Numerisk integration

Integration via interpolation

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Numerisk integration

- I utallige situationer i anvendt matematik har man brug for at udregne integraler
$$\int_a^b f(x)dx$$
for en givet funktion f.

Numerisk integration

- I utallige situationer i anvendt matematik har man brug for at udregne integraler

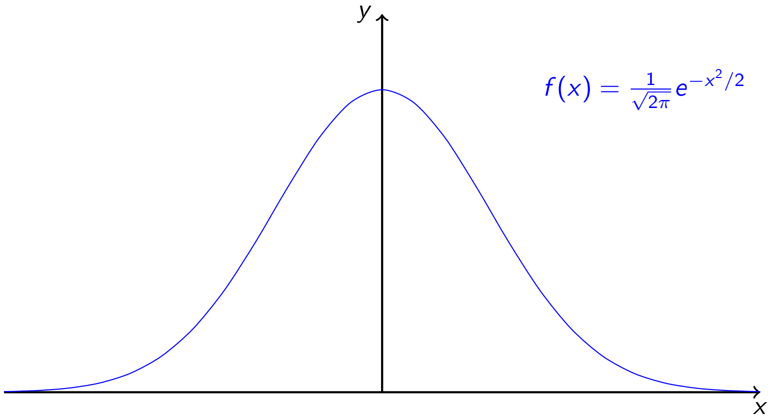
$$\int_a^b f(x)dx$$

  for en givet funktion f.
- I mange tilfælde er stamfunktionen ikke kendt.

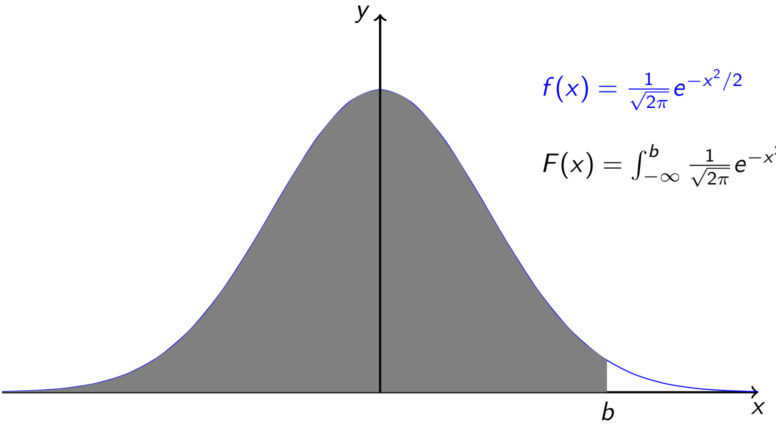
Numerisk integration

- I utallige situationer i anvendt matematik har man brug for at udregne integraler
$$\int_a^b f(x)dx$$
for en givet funktion f.
- I mange tilfælde er stamfunktionen ikke kendt.
- Hvis $f(x)$ kan evalueres i punkter x (det er ikke altid tilfældet!) så kan man bruge en diskretiserting af $[a, b]$ med polynomiel interpolation mellem punkterne, og tilnærme integralet ved til tilsvarende "nemme" integral af interpolationspolynomiet over $[a, b]$.

