_{|x-r|\leq\delta}|f'(x)|}.$$

Lad
$$C(\delta) = \frac{1}{2} \frac{\max_{|x-r|\leq\delta} |f''(x)|}{\min_{|x-r|\leq\delta} |f'(x)|}.$$
Vælg δ så lille, at nævneren $\neq 0$.

Lad

$$C(\delta) = \frac{1}{2}\frac{\max_{|x-r|\leq\delta}|f''(x)|}{\min_{|x-r|\leq\delta}|f'(x)|}.$$

Vælg δ så lille, at nævneren $\neq 0$.

f', f'' er antaget kontinuerte $\implies$ f'/f'' er kontinuert, og dermed uniformt kontinuert på $|x-r| \leq \delta$.

Lad

$$C(\delta) = \frac{1}{2} \frac{\max_{|x-r|\leq\delta} |f''(x)|}{\min_{|x-r|\leq\delta} |f'(x)|}.$$

Vælg δ så lille, at nævneren $\neq 0$.

f', f'' er antaget kontinuerte $\implies$ f'/f'' er kontinuert, og dermed uniformt kontinuert på $|x-r| \leq \delta$. Derfor vil

$$C(\delta) \to \frac{1}{2} \frac{|f''(r)|}{|f'(r)|} \quad \text{når} \quad \delta \to 0$$

Lad

$$C(\delta) = \frac{1}{2} \frac{\max_{|x-r|\leq\delta} |f''(x)|}{\min_{|x-r|\leq\delta} |f'(x)|}.$$

Vælg δ så lille, at nævneren $\neq 0$.

f', f'' er antaget kontinuerte $\implies$ f'/f'' er kontinuert, og dermed uniformt kontinuert på $|x-r| \leq \delta$. Derfor vil

$$C(\delta) \to \frac{1}{2} \frac{|f''(r)|}{|f'(r)|} \quad \text{når} \quad \delta \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$C(\delta)\delta \to 0 \quad \text{når} \quad \delta \to 0.$$

Lad

$$C(\delta) = \frac{1}{2} \frac{\max_{|x-r|\leq\delta} |f''(x)|}{\min_{|x-r|\leq\delta} |f'(x)|}.$$

Vælg δ så lille, at nævneren $\neq 0$.

f', f'' er antaget kontinuerte $\implies$ f'/f'' er kontinuert, og dermed uniformt kontinuert på $|x-r| \leq \delta$. Derfor vil

$$C(\delta) \to \frac{1}{2} \frac{|f''(r)|}{|f'(r)|} \quad \text{når} \quad \delta \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$C(\delta)\delta \to 0 \quad \text{når} \quad \delta \to 0.$$

Vælg δ så lille at

$$\rho = \delta C(\delta) < 1.$$

Lad

$$C(\delta) = \frac{1}{2} \frac{\max_{|x-r|\le\delta} |f''(x)|}{\min_{|x-r|\le\delta} |f'(x)|}.$$

Vælg δ så lille, at nævneren $\neq 0$.

f', f'' er antaget kontinuerte $\implies$ f'/f'' er kontinuert, og dermed uniformt kontinuert på $|x-r| \le \delta$. Derfor vil

$$C(\delta) \to \frac{1}{2} \frac{|f''(r)|}{|f'(r)|} \quad \text{når} \quad \delta \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$C(\delta)\delta \to 0 \quad \text{når} \quad \delta \to 0.$$

Vælg δ så lille at

$$\rho = \delta C(\delta) < 1.$$

Vælg x_0 så tæt på r at

$$|e_0| = |x_0 - r| < \delta.$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2,$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2,$$

at

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2.$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2,$$

at

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2.$$

Men så

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0||e_0| \leq C(\delta)\delta|e_0| = \rho|e_0|.$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2,$$

at

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2.$$

Men så

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0||e_0| \leq C(\delta)\delta|e_0| = \rho|e_0|.$$

Antag (induktion) at

$$|e_n| \leq \rho^n|e_0|.$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} e_n^2,$$

at

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2.$$

Men så

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0||e_0| \leq C(\delta)\delta|e_0| = \rho|e_0|.$$

