Numerisk integration

Simpsons formel

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Simpsons formel

Her er $n = 2$, $x_0 = a$ og $x_1 = (a+b)/2$ og $x_2 = b$.

Simpsons formel

Her er $n = 2$, $x_0 = a$ og $x_1 = (a+b)/2$ og $x_2 = b$. Vi har

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \\
\ell_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
\ell_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.
\end{aligned}$$

Simpsons formel

Her er $n = 2$, $x_0 = a$ og $x_1 = (a+b)/2$ og $x_2 = b$. Vi har

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \\
\ell_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
\ell_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.
\end{aligned}$$

Lad

$$h = \frac{b-a}{2}.$$

Simpsons formel

Her er $n = 2$, $x_0 = a$ og $x_1 = (a+b)/2$ og $x_2 = b$. Vi har

$$\begin{aligned}\ell_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\\ \ell_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\\ \ell_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.\end{aligned}$$

Lad

$$h = \frac{b-a}{2}.$$

Så er

$$x_0 = a,\ x_1 = a+h \quad \text{og} \quad x_2 = b = a+2h.$$

Variabel skift $\xi = x - (a + b)/2$ giver så, at

Variabel skift $\xi = x - (a+b)/2$ giver så, at

$$A_0 \quad = \quad \int_a^b \ell_0(x)dx = \int_{-h}^h \frac{(\xi - 0)(\xi - h)}{h \cdot 2h} d\xi = \frac{h}{3},$$

Variabel skift $\xi = x - (a+b)/2$ giver så, at

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \int_a^b \ell_0(x)dx = \int_{-h}^h \frac{(\xi-0)(\xi-h)}{h\cdot 2h} d\xi = \frac{h}{3}, \\
A_1 &= \int_{-h}^h \frac{(\xi+h)(\xi-h)}{h\cdot(-h)} d\xi = -\frac{1}{h^2}\int_{-h}^h (\xi^2-h^2)d\xi = \frac{4h}{3}
\end{aligned}
$$

Variabel skift $\xi = x - (a+b)/2$ giver så, at

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_a^b \ell_0(x)dx = \int_{-h}^{h} \frac{(\xi-0)(\xi-h)}{h\cdot 2h} d\xi = \frac{h}{3}, \\ A_1 &= \int_{-h}^{h} \frac{(\xi+h)(\xi-h)}{h\cdot(-h)} d\xi = -\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h}(\xi^2-h^2)d\xi = \frac{4h}{3} \\ A_2 &= \int_{-h}^{h} \frac{(\xi+h)(\xi-0)}{2h\cdot h} d\xi = \frac{1}{2h^2}\int_{-h}^{h}(\xi^2+h\xi)d\xi = \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

Derfor bliver

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} A_i f(x_i) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Fejl på Simpsons formel

Med hensyn til fejlen, se på

$$E = \int_a^b (f(x) - p_2(x))dx, \quad p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\ell_i(x_i)$$

hvor p_2 er det entydigt bestemte polynomium som interpolerer $a, (a+b)/2$ og b.

Fejl på Simpsons formel

Med hensyn til fejlen, se på

$$E = \int_a^b (f(x) - p_2(x))dx, \quad p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\ell_i(x_i)$$

hvor p_2 er det entydigt bestemte polynomium som interpolerer $a, (a+b)/2$ og b.

Dette kan også skrives på Newton form

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

Fejl på Simpsons formel

Med hensyn til fejlen, se på

$$E = \int_a^b (f(x) - p_2(x))dx, \quad p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\ell_i(x_i)$$

hvor p_2 er det entydigt bestemte polynomium som interpolerer $a, (a+b)/2$ og b.

Dette kan også skrives på Newton form

$$p_2(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

Men da

$$\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx = 0$$

så vil

$$\int_a^b p_2(x)dx = \int_a^b p_3(x)dx$$

da

$$p_3(x) = p_2(x) + c_3(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b).$$

Fejl på Simpsons formel

Så vi kan faktisk tilføje et ektra punkt til interpolationen og få det samme integral.

Fejl på Simpsons formel

Så vi kan faktisk tilføje et ekstra punkt til interpolationen og få det samme integral. Lad os tilføje $(a+b)/2$ igen!

Fejl på Simpsons formel

Så vi kan faktisk tilføje et ekstra punkt til interpolationen og få det samme integral. Lad os tilføje $(a+b)/2$ igen! Så bliver fejlen

$$E = \int_a^b (f(x) - p_3(x))dx$$

Fejl på Simpsons formel

Så vi kan faktisk tilføje et ektra punkt til interpolationen og få det samme integral. Lad os tilføje $(a+b)/2$ igen! Så bliver fejlen

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b (f(x) - p_3(x))dx \\ &= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)dx \end{aligned}$$

Fejl på Simpsons formel

Så vi kan faktisk tilføje et ektra punkt til interpolationen og få det samme integral. Lad os tilføje $(a+b)/2$ igen! Så bliver fejlen

$$
\begin{aligned}
E &= \int_a^b (f(x) - p_3(x))dx \\
&= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\frac{(a-b)^5}{120}
\end{aligned}
$$

