Løsning af ikke-lineære ligninger

Sekantmetoden

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Sekantmetoden

- Vi leder efter en rod r til f, i.e. $f(r) = 0$.

Sekantmetoden

- Vi leder efter en rod r til f, i.e. $f(r) = 0$.
- Newton's metode kræver evaluering af en afledet. Kan være bekosteligt, svært eller uhensigtsmæssigt.

Sekantmetoden

- Vi leder efter en rod r til f, i.e. $f(r) = 0$.
- Newton's metode kræver evaluering af en afledet. Kan være bekosteligt, svært eller uhensigtsmæssigt.
- Ide: udskift afledet med linien gemmen to på hinanden følgende punkter $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ og $(x_n, f(x_n))$.

Sekantmetoden

- Vi leder efter en rod r til f, i.e. $f(r) = 0$.
- Newton's metode kræver evaluering af en afledet. Kan være bekosteligt, svært eller uhensigtsmæssigt.
- Ide: udskift afledet med linien gemmen to på hinanden følgende punkter $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ og $(x_n, f(x_n))$.
- Metoden kræver to startop punkter: x_0 and x_1.

Sekantmetoden

- Vi leder efter en rod r til f, i.e. $f(r) = 0$.
- Newton's metode kræver evaluering af en afledet. Kan være bekosteligt, svært eller uhensigtsmæssigt.
- Ide: udskift afledet med linien gemmen to på hinanden følgende punkter $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ og $(x_n, f(x_n))$.
- Metoden kræver to startop punkter: x_0 and x_1.

Linien (sekanten) gennem $(x_0, f(x_0))$ og $(x_1, f(x_1))$ er givet ved

$$\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_1}$$

$$\Downarrow$$

$$y = f(x_1) + (x - x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_1}.$$

Sekanten krydser x–aksen i

$$0 = f(x_1) + (x - x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Downarrow$$

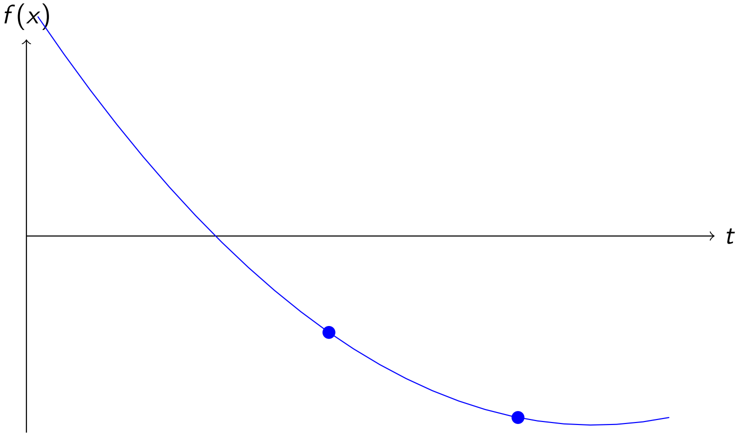
$$x = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

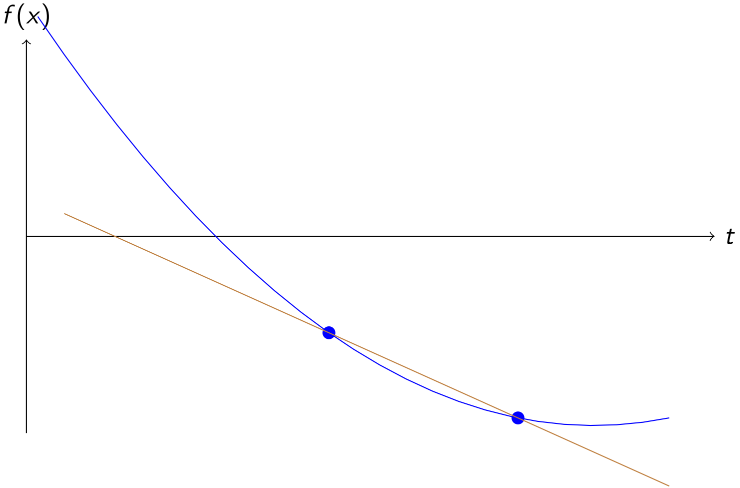
We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