Antag (induktion) at

$$|e_n| \leq \rho^n|e_0|.$$

Da $\rho < 1$ så vil $|e_n| \leq |e_0| < \delta$ og derfor, ved brug af (1),

$$|e_{n+1}| \quad \leq \quad C(\delta)|e_n|^2$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2,$$

at

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2.$$

Men så

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0||e_0| \leq C(\delta)\delta|e_0| = \rho|e_0|.$$

Antag (induktion) at

$$|e_n| \leq \rho^n|e_0|.$$

Da $\rho < 1$ så vil $|e_n| \leq |e_0| < \delta$ og derfor, ved brug af (1),

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq C(\delta)|e_n|^2 \\ &= C(\delta)|e_n||e_n| \end{aligned}$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2,$$

at

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2.$$

Men så

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0||e_0| \leq C(\delta)\delta|e_0| = \rho|e_0|.$$

Antag (induktion) at

$$|e_n| \leq \rho^n|e_0|.$$

Da $\rho < 1$ så vil $|e_n| \leq |e_0| < \delta$ og derfor, ved brug af (1),

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq C(\delta)|e_n|^2 \\ &= C(\delta)|e_n||e_n| \\ &\leq C(\delta)\delta|e_n| \end{aligned}$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2,$$

at

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2.$$

Men så

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0||e_0| \leq C(\delta)\delta|e_0| = \rho|e_0|.$$

Antag (induktion) at

$$|e_n| \leq \rho^n|e_0|.$$

Da $\rho < 1$ så vil $|e_n| \leq |e_0| < \delta$ og derfor, ved brug af (1),

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq C(\delta)|e_n|^2 \\ &= C(\delta)|e_n||e_n| \\ &\leq C(\delta)\delta|e_n| \\ &= \rho|e_n| \end{aligned}$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2,$$

at

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2.$$

Men så

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0||e_0| \leq C(\delta)\delta|e_0| = \rho|e_0|.$$

Antag (induktion) at

$$|e_n| \leq \rho^n|e_0|.$$

Da $\rho < 1$ så vil $|e_n| \leq |e_0| < \delta$ og derfor, ved brug af (1),

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq C(\delta)|e_n|^2 \\ &= C(\delta)|e_n||e_n| \\ &\leq C(\delta)\delta|e_n| \\ &= \rho|e_n| \\ &\leq \rho\rho^n|e_0| \quad \text{(induktion)} \end{aligned}$$

Så får vi fra den tidligere viste formel (1),

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2,$$

at

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0|^2.$$

Men så

$$|e_1| \leq C(\delta)|e_0||e_0| \leq C(\delta)\delta|e_0| = \rho|e_0|.$$

Antag (induktion) at

$$|e_n| \leq \rho^n|e_0|.$$

Da $\rho < 1$ så vil $|e_n| \leq |e_0| < \delta$ og derfor, ved brug af (1),

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq C(\delta)|e_n|^2 \\ &= C(\delta)|e_n||e_n| \\ &\leq C(\delta)\delta|e_n| \\ &= \rho|e_n| \\ &\leq \rho\rho^n|e_0| \quad \text{(induktion)} \\ &= \rho^{n+1}|e_0|. \end{aligned}$$

Det følger, at

$$|e_n| \leq \rho^n |e_0|$$

for alle n og dermed

$$|e_n| \to 0 \quad \text{når} \quad n \to \infty.$$

Det følger, at

$$|e_n| \leq \rho^n |e_0|$$

for alle n og dermed

$$|e_n| \to 0 \quad \text{når} \quad n \to \infty.$$

Vi husker på at $e_n = x_n - r$, så dermed vil

$$x_n \to r \quad \text{når} \quad n \to \infty.$$

Praktiske detaljer om Newton's metode

- Lad

$$M = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(r)}{f'(r)}\right|$$

så må man vælge <u>et startpunkt</u> x_0 mindst så tæt på r at $|x_0 - r|M < 1$. Så vil

$$e_{n+1} \approx Me_n^2 \implies Me_{n+1} \approx (Me_n)^2 \approx \cdots \approx (Me_0)^{2^{n+1}}$$

konvergerer kvadratisk hurtigt.