Fejl på Simpsons formel

Så vi kan faktisk tilføje et ektra punkt til interpolationen og få det samme integral. Lad os tilføje $(a+b)/2$ igen! Så bliver fejlen

$$
\begin{aligned}
E &= \int_a^b (f(x) - p_3(x))dx \\
&= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\frac{(a-b)^5}{120} \\
&= -f^{(4)}(\xi)\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5
\end{aligned}
$$

Fejl på Simpsons formel

Så vi kan faktisk tilføje et ektra punkt til interpolationen og få det samme integral. Lad os tilføje $(a+b)/2$ igen! Så bliver fejlen

$$\begin{aligned}
E &= \int_a^b (f(x) - p_3(x))dx \\
&= \int_a^b \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)dx \\
&= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\frac{(a-b)^5}{120} \\
&= -f^{(4)}(\xi)\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \\
&= -f^{(4)}(\xi)\frac{h^5}{90}.
\end{aligned}$$

Sammensat Simpsons formel

Inddel intervallet $[a, b]$ i n (lige tal)

$$x_i = a + ih, \ \ i = 0, ..., n, \quad h = \frac{b - a}{n}.$$

Sammensat Simpsons formel

Inddel intervallet $[a, b]$ i n (lige tal)

$$x_i = a + ih, \; i = 0, ..., n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Anvend nu Simpson formel på hvert af intervallerne

$$[x_{2i}, x_{2(i+1)}], \quad i = 0, 1, ..., n/2 - 1.$$

Sammensat Simpsons formel

Inddel intervallet $[a, b]$ i n (lige tal)

$$x_i = a + ih, \ \ i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Anvend nu Simpson formel på hvert af intervallerne

$$[x_{2i}, x_{2(i+1)}], \quad i = 0, 1, \dots, n/2 - 1.$$

Så er

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n/2-1} \int_{2i}^{2(i+1)} f(x)dx \\
&\approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n/2-1} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2(i+1)}) \right) \\
&= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) \right)
\end{aligned}$$

Sammensat Simpsons formel

Inddel intervallet $[a, b]$ i n (lige tal)

$$x_i = a + ih, \ \ i = 0, ..., n, \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Anvend nu Simpson formel på hvert af intervallerne

$$[x_{2i}, x_{2(i+1)}], \quad i = 0, 1, ..., n/2 - 1.$$

Så er

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n/2-1} \int_{2i}^{2(i+1)} f(x)dx \\ &\approx \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n/2-1} \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2(i+1)}) \right) \\ &= \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1}) \right) \end{aligned}$$

Fejlen udregnes her ved at summere fejlene op fra de enkelte intervaller,

Fejl på sammensat Simpson

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=0}^{n/2-1} E_i \\ &= -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\xi_i), \end{aligned}$$

hvor $\xi \in (x_{2i}, x_{2(i+1)})$.

Fejl på sammensat Simpson

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=0}^{n/2-1} E_i \\ &= -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\xi_i), \end{aligned}$$

hvor $\xi \in (x_{2i}, x_{2(i+1)})$. Lad

$$\bar{f}^{(4)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\xi_i).$$

Fejl på sammensat Simpson

$$
\begin{aligned}
E &= \sum_{i=0}^{n/2-1} E_i \\
&= -\frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\xi_i),
\end{aligned}
$$

hvor $\xi \in (x_{2i}, x_{2(i+1)})$. Lad

$$
\bar{f}^{(4)} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n/2-1} f^{(4)}(\xi_i).
$$

Hvis $f^{(4)}(x)$ er kontinuert, så findes der et $\xi \in (a, b)$ så at

$$
f^{(4)}(\xi) = \bar{f}^{(4)},
$$

så

$$
E = -\frac{h^5}{90}\frac{n}{2} f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^5}{180}\frac{b-a}{h} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi),
$$

da $(b-a)/h = n$.

Richardson ekstrapolation

Trapez reglen siger at

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b) \right) + O(h^2)$$

Richardson ekstrapolation

Trapez reglen siger at

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right) + O(h^2)$$

og Simpson's metode, at

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1})\right) + O(h^4).$$

Richardson ekstrapolation

Trapez reglen siger at

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right) + O(h^2)$$

og Simpson's metode, at

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1})\right) + O(h^4).$$

Vi kan derfor bruge Richardson til at forbedre estimatet.

Richardson ekstrapolation

Trapez reglen siger at

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)\right) + O(h^2)$$

og Simpson's metode, at

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{n/2-1} f(x_{2i+1})\right) + O(h^4).$$

Vi kan derfor bruge Richardson til at forbedre estimatet. For Trapez har vi, at

$$\begin{aligned} L &= I(h) + k_1 h^2 + \ldots \\ L &= I(h/2) + k_1 (h/2)^2 \ldots \end{aligned}$$

så

$$3L = 4L - L = 4I(h/2) - I(h)$$

i.e.

$$L = \frac{4}{3}I(h/2) - \frac{1}{3}I(h).$$

Richardson ekstrapolation

Richardson for Simpson giver

$$
\begin{aligned}
L &= I(h) + k_1 h^4 + \ldots \\
L &= I(h/2) + k_1 (h/2)^4 \ldots
\end{aligned}
$$

så

$$15L = 16L - L = 16I(h/2) - I(h),$$

i.e.

$$L = \frac{16}{15} I(h/2) - \frac{1}{15} I(h).$$