Løsning af ikke-lineære ligninger

Horner's metode

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Horner's metode

ADVARSEL: Jeg bruger en indeksering forskelligt fra bogen da denne er nemmere at implementere.

Betragt polynomiet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Horner's metode

Betragt polynomiet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Givet et t, skriv det som

$$f(x) = (x - t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Horner's metode

Betragt polynomiet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Givet et t, skriv det som

$$f(x) = (x - t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Match koefficienter:

Horner's metode

Betragt polynomiet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Givet et t, skriv det som

$$f(x) = (x - t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Match koefficienter:

$$a_n = b_n,$$

Horner's metode

Betragt polynomiet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Givet et t, skriv det som

$$f(x) = (x - t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Match koefficienter:

$$a_n = b_n,$$

Horner's metode

Betragt polynomiet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Givet et t, skriv det som

$$f(x) = (x - t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Match koefficienter:

$$a_n = b_n, \quad a_{n-1} = b_{n-1} - t b_n,$$

Horner's metode

Betragt polynomiet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Givet et t, skriv det som

$$f(x) = (x - t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Match koefficienter:

$$a_n = b_n, \quad a_{n-1} = b_{n-1} - tb_n, a_k = b_k - tb_{k+1}, \quad k = n-2, ..., 0.$$

Horner's metode

Betragt polynomiet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Givet et t, skriv det som

$$f(x) = (x-t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Match koefficienter:

$$a_n = b_n, \quad a_{n-1} = b_{n-1} - tb_n, a_k = b_k - tb_{k+1}, \quad k = n-2, ..., 0.$$

Dvs.

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_k &= a_k + tb_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, ..., 0. \end{aligned}$$

Horner's metode

Betragt polynomiet

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Givet et t, skriv det som

$$f(x) = (x - t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Match koefficienter:

$$a_n = b_n, \quad a_{n-1} = b_{n-1} - t b_n, a_k = b_k - t b_{k+1}, \quad k = n-2, ..., 0.$$

Dvs.

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_k &= a_k + t b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, ..., 0. \end{aligned}$$

Specielt,

$$b_0 = f(t).$$

Dette er en mere økonomisk måde at udregne $f(t)$ på: der kræves $n - 1$ multiplikationer og n summer.

Dette er en mere økonomisk måde at udregne $f(t)$ på: der kræves $n-1$ multiplikationer og n summer.

Ved direkte indsættelse i $f(x)$ kræves $n-1$ multiplikationer for at udregne $x^2, ..., x^n$, dernæst n multiplikationer for at udregne $a_i x^i$, $i = 1, ..., n$ og dernæst n summer.

Dette er en mere økonomisk måde at udregne $f(t)$ på: der kræves $n-1$ multiplikationer og n summer.

Ved direkte indsættelse i $f(x)$ kræves $n-1$ multiplikationer for at udregne $x^2, ..., x^n$, dernæst n multiplikationer for at udregne $a_i x^i$, $i = 1, ..., n$ og dernæst n summer.

Betragt igen

$$f(x) = (x-t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Dette er en mere økonomisk måde at udregne $f(t)$ på: der kræves $n-1$ multiplikationer og n summer.

Ved direkte indsættelse i $f(x)$ kræves $n-1$ multiplikationer for at udregne $x^2, ..., x^n$, dernæst n multiplikationer for at udregne $a_i x^i$, $i = 1, ..., n$ og dernæst n summer.

Betragt igen

$$f(x) = (x-t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Hvis t er en rod i $f(t) = 0$, så er

$$b_0 = f(t) = 0$$

og

$$\frac{f(x)}{x-t} = b_n x^{n-1} + ... + b_2 x + b_1$$

er dermed et polynomium.

Dette er en mere økonomisk måde at udregne $f(t)$ på: der kræves $n-1$ multiplikationer og n summer.

Ved direkte indsættelse i $f(x)$ kræves $n-1$ multiplikationer for at udregne $x^2, ..., x^n$, dernæst n multiplikationer for at udregne $a_i x^i$, $i = 1, ..., n$ og dernæst n summer.

