Interpolation

Interpolationssætningen

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Interpolation

Lad $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ være punkter i $\mathbb{R}^2$ således at x_i'erne er parvist forskellige.

Interpolation

Lad $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ være punkter i $\mathbb{R}^2$ således at x_i'erne er parvist forskellige. Vi ønsker at finde et polynomium p således at

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Interpolation

Lad $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ være punkter i $\mathbb{R}^2$ således at x_i'erne er parvist forskellige. Vi ønsker at finde et polynomium p således at

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, ..., n.$$

Vi siger så, at p interpolerer de n punkter.

Interpolation

Lad $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ være punkter i $\mathbb{R}^2$ således at x_i'erne er parvist forskellige. Vi ønsker at finde et polynomium p således at

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, ..., n.$$

Vi siger så, at p interpolerer de n punkter.

Lad os først simplificere problemet.

Interpolation

Lad $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ være punkter i $\mathbb{R}^2$ således at x_i'erne er parvist forskellige. Vi ønsker at finde et polynomium p således at

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, ..., n.$$

Vi siger så, at p interpolerer de n punkter.

Lad os først simplificere problemet. Kan vi finde et polynomium $p_i(x)$ som er nul i x_j, $j \neq i$?

Interpolation

Lad $(x_0, y_0), ..., (x_n, y_n)$ være punkter i $\mathbb{R}^2$ således at x_i'erne er parvist forskellige. Vi ønsker at finde et polynomium p således at

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, ..., n.$$

Vi siger så, at p interpolerer de n punkter.

Lad os først simplificere problemet. Kan vi finde et polynomium $p_i(x)$ som er nul i x_j, $j \neq i$? Det er nemt:

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j).$$

Interpolation

Lad $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ være punkter i $\mathbb{R}^2$ således at x_i'erne er parvist forskellige. Vi ønsker at finde et polynomium p således at

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \dots, n.$$

Vi siger så, at p interpolerer de n punkter.

Lad os først simplificere problemet. Kan vi finde et polynomium $p_i(x)$ som er nul i x_j, $j \neq i$? Det er nemt:

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j).$$

Vi kan så også finde et polynomium $\ell_i(x)$:

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

Interpolation

Lad $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ være punkter i $\mathbb{R}^2$ således at x_i'erne er parvist forskellige. Vi ønsker at finde et polynomium p således at

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Vi siger så, at p interpolerer de n punkter.

Lad os først simplificere problemet. Kan vi finde et polynomium $p_i(x)$ som er nul i x_j, $j \neq i$? Det er nemt:

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j).$$

Vi kan så også finde et polynomium $\ell_i(x)$:

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

nemlig,

$$\ell_i(x) = \frac{p_i(x)}{p_i(x_i)} = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Interpolation

- Disse polynomier er alle af orden n.

Interpolation

- Disse polynomier er alle af orden n.
- Definer
$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x).$$

Interpolation

- Disse polynomier er alle af orden n.
- Definer

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x).$$

Da er $p(x_i) = y_i$ og p interpolerer dermed punkterne.

Interpolation

- Disse polynomier er alle af orden n.
- Definer
$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x).$$
  Da er $p(x_i) = y_i$ og p interpolerer dermed punkterne.
- Denne konstruktion går under navnet Lagrange form af p, og "koordinatpolynomierne" ℓ_j går under navnet kardinalpolynomier.

Interpolation

- Disse polynomier er alle af orden n.
- Definer
$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x).$$
Da er $p(x_i) = y_i$ og p interpolerer dermed punkterne.
- Denne konstruktion går under navnet Lagrange form af p, og "koordinatpolynomierne" ℓ_j går under navnet kardinalpolynomier.
- I Lagrange konstruktionen afhænger kardinalpolynomierne ℓ_i kun af x_i'erne.

Interpolation

- Disse polynomier er alle af orden n.
- Definer
$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x).$$
  Da er $p(x_i) = y_i$ og p interpolerer dermed punkterne.
- Denne konstruktion går under navnet Lagrange form af p, og "koordinatpolynomierne" ℓ_j går under navnet kardinalpolynomier.
- I Lagrange konstruktionen afhænger kardinalpolynomierne ℓ_i kun af x_i'erne.
- Fordel: Hvis vi for de samme x_i skal interpolere en række forskellige data y_i.

Interpolation

- Disse polynomier er alle af orden n.
- Definer
$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j(x).$$
Da er $p(x_i) = y_i$ og p interpolerer dermed punkterne.
- Denne konstruktion går under navnet Lagrange form af p, og "koordinatpolynomierne" ℓ_j går under navnet kardinalpolynomier.
- I Lagrange konstruktionen afhænger kardinalpolynomierne ℓ_i kun af x_i'erne.
- Fordel: Hvis vi for de samme x_i skal interpolere en række forskellige data y_i.
- Ulempe: Hvis der er ændringer eller tilføjelser i x_i'erne, så skal koordinatpolynomierne genberegnes.

- I Lagrange konstruktionen kan vi betragte kardinalpolynomierne som en slags base, hvorved vi kan finde alle værdier af p ved simple linearkombinationer.

