Interpolation

Interpolationsfejl

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Antag, at vi ønsker at approksimere en funktion $f(x)$ med et polynomium givet

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Antag, at vi ønsker at approksimere en funktion $f(x)$ med et polynomium givet

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Vi antager, at f er $n+1$ gange kontinuert differentiabel over et interval $[a, b]$ som indeholder x_i'erne.

Antag, at vi ønsker at approksimere en funktion $f(x)$ med et polynomium givet

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Vi antager, at f er $n+1$ gange kontinuert differentiabel over et interval $[a, b]$ som indeholder x_i'erne. Så har vi

Theorem

Der findes et $\xi_n \in [a, b]$ og et polynomium p af orden højst n så at

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Bevis

1) Sætningen holder for $x = x_k$, $k = 0, ..., n$ da begge sider så er nul.

Bevis

1) Sætningen holder for $x = x_k,\ k = 0, ..., n$ da begge sider så er nul.

(2) Lad nu $x \neq x_k$ for all $k = 0, ..., n$, og definer

$$\phi_x(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} w(t)$$

hvor

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \, .$$

Bevis

1) Sætningen holder for $x = x_k,\ k = 0, ..., n$ da begge sider så er nul.

(2) Lad nu $x \neq x_k$ for all $k = 0, ..., n$, og definer

$$\phi_x(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} w(t)$$

hvor

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) .$$

Så gælder, at

Bevis

1) Sætningen holder for $x = x_k,\ k = 0, ..., n$ da begge sider så er nul.

(2) Lad nu $x \neq x_k$ for all $k = 0, ..., n$, og definer

$$\phi_x(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} w(t)$$

hvor

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) .$$

Så gælder, at

1. ϕ_x er $n+1$ gange kontinuert differentiabel (da f er det).

Bevis

1) Sætningen holder for $x = x_k$, $k = 0, ..., n$ da begge sider så er nul.

(2) Lad nu $x \neq x_k$ for all $k = 0, ..., n$, og definer

$$\phi_x(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} w(t)$$

hvor

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) .$$

Så gælder, at

1. ϕ_x er $n + 1$ gange kontinuert differentiabel (da f er det).
2. $\phi_x(t)$ er nul i alle x_k og i x (i.e. $n + 2$ nulpunkter).

Bevis

1) Sætningen holder for $x = x_k$, $k = 0, ..., n$ da begge sider så er nul.

(2) Lad nu $x \neq x_k$ for all $k = 0, ..., n$, og definer

$$\phi_x(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} w(t)$$

hvor

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) .$$

Så gælder, at

1. ϕ_x er $n+1$ gange kontinuert differentiabel (da f er det).
2. $\phi_x(t)$ er nul i alle x_k og i x (i.e. $n+2$ nulpunkter).

Ifølge Rolle's sætning må ϕ_x' altså være nul i $n+1$ punkter i $[a, b]$, og dermed må ϕ_x'' være nul i n punkter i $[a, b]$ etc.

Bevis

1) Sætningen holder for $x = x_k,\ k = 0, ..., n$ da begge sider så er nul.

(2) Lad nu $x \neq x_k$ for all $k = 0, ..., n$, og definer

$$\phi_x(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{w(x)} w(t)$$

hvor

$$w(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) .$$

Så gælder, at

1. ϕ_x er $n + 1$ gange kontinuert differentiabel (da f er det).
2. $\phi_x(t)$ er nul i alle x_k og i x (i.e. $n + 2$ nulpunkter).

Ifølge Rolle's sætning må ϕ_x' altså være nul i $n + 1$ punkter i $[a, b]$, og dermed må ϕ_x'' være nul i n punkter i $[a, b]$ etc. Dvs. $\phi_x^{(n+1)}(t)$ har mindst et nulpunkt i $[a, b]$, i.e.

$$\exists \xi_n : \phi_x^{(n+1)}(\xi_n) = 0.$$

Nu er

$$\begin{aligned}\phi_x^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)} w^{(n+1)}(t) \\ &= f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)}(n+1)!\end{aligned}$$

pga. formen på $w(t)$ og da p er et n-te ordens polynomium.