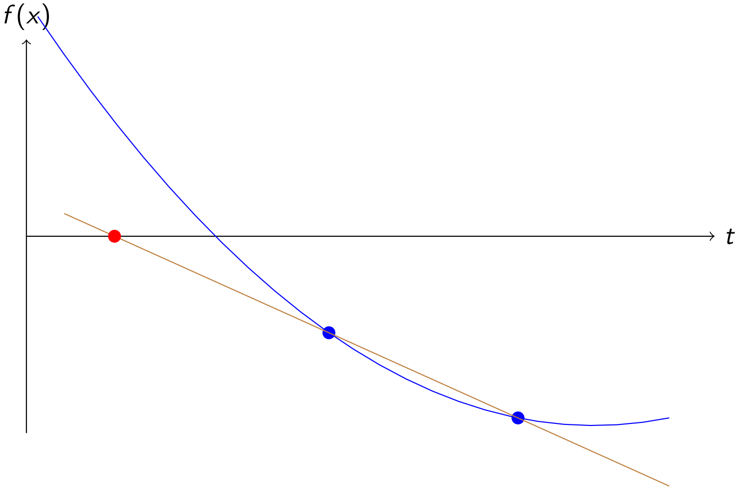
We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



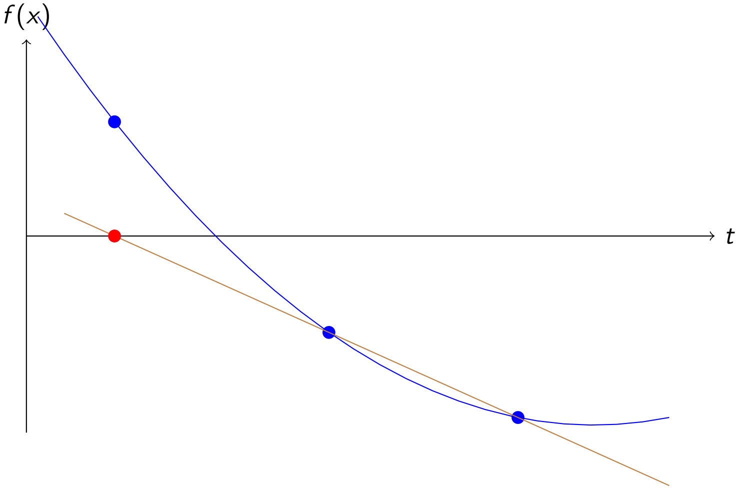
We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



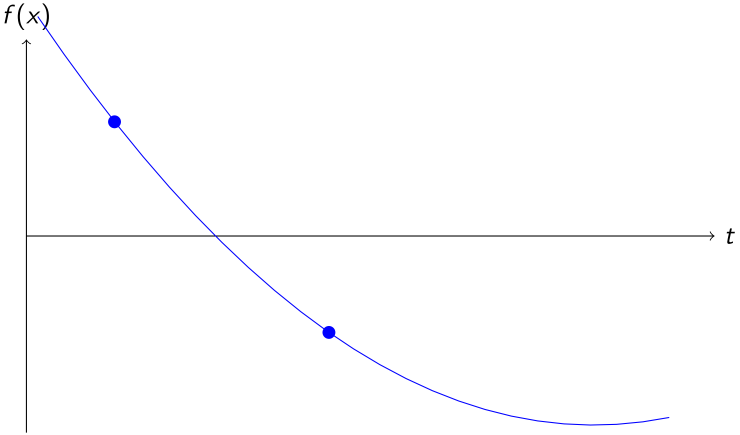
We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