Eksempel: normalfordelingen



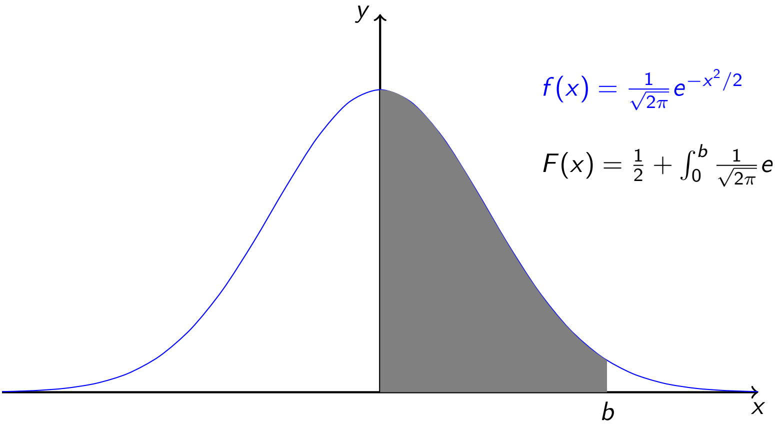
Eksempel: normalfordelingen



$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

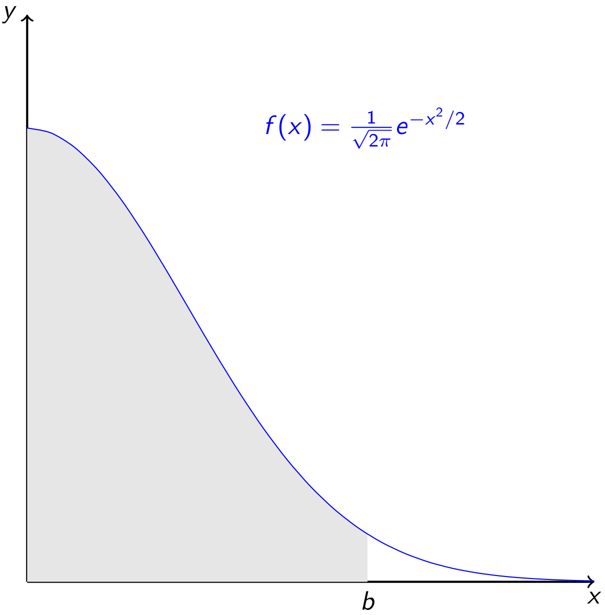
$F(x) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

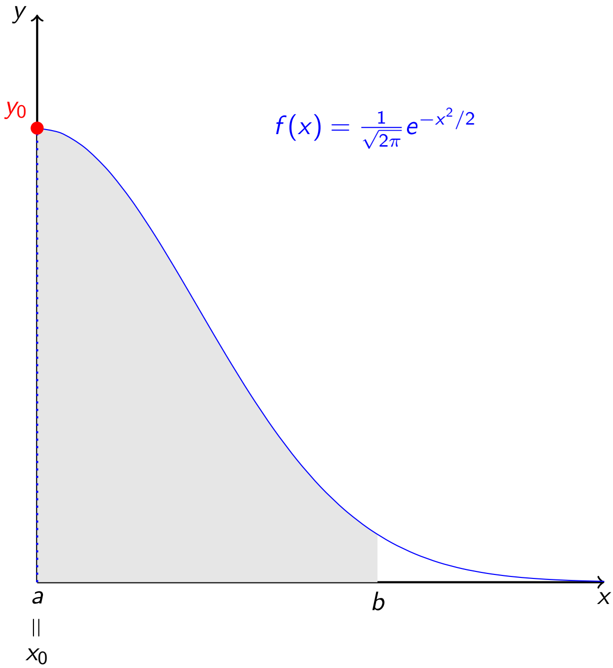
Eksempel: normalfordelingen



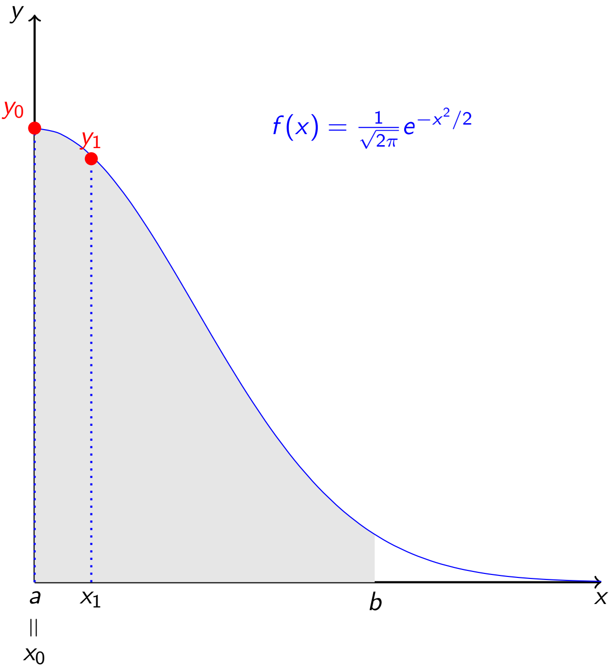
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