Nu er

$$\begin{aligned}\phi_x^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)} w^{(n+1)}(t) \\ &= f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)}(n+1)!\end{aligned}$$

pga. formen på $w(t)$ og da p er et n-te ordens polynomium. Indsæt nu ξ_n,

$$0 = \phi_x^{(n+1)}(\xi_n) = f^{(n+1)}(\xi_n) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)}(n+1)!$$

Nu er

$$
\begin{aligned}
\phi_x^{(n+1)}(t) &= f^{(n+1)}(t) - p^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)} w^{(n+1)}(t) \\
&= f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)}(n+1)!
\end{aligned}
$$

pga. formen på $w(t)$ og da p er et n-te ordens polynomium. Indsæt nu ξ_n,

$$
0 = \phi_x^{(n+1)}(\xi_n) = f^{(n+1)}(\xi_n) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)}(n+1)!
$$

eller

$$
f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} w(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).
$$

$\square$

Eksempel: Lineær interpolation

Betragt $f(x) = e^x$.

Eksempel: Lineær interpolation

Betragt $f(x) = e^x$. Antag, at vi kender $y_0 = e^{x_0}$ og $y_1 = e^{x_1}$ i punkterne $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$.

Eksempel: Lineær interpolation

Betragt $f(x) = e^x$. Antag, at vi kender $y_0 = e^{x_0}$ og $y_1 = e^{x_1}$ i punkterne $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$. Vi ønsker at approksimere e^x for $x \in (x_1, x_2)$.

Eksempel: Lineær interpolation

Betragt $f(x) = e^x$. Antag, at vi kender $y_0 = e^{x_0}$ og $y_1 = e^{x_1}$ i punkterne $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$. Vi ønsker at approksimere e^x for $x \in (x_1, x_2)$. Vi anvender en lineær interpolation, og Lagrange formen er

$$\begin{aligned}\ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1},\\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0},\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}p_1(x) &= y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x)\\ &= y_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\\ &= \frac{(x_1 - x)y_0 + (x - x_0)y_1}{x_1 - x_0}.\end{aligned}$$

Eksempel: Lineær interpolation

Betragt $f(x) = e^x$. Antag, at vi kender $y_0 = e^{x_0}$ og $y_1 = e^{x_1}$ i punkterne $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$. Vi ønsker at approksimere e^x for $x \in (x_1, x_2)$. Vi anvender en lineær interpolation, og Lagrange formen er

$$\begin{aligned} \ell_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \\ \ell_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} p_1(x) &= y_0 \ell_0(x) + y_1 \ell_1(x) \\ &= y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{(x_1 - x) y_0 + (x - x_0) y_1}{x_1 - x_0}. \end{aligned}$$

Fejlen på $p_1(x)$ for $x \in (x_1, x_2)$ er givet ved

$$e^x - p_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!} e^z$$

for et $z \in (x_1, x_2)$.

Fejlen er negativ, så

$$|e^x - p_1(x)| = \frac{(x - x_0)(x_1 - x)}{2!} e^z.$$

Fejlen er negativ, så

$$|e^x - p_1(x)| = \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^z.$$

Da $x_1 \leq z \leq x_2$ er

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^{x_1} \leq |e^x - p_1(x)| \leq \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^{x_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_1 \leq |e^x - p_1(x)| \leq \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_2$$

Fejlen er negativ, så

$$|e^x - p_1(x)| = \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^z.$$

Da $x_1 \leq z \leq x_2$ er

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^{x_1} \leq |e^x - p_1(x)| \leq \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^{x_2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_1 \leq |e^x - p_1(x)| \leq \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_2$$

Vi vurderer nu kun opad på fejlen.

