Løsning af lineære ligninger

LU dekomposition

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

LU dekomposition

- Vi vil nu betragte en dekomposition på formen

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U},$$

hvor $\boldsymbol{L}$ er nedre triangulær og $\boldsymbol{U}$ is øvre triangulær.

LU dekomposition

- Vi vil nu betragte en dekomposition på formen

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U},$$

hvor $\boldsymbol{L}$ er nedre triangulær og $\boldsymbol{U}$ is øvre triangulær.

- Så er

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

ækvivalent med

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} \text{ og } \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}.$$

LU dekomposition

- Vi vil nu betragte en dekomposition på formen

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U},$$

hvor $\boldsymbol{L}$ er nedre triangulær og $\boldsymbol{U}$ is øvre triangulær.

- Så er

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{L}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

ækvivalent med

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} \text{ og } \boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}.$$

- Bemærk også, at

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}.$$

Så lad

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix}$$

og

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \ell_{11} u_{11}$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned} a_{11} &= \ell_{11} u_{11} \\ a_{12} &= \ell_{11} u_{12} \end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \ell_{11} u_{11} \\ a_{12} &= \ell_{11} u_{12} \\ &\vdots \\ a_{1n} &= \ell_{11} u_{1n} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \ell_{11} u_{11} \\ a_{12} &= \ell_{11} u_{12} \\ &\vdots \\ a_{1n} &= \ell_{11} u_{1n} \end{aligned}$$

$$a_{21} = \ell_{21} u_{11}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \ell_{11} u_{11} \\ a_{12} &= \ell_{11} u_{12} \\ &\vdots \\ a_{1n} &= \ell_{11} u_{1n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= \ell_{21} u_{11} \\ &\vdots \\ a_{n1} &= \ell_{n1} u_{11} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{22} = \ell_{21} u_{12} + \ell_{22} u_{22}.$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{23} = \ell_{21} u_{13} + \ell_{22} u_{23}.$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

$$a_{2n} = \ell_{21} u_{1n} + \ell_{22} u_{2n}.$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}
$$

$$
a_{32} = \ell_{31} u_{12} + \ell_{32} u_{22}.
$$

Fortsæt på denne måde... Proceduren er hermed som følger:

0. $k = 1$.

0. $k = 1$.

1. Vælg ℓ_{kk}.

0. $k = 1$.
1. Vælg ℓ_{kk}.
2. Udregn

$$u_{kk} = \frac{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki} u_{ik}}{\ell_{kk}}.$$

0. $k = 1$.
1. Vælg ℓ_{kk}.
2. Udregn

$$u_{kk} = \frac{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki} u_{ik}}{\ell_{kk}}.$$

3. Udregn resten af række k i $\boldsymbol{U}$ matricen:

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki} u_{ij}}{\ell_{kk}}, \ j = k+1, \ldots, n.$$

0. $k = 1$.
1. Vælg ℓ_{kk}.
2. Udregn

$$u_{kk} = \frac{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki} u_{ik}}{\ell_{kk}}.$$

3. Udregn resten af række k i $\boldsymbol{U}$ matricen:

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki} u_{ij}}{\ell_{kk}}, \quad j = k+1, \dots, n.$$

4. Udregn resten af søjle k i $\boldsymbol{L}$:

$$\ell_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ji} u_{ik}}{u_{kk}}, \quad j = k+1, \dots, n.$$

0. $k = 1$.
1. Vælg ℓ_{kk}.
2. Udregn
$$u_{kk} = \frac{a_{kk} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki} u_{ik}}{\ell_{kk}}.$$
3. Udregn resten af række k i $\boldsymbol{U}$ matricen:
$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki} u_{ij}}{\ell_{kk}}, \ j = k+1, \dots, n.$$
4. Udregn resten af søjle k i $\boldsymbol{L}$:
$$\ell_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ji} u_{ik}}{u_{kk}}, \ j = k+1, \dots, n.$$
5. Hvis $k < n$, $k = k + 1$. GOTO 1.

- $\ell_{ii} = 1$, Doolittle's faktorisation.