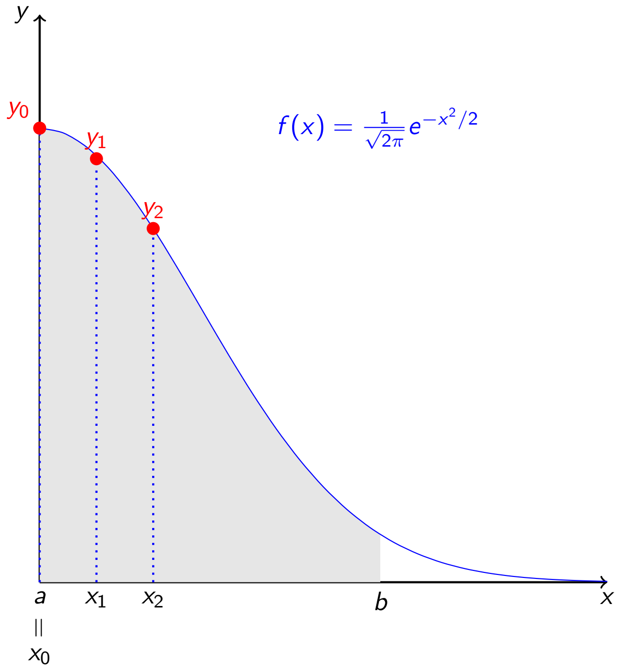

y
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
b
x



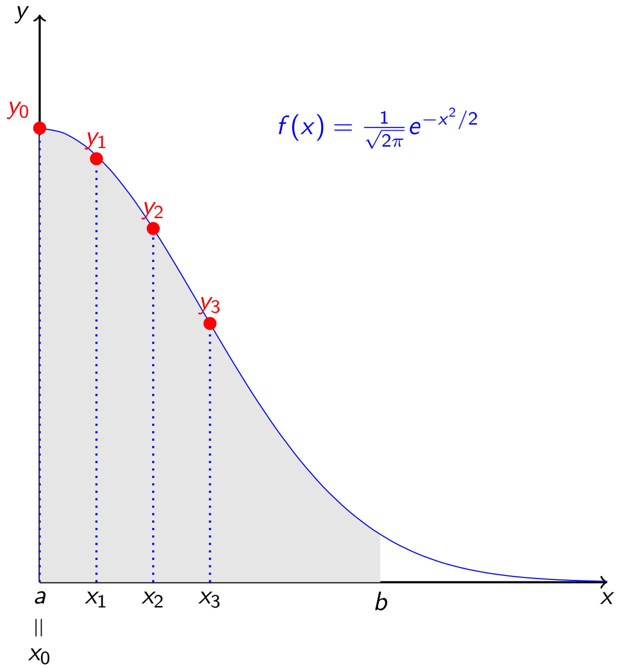
y
y_0
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
a
$||$
x_0
b
x



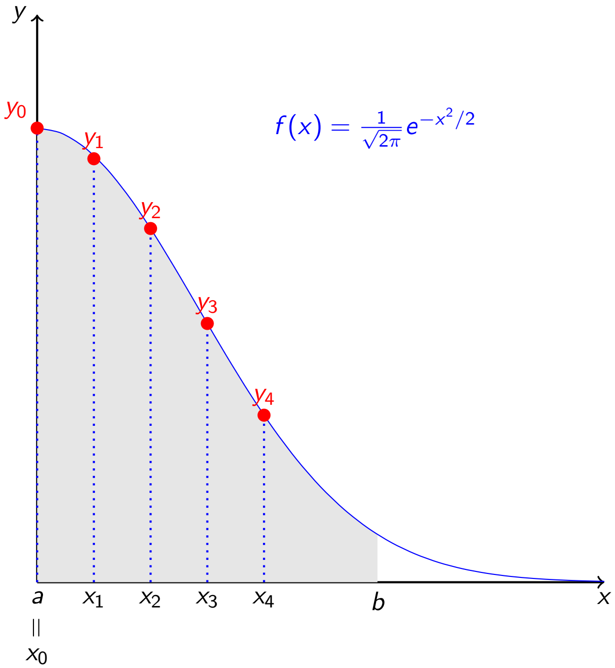
y
y_0
y_1
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
a
||
x_0
x_1
b
x

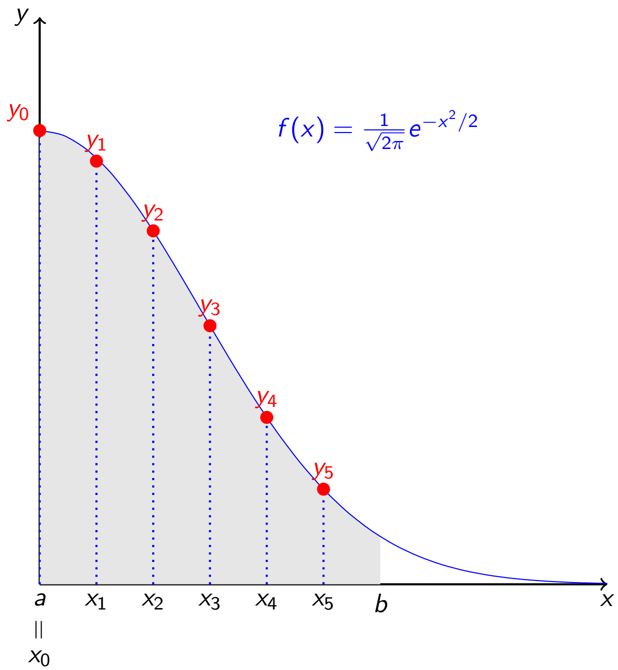


y
y_0
y_1
y_2
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
a
$||$
x_0
x_1
x_2
b
x