Betragt igen

$$f(x) = (x-t)\left[b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} \cdots + b_2 x + b_1\right] + b_0.$$

Hvis t er en rod i $f(t) = 0$, så er

$$b_0 = f(t) = 0$$

og

$$\frac{f(x)}{x-t} = b_n x^{n-1} + ... + b_2 x + b_1$$

er dermed et polynomium. Dette polynomium

$$p_1(x) = b_n x^{n-1} + ... + b_2 x + b_1$$

kaldes det reducerede polynomium eller restpolynomiet (eng: deflated).

For så vidt angår den afledte til f,

$$f(x) = (x - t)p_1(x) + b_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = p_1(x) + (x - t)\frac{d}{dx}p_1(x)$$

For så vidt angår den afledte til f,

$$f(x) = (x - t)p_1(x) + b_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = p_1(x) + (x - t)\frac{d}{dx}p_1(x)$$

og dermed

$$f'(t) = p_1(t).$$

For så vidt angår den afledte til f,

$$f(x) = (x-t)p_1(x) + b_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = p_1(x) + (x-t)\frac{d}{dx}p_1(x)$$

og dermed

$$f'(t) = p_1(t).$$

Så når først $b_1, ..., b_n$ er kendte, så kan vi køre Horner's algoritme igen for at udregne $p_1(t)$:

For så vidt angår den afledte til f,

$$f(x) = (x-t)p_1(x) + b_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = p_1(x) + (x-t)\frac{d}{dx}p_1(x)$$

og dermed

$$f'(t) = p_1(t).$$

Så når først $b_1, \ldots, b_n$ er kendte, så kan vi køre Horner's algoritme igen for at udregne $p_1(t)$:

$$\begin{aligned} c_n &= b_n \\ c_k &= b_k + tc_{k+1}, \quad k = n-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

For så vidt angår den afledte til f,

$$f(x) = (x-t)p_1(x) + b_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = p_1(x) + (x-t)\frac{d}{dx}p_1(x)$$

og dermed

$$f'(t) = p_1(t).$$

Så når først $b_1, \ldots, b_n$ er kendte, så kan vi køre Horner's algoritme igen for at udregne $p_1(t)$:

$$\begin{aligned} c_n &= b_n \\ c_k &= b_k + tc_{k+1}, \quad k = n-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

De to algoritmer kan køres samtidigt:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ c_n &= b_n \\ b_k &= a_k + tb_{k+1}, k = n-1, \ldots, 0 \\ c_k &= b_k + tc_{k+1}, k = n-1, \ldots, 1. \end{aligned}$$

For så vidt angår den afledte til f,

$$f(x) = (x-t)p_1(x) + b_0 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = p_1(x) + (x-t)\frac{d}{dx}p_1(x)$$

og dermed

$$f'(t) = p_1(t).$$

Så når først $b_1, ..., b_n$ er kendte, så kan vi køre Horner's algoritme igen for at udregne $p_1(t)$:

$$\begin{aligned} c_n &= b_n \\ c_k &= b_k + tc_{k+1}, \quad k = n-1, ..., 1. \end{aligned}$$

De to algoritmer kan køres samtidigt:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ c_n &= b_n \\ b_k &= a_k + tb_{k+1}, k = n-1, ..., 0 \\ c_k &= b_k + tc_{k+1}, k = n-1, ..., 1. \end{aligned}$$

Så er

$$f(t) = b_0 \ \text{ and } \ f'(t) = c_1.$$

- Horner's metode er brugbar til at finde alle reelle (og komplekse) rødder i et polynomium.

- Horner's metode er brugbar til at finde alle reelle (og komplekse) rødder i et polynomium.
- For a bruge Newton's metode skal vi kunne finde et område tæt på roden.

- Horner's metode er brugbar til at finde alle reelle (og komplekse) rødder i et polynomium.
- For a bruge Newton's metode skal vi kunne finde et område tæt på roden.
- Hvad med komplekse rødder? Ingen hjælp at hente ved plots eller bisektionsmetoden.