- $\ell_{ii} = 1$, Doolittle's faktorisation.
- $u_{ii} = 1$, Crout's faktorisation.

- $\ell_{ii} = 1$, Doolittle's faktorisation.
- $u_{ii} = 1$, Crout's faktorisation.
- $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$, Cholesky dekompositionen for symmetriske matricer.

- $\ell_{ii} = 1$, Doolittle's faktorisation.
- $u_{ii} = 1$, Crout's faktorisation.
- $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$, Cholesky dekompositionen for symmetriske matricer.
- Antag, at vi har en Doolittle faktorisation: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$.

- $\ell_{ii} = 1$, Doolittle's faktorisation.
- $u_{ii} = 1$, Crout's faktorisation.
- $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$, Cholesky dekompositionen for symmetriske matricer.
- Antag, at vi har en Doolittle faktorisation: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$.
- Lad $\boldsymbol{\Delta}$ være diagonalmatricen der har $\boldsymbol{U}$'s diagonal.

- $\ell_{ii} = 1$, Doolittle's faktorisation.
- $u_{ii} = 1$, Crout's faktorisation.
- $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$, Cholesky dekompositionen for symmetriske matricer.
- Antag, at vi har en Doolittle faktorisation: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$.
- Lad $\boldsymbol{\Delta}$ være diagonalmatricen der har $\boldsymbol{U}$'s diagonal.
- Skriv

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta})(\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{U}) = \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}.$$

- $\ell_{ii} = 1$, Doolittle's faktorisation.
- $u_{ii} = 1$, Crout's faktorisation.
- $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$, Cholesky dekompositionen for symmetriske matricer.
- Antag, at vi har en Doolittle faktorisation: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$.
- Lad $\boldsymbol{\Delta}$ være diagonalmatricen der har $\boldsymbol{U}$'s diagonal.
- Skriv
$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta})(\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{U}) = \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}.$$
- Så vil $\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{U}$ opfylde $\tilde{u}_{ii} = 1$ for alle i.

- $\ell_{ii} = 1$, Doolittle's faktorisation.
- $u_{ii} = 1$, Crout's faktorisation.
- $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$, Cholesky dekompositionen for symmetriske matricer.
- Antag, at vi har en Doolittle faktorisation: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$.
- Lad $\boldsymbol{\Delta}$ være diagonalmatricen der har $\boldsymbol{U}$'s diagonal.
- Skriv
$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta})(\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{U}) = \tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}.$$
- Så vil $\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{U}$ opfylde $\tilde{u}_{ii} = 1$ for alle i.
- Dermed er $\tilde{\boldsymbol{L}}\tilde{\boldsymbol{U}}$ en Crout faktorisation.

Eksistens af LU dekomposition

Definition

Lad $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$ være en $n \times n$ matrix, og lad

$$\boldsymbol{A}_k = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,k},$$

være den ledende undermatrix af orden k.

Sætning (Eksistens af LU dekomposition)

Hvis $\det(\boldsymbol{A}_k) \neq 0$ *for alle* $k = 1, \dots, n-1$, *da findes der en LU dekomposition.*

Sætning (Entydighed af Doolittle's faktorisering)

Hvis $\det(\boldsymbol{A}_k) \neq 0$ *for alle* $k = 1, \dots, n-1$, *da findes der en entydigt bestemt LU dekomposition med* $\ell_{ii} = 1$ *for* $i = 1, \dots, n$.

Beviser

For dimension $n = 1$: $a_{11} \neq 0$ så $\ell_{11} u_{11} = a_{11}$ har en løsning.

Beviser

For dimension $n = 1$: $a_{11} \neq 0$ så $\ell_{11} u_{11} = a_{11}$ har en løsning.
Antag sætningen holder for $n = k - 1$.