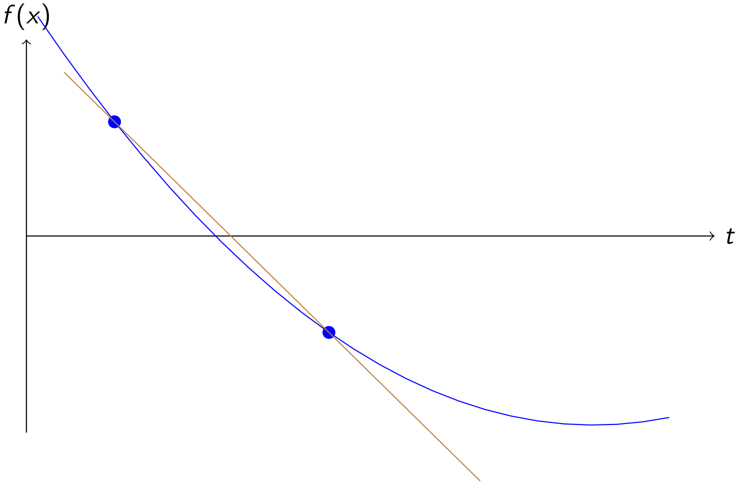
We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



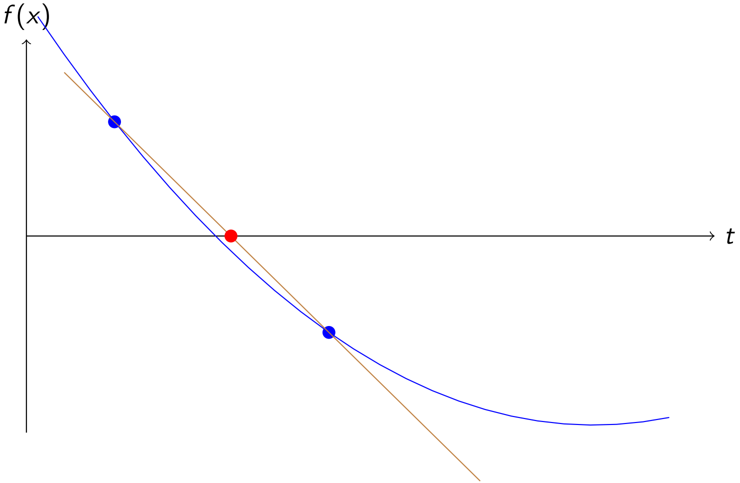
We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



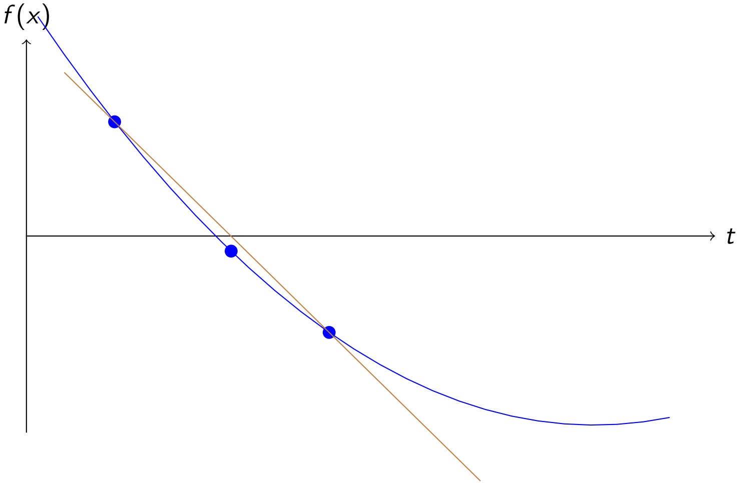
We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



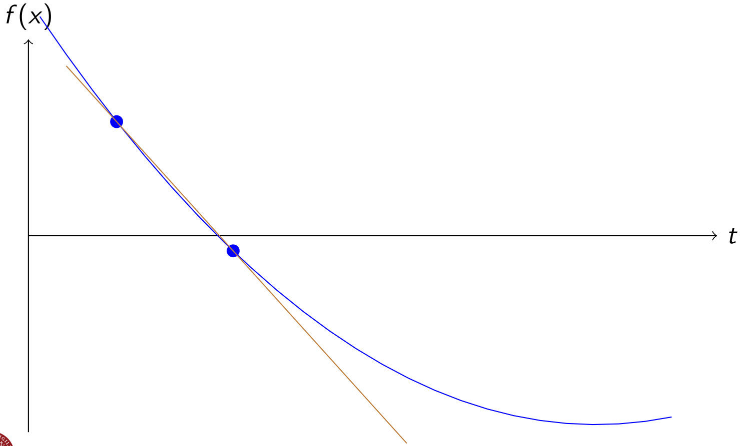
We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