Praktiske detaljer om Newton's metode

- Lad
$$M = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(r)}{f'(r)}\right|$$
så må man vælge et startpunkt x_0 mindst så tæt på r at $|x_0 - r|M < 1$. Så vil
$$e_{n+1} \approx Me_n^2 \implies Me_{n+1} \approx (Me_n)^2 \approx \cdots \approx (Me_0)^{2^{n+1}}$$
konvergerer kvadratisk hurtigt.
- Hvordan finder man et sådant x_0? Via plot, gæt eller bisektionsmetoden.

Praktiske detaljer om Newton's metode

- Lad
$$M = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(r)}{f'(r)}\right|$$
så må man vælge et startpunkt x_0 mindst så tæt på r at $|x_0 - r|M < 1$. Så vil
$$e_{n+1} \approx Me_n^2 \implies Me_{n+1} \approx (Me_n)^2 \approx \cdots \approx (Me_0)^{2^{n+1}}$$
konvergerer kvadratisk hurtigt.
- Hvordan finder man et sådant x_0? Via plot, gæt eller bisektionsmetoden.
- Hvor længe skal man iterere? Ved middelværdisætningen
$$f(x_n) = f(x_n) - f(r) = f'(\xi_n)(x_n - r) \implies x_n - r = \frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}.$$
Hvis x_n er tæt på r, så vil $f'(\xi_n) \approx f'(x_n)$ og dermed
$$x_n - r = \frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)} \approx \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1}$$

Eksempler

Vi ønsker at udregne $\sqrt{c}$ for et $c > 0$.

Eksempler

Vi ønsker at udregne $\sqrt{c}$ for et $c > 0$. Lad

$$f(x) = x^2 - c.$$

Eksempler

Vi ønsker at udregne $\sqrt{c}$ for et $c > 0$. Lad

$$f(x) = x^2 - c.$$

Så giver Newton's metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Eksempler

Vi ønsker at udregne $\sqrt{c}$ for et $c > 0$. Lad

$$f(x) = x^2 - c.$$

Så giver Newton's metode

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} \end{aligned}$$

Eksempler

Vi ønsker at udregne $\sqrt{c}$ for et $c > 0$. Lad

$$f(x) = x^2 - c.$$

Så giver Newton's metode

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} \\ &= \frac{2x_n^2 - x_n^2 + c}{2x_n} \end{aligned}$$

Eksempler

Vi ønsker at udregne $\sqrt{c}$ for et $c > 0$. Lad

$$f(x) = x^2 - c.$$

Så giver Newton's metode

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - c}{2x_n} \\ &= \frac{2x_n^2 - x_n^2 + c}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right). \end{aligned}$$

Eksempler

Udregn $\sqrt{10}$ med 8-decimalers præcision.

Eksempler

Udregn $\sqrt{10}$ med 8-decimalers præcision.
Lad $f(x) = x^2 - 3$ og $x_0 = 3$.

Eksempler

Udregn $\sqrt{10}$ med 8-decimalers præcision.
Lad $f(x) = x^2 - 3$ og $x_0 = 3$.
Så er

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{10}{x_0}\right) = 3.16666667 \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{10}{x_1}\right) = 3.16228070 \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{10}{x_2}\right) = 3.16227766 \\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{10}{x_3}\right) = 3.16227766.
\end{aligned}
$$

Eksempler

Udregn $\sqrt{10}$ med 8-decimalers præcision.
Lad $f(x) = x^2 - 3$ og $x_0 = 3$.
Så er

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{10}{x_0}\right) = 3.16666667 \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{10}{x_1}\right) = 3.16228070 \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{10}{x_2}\right) = 3.16227766 \\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{10}{x_3}\right) = 3.16227766.
\end{aligned}$$

$x_3 = x_4$ indenfor 8 decimaler.

Eksempler

Udregn $\sqrt{10}$ med 8-decimalers præcision.
Lad $f(x) = x^2 - 3$ og $x_0 = 3$.
Så er

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{10}{x_0}\right) = 3.16666667 \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{10}{x_1}\right) = 3.16228070 \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{10}{x_2}\right) = 3.16227766 \\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{10}{x_3}\right) = 3.16227766.
\end{aligned}
$$

$x_3 = x_4$ indenfor 8 decimaler.
Lad $a = 3.16227766 - 10^{-8} = 3.16227765$ og $b = 3.16227766 + 10^{-8} = 3.16227767$. Så er $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$.