Beviser

For dimension $n = 1$: $a_{11} \neq 0$ så $\ell_{11} u_{11} = a_{11}$ har en løsning.
Antag sætningen holder for $n = k - 1$.
Skriv

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k-1} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}' & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_{k-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\ell}' & \ell_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{k-1} & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{0}' & u_{kk} \end{pmatrix}$$

Beviser

For dimension $n = 1$: $a_{11} \neq 0$ så $\ell_{11} u_{11} = a_{11}$ har en løsning.
Antag sætningen holder for $n = k - 1$.
Skriv

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k-1} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}' & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_{k-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\ell}' & \ell_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{k-1} & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{0}' & u_{kk} \end{pmatrix}$$

Da $\boldsymbol{A}_{k-1} = \boldsymbol{L}_{k-1} \boldsymbol{U}_{k-1}$ så er

$$0 \neq \det(\boldsymbol{A}_{k-1}) = \det(\boldsymbol{L}_{k-1}) \det(\boldsymbol{U}_{k-1})$$

hvor $\boldsymbol{U}_{k-1}$ og $\boldsymbol{L}_{k-1}$ så er ikke–singulære.

Beviser

For dimension $n = 1$: $a_{11} \neq 0$ så $\ell_{11} u_{11} = a_{11}$ har en løsning.
Antag sætningen holder for $n = k - 1$.
Skriv

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k-1} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}' & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_{k-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\ell}' & \ell_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{k-1} & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{0}' & u_{kk} \end{pmatrix}$$

Da $\boldsymbol{A}_{k-1} = \boldsymbol{L}_{k-1} \boldsymbol{U}_{k-1}$ så er

$$0 \neq \det(\boldsymbol{A}_{k-1}) = \det(\boldsymbol{L}_{k-1}) \det(\boldsymbol{U}_{k-1})$$

hvor $\boldsymbol{U}_{k-1}$ og $\boldsymbol{L}_{k-1}$ så er ikke–singulære. Men så har

$$\boldsymbol{L}_{k-1} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\ell}' \boldsymbol{U}_{k-1} = \boldsymbol{c}'$$

entydige løsninger $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{\ell}'$.

Beviser

For dimension $n = 1$: $a_{11} \neq 0$ så $\ell_{11} u_{11} = a_{11}$ har en løsning.
Antag sætningen holder for $n = k - 1$.
Skriv

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k-1} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}' & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_{k-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\ell}' & \ell_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{k-1} & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{0}' & u_{kk} \end{pmatrix}$$

Da $\boldsymbol{A}_{k-1} = \boldsymbol{L}_{k-1} \boldsymbol{U}_{k-1}$ så er

$$0 \neq \det(\boldsymbol{A}_{k-1}) = \det(\boldsymbol{L}_{k-1}) \det(\boldsymbol{U}_{k-1})$$

hvor $\boldsymbol{U}_{k-1}$ og $\boldsymbol{L}_{k-1}$ så er ikke–singulære. Men så har

$$\boldsymbol{L}_{k-1} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\ell}' \boldsymbol{U}_{k-1} = \boldsymbol{c}'$$

entydige løsninger $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{\ell}'$.
Vælg nu u_{kk} og ℓ_{kk} så at $u_{kk} \ell_{kk} + \boldsymbol{\ell}' \boldsymbol{u} = a_{kk}$.

Beviser

For dimension $n = 1$: $a_{11} \neq 0$ så $\ell_{11} u_{11} = a_{11}$ har en løsning.
Antag sætningen holder for $n = k - 1$.
Skriv

$$\boldsymbol{A}_k = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{k-1} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}' & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{L}_{k-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\ell}' & \ell_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{k-1} & \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{0}' & u_{kk} \end{pmatrix}$$

Da $\boldsymbol{A}_{k-1} = \boldsymbol{L}_{k-1} \boldsymbol{U}_{k-1}$ så er

$$0 \neq \det(\boldsymbol{A}_{k-1}) = \det(\boldsymbol{L}_{k-1})\det(\boldsymbol{U}_{k-1})$$

hvor $\boldsymbol{U}_{k-1}$ og $\boldsymbol{L}_{k-1}$ så er ikke–singulære. Men så har

$$\boldsymbol{L}_{k-1}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\ell}' \boldsymbol{U}_{k-1} = \boldsymbol{c}'$$

entydige løsninger $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{\ell}'$.
Vælg nu u_{kk} og ℓ_{kk} så at $u_{kk}\ell_{kk} + \boldsymbol{\ell}'\boldsymbol{u} = a_{kk}$.
Hvis alle $\ell_{ii} = 1$, så har vi åbenlyst entydighed. $\square$

Gaussisk elimination

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Gaussisk elimination

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vælg en specifik række, den såkaldte *pivot* række. Her er det den første række. Diagonalelementet a_{11} kaldes for *pivot elementet*.