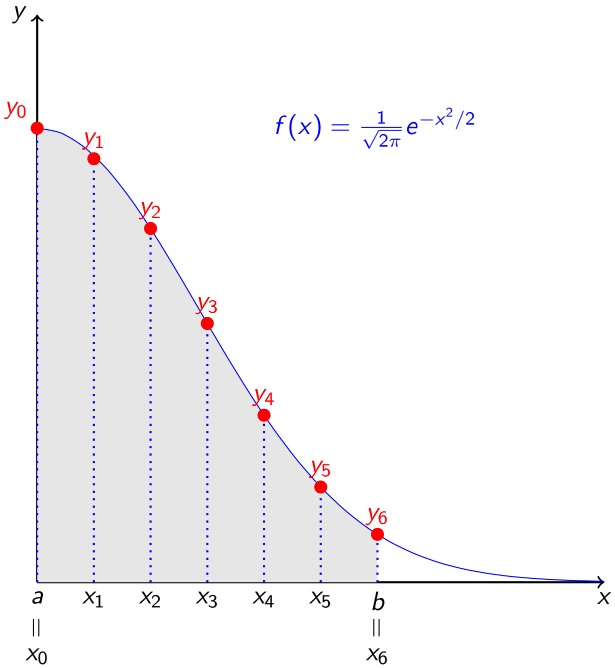


y
y_0
y_1
y_2
y_3
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
a
||
x_0
x_1
x_2
x_3
b
x

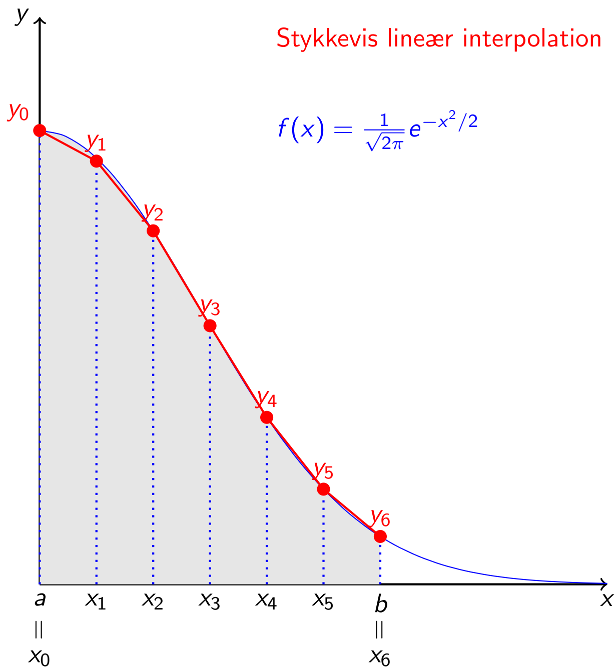

y
y_0
y_1
y_2
y_3
y_4
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
a
x_1
x_2
x_3
x_4
b
x
$||$
x_0



y
y_0
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
a
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
b
x
$||$
x_0

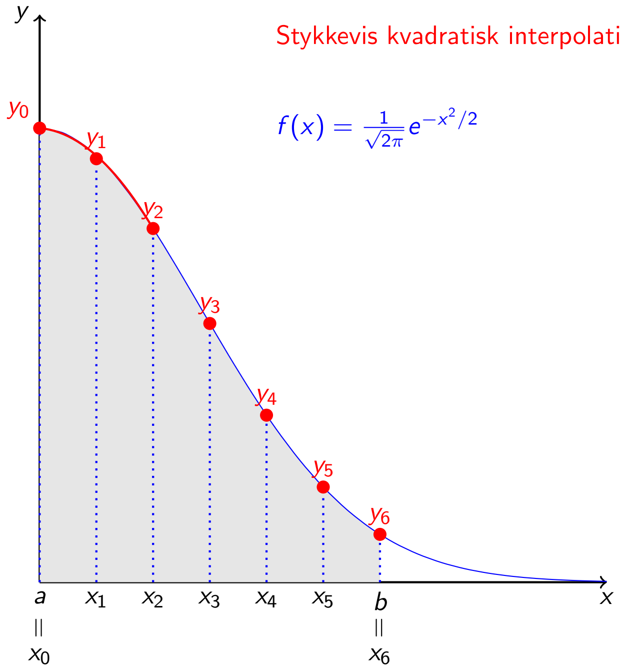


y
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
y_0
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6
a
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
b
x
$\parallel$
x_0
$\parallel$
x_6


Stykkevis lineær interpolation
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
y
y_0
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6
a
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
b
x
x_0
x_6