Eksempler

Udregn $\sqrt{10}$ med 8-decimalers præcision.
Lad $f(x) = x^2 - 3$ og $x_0 = 3$.
Så er

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{10}{x_0}\right) = 3.16666667 \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{10}{x_1}\right) = 3.16228070 \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{10}{x_2}\right) = 3.16227766 \\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(x_3 + \frac{10}{x_3}\right) = 3.16227766.
\end{aligned}
$$

$x_3 = x_4$ indenfor 8 decimaler.
Lad $a = 3.16227766 - 10^{-8} = 3.16227765$ og $b = 3.16227766 + 10^{-8} = 3.16227767$. Så er $f(a) < 0$ og $f(b) > 0$. Derfor må løsningen ($\sqrt{10}$) ligge mellem a og b, men så må $\sqrt{10}$ nødvendigvis stemme overens på disse 8 decimaler.

Eksempler

I tidlige computere var division med et tal a/b løst ved $a * 1/b$, hvor $1/b$ blev udregnet ved Newton's metode:

Eksempler

I tidlige computere var division med et tal a/b løst ved $a * 1/b$, hvor $1/b$ blev udregnet ved Newton's metode: Lad

$$f(x) = b - \frac{1}{x}.$$

Eksempler

I tidlige computere var division med et tal a/b løst ved $a * 1/b$, hvor $1/b$ blev udregnet ved Newton's metode: Lad

$$f(x) = b - \frac{1}{x}.$$

Så er

$$x_{n+1} \quad = \quad x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Eksempler

I tidlige computere var division med et tal a/b løst ved $a * 1/b$, hvor $1/b$ blev udregnet ved Newton's metode: Lad

$$f(x) = b - \frac{1}{x}.$$

Så er

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{b - 1/x_n}{1/x_n^2} \end{aligned}$$

Eksempler

I tidlige computere var division med et tal a/b løst ved $a * 1/b$, hvor $1/b$ blev udregnet ved Newton's metode: Lad

$$f(x) = b - \frac{1}{x}.$$

Så er

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{b - 1/x_n}{1/x_n^2} \\ &= x_n - bx_n^2 + x_n \end{aligned}$$

Eksempler

I tidlige computere var division med et tal a/b løst ved $a * 1/b$, hvor $1/b$ blev udregnet ved Newton's metode: Lad

$$f(x) = b - \frac{1}{x}.$$

Så er

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{b - 1/x_n}{1/x_n^2} \\ &= x_n - bx_n^2 + x_n \\ &= x_n(2 - bx_n). \end{aligned}$$

Eksempler

I tidlige computere var division med et tal a/b løst ved $a * 1/b$, hvor $1/b$ blev udregnet ved Newton's metode: Lad

$$f(x) = b - \frac{1}{x}.$$

Så er

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{b - 1/x_n}{1/x_n^2} \\ &= x_n - bx_n^2 + x_n \\ &= x_n(2 - bx_n). \end{aligned}$$

Et sidste eksempel på at Newton's metode ikke altid konvergerer: Lad

$$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2.$$

Newton's metode med $x_0 = 1$ giver $x_n = (-1)^n$.

Opsummering af Newton's metode

- f skal være to gange kontinuert differentiabel.

Opsummering af Newton's metode

- f skal være to gange kontinuert differentiabel.
- $f'(r) \neq 0$, simple (i første omgang).

Opsummering af Newton's metode

- f skal være to gange kontinuert differentiabel.
- $f'(r) \neq 0$, simple (i første omgang).
- Roden skal lokaliseres ret præcist for at garantere konvergens, med mindre f er konveks.

Opsummering af Newton's metode

- f skal være to gange kontinuert differentiabel.
- $f'(r) \neq 0$, simple (i første omgang).
- Roden skal lokaliseres ret præcist for at garantere konvergens, med mindre f er konveks.
- Konvergenshastighed er kvadratisk hurtigt.