Gaussisk elimination

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vælg en specifik række, den såkaldte *pivot* række. Her er det den første række. Diagonalelementet a_{11} kaldes for *pivot elementet*.

Udskift rækkerne $j = 2, ..., n$ med

$$(a_{j1}, ..., a_{jn}) - \frac{a_{j1}}{a_{11}}(a_{11}, ..., a_{1n}) = (0, a_{j1}^{(2)}, ..., a_{jn}^{(2)}).$$

Gaussisk elimination

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2}^{(2)} & a_{n-1,3}^{(2)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(2)} & a_{n-1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{n,n-1}^{(2)} & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Af notationsmæssige årsager vælger vi at sætte superscript også på første række, $a_{1j}^{(2)} = a_{1j}$ for $j = 1, ..., n$.

Gaussisk elimination

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{1,n}^{(2)} \\
0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\
0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{n-1,2}^{(2)} & a_{n-1,3}^{(2)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(2)} & a_{n-1,n}^{(2)} \\
0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{n,n-1}^{(2)} & a_{nn}^{(2)}
\end{pmatrix}
$$

Foretag nu samme procedure for den røde undermatrix.

Gaussisk elimination

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(2)} & a_{1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2}^{(2)} & a_{n-1,3}^{(2)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(2)} & a_{n-1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{n,n-1}^{(2)} & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Pivot rækken er her række 2.
Udskift nu rækkerne $j = 3, ..., n$ med

$$(0, a_{j2}^{(2)}, ..., a_{jn}^{(2)}) - \frac{a_{j2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}(0, a_{22}^{(2)}, ..., a_{2n}^{(2)}) = (0, 0, a_{j3}^{(3)}, ..., a_{jn}^{(3)}).$$

Gaussisk elimination

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(3)} & a_{1,n}^{(3)} \\ 0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(3)} & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(3)} & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n-1,3}^{(3)} & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(3)} & a_{n-1,n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \cdots & a_{n,n-1}^{(3)} & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}$$

Igen omdøber vi superscripts på rækkerne 1 og 2 så de er i harmoni med resten:

$$a_{1j}^{(3)} = a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)} = a_{1j},\ j = 1, ..., n$$

og

$$a_{2j}^{(3)} = a_{2j}^{(2)},\ j = 2, ..., n.$$

Gaussisk elimination

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & a_{23}^{(n)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2n}^{(n)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(n)} & a_{3n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Fortsæt på samme måde:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & i \leq k \\ 0 & j \leq k, i \geq k+1 \\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{k}} a_{kj}^{(k)} & i \geq k+1, j \leq k \end{cases}$$

Gaussisk elimination

Elementerne $a_{kk}^{(k)}$ kaldes pivotelementer og forholdene

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i \geq k+1$$

kaldes multiplikatorer. Definer matricen af multiplikatorer ved

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n-1,1} & \ell_{n-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Gaussisk elimination

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n-1,1} & \ell_{n-1,2} & \dots & 1 & 0 \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & \ell_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & a_{13}^{(n)} & \cdots & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & a_{23}^{(n)} & \cdots & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2n}^{(n)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n)} & \cdots & a_{3,n-1}^{(n)} & a_{3n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Ganger man med venstreside matricen så inverteres alle de elementære operationer, så vi opnår derved en LU (Doolittle) dekomposition.

Partiel pivotering

- Ovenstående metode virker fint hvis $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.

Partiel pivotering

- Ovenstående metode virker fint hvis $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.
- Hvis $\boldsymbol{A}$ er ikke–singulær, så vil følgende procedure altid virke.

  0. k=1.
  1. Ombyt rækkerne k og j hvis $|a_{kj}^{(k)}| = \max_{i=k,\dots,n} |a_{ik}^{(k)}|$.
  2. Foretag elimination oå rækkerne $k, \dots, n$ og opdater variable og index.
  3. $k = k + 1$ og GOTO 1.

