Introduktion til numerisk analyse — Blok 1, 2020

Løsning til Test eksamen I

Ansvarlige: M. Bladt og S. Talebi — *Date: 2.09.2020*

Opgave 1. For hver af de følgende funktioner, foreslå en metode til beregning af y for små x så vi undgår tab af præcision:

(a) $y = x^2 - \sin^2 x$ (Ignorer led af orden $o(x^7)$.)
(b) $y = \frac{x^2-\sin^2 x}{2-\sqrt{x+4}}$ (Ignorer led af orden $o(x^6)$.)
(c) $y = 2x + e^x - e^{3x}$ (Ignorer led af orden $o(x^3)$.)
(d) $y = \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}$ (Ignorer led af orden $o(x^5)$.)

Løsning:

(a) Betragt Taylor udviklingen af $\sin x$ omkring $x = 0$. Så er,

$$
\begin{aligned}
y = (x+\sin x)(x-\sin x) &= (x+\sin x)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) \\
&= (x+\sin x) \times \frac{x^3}{6}\left(1 - \frac{x^2}{20}\right) + o(x^6)
\end{aligned}
$$

Derfor er

$$
y \approx \frac{x^3}{6}(x+\sin x)\left(1 - \frac{x^2}{20}\right).
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x^2-\sin^2 x}{2-\sqrt{x+4}} \times \frac{2+\sqrt{x+4}}{2+\sqrt{x+4}} \\
&= \frac{x^2-\sin^2 x}{-x}\left(2+\sqrt{x+4}\right)
\end{aligned}
$$

Fra (a) har vi, at $x^2 - \sin^2 x = (x+\sin x) \times \frac{x^3}{6}\left(1-\frac{x^2}{20}\right) + o(x^6)$, så

$$
\begin{aligned}
y &= \left(\frac{x^2}{6}(x+\sin x)\left(\frac{x^2}{20} - 1\right) + o(x^5)\right) \times \left(2+\sqrt{x+4}\right) \\
&= \frac{x^2}{6}(x+\sin x)\left(\frac{x^2}{20} - 1\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right) + o(x^5).
\end{aligned}
$$

Heraf fås,

$$
y \approx \frac{x^2}{6}(x+\sin x)\left(\frac{x^2}{20} - 1\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right).
$$

(c) Ved brug af Taylor udvikling for e^x og e^{3x} omkring $x=0$ fås, at

$$\begin{aligned} y &= 2x + e^x - e^{3x} \\ &= 2x + \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\Big) - \Big(1 + 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^3}{3!} + o(x^3)\Big) \\ &= -4x^2 - \frac{26x^3}{3!} + o(x^3) = -x^2\Big(4 + \frac{13x}{3}\Big) + o(x^3) \end{aligned}$$

så at $y \approx -x^2\Big(4 + \frac{13x}{3}\Big)$.

(d) Vi har, at

$$\begin{aligned} y &= \Big(\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}\Big) \times \frac{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \\ &= \frac{\tan x - \sin x}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \end{aligned}$$

Taylor udviklinger af $\tan x$ og $\sin x$ omkring $x=0$ giver så, at

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \left(\Big(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\Big)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{8} + o(x^5)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \cdot \frac{x^3}{2}\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) + o(x^5) \end{aligned}$$

og dermed

$$y \approx \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \cdot \frac{x^3}{2}\left(1 + \frac{x^2}{4}\right).$$

Opgave 2. Betragt differensligningen $x_{n+3} - 2x_{n+1} - x_n = 0$.

(a) Hvad er dens karateristiske polynomium?

(b) Hvilken af følgende muligheder er løsning? Forklar hvorfor.

  (i) $x_n = \alpha(-1)^n$ for et eller andet α.

  (ii) $x_n = \beta$ for et eller andet β.

  (iii) $x_n = \gamma\big(\frac{1}{2}\big)^n$ for et eller andet γ.

(c) Find alle andre generiske løsninger.

(d) Er differensligningen stabil? Forklar.

