NumIntro - Uge 4 Onsdag

Nick Laursen

Københavns Universitet

23. september 2020

1. Kort om eksamen og projektet

2. Opgaver

Datoer for projekt og lidt om eksamen

- Projektet vil gå fra Fredag uge 5 til Fredag uge 6. (*Indtil videre*)
- Projektet vil være programmerings orienteret, dog kan teori forekomme
- Der vil være "*eksamen sæts*" før eksamen.
  - Der vil som minimum være 1 sæt og maksimum 2 sæt
  - Det vil være en god idé hvis man får gjort sig klar med følgende teori:
    - Bruge Newton's metode i hånden med lommeregner.
    - Interpolation
    - Teoretisk Linær algebra. f.eks condition number af 2×2 matrice eller eigen værdier.
    - Prøv så vidt muligt ikke at bruge computer, men kun lommeregner og hånden. Til matricer vil jeg nok foreslå computer hvis alt andet skulle fejle.

3.1.2) *Vi har følgende interval* $[1.5, 3.5]$

a) *Hvad er længden af intervallet af det n'te step af denne metode?*

pf:

Lad $a = 1.5$ og $b = 3.5$. Så vi har intervallet (a, b). Så for første step har vi $c_1 = \frac{a+b}{2}$. Så vil vi vores nye interval enten være $[a, c_1]$ eller $[c_1, b]$..

Ved **UTAG**, lad $c_1 = [a, c_1]$. Dette kan vi forsætte med og vi vil til sidste få

$$\frac{a+b}{2^n}$$

.

Vi har at vores start længe er 2. Så vores længde for c_1 vil være 1. Derefter efter bliver den $\frac{1}{2}$, osv... Derfor får vi til sidst at

$$\mathcal{L} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

□

3.1.2) *Vi har følgende interval* $[1.5, 3.5]$

b) *Hvad er den maksimale afstand mellem roden* r *og midtpunktet af dette interval?*

pf:

Vi vil til denne opgave her bruge **Theorem 1, p.79**, som kort siger:

$$|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)} (b_0 - a_0) .$$

ved at indsætte får vi

$$|r - c_n| \leq 2^{-(n+1)} \cdot 2 = 2^{-n}.$$

$\square$

3.1.9) Lad d_n=0 hvis roden r er på venstre side af c_n ellers lad $d_n = 1$. Udtryk rodden som en følge $d_1.d_2, \ldots$.

pf:

Vi har tre tilfælde **1)**$r \in F$, **2)** Decimalsbrøkstal og **3** decimaltal. Lad os starte med **1)**. Lad intevallet vi kigger over være på følgende form $[0, 2^n]$ hvis $r > 0$, og ellers lad intervallet være $[-2^n, 0]$ hvis $r < 0$. Ved at følge metoden fra opgaven kan vi se at vi vil få $r = d_1 d_2 d_3 \ldots$ som ønsket. (*Jeg gennemgår et eksempel*)

For **2)** kan man bruge samme teknik som gennemgået med eksemplet. Dog skal man helst bruge intervallet $[0, 1]$ og for **3)** kan man bare dele tallet op, så man ender med tilfælde 1 og 2 igen.

3.3.4) Hvis sekant metoden bliver brugt på $f(x) = x^2 - 2$ med $x_0 = 0$ og $x_1 = 1$. Hvad vil x_2 være?

pf:

Vi husker sekant metoden **(3), p 94**:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_n - 1)}.$$

Må vi bruge sekant metoden. (*Brug 2 minutter selv*) Svaret er ja, da $f \in C^1$. Herved får vi så:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - f(x_1) \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 + \frac{1-0}{-1+2} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$\square$

3.3.7) *Bevis at formlen for sekant metoden kan blive skrevet som* $x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$.

<u>**pf:**</u>

Vi har $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_n - 1)}$. Nu multiplicer vi ind og får

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\, x_n - f(x_n)\, x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_n - 1)}$$

. Vi sætter nu på fælles brygstreg og reducer. Dette giver os

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{x_n\,(f(x_n) - f(x_n - 1))}{f(x_n) - f(x_n - 1)} - \frac{f(x_n)\, x_n - f(x_n)\, x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_n - 1)} \\ &= \frac{f(x_n)\, x_n - x_n f(x_{n-1}) - f(x_n) + f(x_n)\, x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= \frac{f(x_n)\, x_{n-1} - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{aligned}$$

$\square$

2)

Lad $\phi : t \to (t, \log(t)) \in \mathbb{R}^2$*. Find det* t *hvor kurven er tættest på punktet* $(0,0)$ *med 5 decimaler præcision.*

pf:

Vi ved afstands formlen mellem et punkt (x, y) og en kurve $(t, f(t))$, er som følgende, $\mathcal{L} = \sqrt{(t-x)^2 + (f(t)-y)^2}$. Dette giver os

$$\mathcal{L} = \sqrt{t^2 + (\log(t))^2}.$$

Lad $g(t) = t^2 + (\log(t))^2$. Vi ønsker at finde et minima for denne funktion. Dette gøres ved monotoni forhold. Vi differencerer funktionen og får $g'(t) = 2t + \frac{2\ln(t)}{t}$. Vi ved at $g'0.5 < 0$ og $g'(1) > 0$. Derved kan vi så sige at $g'(t) = 0$ vil give os et minima. Lad os nu løse $g'(t) = 0$.

2)

Lad $\phi : t \to (t, \log(t)) \in \mathbb{R}^2$. Find det t hvor kurven er tættest på punktet $(0,0)$ med 5 decimaler præcision.