- I Lagrange konstruktionen kan vi betragte kardinalpolynomierne som en slags base, hvorved vi kan finde alle værdier af p ved simple linearkombinationer.
- Det klart at denne basis ikke er linæer uafhængig, og koordinatpolynomierne er alle af højeste orden.

- I Lagrange konstruktionen kan vi betragte kardinalpolynomierne som en slags base, hvorved vi kan finde alle værdier af p ved simple linearkombinationer.
- Det klart at denne basis ikke er linæer uafhængig, og koordinatpolynomierne er alle af højeste orden.
- Hvad med at bruge $1, x, ..., x^n$ i stedet?

- I Lagrange konstruktionen kan vi betragte kardinalpolynomierne som en slags base, hvorved vi kan finde alle værdier af p ved simple linearkombinationer.
- Det klart at denne basis ikke er linæer uafhængig, og koordinatpolynomierne er alle af højeste orden.
- Hvad med at bruge $1, x, ..., x^n$ i stedet?

Så skal vi altså finde et polynomium

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

så at

$$p(x_i) = y_i$$

dvs. løse

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Er koefficientmatricen invertibel?

Er koefficientmatricen invertibel?

Hvis den var singulær, så ville de $n+1$ søjler i matricen være lineært afhængige.

Er koefficientmatricen invertibel?

Hvis den var singulær, så ville de $n+1$ søjler i matricen være lineært afhængige. Dvs. der ville findes $(a_0, ..., a_n) \neq \mathbf{0}$ så at

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} x_0^n \\ x_1^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Er koefficientmatricen invertibel?

Hvis den var singulær, så ville de $n+1$ søjler i matricen være lineært afhængige. Dvs. der ville findes $(a_0, ..., a_n) \neq \mathbf{0}$ så at

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} x_0^n \\ x_1^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Men så vil

$$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$$

være et ikke–nul polynomium af orden højst n med $n+1$ rødder (nemlig $x_0, ..., x_n$).

Er koefficientmatricen invertibel?

Hvis den var singulær, så ville de $n+1$ søjler i matricen være lineært afhængige. Dvs. der ville findes $(a_0, ..., a_n) \neq \mathbf{0}$ så at

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} x_0^n \\ x_1^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Men så vil

$$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$$

være et ikke–nul polynomium af orden højst n med $n+1$ rødder (nemlig $x_0, ..., x_n$).

Dette er ikke muligt, så derfor må koefficientmatricen være ikke singulær.

Er koefficientmatricen invertibel?

Hvis den var singulær, så ville de $n+1$ søjler i matricen være lineært afhængige. Dvs. der ville findes $(a_0, ..., a_n) \neq \mathbf{0}$ så at

$$a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} x_0^n \\ x_1^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Men så vil

$$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$$

være et ikke–nul polynomium af orden højst n med $n+1$ rødder (nemlig $x_0, ..., x_n$).

Dette er ikke muligt, så derfor må koefficientmatricen være ikke singulær.

Koefficientmatricen går under navnet Vandermonde.

Interpolationssætningen

Både Lagrange og Vandermonde metoderne giver eksistens af interpolationspolynomierne. Vandermonde giver også entydighed.

Interpolationssætningen

Både Lagrange og Vandermonde metoderne giver eksistens af interpolationspolynomierne. Vandermonde giver også entydighed.

Dvs. vi har vist

Sætning (Interpolationssætningen)

Lad $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ *være punkter i* $\mathbb{R}^2$ *således at* x_i*'erne er parvis forskellige. Så findes der et entydigt bestemt polynomium* p_n *af orden højst* n *således at*

$$p_n(x_i) = y_i.$$

Interpolationssætningen

Både Lagrange og Vandermonde metoderne giver eksistens af interpolationspolynomierne. Vandermonde giver også entydighed.

Dvs. vi har vist

Sætning (Interpolationssætningen)

Lad $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ *være punkter i* $\mathbb{R}^2$ *således at* x_i*'erne er parvis forskellige. Så findes der et entydigt bestemt polynomium* p_n *af orden højst* n *således at*

$$p_n(x_i) = y_i.$$

Vi viser nu en tredje metode kaldet Newton form a polynomiet, som nogen gange er de andre metoder overlegen.

Interpolationssætningen

Både Lagrange og Vandermonde metoderne giver eksistens af interpolationspolynomierne. Vandermonde giver også entydighed.

Dvs. vi har vist

Sætning (Interpolationssætningen)

Lad $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ *være punkter i* $\mathbb{R}^2$ *således at* x_i*'erne er parvis forskellige. Så findes der et entydigt bestemt polynomium* p_n *af orden højst* n *således at*

$$p_n(x_i) = y_i.$$

Vi viser nu en tredje metode kaldet Newton form a polynomiet, som nogen gange er de andre metoder overlegen.

Det er vigtigt at notere sig at der findes en mængde forskellige metoder til udregning a interpolation mellem punkter, men polynomiet selv er entydigt bestemt.

Bevis: eksistens

For $n = 0$ holder sætningen trivielt med $p_0(x) = c_0$.