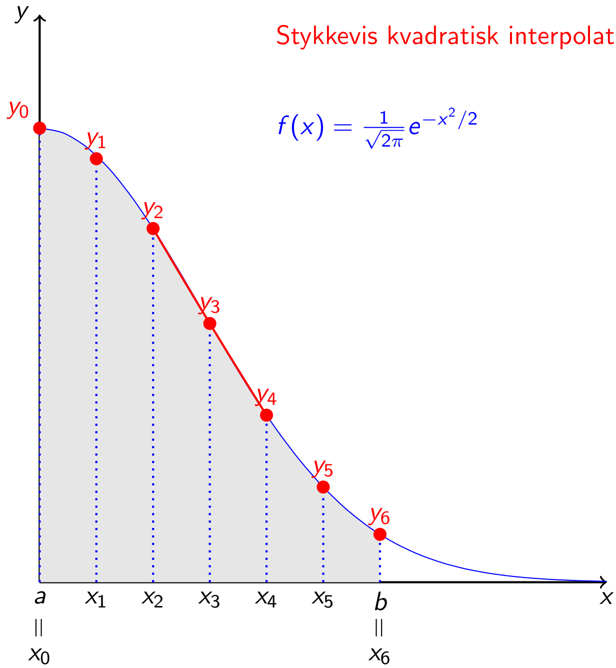
Stykkevis kvadratisk interpolation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

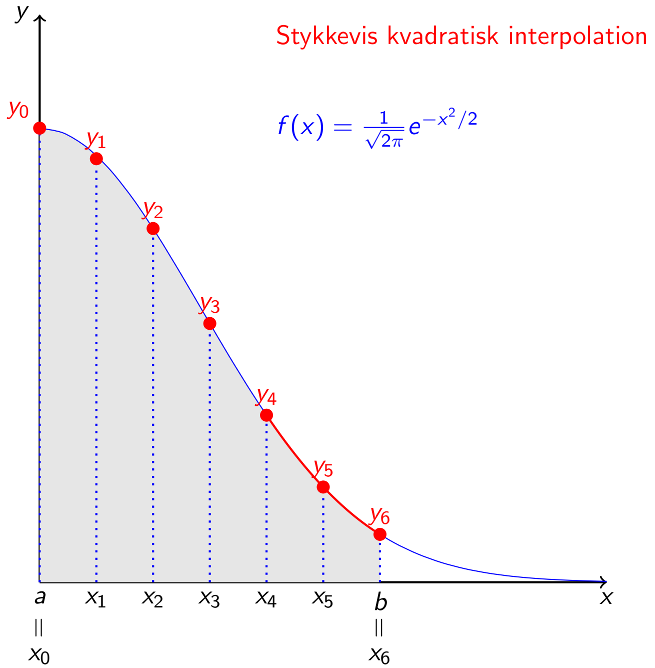


Stykkevis kvadratisk interpolation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

