Løsning af lineære ligninger

Matrix normer

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Matrix normer

Lad V være et vektorrum.

Matrix normer

Lad V være et vektorrum. Vi husker på, at en norm, $\|\cdot\|$, er en funktion

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+ = [\infty, 0)$$

som opfylder

Matrix normer

Lad V være et vektorrum. Vi husker på, at en norm, $\|\cdot\|$, er en funktion

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+ = [\infty, 0)$$

som opfylder

1. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$

Matrix normer

Lad V være et vektorrum. Vi husker på, at en norm, $\|\cdot\|$, er en funktion

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+ = [\infty, 0)$$

som opfylder

1. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Matrix normer

Lad V være et vektorrum. Vi husker på, at en norm, $\|\cdot\|$, er en funktion

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+ = [\infty, 0)$$

som opfylder

1. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda\boldsymbol{x}\| = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\| \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Matrix normer

Lad V være et vektorrum. Vi husker på, at en norm, $\|\cdot\|$, er en funktion

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+ = [\infty, 0)$$

som opfylder

1. $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
2. $\|\lambda \boldsymbol{x}\| = |\lambda| \|\boldsymbol{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

For en matrix definerer vi nu den af normen $\|\cdot\|$ inducerede matrix norm ved

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} = \sup\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} : \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\right\}.$$

Øvelse: vis, at den inducerede matrix norm er en norm.

For supremumsnormen på $\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$, skriver vi tilsvarende

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \sup\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\}.$$

For supremumsnormen på $\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$, skriver vi tilsvarende

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \sup\{\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\}.$$

Sætning

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

For supremumsnormen på $\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$, skriver vi tilsvarende

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \sup\{\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\}.$$

Sætning

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Bevis:

For supremumsnormen på $\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$, skriver vi tilsvarende

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \sup\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\}.$$

Sætning

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Bevis:

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \sup\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\}$$

For supremumsnormen på $\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$, skriver vi tilsvarende

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \sup\{\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\}.$$

Sætning

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Bevis:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\|_\infty &= \sup\{\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\} \\ &= \sup\left\{\max_i |(\boldsymbol{Ax})_i| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\right\}\end{aligned}$$

For supremumsnormen på $\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$, skriver vi tilsvarende

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \sup\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\}.$$

Sætning

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Bevis:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\|_\infty &= \sup\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\} \\
&= \sup\left\{\max_i |(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\right\} \\
&= \max_i \sup\left\{|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\right\}
\end{aligned}$$

For supremumsnormen på $\mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|$, skriver vi tilsvarende

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \sup\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\}.$$

Sætning

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Bevis:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{A}\|_\infty &= \sup\{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_\infty : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\} \\
&= \sup\left\{\max_i |(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\right\} \\
&= \max_i \sup\{|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})_i| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\} \\
&= \max_i \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1\right\}.
\end{aligned}$$

For $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = 1$ har vi at $|x_i| \leq 1$

For $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = 1$ har vi at $|x_i| \leq 1$ og dermed at

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

For $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = 1$ har vi at $|x_i| \leq 1$ og dermed at

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Således fås

$$\|A\|_\infty \quad \leq \quad \max_i \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\}$$

For $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = 1$ har vi at $|x_i| \leq 1$ og dermed at

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Således fås

$$\|A\|_\infty \quad \leq \quad \max_i \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

For $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = 1$ har vi at $|x_i| \leq 1$ og dermed at

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Således fås

$$\|A\|_\infty \quad \leq \quad \max_i \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

På den anden side, for hvert i

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

For $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = 1$ har vi at $|x_i| \leq 1$ og dermed at

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Således fås

$$\|A\|_\infty \quad \leq \quad \max_i \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

På den anden side, for hvert i

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

og der opnås lighedsten ved at vælge $x_j = \text{sign}(a_{ij})$.