We definerer derfor

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$



Fejlanalyse

Lad

$$e_n = x_n - r, \quad \text{i.e.} \quad x_n = r + e_n.$$

Fejlanalyse

Lad

$$e_n = x_n - r, \quad \text{i.e.} \quad x_n = r + e_n.$$

Så er

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Fejlanalyse

Lad

$$e_n = x_n - r, \quad \text{i.e.} \quad x_n = r + e_n.$$

Så er

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$r + e_{n+1} = r + e_n - f(r + e_n)\frac{r + e_n - r - e_{n-1}}{f(r + e_n) - f(r + e_{n-1})}$$

Fejlanalyse

Lad

$$e_n = x_n - r, \quad \text{i.e.} \quad x_n = r + e_n.$$

Så er

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$r + e_{n+1} = r + e_n - f(r + e_n)\frac{r + e_n - r - e_{n-1}}{f(r + e_n) - f(r + e_{n-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$e_{n+1} = e_n - f(r + e_n)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(r + e_n) - f(r + e_{n-1})}$$

Fejlanalyse

Lad

$$e_n = x_n - r, \quad \text{i.e.} \quad x_n = r + e_n.$$

Så er

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$r + e_{n+1} = r + e_n - f(r+e_n)\frac{r + e_n - r - e_{n-1}}{f(r+e_n) - f(r+e_{n-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$e_{n+1} = e_n - f(r+e_n)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(r+e_n) - f(r+e_{n-1})}$$

Nu Taylorudvikler vi omkring r,

$$f(\epsilon + r) \quad = \quad f(r) + f'(r)\epsilon + \frac{1}{2}f''(r)\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$$

Fejlanalyse

Lad

$$e_n = x_n - r, \quad \text{i.e.} \quad x_n = r + e_n.$$

Så er

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$r + e_{n+1} = r + e_n - f(r+e_n)\frac{r + e_n - r - e_{n-1}}{f(r+e_n) - f(r+e_{n-1})}$$

$$\Downarrow$$

$$e_{n+1} = e_n - f(r+e_n)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(r+e_n) - f(r+e_{n-1})}$$

Nu Taylorudvikler vi omkring r,

$$\begin{aligned} f(\epsilon + r) &= f(r) + f'(r)\epsilon + \frac{1}{2}f''(r)\epsilon^2 + o(\epsilon^2) \\ &= f'(r)\epsilon + \frac{1}{2}f''(r)\epsilon^2 + o(\epsilon^2), \quad \epsilon = e_n, e_{n-1}. \end{aligned}$$

Så er nævneren

$$f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r)$$

Så er nævneren

$$\begin{aligned} & f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r) \\ & \qquad \approx \quad f'(r)(e_n - e_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(r)(e_n^2 - e_{n-1}^2) \end{aligned}$$

Så er nævneren

$$
\begin{aligned}
& f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r) \\
& \quad \approx \quad f'(r)(e_n - e_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(r)(e_n^2 - e_{n-1}^2) \\
& \quad = \quad f'(r)(e_n - e_{n-1}) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} (e_n + e_{n-1}) \right]
\end{aligned}
$$

Så er nævneren

$$
\begin{aligned}
& f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r) \\
& \quad \approx \quad f'(r)(e_n - e_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(r)(e_n^2 - e_{n-1}^2) \\
& \quad = \quad f'(r)(e_n - e_{n-1}) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} (e_n + e_{n-1}) \right]
\end{aligned}
$$

mens

$$
f(e_n + r) \quad \approx \quad f'(r) e_n + \frac{1}{2} f''(r) e_n^2
$$

Så er nævneren

$$
\begin{aligned}
& f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r) \\
& \quad \approx \quad f'(r)(e_n - e_{n-1}) + \frac{1}{2} f''(r)(e_n^2 - e_{n-1}^2) \\
& \quad = \quad f'(r)(e_n - e_{n-1}) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} (e_n + e_{n-1}) \right]
\end{aligned}
$$

mens

$$
\begin{aligned}
f(e_n + r) & \approx f'(r) e_n + \frac{1}{2} f''(r) e_n^2 \\
& = e_n f'(r) \left[1 + \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} e_n \right].
\end{aligned}
$$