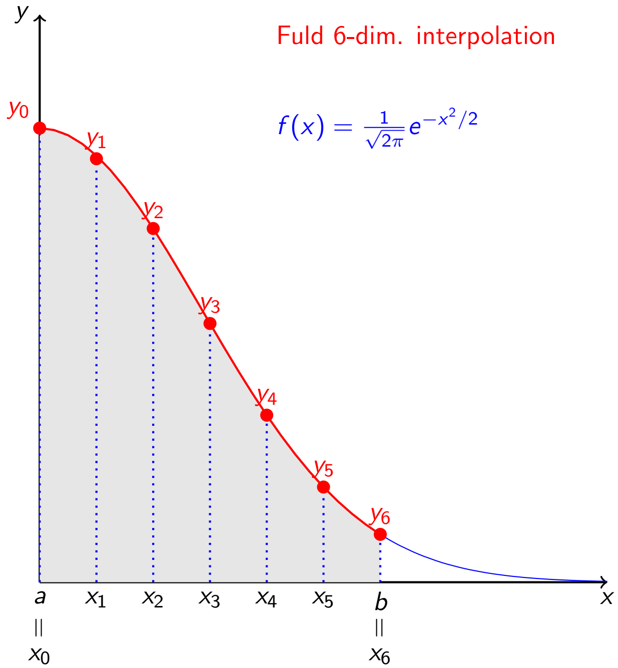


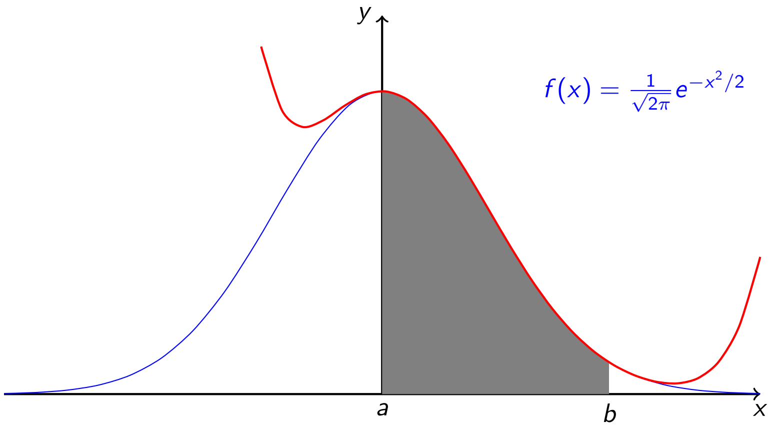
Stykkevis kvadratisk interpolation



Fuld 6-dim. interpolation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$




y
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$
a
b
x

Antag, at $y_i = f(x_i)$ er kendt i punkterne $x_0, ..., x_n$.

Antag, at $y_i = f(x_i)$ er kendt i punkterne $x_0, ..., x_n$. Interpolationspolynomiet kan så skrives på Lagrange form

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x).$$

Antag, at $y_i = f(x_i)$ er kendt i punkterne $x_0, ..., x_n$. Interpolationspolynomiet kan så skrives på Lagrange form

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x).$$

Så er

$$\int_a^b f(x)dx \quad \approx \quad \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx.$$

Antag, at $y_i = f(x_i)$ er kendt i punkterne $x_0, ..., x_n$. Interpolationspolynomiet kan så skrives på Lagrange form

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x).$$

Så er

$$\int_a^b f(x)dx \quad \approx \quad \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx.$$

Denne formel kan således anvendes på virkårlige funktioner med samme diskretisation $x_0, ..., x_n$.

Antag, at $y_i = f(x_i)$ er kendt i punkterne $x_0, ..., x_n$. Interpolationspolynomiet kan så skrives på Lagrange form

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x).$$

Så er

$$\int_a^b f(x)dx \quad \approx \quad \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx.$$

Denne formel kan således anvendes på virkårlige funktioner med samme diskretisation $x_0, ..., x_n$.Alt der kræves er udregning af er

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)dx, \quad i = 0, 1, ..., n$$

idet så

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i.$$

Antag, at $y_i = f(x_i)$ er kendt i punkterne $x_0, ..., x_n$. Interpolationspolynomiet kan så skrives på Lagrange form

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x).$$

Så er

$$\int_a^b f(x)dx \quad \approx \quad \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \ell_i(x)dx.$$

Denne formel kan således anvendes på virkårlige funktioner med samme diskretisation $x_0, ..., x_n$.Alt der kræves er udregning af er

$$A_i = \int_a^b \ell_i(x)dx, \quad i = 0, 1, ..., n$$

idet så

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i.$$

Denne kaldes for **Newton–Cotes formel**, hvis alle $|x_{i+1} - x_i| = h$, $i = 0, ..., n-1$, i.e. inddelingen er ækvidistant.

Idet det ikke er smart at approximere med polynomier over mange punkter, tænker vi på de generiske $a < b$ som være tætte punkter.

Idet det ikke er smart at approximere med polynomier over mange punkter, tænker vi på de generiske $a < b$ som være tætte punkter.

Hvis vi e.g. skal approximere integralet over et længere interval, inddeles dette interval i delintervaller, for for hvert lille delinterval approksimerer vi så med polynomiel interpolation. Disse kaldes så komposite eller sammensatte regler/metoder.

Idet det ikke er smart at approximere med polynomier over mange punkter, tænker vi på de generiske $a < b$ som være tætte punkter.

Hvis vi e.g. skal approximere integralet over et længere interval, inddeles dette interval i delintervaller, for for hvert lille delinterval approksimerer vi så med polynomiel interpolation. Disse kaldes så komposite eller sammensatte regler/metoder.

En række prominente specialtilfælde:

Idet det ikke er smart at approximere med polynomier over mange punkter, tænker vi på de generiske $a < b$ som være tætte punkter.

Hvis vi e.g. skal approximere integralet over et længere interval, inddeles dette interval i delintervaller, for for hvert lille delinterval approksimerer vi så med polynomiel interpolation. Disse kaldes så komposite eller sammensatte regler/metoder.

En række prominente specialtilfælde:

Idet det ikke er smart at approximere med polynomier over mange punkter, tænker vi på de generiske $a < b$ som være tætte punkter.

Hvis vi e.g. skal approximere integralet over et længere interval, inddeles dette interval i delintervaller, for for hvert lille delinterval approksimerer vi så med polynomiel interpolation. Disse kaldes så komposite eller sammensatte regler/metoder.