- Horner's metode er brugbar til at finde alle reelle (og komplekse) rødder i et polynomium.
- For a bruge Newton's metode skal vi kunne finde et område tæt på roden.
- Hvad med komplekse rødder? Ingen hjælp at hente ved plots eller bisektionsmetoden.
- Et hovedresultat er følgende:

- Horner's metode er brugbar til at finde alle reelle (og komplekse) rødder i et polynomium.
- For a bruge Newton's metode skal vi kunne finde et område tæt på roden.
- Hvad med komplekse rødder? Ingen hjælp at hente ved plots eller bisektionsmetoden.
- Et hovedresultat er følgende:

Theorem

Givet er polynomium

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Lad

$$\rho = 1 + \frac{\max_{0 \le k < n} |a_k|}{|a_n|}.$$

Så gælder der, at

$$p(r) = 0 \implies r \in B(0, \rho) = \{x \in \mathbb{C} : |x| < \rho\}.$$

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0 \leq k < n} |a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0, \rho)$.

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0 \leq k < n} |a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0, \rho)$.

(2) Hvis $c > 0$ så er $\rho > 1$. Antag, at $r \in \mathbb{C} : |r| \geq \rho$.

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0 \le k < n} |a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0, \rho)$.

(2) Hvis $c > 0$ så er $\rho > 1$. Antag, at $r \in \mathbb{C} : |r| \ge \rho$. Af uligheden $|x| - |y| \le ||x| - |y|| \le |x - y|$ fås

$$|p(r)| \quad \ge \quad |a_n||r|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \right|$$

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0 \le k < n} |a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0, \rho)$.

(2) Hvis $c > 0$ så er $\rho > 1$. Antag, at $r \in \mathbb{C} : |r| \ge \rho$. Af uligheden $|x| - |y| \le ||x| - |y|| \le |x - y|$ fås

$$|p(r)| \quad \ge \quad |a_n||r|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \right| \ge |a_n||r|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||r|^k$$

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0 \leq k < n} |a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0, \rho)$.

(2) Hvis $c > 0$ så er $\rho > 1$. Antag, at $r \in \mathbb{C} : |r| \geq \rho$. Af uligheden $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$ fås

$$
\begin{aligned}
|p(r)| &\geq |a_n||r|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \right| \geq |a_n||r|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||r|^k \\
&\geq |a_n||r|^n - c \sum_{k=0}^{n-1} |r|^k
\end{aligned}
$$

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0 \le k < n} |a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0, \rho)$.

(2) Hvis $c > 0$ så er $\rho > 1$. Antag, at $r \in \mathbb{C} : |r| \geq \rho$. Af uligheden $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$ fås

$$\begin{aligned} |p(r)| &\geq |a_n||r|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \right| \geq |a_n||r|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||r|^k \\ &\geq |a_n||r|^n - c \sum_{k=0}^{n-1} |r|^k = |a_n||r|^n - c \frac{1 - |r|^n}{1 - |r|} \end{aligned}$$

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0\leq k<n} |a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0,\rho)$.

(2) Hvis $c > 0$ så er $\rho > 1$. Antag, at $r \in \mathbb{C} : |r| \geq \rho$. Af uligheden $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$ fås

$$
\begin{aligned}
|p(r)| &\geq |a_n||r|^n - \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k\right| \geq |a_n||r|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||r|^k \\
&\geq |a_n||r|^n - c\sum_{k=0}^{n-1} |r|^k = |a_n||r|^n - c\frac{1-|r|^n}{1-|r|} \\
&= |a_n||r|^n - c\frac{|r|^n - 1}{|r| - 1}
\end{aligned}
$$

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0 \leq k < n} |a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0, \rho)$.

(2) Hvis $c > 0$ så er $\rho > 1$. Antag, at $r \in \mathbb{C} : |r| \geq \rho$. Af uligheden $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$ fås

$$
\begin{aligned}
|p(r)| &\geq |a_n||r|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \right| \geq |a_n||r|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||r|^k \\
&\geq |a_n||r|^n - c \sum_{k=0}^{n-1} |r|^k = |a_n||r|^n - c \frac{1 - |r|^n}{1 - |r|} \\
&= |a_n||r|^n - c \frac{|r|^n - 1}{|r| - 1} > |a_n||r|^n - c \frac{|r|^n}{|r| - 1}
\end{aligned}
$$

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0\le k<n}|a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0,\rho)$.

