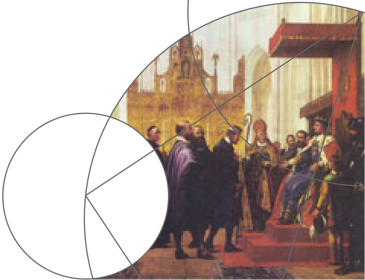
Introduktion til numerisk analyse

Øvelser uge 7

Frederik Skjødt
Institut for matematiske fag



Opgave 2

Consider the integral of $f(x)$ over $[a, b]$ with n sub-divisions such that the steplength is $h = (b - a)/n$. Show that the Richardson extrapolation of the composite Trapez formula with step-length h yields Simpson's formula with step-length $h/2$.

Opgave 2 - svar

Richardson extrapolationen

$$L(h) = \frac{1}{3}\left(4I\left(\frac{h}{2}\right) - I(h)\right)$$

Bemærk at $nh = b - a$, så $2n\frac{h}{2} = b - a$.

For Trapez side 481 får vi

$$I(h) = h\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + \frac{1}{2}f(b)\right)$$

$$I(h/2) = h/2\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{2n-1} f(a+kh/2) + \frac{1}{2}f(b)\right)$$

$$L(h) = h/6\left(f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} 2f(a+kh) + \sum_{k=0}^{n-1} 4f(a+(k+1/2)h) + f(b)\right)$$

Opgave 3

We want to calculate the natural logarithm at 2

$$\log(2) = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

with a two decimal precision (i.e. error of at most 0.01) using (1) the composite Trapezoidal method and (2) the composite Simpson's method. Find the number of divisions of [1,2] in either case in order to achieve this.
Bemærk at $h = (b - a)/2$ og da intervallet har længde 1 er $h^2 = \frac{1}{N^2}$

Opgave 3- svar

For Trapez-reglen skal vi sikre os at fejlen absolut er mindre end 0.01. Lad *delta* angive fejlen. Fra side 482 har vi

$$|\delta| = \left| -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi) \right| < 0.01$$

Bemærk at

$$f''(x) = (-1/x^2)' = 2/x^3$$

som tager den største værdi i $x = 1$ for x i intervallet. så $|f''| < 2$. Således skal

$$|\delta| \leq \frac{1}{6N^2} < 0.01$$

Løser uligheden

$$N > \sqrt{\frac{1}{0.06}} = 4.08$$

Så N skal være 5.

Opgave 3- svar

Fejlleddet for Simpson composite står på side 484, hvor $h = 1/N^4$

$$|\delta| = \left| -\frac{1}{180N^4}(b-a)f^{(4)}(\xi) \right| < 0.01$$

Bemærk at

$$f^{(4)}(x) = (2/x^3)'' = 24x^{-5}$$

som nødvendigvis må være mindre end 24. $h^4 = 1/N^4$. Således skal

$$|\delta| \leq \frac{2}{15N^4} < 0.01$$

Løser uligheden

$$N > \sqrt[4]{2/0.15} = 1.91088$$

Så N skal være 2.

Opgave 4

Consider the distribution function of the normal distribution,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy$$

We want to calculate the F (1.96) with a two decimal precision. Devise a method for doing so, and find the number of divisions needed using the Trapezoidal method.

Opgave 4- svar

Integralet er et uegentlig integrale, så vi dele intergralet op i 2. Bemærk at integralet over intervallet $(-\infty, 0)$ per symmetri er 1/2. (vi integrerer halvdelen af en normalfordeling). For at bestemme N skal vi kende

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}(x^2 - 1)$$

som er begrænset af $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1.96^2 - 1) = 1.13363\ldots$ da exp har størst værdi i 0 og x^2 i 1.96. Fra side 482 har vi at

$$|\delta| = |-\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)| \leq |-\frac{1.96^3}{12N^2} 1.13363| < 0.01$$

Så

$$N > \sqrt{\frac{1.96^3}{0.12} 1.13363} = 8.434$$

Så N skal være 9

Opgave 4- note til svar

Til øvelsestimerne blev der gjort opmærksom på, at det kan gøres bedre. Det er formentlig ikke nødvendigt til eksamen (da i kun har lommeregner, men hvem ved).

leddet med $exp(x)$ og x^2 vil ikke på samme tid tage deres største værdier, så vi kan differentiere og få

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2/2}(x^2-1) = -\exp(-x^2/2)x^3 + 3\exp(-x^2/2)x = 0$$

Hvilket medfører at

$$x = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

Hvor den maksimale værdi i intervallet er $\sqrt{3}$. Således kan den anden afledte begrænses med $f''(\sqrt{3}) = \frac{2}{e^{3/2}} = 0.44626$

$$|\delta| = |-\frac{1}{12}(b-a)h^2 f''(\xi)| \leq |-\frac{1.96^3}{12N^2}0.44626| < 0.01$$

Så $N > \sqrt{\frac{1.96^3}{0.12}0.44626} = 5.25$ Så det ønskede kan også opfyldes af $N = 6$.