Partiel pivotering

- Ovenstående metode virker fint hvis $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.
- Hvis $\boldsymbol{A}$ er ikke–singulær, så vil følgende procedure altid virke.
  0. k=1.
  1. Ombyt rækkerne k og j hvis $|a_{kj}^{(k)}| = \max_{i=k,\ldots,n} |a_{ik}^{(k)}|$.
  2. Foretag elimination oå rækkerne $k, \ldots, n$ og opdater variable og index.
  3. $k = k + 1$ og GOTO 1.
- Idet $\boldsymbol{A}$ er ikke–singulær, så kan vi altid finde et pivot element forskelligt fra nul ved ombytning.

Partiel pivotering

- Ovenstående metode virker fint hvis $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.
- Hvis $\boldsymbol{A}$ er ikke–singulær, så vil følgende procedure altid virke.
  0. k=1.
  1. Ombyt rækkerne k og j hvis $|a_{kj}^{(k)}| = \max_{i=k,\dots,n} |a_{ik}^{(k)}|$.
  2. Foretag elimination oå rækkerne $k, \dots, n$ og opdater variable og index.
  3. $k = k + 1$ og GOTO 1.
- Idet $\boldsymbol{A}$ er ikke–singulær, så kan vi altid finde et pivot element forskelligt fra nul ved ombytning.
- Metoden kaldes *partiel* da vi kun søger i de resterende rækker.

Partiel pivotering

- Ovenstående metode virker fint hvis $a_{kk}^{(k)} \neq 0$.
- Hvis $\boldsymbol{A}$ er ikke–singulær, så vil følgende procedure altid virke.

  0. k=1.

  1. Ombyt rækkerne k og j hvis $|a_{kj}^{(k)}| = \max_{i=k,\ldots,n} |a_{ik}^{(k)}|$.

  2. Foretag elimination oå rækkerne $k, \ldots, n$ og opdater variable og index.

  3. $k = k + 1$ og GOTO 1.
- Idet $\boldsymbol{A}$ er ikke–singulær, så kan vi altid finde et pivot element forskelligt fra nul ved ombytning.
- Metoden kaldes *partiel* da vi kun søger i de resterende rækker.
- En *global* pivotering eksisterer også hvor vi søger i alle rækker og ombytter både rækker og søjler.

Partiel pivotering

- Efter endt Gaussisk elmination har vi foretaget en permuation af $(1, 2, ..., n)$, som resulterer i $(i_1, i_2, ..., i_n)$. Lad $\boldsymbol{P}$ være den tilsvarende permutationsmatrix.

Partiel pivotering

- Efter endt Gaussisk elmination har vi foretaget en permuation af $(1, 2, ..., n)$, som resulterer i $(i_1, i_2, ..., i_n)$. Lad $\boldsymbol{P}$ være den tilsvarende permutationsmatrix.
- Den $k$te række i $\boldsymbol{P}$ er nul overalt pånær i (k, i_k) hvor den er 1.

Partiel pivotering

- Efter endt Gaussisk elmination har vi foretaget en permuation af $(1, 2, ..., n)$, som resulterer i $(i_1, i_2, ..., i_n)$. Lad $\boldsymbol{P}$ være den tilsvarende permutationsmatrix.
- Den $k$te række i $\boldsymbol{P}$ er nul overalt pånær i (k, i_k) hvor den er 1.
- Så matricen $\boldsymbol{PA}$ er en matrix matrix hvor alle pivot elementer er forskellige fra 0 (uden ombytning).

Partiel pivotering

- Efter endt Gaussisk elmination har vi foretaget en permuation af $(1, 2, ..., n)$, som resulterer i $(i_1, i_2, ..., i_n)$. Lad $\boldsymbol{P}$ være den tilsvarende permutationsmatrix.
- Den $k$te række i $\boldsymbol{P}$ er nul overalt pånær i (k, i_k) hvor den er 1.
- Så matricen $\boldsymbol{PA}$ er en matrix matrix hvor alle pivot elementer er forskellige fra 0 (uden ombytning).
- Så Gauss elimination resulterer i en LU dekomposition af $\boldsymbol{PA}$.