(2) Hvis $c > 0$ så er $\rho > 1$. Antag, at $r \in \mathbb{C} : |r| \ge \rho$. Af uligheden $|x| - |y| \le ||x| - |y|| \le |x - y|$ fås

$$
\begin{aligned}
|p(r)| &\ge |a_n||r|^n - \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k\right| \ge |a_n||r|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||r|^k \\
&\ge |a_n||r|^n - c\sum_{k=0}^{n-1}|r|^k = |a_n||r|^n - c\frac{1-|r|^n}{1-|r|} \\
&= |a_n||r|^n - c\frac{|r|^n - 1}{|r| - 1} > |a_n||r|^n - c\frac{|r|^n}{|r|-1} \\
&\ge |a_n||r|^n - c\frac{|r|^n}{\rho - 1}
\end{aligned}
$$

Bevis

(1) Hvis $c = \max_{0 \le k < n} |a_k| = 0$ og da $a_n \neq 0$ så er $r = 0$ og $\rho = 1$, så dermed er $x \in \mathrm{B}(0, \rho)$.

(2) Hvis $c > 0$ så er $\rho > 1$. Antag, at $r \in \mathbb{C} : |r| \geq \rho$. Af uligheden $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$ fås

$$
\begin{aligned}
|p(r)| &\geq |a_n||r|^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \right| \geq |a_n||r|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||r|^k \\
&\geq |a_n||r|^n - c \sum_{k=0}^{n-1} |r|^k = |a_n||r|^n - c \frac{1 - |r|^n}{1 - |r|} \\
&= |a_n||r|^n - c \frac{|r|^n - 1}{|r| - 1} > |a_n||r|^n - c \frac{|r|^n}{|r| - 1} \\
&\geq |a_n||r|^n - c \frac{|r|^n}{\rho - 1} = |a_n||r|^n \left\{ 1 - |a_n|^{-1} \frac{c}{\rho - 1} \right\} = 0,
\end{aligned}
$$

i.e. $|p(r)| > 0$ og dermed kan r ikke være en rod i p. $\square$

Eksempel

Betragt

$$p(x) = x^6 - x - 1.$$

Eksempel

Betragt
$$p(x) = x^6 - x - 1.$$
Så er $a_6 = 1, a_1 = -1, a_0 = -1,\ c = \max\{1, 1\} = 1$ og
$$\rho = 1 + \frac{c}{|a_6|} = 2.$$

Eksempel

Betragt

$$p(x) = x^6 - x - 1.$$

Så er $a_6 = 1, a_1 = -1, a_0 = -1,\ c = \max\{1, 1\} = 1$ og

$$\rho = 1 + \frac{c}{|a_6|} = 2.$$

Alle rødder skal altså findes inden for cirklen med centrum i nul og radius 2.

Eksempel

Betragt

$$p(x) = x^6 - x - 1.$$

Så er $a_6 = 1, a_1 = -1, a_0 = -1,\ c = \max\{1, 1\} = 1$ og

$$\rho = 1 + \frac{c}{|a_6|} = 2.$$

Alle rødder skal altså findes inden for cirklen med centrum i nul og radius 2.

Definer funktionen:

$$s(x) = x^n p(1/x).$$

Eksempel

Betragt

$$p(x) = x^6 - x - 1.$$

Så er $a_6 = 1, a_1 = -1, a_0 = -1,\ c = \max\{1, 1\} = 1$ og

$$\rho = 1 + \frac{c}{|a_6|} = 2.$$

Alle rødder skal altså findes inden for cirklen med centrum i nul og radius 2.

Definer funktionen:

$$s(x) = x^n p(1/x).$$

Hvis $x \neq 0$ er rod i s, så er $1/x$ rod i p.

Eksempel

Betragt

$$p(x) = x^6 - x - 1.$$

Så er $a_6 = 1, a_1 = -1, a_0 = -1,\ c = \max\{1, 1\} = 1$ og

$$\rho = 1 + \frac{c}{|a_6|} = 2.$$

Alle rødder skal altså findes inden for cirklen med centrum i nul og radius 2.

Definer funktionen:

$$s(x) = x^n p(1/x).$$

Hvis $x \neq 0$ er rod i s, så er $1/x$ rod i p.

I dette tilfælde er

$$s(x) = -x^6 - x + 1.$$

Dermed er alle rødder for s indenfor $B(0, 2)$.

