Introduktion til numerisk analyse	Blok 1, 2020

Test eksamen II

Ansvarlige: M. Bladt og S. Talebi *Date: 2.09.2020*

Opgave 1.

(a) Betragt følgen $x_n = \alpha n^2 3^{-n}$ for $n \in \mathbb{N}$, hvor α er en konstant.
  (i) Er følgen stabil? Forklar hvorfor.
  (ii) Skriv en differenligning som har x_n som en generisk løsning.

(b) Betragt differenligningen $5x_{n+2} - 3x_{n+1} - 2x_n = 0$.
  (i) Find dens generiske løsning.
  (ii) Find løsningen så at $x_0 = 1$ og $x_1 = -1$.

(c) Antag at differenligningen i (b) er modificeret til $5x_{n+3} - 3x_{n+1} - 2x_n = 0$. Er denne differensligning stabil? Forklar hvorfor.

Opgave 2. For hver af nedenstående funktioner, foreslå en metode til udregning af y som undgår tab af præcision for små værdier af x

(a) $y = \sqrt{e^x - e^{-3x}}$ (Ignorer led som er $o(x^3)$.)
(b) $y = \sqrt{1+e^x} - \sqrt{1+e^{-2x}}$ (Ignorer led som er $o(x^3)$.)
(c) $y = \sqrt{e^x - e^{-x}} - \sqrt{e^{2x} - e^{-3x}}$ (Ignorer led som er $o(x^3)$.)
(d) $y = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{2x+1}$ (Ignorer led som er $o(x^3)$.)
(e) $y = \log\left(\sqrt{1+x^3} - 1\right)$ (Ignorer led som er $o(x^4)$.)
(f) $y = \log\left(e^x - e^{-x}\right) - \log(1 - e^{-2x})$ (Ignorer led som er $o(x^3)$.)

Opgave 3. I denne opgave ønsker vi at beregne grundtallet for den naturlige logaritme, e, med 4 decimalers præcision. Problemet skal løses ved at opstille en ligning hvis løsning er e, og som derefter løses ved brug af Newton's metode. Der skal redegøres for detaljerne i udregningen såsom initialpunkt, iterationer, og begrundelse for stopkriteriet.

(Vink: brug at $\log(e) = 1$ til at opstille en passende ligning)

Opgave 4. Vis, at man kan udregne den afledede $f'(x)$ som

$$f'(x) = \frac{-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x)}{2h} + O(h^2).$$

Bemærk, at for $h \downarrow 0$ bruges udelukkende punkter til højre for x. Denne formel kan bruges hvis der skal findes afledede i et randpunkt. (Vink: se på rækkeudviklingerne for $f(x+2h)$ og $f(x+h)$)

Opgave 5. Betragt punkterne $(1,1)$, $(2,0)$ og $(3,0)$. Find det entydigt bestemte polynomium som interpolerer disse punkter på hhv. Lagrange form og Newon's form.

Opgave 6. Vi ønsker at udregne omkredsen O af en ellipse med radier 1 og 2, hvilket er givet ved formlen

$$O = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2(\theta)}d\theta.$$

(a) Beregn O ved brug af Trapez formlen med $h = \pi/4$ og $h = \pi/8$.
(b) Anvend Richardson ekstrapolation og angiv resultatet.
(c) Estimer fejlen på O ved Trapezmetoden og $h = \pi/8$.

Vink: Det kan uden bevis anvendes, at hvis $f(\theta) = \sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2(\theta)}$ så er $f''(x)$ voksende i hele $[0,\pi/2]$ med $f''(0) = -3/4$ og $f''(\pi/2) = 1.5$. Desuden kan følgende værdier af f bruges:

θ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(\theta)$	1	0.9435	0.7906	0.5999	0.5000