Bevis: eksistens

For $n = 0$ holder sætningen trivielt med $p_0(x) = c_0$.
Antag, at sætningen holder for $n - 1$, i.e. findes et polynomium p_{n-1} af orden højst $n - 1$ med

$$p_{n-1}(x_j) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n - 1.$$

Bevis: eksistens

For $n = 0$ holder sætningen trivielt med $p_0(x) = c_0$.
Antag, at sætningen holder for $n-1$, i.e. findes et polynomium p_{n-1} af orden højst $n-1$ med

$$p_{n-1}(x_j) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

Definer så

$$p_n(x) \quad = \quad p_{n-1}(x) + c_n \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j).$$

Bevis: eksistens

For $n = 0$ holder sætningen trivielt med $p_0(x) = c_0$.
Antag, at sætningen holder for $n-1$, i.e. findes et polynomium p_{n-1} af orden højst $n-1$ med

$$p_{n-1}(x_j) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

Definer så

$$p_n(x) \quad = \quad p_{n-1}(x) + c_n \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j).$$

Så er

$$p_n(x_j) = p_{n-1}(x_j) + 0 = y_j, \quad j = 0, ..., n-1$$

Bevis: eksistens

For $n = 0$ holder sætningen trivielt med $p_0(x) = c_0$.
Antag, at sætningen holder for $n-1$, i.e. findes et polynomium p_{n-1} af orden højst $n-1$ med

$$p_{n-1}(x_j) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-1.$$

Definer så

$$p_n(x) \quad = \quad p_{n-1}(x) + c_n \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j).$$

Så er

$$p_n(x_j) = p_{n-1}(x_j) + 0 = y_j, \quad j = 0, ..., n-1$$

og vi kan løse

$$y_n = p_n(x_n) = p_{n-1}(x_n) + c_n \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

ved at sætte

$$c_n = (y_n - p_{n-1}(x_n)) \Big/ \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).$$

Bevis: entydighed

Lad p_n og q_n være to polynomier af orden højst n med

$$y_i = p_n(x_i) = q_n(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Bevis: entydighed

Lad p_n og q_n være to polynomier af orden højst n med

$$y_i = p_n(x_i) = q_n(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Så vil polynomiet

$$d(x) = p_n(x) - q_n(x)$$

have $n + 1$ forskellige relle rødder, i.e.

$$d(x) = c(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Bevis: entydighed

Lad p_n og q_n være to polynomier af orden højst n med

$$y_i = p_n(x_i) = q_n(x_i), \quad i = 0, ..., n.$$

Så vil polynomiet

$$d(x) = p_n(x) - q_n(x)$$

have $n + 1$ forskellige relle rødder, i.e.

$$d(x) = c(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Dette kan kun lade sig gøre hvis $c = 0$ da dets orden ellers er $n + 1$. Dermed er

$$0 \equiv d(x) = p_n(x) - q_n(x) \implies p_n = q_n.$$

□

Newton's form

Newton's form af interpolationspolynmierne er således

$$\begin{aligned} p_0(x) &= c_0 \\ p_i(x) &= p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j). \end{aligned}$$

Newton's form

Newton's form af interpolationspolynmierne er således

$$\begin{aligned} p_0(x) &= c_0 \\ p_i(x) &= p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j). \end{aligned}$$

Vi så, at vi kan udregne koefficienterne c_i ved

$$c_i = (y_i - p_{i-1}(x_i)) \,/\, \prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j).$$

Newton's form

Newton's form af interpolationspolynmierne er således

$$\begin{aligned} p_0(x) &= c_0 \\ p_i(x) &= p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j). \end{aligned}$$

Vi så, at vi kan udregne koefficienterne c_i ved

$$c_i = (y_i - p_{i-1}(x_i)) \, / \prod_{j=0}^{i-1} (x_i - x_j).$$

Det er derfor vigtigt, at vi kan udregne $p_i(x_{i+1})$ på en effektiv måde.

Newton's form

Newton's form af interpolationspolynmierne er således

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= c_0 \\
p_i(x) &= p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j).
\end{aligned}
$$

Vi så, at vi kan udregne koefficienterne c_i ved

$$
c_i = (y_i - p_{i-1}(x_i)) \,/ \prod_{j=0}^{i-1}(x_i - x_j).
$$

Det er derfor vigtigt, at vi kan udregne $p_i(x_{i+1})$ på en effektiv måde. En sådan måde er givet ved Horner's metode, som vi redegør for i en følgende præsentation.

- Hvis man skal simulere en funktion på e.g. på et fin-inddelt interval $[a, b]$ og tilpasse et interpolerende polynomium for at regne et eller andet ud, så er Langrange klart overlegen.
- Hvis man er i situationen hvor man ikke repeterer de samme punkter igen og igen, men kan få tilføjet nye punkter (som i en cohort analyse situation), så er Newton's metode overlegen, da polynomierne

  $$p_k(x)$$

  kun afhænger af $c_0, ..., c_k$, og tilføjelsen af et nyt punkt tilføjer blot et c_{k+1}.
- Vandermonde lider af problemet med at koefficientmatricen ofte er dårligt kondicioneret.