Løsning af lineære ligninger

Triangulære systemer

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Problembeskrivelsen

- Givet en $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ og vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)'$, betragt det lineære ligningssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Problembeskrivelsen

- Givet en $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ og vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)'$, betragt det lineære ligningssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

- Antag, at $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ således at vi ved der findes en entydigt bestemt løsning $\boldsymbol{x}$.

Problembeskrivelsen

- Givet en $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ og vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)'$, betragt det lineære ligningssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

- Antag, at $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ således at vi ved der findes en entydigt bestemt løsning $\boldsymbol{x}$.
- Vi ønsker at finde en sikker og hurtig metode til at finde løsningen $\boldsymbol{x}$.

Problembeskrivelsen

- Givet en $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}$ og vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)'$, betragt det lineære ligningssystem

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}.$$

- Antag, at $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ således at vi ved der findes en entydigt bestemt løsning $\boldsymbol{x}$.
- Vi ønsker at finde en sikker og hurtig metode til at finde løsningen $\boldsymbol{x}$.
- Idé: transformer ligningssystemet til et som er let at løse.

Problembeskrivelsen

- Givet en $n \times n$ matrix $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ og vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)'$, betragt det lineære ligningssystem

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

- Antag, at $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ således at vi ved der findes en entydigt bestemt løsning $\boldsymbol{x}$.
- Vi ønsker at finde en sikker og hurtig metode til at finde løsningen $\boldsymbol{x}$.
- Idé: transformer ligningssystemet til et som er let at løse.
- To sådanne systemer er de såkaldte nedre trianglære (L) og øvre triangulære (U) systemer.

Nedre triangulær form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Nedre triangulær form

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.
$$

Den tilsvarende løsning er givet ved

Eq. 1 $$a_{11}x_1 = b_1$$

Nedre triangulær form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Den tilsvarende løsning er givet ved

$$\text{Eq. 1} \qquad a_{11}x_1 = b_1$$

$$\text{Eq. 2} \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Nedre triangulær form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Den tilsvarende løsning er givet ved

$$\begin{aligned} &\text{Eq. 1} & a_{11}x_1 &= b_1 \\ &\text{Eq. 2} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ & & &\vdots \end{aligned}$$

Nedre triangulær form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Den tilsvarende løsning er givet ved

$$\begin{array}{lr} \text{Eq. } 1 & a_{11}x_1 = b_1 \\ \text{Eq. } 2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ & \vdots \\ \text{Eq. } n & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}$$

Løsning

Eq.1

$$x_1 = b_1/a_{11}.$$

Løsning

Eq.1

$$x_1 = b_1/a_{11}.$$

Eq 2.

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}.$$

Løsning

Eq.1

$$x_1 = b_1/a_{11}.$$

Eq 2.

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}.$$

Eq 3.

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}.$$

Løsning

Eq.1

$$x_1 = b_1/a_{11}.$$

Eq 2.

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}.$$

Eq 3.

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}.$$

Eq i.

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}.$$

Løsning

Eq.1

$$x_1 = b_1/a_{11}.$$

Eq 2.

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}.$$

Eq 3.

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}.$$

Eq i.

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}.$$

Dette kaldes *fremadrettet substitution* (eng: *forward substitution*) idet vi udregner x_i i rækkefølgen $x_1, x_2, \ldots$ og for at finde x_i har vi brug for at substituere $x_1, \ldots, x_{i-1}$ ind i en løsning for x_i.

Øvre triangulær form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

svarende til ligningssystemet

$$\begin{aligned} &\text{Eq. } 1 && a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ &\text{Eq. } 2 && a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & && \vdots \\ &\text{Eq. } n && a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}$$

Vi kan omskrive dette system til et nedre triangulært system ved at permutere rækkerne, i.e. anvend permutationen

$$\pi(i) = n - i + 1.$$

Vi kan omskrive dette system til et nedre triangulært system ved at permutere rækkerne, i.e. anvend permutationen

$$\pi(i) = n - i + 1.$$

Lad

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)'$$

Vi kan omskrive dette system til et nedre triangulært system ved at permutere rækkerne, i.e. anvend permutationen

$$\pi(i) = n - i + 1.$$

Lad

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{x}} &= (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)' \\ \tilde{\boldsymbol{b}} &= (b_n, b_{n-1}, ..., b_1)'\end{aligned}$$

Vi kan omskrive dette system til et nedre triangulært system ved at permutere rækkerne, i.e. anvend permutationen

$$\pi(i) = n - i + 1.$$

Lad

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}} &= (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)' \\ \tilde{\boldsymbol{b}} &= (b_n, b_{n-1}, ..., b_1)' \\ \tilde{a}_{ij} &= a_{n-i+1,j} \end{aligned}$$

Vi kan omskrive dette system til et nedre triangulært system ved at permutere rækkerne, i.e. anvend permutationen

$$\pi(i) = n - i + 1.$$

Lad

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}} &= (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)' \\ \tilde{\boldsymbol{b}} &= (b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1)' \\ \tilde{a}_{ij} &= a_{n-i+1,j} \\ \tilde{\boldsymbol{A}} &= \{\tilde{a}_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,n}. \end{aligned}$$

Vi kan omskrive dette system til et nedre triangulært system ved at permutere rækkerne, i.e. anvend permutationen

$$\pi(i) = n - i + 1.$$

Lad

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}} &= (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)' \\ \tilde{\boldsymbol{b}} &= (b_n, b_{n-1}, \dots, b_1)' \\ \tilde{a}_{ij} &= a_{n-i+1,j} \\ \tilde{\boldsymbol{A}} &= \{\tilde{a}_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}. \end{aligned}$$

Så er

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Det sidste udtryk er nedre triangulært, så

$$x_{n-i+1} = \tilde{x}_i = \frac{\tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j}{\tilde{a}_{ii}} = \frac{b_{n-i+1} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{n-i+1,j}x_{n-j+1}}{a_{n-i+1,n-i+1}}$$

Vi kan omskrive dette system til et nedre triangulært system ved at permutere rækkerne, i.e. anvend permutationen

$$\pi(i) = n - i + 1.$$

Lad

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{x}} &= (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)' \\
\tilde{\boldsymbol{b}} &= (b_n, b_{n-1}, ..., b_1)' \\
\tilde{a}_{ij} &= a_{n-i+1,j} \\
\tilde{\boldsymbol{A}} &= \{\tilde{a}_{ij}\}_{i,j=1,...,n}.
\end{aligned}$$

Så er

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Det sidste udtryk er nedre triangulært, så

$$x_{n-i+1} = \tilde{x}_i = \frac{\tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j}{\tilde{a}_{ii}} = \frac{b_{n-i+1} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{n-i+1,j}x_{n-j+1}}{a_{n-i+1,n-i+1}}$$

eller

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, i = n, ..., 1.$$