Så er nævneren

$$\begin{aligned} f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r) \\ &\approx f'(r)(e_n - e_{n-1}) + \frac{1}{2}f''(r)(e_n^2 - e_{n-1}^2) \\ &= f'(r)(e_n - e_{n-1})\left[1 + \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}(e_n + e_{n-1})\right] \end{aligned}$$

mens

$$\begin{aligned} f(e_n + r) &\approx f'(r)e_n + \frac{1}{2}f''(r)e_n^2 \\ &= e_n f'(r)\left[1 + \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}e_n\right]. \end{aligned}$$

Lad nu

$$R = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}.$$

Så fås

$$e_{n+1} = e_n - f(e_n + r)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r)}$$

Så fås

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - f(e_n + r)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r)} \\
&\approx e_n - \frac{e_n f'(r)\left[1 + Re_n\right](e_n - e_{n-1})}{f'(r)(e_n - e_{n-1})\left[1 + R(e_n + e_{n-1})\right]}
\end{aligned}
$$

Så fås

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - f(e_n + r)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r)} \\
&\approx e_n - \frac{e_n f'(r)\left[1 + Re_n\right](e_n - e_{n-1})}{f'(r)(e_n - e_{n-1})\left[1 + R(e_n + e_{n-1})\right]} \\
&= e_n - \frac{e_n\left[1 + Re_n\right]}{1 + R(e_n + e_{n-1})}
\end{aligned}
$$

Så fås

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - f(e_n + r)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r)} \\
&\approx e_n - \frac{e_n f'(r)\left[1 + Re_n\right](e_n - e_{n-1})}{f'(r)(e_n - e_{n-1})\left[1 + R(e_n + e_{n-1})\right]} \\
&= e_n - \frac{e_n\left[1 + Re_n\right]}{1 + R(e_n + e_{n-1})} \\
&= \frac{e_n\left[1 + R(e_n + e_{n-1})\right] - e_n\left[1 + Re_n\right]}{1 + R(e_n + e_{n-1})}
\end{aligned}
$$

Så fås

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - f(e_n + r)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r)} \\
&\approx e_n - \frac{e_n f'(r)\,[1 + Re_n]\,(e_n - e_{n-1})}{f'(r)(e_n - e_{n-1})\,[1 + R(e_n + e_{n-1})]} \\
&= e_n - \frac{e_n\,[1 + Re_n]}{1 + R(e_n + e_{n-1})} \\
&= \frac{e_n\,[1 + R(e_n + e_{n-1})] - e_n\,[1 + Re_n]}{1 + R(e_n + e_{n-1})} \\
&= \frac{e_n e_{n-1} R}{1 + R(e_n + e_{n-1})}
\end{aligned}$$

Så fås

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - f(e_n+r)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(e_n+r)-f(e_{n-1}+r)} \\
&\approx e_n - \frac{e_n f'(r)\left[1+Re_n\right](e_n-e_{n-1})}{f'(r)(e_n-e_{n-1})\left[1+R(e_n+e_{n-1})\right]} \\
&= e_n - \frac{e_n\left[1+Re_n\right]}{1+R(e_n+e_{n-1})} \\
&= \frac{e_n\left[1+R(e_n+e_{n-1})\right]-e_n\left[1+Re_n\right]}{1+R(e_n+e_{n-1})} \\
&= \frac{e_n e_{n-1} R}{1+R(e_n+e_{n-1})} \\
&\approx e_n e_{n-1} R.
\end{aligned}
$$

Så fås

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - f(e_n + r)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(e_n + r) - f(e_{n-1} + r)} \\
&\approx e_n - \frac{e_n f'(r)\left[1 + Re_n\right](e_n - e_{n-1})}{f'(r)(e_n - e_{n-1})\left[1 + R(e_n + e_{n-1})\right]} \\
&= e_n - \frac{e_n\left[1 + Re_n\right]}{1 + R(e_n + e_{n-1})} \\
&= \frac{e_n\left[1 + R(e_n + e_{n-1})\right] - e_n\left[1 + Re_n\right]}{1 + R(e_n + e_{n-1})} \\
&= \frac{e_n e_{n-1} R}{1 + R(e_n + e_{n-1})} \\
&\approx e_n e_{n-1} R.
\end{aligned}
$$

