Numerisk differentiation

Richardson ekstrapolation

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Richardson ekstrapolation

Skriv

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \\ f(x-h) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k . \end{aligned}$$

Richardson ekstrapolation

Skriv

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \\ f(x-h) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k. \end{aligned}$$

Så er

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!} h^{2k+1}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!} h^{2k} = f'(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!} h^{2k}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!} h^{2k}.$$

Richardson ekstrapolation

Lad $f'(x) = L$ (indikerende at den ikke afhænger af h) og
$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \phi(h)$.

Richardson ekstrapolation

Lad $f'(x) = L$ (indikerende at den ikke afhænger af h) og $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \phi(h)$. Så har ligningen en form af

$$L = \phi(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots.$$

Richardson ekstrapolation

Lad $f'(x) = L$ (indikerende at den ikke afhænger af h) og $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \phi(h)$. Så har ligningen en form af

$$L = \phi(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots.$$

Hvis vi indsætter $h/2$ i stedet fås det samme L (det er uafhængigt af h), men

$$\begin{aligned} L &= \phi(h/2) + a_1(h/2)^2 + a_2(h/2)^4 + \ldots \\ &= \phi(h/2) + \frac{1}{4}a_1 h^2 + a_2(h/2)^4 + \ldots \end{aligned}$$

Richardson ekstrapolation

Lad $f'(x) = L$ (indikerende at den ikke afhænger af h) og $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \phi(h)$. Så har ligningen en form af

$$L = \phi(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + ...$$

Hvis vi indsætter $h/2$ i stedet fås det samme L (det er uafhængigt af h), men

$$\begin{aligned} L &= \phi(h/2) + a_1(h/2)^2 + a_2(h/2)^4 + ... \\ &= \phi(h/2) + \frac{1}{4}a_1 h^2 + a_2(h/2)^4 + ... \end{aligned}$$

Så vi har altså:

$$\begin{aligned} L &= \phi(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + ... \\ L &= \phi(h/2) + \frac{1}{4}a_1 h^2 + a_2(h/2)^4 + ... \end{aligned}$$

Richardson ekstrapolation

Lad $f'(x) = L$ (indikerende at den ikke afhænger af h) og $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \phi(h)$. Så har ligningen en form af

$$L = \phi(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots.$$

Hvis vi indsætter $h/2$ i stedet fås det samme L (det er uafhængigt af h), men

$$\begin{aligned} L &= \phi(h/2) + a_1(h/2)^2 + a_2(h/2)^4 + \ldots \\ &= \phi(h/2) + \frac{1}{4} a_1 h^2 + a_2(h/2)^4 + \ldots \end{aligned}$$

Så vi har altså:

$$\begin{aligned} L &= \phi(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots \\ L &= \phi(h/2) + \frac{1}{4} a_1 h^2 + a_2(h/2)^4 + \ldots \end{aligned}$$

Så hvis vi trækker den første ligning fra 4 gange den anden ligning fås

$$3L = 4L - L = 4\phi(h/2) - \phi(h) + O(h^4).$$

Dermed er

$$L = \frac{4}{3}\phi(h/2) - \frac{1}{3}\phi(h) + O(h^4)$$

Generel Richardson ekstrapolation

Vi betragter nu generel Richardson extrapolation.

Generel Richardson ekstrapolation

Vi betragter nu generel Richardson extrapolation. Antag, at en given konstant L kan approximeres ved en potensrække:

$$L = \phi_1(h) + k_1 h^r + k_2 h^{r+1} + \dots .$$

Generel Richardson ekstrapolation

Vi betragter nu generel Richardson extrapolation. Antag, at en given konstant L kan approximeres ved en potensrække:

$$L = \phi_1(h) + k_1 h^r + k_2 h^{r+1} + \ldots.$$

Sammenlign med $h/2$:

$$\begin{aligned} L &= \phi_1(h) + k_1 h^r + k_2 h^{r+1} + \ldots \\ L &= \phi_1(h/2) + k_1 (h/2)^r + k_2 (h/2)^{r+1} + \ldots \end{aligned}$$