<u>pf:</u>

Vi løser i hånden. Lad $f(t) = 2t + \frac{2\ln(t)}{t}$ og lad $f'(t) = 2 + \frac{2(1-\ln(t))}{x^2}$. Lad ydeligere $x_0 = 0.8$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.8 - \frac{2 \cdot 0.8 + \frac{2\ln(0.8)}{0.8}}{2 + \frac{2(1-\ln(0.8))}{(0.8)^2}} = 0.621001$$

$$x_2 = 0.8 - \frac{2 \cdot 0.621001 + \frac{2\ln(0.621001)}{0.621001}}{2 + \frac{2(1-\ln(0.621001))}{(0.621001)^2}} = 0.651277$$

$$\vdots$$

$$x_5 = \ldots = 0.652918.$$

$\square$

3)

Brug Newton i hånden med lommeregner til at beregne π op til 10 decimaler præcision.

pf:

Lad $f(x) = \sin(x)$, da ved vi at $\sin(\pi) = 0$. Lad vores start gæt værdi være $x_0 = 3$. Lad os nu begynde med vores udregning:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{\sin(3)}{\cos(3)} = 3.14254654307$$

$$x_2 = 3.1425465431 - \frac{\sin(3.1425465431)}{\cos(3.1425465431)} = 3.14159265330$$

$$x_3 = 3.1415926533 - \frac{\sin(3.1415926533)}{\cos(3.1415926533)} = 3.14159265359$$

$\square$

4)

Lad $f(x) = x^n$. Brug Newton's metode og indse at den konverger. Prøv at for en idé om dens hastighed.

pf:

Vi laver Newton metoden.

$$F(x) = x - \frac{x^n}{nx^{n-1}} = x - \frac{1}{n}x = \frac{n-1}{n}x.$$

Herved er det nu klart at funktionen konvergerer. $\left(x_{k+1} = \frac{n-1}{n}x_k\right)$.

4)

Lad $f(x) = x^n$. Brug Newton's metode og indse at den konverger. Prøv at for en idé om dens hastighed.

pf:

Vi ved at $f(0) = 0$, så vors funktion har et fix-point i 0. (*Chap. 3.4*) Den har også et fix-point i $x = 1$.

Grunden til at vi har kvadratisk konvergens er fordi $f'(r) \neq 0$. (**p.104-105**) Lad os vise at hvis $f(x)$ har en multiplikativ rod >1, så vil newtonsmetode konvergerer linært. Vi husker at hvis f har en multiplikativ rod i r, så kan vi skrive $f(x) = (x - r)^k \cdot G(x)$, hvor $G(x)$ er en kontinuert funktion sådan at $G(r) \neq 0$. Fra dette kan vi så se at

$$f'(x) = k(x-r)^{k-1} G(x) + (x-r)^k G'(x) \Rightarrow f'(r) = 0.$$

Da vi ved at vores funktion $F(x)$ konvergerer men at den ikke konvergere kvadratisk, så tvinger det Newtons metode til at have en linær konvergensrate .

$\square$

5)

Lad $f \in C^q$ *med* $f^{(i)}(r) = 0, \forall i : 0 \le i < q$ *og* $f^{(q)}(r) \neq 0$. *Vis at* $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ *opfylder* $u'(r) = \lim_{x \to r} \frac{u(x)}{x-r} = \frac{1}{q} \neq 0$. *Lad nu* u *bruges i Newtons metode og antag* $x_n \to r$. *Vis* $x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)} \approx x_n - \frac{qf(x)}{f'(x_n)}$.

pf:

Hvis f har rod r med multiplicitet $q > 1$, så kan newtons ikke bruges direkte . Vi ved fra Taylor udvikling at der findes $r_1, r_2 \in (x, r)$, sådan at

$$f(x) = \frac{(x-r)^q}{q!} f^{(q)}(r_1),$$

$$f'(x) = \frac{(x-r)^{q-1}}{(q-1)!} f^{(q)}(r_2).$$

Vi definer nu $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Da får vi så følende ligning.

$$u'(x) = \lim_{x \to r} \frac{u(x)}{x-r} = \frac{(q-1)!}{q!} \lim_{x \to r} \frac{f^{(q)}(r_1)}{f^{(q)}(r_2)} = \frac{1}{q}.$$

5)

Lad $f \in C^q$ *med* $f^{(i)}(r) = 0,\ \forall i : 0 \leq i < q$ *og* $f^{(q)}(r) \neq 0$. *Vis at* $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ *opfylder* $u'(r) = \lim_{x \to r} \frac{u(x)}{x-r} = \frac{1}{q} \neq 0$. *Lad nu* u *bruges i Newtons metode og antag* $x_n \to r$. *Vis* $x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)} \approx x_n - \frac{qf(x)}{f'(x_n)}$.

pf:

$$u'(x) = \lim_{x \to r} \frac{u(x)}{x-r} = \frac{(q-1)!}{q!} \lim_{x \to r} \frac{f^{(q)}(r_1)}{f^{(q)}(r_2)} = \frac{1}{q}.$$

Så r er nu et simpelt nulpunkt for u. Vi kan derfor basere alle uderegningerne på u og Newton's metode for simple nulpunkter. Så vi at $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ og $\frac{1}{u'(x)} = q$. Derfor vil vi få:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{u(x_n)}{u'(x_n)} \approx x_n - \frac{qf(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Funktionen er kun approksimativ da $u'(x) = \frac{1}{q}$, når $x \to r$. $\square$