Så

$$
e_{n+1} \approx \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)} e_n e_{n-1} = R \cdot e_n e_{n-1}, \quad R = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}.
$$

Så fås

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= e_n - f(e_n+r)\frac{e_n - e_{n-1}}{f(e_n+r) - f(e_{n-1}+r)} \\
&\approx e_n - \frac{e_n f'(r)\left[1+Re_n\right](e_n - e_{n-1})}{f'(r)(e_n-e_{n-1})\left[1+R(e_n+e_{n-1})\right]} \\
&= e_n - \frac{e_n\left[1+Re_n\right]}{1+R(e_n+e_{n-1})} \\
&= \frac{e_n\left[1+R(e_n+e_{n-1})\right] - e_n\left[1+Re_n\right]}{1+R(e_n+e_{n-1})} \\
&= \frac{e_n e_{n-1} R}{1+R(e_n+e_{n-1})} \\
&\approx e_n e_{n-1} R.
\end{aligned}$$

Så

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)} e_n e_{n-1} = R\cdot e_n e_{n-1}, \quad R = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}.$$

Sammenlign med Newton's metode:

$$e_{n+1} \approx \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)} e_n^2.$$

Lad $E_n = |R||e_n|$.

Lad $E_n = |R||e_n|$. Så ses at

$$e_{n+1} \approx R e_n e_{n-1}$$

Lad $E_n = |R||e_n|$. Så ses at

$$e_{n+1} \approx R e_n e_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$E_{n+1} = |R||e_{n+1}| \approx |R||e_n||R||e_{n-1}| = E_n E_{n-1}$$

Lad $E_n = |R||e_n|$. Så ses at

$$e_{n+1} \approx Re_n e_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$E_{n+1} = |R||e_{n+1}| \approx |R||e_n||R||e_{n-1}| = E_n E_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$-\log(E_{n+1}) \approx -\log(E_n) - \log(E_{n-1}).$$

Lad $E_n = |R||e_n|$. Så ses at

$$e_{n+1} \approx R e_n e_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$E_{n+1} = |R||e_{n+1}| \approx |R||e_n||R||e_{n-1}| = E_n E_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$-\log(E_{n+1}) \approx -\log(E_n) - \log(E_{n-1}).$$

Med

$$a_n = -\log E_n$$

Lad $E_n = |R||e_n|$. Så ses at

$$
\begin{aligned}
& e_{n+1} \approx R e_n e_{n-1} \\
\Downarrow \quad & \\
& E_{n+1} = |R||e_{n+1}| \approx |R||e_n||R||e_{n-1}| = E_n E_{n-1} \\
\Downarrow \quad & \\
& -\log(E_{n+1}) \approx -\log(E_n) - \log(E_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Med

$$a_n = -\log E_n$$

så er

$$a_{n+1} \approx a_n + a_{n-1},$$

hvilket er en Fibonacci følge, som har generel løsning

$$a_n = c_1\phi_1^n + c_2\phi_2^n \sim c_1\phi_1^n, \quad \phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.628, \quad \phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.61.$$

Da $|\phi_2| < 1$ vil indflydelse fra denne forsvinde, og

$$a_n \sim c_1 \phi_1^n$$

for en eller anden konstant c_1.

Da $|\phi_2| < 1$ vil indflydelse fra denne forsvinde, og

$$a_n \sim c_1 \phi_1^n$$

for en eller anden konstant c_1. Da $e_n \to 0$ så vil $a_n \to \infty$ og dermed må $c_1 \neq 0$.