Solution. Det karakteristiske polynomium er $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - 1$. Det er let at se, at $p(-1) = 0$ så (i) er en løsning. For at opnå andre løsninger observerer vi, at $(\lambda + 1)$ er en faktor for p (da $p(-1) = 0$). Ved brug Horner's metode fås så, at

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 1)$$

Ved at løse $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ finder vi de andre rødder for p, hvilke er $\lambda = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Derfor er

$$x_n = \alpha(-1)^n + \beta\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \gamma\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

en generisk løsning til differensligningen for nogle relle tal α, β, γ. Endelig ses at differensligninen ikke er stabil da $|\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})| > 1$.

Opgave 3. Plastikkonstanten ρ er defineret som den entydig bestemte reelle løsning til

$$x^3 = x + 1.$$

Beregn plastikkonstanten med 4 decimalers præcision via Newton's metode. Der skal redegøres for detaljerne i udregningen såsom initialpunkt, iterationer, og begrundelse for stopkriteriet.

Løsning: Definer $f(x) = x^3 - x - 1$. Så er $x^3 = x + 1$ ækvivalent med $f(x) = 0$. Grafisk inspektion (eller blot en skitse) viser, at skæringen mellem linien $x+1$ og x^3 ligger på den positive reelle akse. For $x = 1$ ligger linien over x^3 mens for $x = 2$ ligger x^3 over linien. Derfor må løsningen af $f(x) = 0$ ligge mellem 1 og 2. Tag så $x_0 = 1.5$.

Nu er

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x - 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

så Newton's algoritme bliver så

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n - 1}{3x_n^2 - 1}.$$

Vi får så

$$\begin{aligned} x_0 &= 1.5 \\ x_1 &= 1.34782609 \\ x_2 &= 1.32520040 \\ x_3 &= 1.32471817 \\ x_4 &= 1.32471795. \end{aligned}$$

Vi ser, at de fire første decimaler er de samme for x_3 og x_4. Vi gætter derfor på løsningen med fire decimalers præcision derfor er $x = 1.3247$. For at verificere dette er vi på 1.3248 og 1.3247. Da nu

$$f(1.3248) > 0 \text{ og } f(1.3247) < 0$$

så må den løsningen være indeholdt i de åbne interval $(1.3247, 1.3248)$. Derfor må løsningen x være på formen $x = 1.3247 *********...$, hvor $*$ repræsentere tal mellem 0 og 9. $\square$

Opgave 4. Vis at matricen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

er positiv definit, og find Cholesky dekompositionen. Find også Doolittle faktoriseringen.

Løsning: Positive definit:

$$\begin{aligned}(x,y)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= (x,y)\begin{pmatrix}2x+y\\x+3y\end{pmatrix}\\ &= 2x^2+xy+xy+3y^2\\ &= 2x^2+2xy+3y^2\\ &= x^2+(x^2+2xy+y^2)+2y^2\\ &= x^2+(x+y)^2+2y^2.\end{aligned}$$

Derfor vil

$$(x,y)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} > 0$$

for all $(x,y) \neq 0$, i.e. $\boldsymbol{A}$ er positiv definit.

Da matricen ydermere er symmetrisk, så findes Cholesky dekompositionen. Denne er givet ved

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{A}$$

for en nedre triangulær matrix $\boldsymbol{L}$. Vi løser denne ligning,

$$\begin{pmatrix}\ell_{11} & 0\\ \ell_{21} & \ell_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell_{11} & \ell_{21}\\ 0 & \ell_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Dette giver

$$\ell_{11}^2 = 2 \implies \ell_2 = \sqrt{2}$$

og dermed at

$$\ell_{21}\ell_{11} = 1 \implies \ell_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

og sluttelig

$$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 3 \implies \ell_{22} = \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Dvs.

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}}\end{pmatrix}.$$

Vi ved også at der findes en entydigt bestemt Doolittle dekomposition hvor alle diagonalelementerne i $\boldsymbol{L}$ er 1. Hvis vi skriver

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{a})^{-1}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{a})\boldsymbol{L}',$$

hvor $\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{a})$ er diagonalmatricen med $\boldsymbol{a}$ som diagonal, så ser vi, at hvis vi vælger

$$\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}}\end{pmatrix}$$

så får vi en LU dekomposition, $\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}$ med