En række prominente specialtilfælde:

1. Trapez formlen. Her er $n = 1$, så $a = x_0$ og $b = x_1$ og der anvendes en lineær interpolation.

Idet det ikke er smart at approximere med polynomier over mange punkter, tænker vi på de generiske $a < b$ som være tætte punkter.

Hvis vi e.g. skal approximere integralet over et længere interval, inddeles dette interval i delintervaller, for for hvert lille delinterval approksimerer vi så med polynomiel interpolation. Disse kaldes så komposite eller sammensatte regler/metoder.

En række prominente specialtilfælde:

1. Trapez formlen. Her er $n = 1$, så $a = x_0$ og $b = x_1$ og der anvendes en lineær interpolation.
2. Simpson's $1/3$ metode. Her er $n = 2$, med $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$ og $x_3 = b$.

Idet det ikke er smart at approximere med polynomier over mange punkter, tænker vi på de generiske $a < b$ som være tætte punkter.

Hvis vi e.g. skal approximere integralet over et længere interval, inddeles dette interval i delintervaller, for for hvert lille delinterval approksimerer vi så med polynomiel interpolation. Disse kaldes så komposite eller sammensatte regler/metoder.

En række prominente specialtilfælde:

1. Trapez formlen. Her er $n = 1$, så $a = x_0$ og $b = x_1$ og der anvendes en lineær interpolation.
2. Simpson's 1/3 metode. Her er $n = 2$, med $x_0 = a$, $x_1 = (a + b)/2$ og $x_3 = b$.
3. Simpson's 3/8 metode. Her er $n = 3$ med $x_0 = a$, $x_1 = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$, $x_2 = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$, $x_3 = b$.

Trapez metoden

Her er $n = 1$, $x_0 = a$ og $x_1 = b$.

Trapez metoden

Her er $n = 1$, $x_0 = a$ og $x_1 = b$. Så er

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{b - x}{b - a} \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a} \end{aligned}$$

og

$$p(x) = \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

Trapez metoden

Her er $n = 1$, $x_0 = a$ og $x_1 = b$. Så er

$$\begin{aligned}\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{b - x}{b - a}\\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a}\end{aligned}$$

og

$$p(x) = \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

Så er

$$A_0 = \int_a^b \ell_0(x) dx$$

Trapez metoden

Her er $n = 1$, $x_0 = a$ og $x_1 = b$. Så er

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{b - x}{b - a} \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a} \end{aligned}$$

og

$$p(x) = \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

Så er

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_a^b \ell_0(x) dx \\ &= \frac{1}{b - a} \int_a^b (b - x) dx \end{aligned}$$

Trapez metoden

Her er $n = 1$, $x_0 = a$ og $x_1 = b$. Så er

$$\begin{aligned}\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{b - x}{b - a} \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a}\end{aligned}$$

og

$$p(x) = \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

Så er

$$\begin{aligned}A_0 &= \int_a^b \ell_0(x) dx \\ &= \frac{1}{b - a} \int_a^b (b - x) dx \\ &= \frac{1}{b - a} \int_0^{b-a} y dy\end{aligned}$$

Trapez metoden

Her er $n = 1$, $x_0 = a$ og $x_1 = b$. Så er

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{b - x}{b - a} \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a} \end{aligned}$$

og

$$p(x) = \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

Så er

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_a^b \ell_0(x) dx \\ &= \frac{1}{b - a} \int_a^b (b - x) dx \\ &= \frac{1}{b - a} \int_0^{b-a} y dy \\ &= \frac{b - a}{2}. \end{aligned}$$

Trapez formlen

Da $\ell_0(x) + \ell_1(x) = 1$ (interpoler konstantfunktionen 1 !) så er

$$A_1 = \int_a^b (1 - \ell_0(x))dx = (b-a) - \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

Trapez formlen

Da $\ell_0(x) + \ell_1(x) = 1$ (interpoler konstantfunktionen 1 !) så er

$$A_1 = \int_a^b (1 - \ell_0(x))dx = (b-a) - \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

Newton–Cotes formel giver dermed den såkaldte trapez formel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Trapez formlen

Da $\ell_0(x) + \ell_1(x) = 1$ (interpoler konstantfunktionen 1 !) så er

$$A_1 = \int_a^b (1 - \ell_0(x))dx = (b-a) - \frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

Newton–Cotes formel giver dermed den såkaldte trapez formel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)A_i = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).$$

Denne udledes intuitivt snarere som

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a),$$

som arealet af et trapez.

Fejl på Trapezformlen

Fejlen ved polynomiel interpolation i punktet x ved vi er

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$$

for et $\xi \in (a, b)$.