Da $|\phi_2| < 1$ vil indflydelse fra denne forsvinde, og

$$a_n \sim c_1 \phi_1^n$$

for en eller anden konstant c_1. Da $e_n \to 0$ så vil $a_n \to \infty$ og dermed må $c_1 \neq 0$. Envidere så er

$$E_n = \exp(-c_1 \phi_1^n) \implies |e_n| = |R|^{-1} \exp(-c_1 \phi_1^n).$$

Da $|\phi_2| < 1$ vil indflydelse fra denne forsvinde, og

$$a_n \sim c_1 \phi_1^n$$

for en eller anden konstant c_1. Da $e_n \to 0$ så vil $a_n \to \infty$ og dermed må $c_1 \neq 0$. Envidere så er

$$E_n = \exp(-c_1 \phi_1^n) \implies |e_n| = |R|^{-1} \exp(-c_1 \phi_1^n).$$

Så vil

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\phi_1}} = \frac{|R|^{-1} \exp(-c_1 \phi_1^{n+1})}{|R|^{-\phi_1} \exp(-c_1 \phi_1^n \phi_1)} = |R|^{\phi_1 - 1},$$

Da $|\phi_2| < 1$ vil indflydelse fra denne forsvinde, og

$$a_n \sim c_1 \phi_1^n$$

for en eller anden konstant c_1. Da $e_n \to 0$ så vil $a_n \to \infty$ og dermed må $c_1 \neq 0$. Envidere så er

$$E_n = \exp(-c_1 \phi_1^n) \implies |e_n| = |R|^{-1} \exp(-c_1 \phi_1^n).$$

Så vil

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^{\phi_1}} = \frac{|R|^{-1} \exp(-c_1 \phi_1^{n+1})}{|R|^{-\phi_1} \exp(-c_1 \phi_1^n \phi_1)} = |R|^{\phi_1 - 1},$$

i.e.

$$|e_{n+1}| \approx |R|^{\phi_1 - 1} |e_n|^{\phi_1}.$$

Konklussion

- Sekantmetoden kræver f to gange kontinuert differentiabel for at virke, men ikke evaluering af afledet.

Konklussion

- Sekantmetoden kræver f to gange kontinuert differentiabel for at virke, men ikke evaluering af afledet.
- Langsommere en Newton i et trin.

Konklussion

- Sekantmetoden kræver f to gange kontinuert differentiabel for at virke, men ikke evaluering af afledet.
- Langsommere en Newton i et trin.
- I to trin:

$$|e_{n+2}| \approx K|e_{n+1}|^{\phi_1} \approx K\left(K|e_n|^{\phi_1}\right)^{\phi_1} = K^{1+\phi_1}|e_n|^{\phi_1^2},$$

hvor

$$\phi_1^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

Konklussion

- Sekantmetoden kræver f to gange kontinuert differentiabel for at virke, men ikke evaluering af afledet.
- Langsommere en Newton i et trin.
- I to trin:

$$|e_{n+2}| \approx K|e_{n+1}|^{\phi_1} \approx K\left(K|e_n|^{\phi_1}\right)^{\phi_1} = K^{1+\phi_1}|e_n|^{\phi_1^2},$$

  hvor

$$\phi_1^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

- Så i to trin er Sekantmetoden mere præcis end Newton

Konklussion

- Sekantmetoden kræver f to gange kontinuert differentiabel for at virke, men ikke evaluering af afledet.
- Langsommere en Newton i et trin.
- I to trin:

$$|e_{n+2}| \approx K|e_{n+1}|^{\phi_1} \approx K\left(K|e_n|^{\phi_1}\right)^{\phi_1} = K^{1+\phi_1}|e_n|^{\phi_1^2},$$

hvor

$$\phi_1^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

- Så i to trin er Sekantmetoden mere præcis end Newton
- Så alt afhænger af kompleksiteten af udregningerne i Newton.

Konklussion

- Sekantmetoden kræver f to gange kontinuert differentiabel for at virke, men ikke evaluering af afledet.
- Langsommere en Newton i et trin.
- I to trin:

$$|e_{n+2}| \approx K|e_{n+1}|^{\phi_1} \approx K\left(K|e_n|^{\phi_1}\right)^{\phi_1} = K^{1+\phi_1}|e_n|^{\phi_1^2},$$

  hvor

$$\phi_1^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

- Så i to trin er Sekantmetoden mere præcis end Newton
- Så alt afhænger af kompleksiteten af udregningerne i Newton.
- Hvis den afledte tager mere en 40 % af CPU tiden for et alm. funktionskald, så anbefaler visse forfattere sekantmetoden. For polynomier skal vi se, at målet på 40 % godt kan nås.