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

og

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

□

Opgave 5. Betagt funktionen

$$f(x) = x^{\ln(x)}.$$

Udregn den afledte i punktet $x = 5$ med $h = 0.1$ ved brug af

(a) $f'(5) \approx \phi_1(h) = \frac{f(5+h)-f(5-h)}{2h}$;
(b) Richardson ekstrapolation af $\phi_1(h)$;
(c) dobbelt Richardson ekstrapolation af $\phi_1(h)$;
(d) udregn den eksakte differentialkvotient i 5 og sammenlign

Løsning: (a) Vi finder

$$\phi_1(h) = \frac{14.2168.... - 12.4992...}{0.2} = 8.587783.$$

(b)

$$\phi_1\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{13.7689... - 12.9104...}{0.1} = 8.5848469.$$

Så er Richardson ekstrapolationen

$$\phi_2(h) := \frac{4}{3}\phi_1(h/2) - \frac{1}{3}\phi_1(h) = 8.583868.$$

(c) Udregn nu først

$$\phi_1(h/4) = \frac{13.5497... - 13.1205...}{0.05} = 8.5841129.$$

Så er

$$\phi_2(h/2) = \frac{4}{3}\phi_1(h/4) - \frac{1}{3}\phi_1(h/2) = 8.5838682.$$

Fejlen på $\phi_2(h)$ er $O(h^4)$ så dermed bliver Richardson ekstrapolationen af denne

$$\frac{16}{15}\phi_2(h/2) - \frac{1}{15}\phi_2(h) = 8.58386827...$$

(d) Exact resultat. Skriv

$$x^{\log(x)} = \exp(\log(x)^2)$$

så

$$\frac{d}{dx}x^{\log(x)} = \exp(\log(x)^2)\frac{2\log(x)}{x} = x^{\log(x)}\frac{2\log(x)}{x}$$

hvis værdi evalueret i 5 giver 8.58386824...

□

Opgave 6. Betragt integralet

$$\int_1^{2^m} \frac{1}{y} dy.$$

(a) Vis, at dette integral kan udregnes via Trapez formlen med en fejl på højst

$$\frac{(2^m - 1)h^2}{6}$$

for en given step længde på h.

(b) For en præcision på 4 decimaler, find antal inddelinger som garanterer denne præcision (som funktion af m).

(c) Ved at udnytte, at integralet er lig med logaritmefunktionen, bedes I designe en alternativ metode til udregning af dette via Trapez formlen således at fejlen er domineret af

$$\frac{mh^2}{6}.$$

(d) For en præcision på 4 decimaler, find antal inddelinger som garanterer denne præcision med denne forbedring.

Løsning: (a) Fejlen ved sammensat Trapezformel er

$$E = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

for et $\xi \in [1, 2^m]$. Her er $f(x) = 1/x$, og dermed

$$f''(x) = 2x^{-3},$$

som har maximal værdi i for $x = 1$ som er $f''(1) = 2$. Derfor er fejlen nuemrisk højst

$$|E| \leq \frac{2^m - 1}{12} h^2 2 = \frac{2^m - 1}{6} h^2.$$

(b) Vi løser

$$\frac{2^m - 1}{6} h^2 = \frac{2^m - 1}{6} h^2 < 0.0001$$

som giver

$$h < \sqrt{\frac{0.0006}{2^m - 1}}$$

så antal inddelinger af $[1, 2^m]$ skal være større end

$$\frac{2^m - 1}{\sqrt{\frac{0.0006}{2^m - 1}}} = \frac{(2^m - 1)^{3/2}}{\sqrt{0.0006}}.$$

(c) Udnyt at

$$\int_1^x \frac{1}{y} dy = \log(x)$$

så at

$$\int_1^{2^m} \frac{1}{y} dy = \log(2^m) = m \log(2) = m \int_1^2 \frac{1}{y} dy.$$

Derfor er det nok at finde fejlen på

$$m\int_1^2 \frac{1}{y}dy$$

hvilket er m gange fejlen på

$$\int_1^2 \frac{1}{y}dy.$$

Sidsnævnte får vi med $m = 1$ fra (a) til $h^2/6$ så den total fejl bliver $mh^2/6$.

(d) Løs

$$mh^2/6 < 0.0001 \implies h < \sqrt{\frac{0.0006}{m}}$$

så antal inddelinger af $[1,2]$ skal være større end

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{0.0006}{m}}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{0.0006}}.$$