Fejlen er negativ, så

$$|e^x - p_1(x)| = \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^z.$$

Da $x_1 \leq z \leq x_2$ er

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^{x_1} \leq |e^x - p_1(x)| \leq \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^{x_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_1 \leq |e^x - p_1(x)| \leq \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_2$$

Vi vurderer nu kun opad på fejlen. For den øvre grænse

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_2$$

har vi, at

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_2} \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!} = \frac{(x_1-x_0)^2}{8}$$

Fejlen er negativ, så

$$|e^x - p_1(x)| = \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^z.$$

Da $x_1 \leq z \leq x_2$ er

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^{x_1} \leq |e^x - p_1(x)| \leq \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}e^{x_2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_1 \leq |e^x - p_1(x)| \leq \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_2$$

Vi vurderer nu kun opad på fejlen. For den øvre grænse

$$\frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!}y_2$$

har vi, at

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_2} \frac{(x-x_0)(x_1-x)}{2!} = \frac{(x_1-x_0)^2}{8}$$

så med $h = x_1 - x_0$ vil

$$|e^x - p_1(x)| \leq \frac{h^2}{8}y_1 \leq \frac{h^2}{8}e.$$

Eksempel: kvadratisk interpolation

Betragt igen e^x på $[0,1]$ med værdier kendt i $x_0 < x_1 < x_2$ resp.

Eksempel: kvadratisk interpolation

Betragt igen e^x på $[0, 1]$ med værdier kendt i $x_0 < x_1 < x_2$ resp. Find kvadratisk interplation for et $x \in (x_0, x_2)$ og dens fejl.

Eksempel: kvadratisk interpolation

Betragt igen e^x på $[0,1]$ med værdier kendt i $x_0 < x_1 < x_2$ resp. Find kvadratisk interplation for et $x \in (x_0, x_2)$ og dens fejl.

Vi ved, at

$$\ell_0(x) \quad = \quad \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

Eksempel: kvadratisk interpolation

Betragt igen e^x på $[0,1]$ med værdier kendt i $x_0 < x_1 < x_2$ resp. Find kvadratisk interplation for et $x \in (x_0, x_2)$ og dens fejl.

Vi ved, at

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\
\ell_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}
\end{aligned}$$

Eksempel: kvadratisk interpolation

Betragt igen e^x på $[0,1]$ med værdier kendt i $x_0 < x_1 < x_2$ resp. Find kvadratisk interplation for et $x \in (x_0, x_2)$ og dens fejl.

Vi ved, at

$$\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\
\ell_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
\ell_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}
\end{aligned}$$

Eksempel: kvadratisk interpolation

Betragt igen e^x på $[0,1]$ med værdier kendt i $x_0 < x_1 < x_2$ resp. Find kvadratisk interplation for et $x \in (x_0, x_2)$ og dens fejl.

Vi ved, at

$$
\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \\
\ell_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\
\ell_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}
\end{aligned}
$$

og

$$
p_2(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \ell_2(x).
$$

Eksempel: kvadratisk interpolation

Betragt igen e^x på $[0, 1]$ med værdier kendt i $x_0 < x_1 < x_2$ resp. Find kvadratisk interplation for et $x \in (x_0, x_2)$ og dens fejl.

Vi ved, at

$$
\begin{aligned}
\ell_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\
\ell_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
\ell_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}
\end{aligned}
$$

og

$$p_2(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \ell_2(x).$$

Fejlen er

$$e^x - p_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{3!} e^z$$

for et $z \in (x_0, x_2)$.

Som tidligere,

$$|e^x - p_2(x)| \leq \left| \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} \right| e$$

Som tidligere,

$$|e^x - p_2(x)| \leq \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} \right| e$$

Antag, at $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$. Maple udregninger giver hurtigt, at

$$\max_{x \in [x_0, x_2]} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{6} = \frac{h^3}{9\sqrt{3}}.$$