For $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i| = 1$ har vi at $|x_i| \leq 1$ og dermed at

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Således fås

$$\|A\|_\infty \quad \leq \quad \max_i \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

På den anden side, for hvert i

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

og der opnås lighedsten ved at vælge $x_j = \text{sign}(a_{ij})$. Men så er

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \in \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\}.$$

Dermed fås

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| : \|\boldsymbol{x}\|_{\infty} = 1 \right\}$$

Dermed fås

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \max_i \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\} = \|A\|_\infty$$

Dermed fås

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \max_i \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| : \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 \right\} = \|A\|_\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \|A\|_\infty$$

Vi konkluderer, at

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

$\square$

Sætning

1. $\|\boldsymbol{Ax}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|$.
2. $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

Sætning

1. $\|\boldsymbol{Ax}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|$.
2. $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

Bevis:

Sætning

1. $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|$.
2. $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

Bevis: 1. følger af

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup\left\{\left\|\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\| : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right\} \geq \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|/\|\boldsymbol{x}\|$$

for alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Sætning

1. $\|\boldsymbol{Ax}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|$.
2. $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

Bevis: 1. følger af

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup\left\{\left\|\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\| : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right\} \geq \|\boldsymbol{Ax}\|/\|\boldsymbol{x}\|$$

for alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. 2. følger af 1.:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{AB}\| &= \sup\{\|\boldsymbol{ABx}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{Bx}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \end{aligned}$$

Sætning

1. $\|\boldsymbol{Ax}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|$.
2. $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

Bevis: 1. følger af

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup\left\{\left\|\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\| : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right\} \geq \|\boldsymbol{Ax}\|/\|\boldsymbol{x}\|$$

for alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. 2. følger af 1.:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{AB}\| &= \sup\{\|\boldsymbol{ABx}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \\
&\leq \sup\{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{Bx}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \\
&= \|\boldsymbol{A}\| \sup\{\|\boldsymbol{Bx}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\}
\end{aligned}$$

Sætning

1. $\|\boldsymbol{Ax}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|$.
2. $\|\boldsymbol{AB}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|$.

Bevis: 1. følger af

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sup\left\{\left\|\boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right\| : \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\right\} \geq \|\boldsymbol{Ax}\|/\|\boldsymbol{x}\|$$

for alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. 2. følger af 1.:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{AB}\| &= \sup\{\|\boldsymbol{ABx}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{Bx}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \\ &= \|\boldsymbol{A}\| \sup\{\|\boldsymbol{Bx}\| : \|\boldsymbol{x}\| = 1\} \\ &= \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|.\end{aligned}$$

$\square$

En anden populær matrix–norm er den såkaldte Frobenius norm eller $\|\cdot\|_2$–normen, givet ved

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}.$$

En anden populær matrix–norm er den såkaldte Frobenius norm eller $\|\cdot\|_2$–normen, givet ved

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}.$$

Dette er ikke en induceret norm, hvilket hurtigt kan se ved at den norm af identitetsmatricen ikke er 1 som det er tilfældet for alle inducerede normer.

En anden populær matrix–norm er den såkaldte Frobenius norm eller $\|\cdot\|_2$–normen, givet ved

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}.$$

Dette er ikke en induceret norm, hvilket hurtigt kan se ved at den norm af identitetsmatricen ikke er 1 som det er tilfældet for alle inducerede normer. Til gengæld er den invariant under unitære transformationer såsom rotationer.

En anden populær matrix–norm er den såkaldte Frobenius norm eller $\|\cdot\|_2$–normen, givet ved

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}.$$

Dette er ikke en induceret norm, hvilket hurtigt kan se ved at den norm af identitetsmatricen ikke er 1 som det er tilfældet for alle inducerede normer. Til gengæld er den invariant under unitære transformationer såsom rotationer. Det er let at se, at

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \operatorname{trace}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2,$$

ved direkte opskrivning af $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$, og hvor σ_i^2, $i = 1, ..., r$ er egenværdierne for $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$.

En anden populær matrix–norm er den såkaldte Frobenius norm eller $\|\cdot\|_2$–normen, givet ved

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}.$$

Dette er ikke en induceret norm, hvilket hurtigt kan se ved at den norm af identitetsmatricen ikke er 1 som det er tilfældet for alle inducerede normer. Til gengæld er den invariant under unitære transformationer såsom rotationer. Det er let at se, at

$$\|\boldsymbol{A}\|_F = \text{trace}\,(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^r \sigma_i^2,$$

ved direkte opskrivning af $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$, og hvor σ_i^2, $i = 1, ..., r$ er egenværdierne for $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$.

Pas på ikke at forveksle Frobenius normen med den af vektornormen $\|\cdot\|_2$ inducerede norm

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sup_{\boldsymbol{x}} \frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}_2\|}$$

hvor så

$$\|\boldsymbol{A}\|_2 = \max_i |\sigma_i^2|.$$