Fejl på Trapezformlen

Fejlen ved polynomiel interpolation i punktet x ved vi er

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$$

for et $\xi \in (a, b)$.
Men så er fejlen

$$E = \int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Fejl på Trapezformlen

Fejlen ved polynomiel interpolation i punktet x ved vi er

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$$

for et $\xi \in (a, b)$.
Men så er fejlen

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \\ &= \int_a^b (f(x) - p(x))dx \end{aligned}$$

Fejl på Trapezformlen

Fejlen ved polynomiel interpolation i punktet x ved vi er

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$$

for et $\xi \in (a, b)$.
Men så er fejlen

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \\ &= \int_a^b (f(x) - p(x))dx \\ &= \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx \end{aligned}$$

Fejl på Trapezformlen

Fejlen ved polynomiel interpolation i punktet x ved vi er

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$$

for et $\xi \in (a, b)$.
Men så er fejlen

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \\ &= \int_a^b (f(x) - p(x))dx \\ &= \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx \\ &= \frac{f''(\xi)}{2}\frac{(a-b)^3}{6} \end{aligned}$$

Fejl på Trapezformlen

Fejlen ved polynomiel interpolation i punktet x ved vi er

$$f(x) - p(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$$

for et $\xi \in (a, b)$.
Men så er fejlen

$$\begin{aligned}
E &= \int_a^b f(x)dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \\
&= \int_a^b (f(x) - p(x))dx \\
&= \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx \\
&= \frac{f''(\xi)}{2}\frac{(a-b)^3}{6} \\
&= -f''(\xi)\frac{h^3}{12}
\end{aligned}$$

med $h = b - a$.

Sammensat trapez formel

Her har vi inddelt intervallet $[a, b]$ i

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

og hvor trapez reglen bruges på hvert af intervallerne $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, i.e.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(f(x_i) + f(x_{i-1})).$$

Sammensat trapez formel

Her har vi inddelt intervallet $[a, b]$ i

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

og hvor trapez reglen bruges på hvert af intervallerne $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, i.e.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(f(x_i) + f(x_{i-1})).$$

Hvis inddelingen er uniform (equidistant) med

$$h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, ..., n-1,$$

Sammensat trapez formel

Her har vi inddelt intervallet $[a, b]$ i

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

og hvor trapez reglen bruges på hvert af intervallerne $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, i.e.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(f(x_i) + f(x_{i-1})).$$

Hvis inddelingen er uniform (equidistant) med

$$h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, ..., n-1,$$

så er

$$\int_a^b f(x)dx \quad \approx \quad \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) + f(x_{i-1}))$$

Sammensat trapez formel

Her har vi inddelt intervallet $[a, b]$ i

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

og hvor trapez reglen bruges på hvert af intervallerne $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$, i.e.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(f(x_i) + f(x_{i-1})).$$

Hvis inddelingen er uniform (equidistant) med

$$h = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, ..., n-1,$$

så er

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) + f(x_{i-1})) \\ &= \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right) \end{aligned}$$

Fejl på sammensat Trapez formel

Fejlen udregnes her ved at summere fejlene op fra de enkelte intervaller,

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i$$

Fejl på sammensat Trapez formel

Fejlen udregnes her ved at summere fejlene op fra de enkelte intervaller,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} E_i \\ &= -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i), \end{aligned}$$

hvor $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$.

Fejl på sammensat Trapez formel

Fejlen udregnes her ved at summere fejlene op fra de enkelte intervaller,

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{i=1}^{n} E_i \\
&= -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i),
\end{aligned}
$$

hvor $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$. Lad

$$
\bar{f}'' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i).
$$

Fejl på sammensat Trapez formel

Fejlen udregnes her ved at summere fejlene op fra de enkelte intervaller,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} E_i \\ &= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i), \end{aligned}$$

hvor $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$. Lad

$$\bar{f}'' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i).$$

Hvis $f''(x)$ er kontinuert, så findes der et $\xi \in (a, b)$ så at

$$f''(\xi) = \bar{f}'',$$

Fejl på sammensat Trapez formel

Fejlen udregnes her ved at summere fejlene op fra de enkelte intervaller,

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n} E_i \\ &= -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i), \end{aligned}$$

hvor $\xi \in (x_{i-1}, x_i)$. Lad

$$\bar{f}'' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i).$$

Hvis $f''(x)$ er kontinuert, så findes der et $\xi \in (a, b)$ så at

$$f''(\xi) = \bar{f}'',$$

og dermed

$$E = -\frac{h^3}{12} n f''(\xi) = -\frac{h^3}{12}\frac{b-a}{h} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi),$$

da $h = (b-a)/n$.