Numerisk differentiation

Basale formler

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Introduktion

Per definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

så

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(1)$$

hvilket også er første ordens Taylorudvikling.

Introduktion

Per definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

så

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(1)$$

hvilket også er første ordens Taylorudvikling.

Det er vigtigt altid at opnå en fejl på mindst $O(h^2) = o(h)$ og ikke blot $O(h) = o(1)$.

Introduktion

Per definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

så

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(1)$$

hvilket også er første ordens Taylorudvikling.

Det er vigtigt altid at opnå en fejl på mindst $O(h^2) = o(h)$ og ikke blot $O(h) = o(1)$.

Som vi skal se kan dette opnås altid ved at bruge flere Taylor udviklinger.

Numerisk differentiation

Udgangspunktet er Taylor udvikling omkring punktet x:

Numerisk differentiation

Udgangspunktet er Taylor udvikling omkring punktet x:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots && (1)\\
f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots && (2)
\end{aligned}
$$

Numerisk differentiation

Udgangspunktet er Taylor udvikling omkring punktet x:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}+f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots && (1) \\ f(x-h) &= f(x)-f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}-f'''(x)\frac{h^3}{3!}+f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots && (2) \end{aligned}$$

Så vil

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+2f'''(x)\frac{h^3}{3!}+\ldots$$

Numerisk differentiation

Udgangspunktet er Taylor udvikling omkring punktet x:

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots && (1)\\
f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots && (2)
\end{aligned}
$$

Så vil

$$
f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + 2f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots
$$

$$\Downarrow$$

$$
f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'''(x)\frac{h^2}{3!} + \ldots
$$

Numerisk differentiation

Udgangspunktet er Taylor udvikling omkring punktet x:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots && (1) \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots && (2) \end{aligned}$$

Så vil

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + 2f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - f'''(x)\frac{h^2}{3!} + \ldots$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2).$$

Numerisk differentiation

Betragt igen (1) og (2):

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots \\
f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots,
\end{aligned}
$$

Numerisk differentiation

Betragt igen (1) og (2):

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots \\
f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots,
\end{aligned}
$$

Summes disse fås

$$
f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + 2f''(x)\frac{h^2}{2!} + 2f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!} + \ldots.
$$

Numerisk differentiation

Betragt igen (1) og (2):

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots \\
f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots ,
\end{aligned}
$$

Summes disse fås

$$
f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + 2f''(x)\frac{h^2}{2!} + 2f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!} + ...
$$

$\Downarrow$

$$
f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f^{(4)}(x)\frac{h^2}{12} + ...
$$

Numerisk differentiation

Betragt igen (1) og (2):

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} - f'''(x)\frac{h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!}\cdots, \end{aligned}$$

Summes disse fås

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + 2f''(x)\frac{h^2}{2!} + 2f^{(4)}(x)\frac{h^4}{4!} + \ldots.$$

$\Downarrow$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - f^{(4)}(x)\frac{h^2}{12} + \ldots$$

$\Downarrow$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2).$$

Numerisk differentiation

Tilsvarende med $2h$ i stedet for h:

$$
\begin{aligned}
f(x+2h) &= f(x) + f'(x)2h + f''(x)\frac{4h^2}{2} + f'''(x)\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{16h^4}{4!}\cdot\cdot\cdot \quad (3)\\
f(x-2h) &= f(x) - f'(x)2h + f''(x)\frac{4h^2}{2} - f'''(x)\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{16h^4}{4!}\cdot\cdot\cdot \quad (4)
\end{aligned}
$$

Numerisk differentiation

Tilsvarende med $2h$ i stedet for h:

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x)2h + f''(x)\frac{4h^2}{2} + f'''(x)\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{16h^4}{4!} \cdot \quad (3)$$

$$f(x-2h) = f(x) - f'(x)2h + f''(x)\frac{4h^2}{2} - f'''(x)\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{16h^4}{4!} \cdot \quad (4)$$

Differencerne for $f(x+2h) - f(x-2h)$ og $f(x+h) - f(x-h)$ har i deres to første led $f'(x)$ og $f'''(x)$, hvoraf vi kan eliminere $f'(x)$ ved at trække et multiplum af den ene fra den anden:

$$f(x+2h) - f(x-2h) - 2(f(x+h) - f(x-h)) = f'''(x)2h^3 + O(h^5)$$

$$\Downarrow$$

$$f'''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)}{2h^3} + O(h^2).$$

Numerisk differentiation

Tilsvarende,

$$
\begin{aligned}
f(x+2h) &= f(x) + f'(x)2h + f''(x)\frac{4h^2}{2} + f'''(x)\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{16h^4}{4!} \cdots \\
f(x-2h) &= f(x) - f'(x)2h + f''(x)\frac{4h^2}{2} - f'''(x)\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{16h^4}{4!} \cdots
\end{aligned}
$$

kan vi elimere f'' fra summerne:

$$f(x+2h) + f(x-2h) - 4(f(x+h) + f(x-h)) = -6f(x) + f^{(4)}(x)h^4 + O(h^6)$$

Numerisk differentiation

Tilsvarende,

$$
\begin{aligned}
f(x+2h) &= f(x) + f'(x)2h + f''(x)\frac{4h^2}{2} + f'''(x)\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{16h^4}{4!}\cdots \\
f(x-2h) &= f(x) - f'(x)2h + f''(x)\frac{4h^2}{2} - f'''(x)\frac{8h^3}{3!} + f^{(4)}(x)\frac{16h^4}{4!}\cdots
\end{aligned}
$$

kan vi elimere f'' fra summerne:

$$
f(x+2h) + f(x-2h) - 4(f(x+h) + f(x-h)) = -6f(x) + f^{(4)}(x)h^4 + O(h^6)
$$

$\Downarrow$

$$
f^{(4)}(x) = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4} + O(h^2).
$$