Generel Richardson ekstrapolation

Vi betragter nu generel Richardson extrapolation. Antag, at en given konstant L kan approximeres ved en potensrække:

$$L = \phi_1(h) + k_1 h^r + k_2 h^{r+1} + \ldots.$$

Sammenlign med $h/2$:

$$\begin{aligned} L &= \phi_1(h) + k_1 h^r + k_2 h^{r+1} + \ldots \\ L &= \phi_1(h/2) + k_1 (h/2)^r + k_2 (h/2)^{r+1} + \ldots \end{aligned}$$

2^r gange den anden minus den første giver

$$(2^r - 1)L = 2^r \phi_1(h/2) - \phi_1(h) + k_2^{(2)} h^{r+1} + \ldots = 2^r \phi_1(h/2) - \phi_1(h) + O(h^{r+1}).$$

Generel Richardson ekstrapolation

Vi betragter nu generel Richardson extrapolation. Antag, at en given konstant L kan approximeres ved en potensrække:

$$L = \phi_1(h) + k_1 h^r + k_2 h^{r+1} + \ldots.$$

Sammenlign med $h/2$:

$$\begin{aligned} L &= \phi_1(h) + k_1 h^r + k_2 h^{r+1} + \ldots \\ L &= \phi_1(h/2) + k_1 (h/2)^r + k_2 (h/2)^{r+1} + \ldots \end{aligned}$$

2^r gange den anden minus den første giver

$$(2^r - 1)L = 2^r \phi_1(h/2) - \phi_1(h) + k_2^{(2)} h^{r+1} + \ldots = 2^r \phi_1(h/2) - \phi_1(h) + O(h^{r+1}).$$

Så er

$$L = \frac{2^r \phi_1(h/2) - \phi_1(h)}{2^r - 1} = \phi_1(h/2) + \frac{\phi_1(h/2) - \phi_1(h)}{2^r - 1} := \phi_2(h).$$

Richardson ekstrapolationen af estimatet ϕ_1.

Eksempel: dobbelt Richardson

Betragt igen differentiation:

$$
\begin{aligned}
L &= f'(x) \\
\phi_1(x) &= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.
\end{aligned}
$$

Eksempel: dobbelt Richardson

Betragt igen differentiation:

$$\begin{aligned} L &= f'(x) \\ \phi_1(x) &= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}. \end{aligned}$$

Så fandt vi, at

$$L = \phi_1(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots.$$

Eksempel: dobbelt Richardson

Betragt igen differentiation:

$$\begin{aligned} L &= f'(x) \\ \phi_1(x) &= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}. \end{aligned}$$

Så fandt vi, at

$$L = \phi_1(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots.$$

Så er

$$\phi_2(h) = \phi_1(h/2) + \frac{\phi_1(h/2)-\phi_1(h)}{2^2-1} = \frac{4}{3}\phi_1(h/2) - \frac{1}{3}\phi_1(h)$$

og

$$L = \frac{4}{3}\phi_1(h/2) - \frac{1}{3}\phi_1(h) + O(h^4).$$

Eksempel: dobbelt Richardson

Betragt igen differentiation:

$$\begin{aligned} L &= f'(x) \\ \phi_1(x) &= \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}. \end{aligned}$$

Så fandt vi, at

$$L = \phi_1(h) + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \ldots.$$

Så er

$$\phi_2(h) = \phi_1(h/2) + \frac{\phi_1(h/2)-\phi_1(h)}{2^2-1} = \frac{4}{3}\phi_1(h/2) - \frac{1}{3}\phi_1(h)$$

og

$$L = \frac{4}{3}\phi_1(h/2) - \frac{1}{3}\phi_1(h) + O(h^4).$$

Endnu engang Richardson giver

$$\phi_3(h) = \phi_2(h/2) + \frac{\phi_2(h/2)-\phi_2(h)}{2^4-1} = \frac{16}{15}\phi_2(h/2) - \frac{1}{15}\phi_2(h).$$