Eksempel

Betragt

$$p(x) = x^6 - x - 1.$$

Så er $a_6 = 1, a_1 = -1, a_0 = -1,\ c = \max\{1, 1\} = 1$ og

$$\rho = 1 + \frac{c}{|a_6|} = 2.$$

Alle rødder skal altså findes inden for cirklen med centrum i nul og radius 2.

Definer funktionen:

$$s(x) = x^n p(1/x).$$

Hvis $x \neq 0$ er rod i s, så er $1/x$ rod i p.

I dette tilfælde er

$$s(x) = -x^6 - x + 1.$$

Dermed er alle rødder for s indenfor $B(0, 2)$. Dermed må alle rødder for p ligge uden for cirklen med centrum i nul og radius $1/2$.

Eksempel

Betragt

$$p(x) = x^6 - x - 1.$$

Så er $a_6 = 1, a_1 = -1, a_0 = -1, \ c = \max\{1, 1\} = 1$ og

$$\rho = 1 + \frac{c}{|a_6|} = 2.$$

Alle rødder skal altså findes inden for cirklen med centrum i nul og radius 2.

Definer funktionen:

$$s(x) = x^n p(1/x).$$

Hvis $x \neq 0$ er rod i s, så er $1/x$ rod i p.

I dette tilfælde er

$$s(x) = -x^6 - x + 1.$$

Dermed er alle rødder for s indenfor $B(0, 2)$. Dermed må alle rødder for p ligge uden for cirklen med centrum i nul og radius $1/2$. Newton med $x_0 = 1.5$ giver: 1.1347241384015194 med 100 iterationer.

Eksempel - fortsat

Vi anvender nu Newton's metode med komplekse tal til at finde resten af rødderne. Lad os starte med at gætte:

$$x_0 = \mathrm{i} * 1.5.$$

Eksempel - fortsat

Vi anvender nu Newton's metode med komplekse tal til at finde resten af rødderne. Lad os starte med at gætte:

$$x_0 = \mathrm{i} * 1.5.$$

Køres Newtons algoritme med denne startværdi findes roden

$$r = -0.6293724284703148 + 0.7357559529997765\mathrm{i}.$$

Eksempel - fortsat

Vi anvender nu Newton's metode med komplekse tal til at finde resten af rødderne. Lad os starte med at gætte:

$$x_0 = \mathrm{i} * 1.5.$$

Køres Newtons algoritme med denne startværdi findes roden

$$r = -0.6293724284703148 + 0.7357559529997765\mathrm{i}.$$

Vi ved at dens komplekst konjugerede dermed også er rod:

$$\bar{r} = -0.6293724284703148 - 0.7357559529997765\mathrm{i}.$$

Eksempel - fortsat

Vi anvender nu Newton's metode med komplekse tal til at finde resten af rødderne. Lad os starte med at gætte:

$$x_0 = \mathrm{i} * 1.5.$$

Køres Newtons algoritme med denne startværdi findes roden

$$r = -0.6293724284703148 + 0.7357559529997765\mathrm{i}.$$

Vi ved at dens komplekst konjugerede dermed også er rod:

$$\bar{r} = -0.6293724284703148 - 0.7357559529997765\mathrm{i}.$$

Nu tager vi så $x_0 = 1 + \mathrm{i}$. Newton's algoritme giver så

$$\begin{aligned} r &= 0.4510551586088556\,4 + 1.002364571587165\mathrm{i} \\ \bar{r} &= 0.4510551586088556\,4 - 1.002364571587165\mathrm{i} \end{aligned}$$

Eksempel - fortsat

Vi anvender nu Newton's metode med komplekse tal til at finde resten af rødderne. Lad os starte med at gætte:

$$x_0 = \mathrm{i} * 1.5.$$

Køres Newtons algoritme med denne startværdi findes roden

$$r = -0.6293724284703148 + 0.7357559529997765\mathrm{i}.$$

Vi ved at dens komplekst konjugerede dermed også er rod:

$$\bar{r} = -0.6293724284703148 - 0.7357559529997765\mathrm{i}.$$

Nu tager vi så $x_0 = 1 + \mathrm{i}$. Newton's algoritme giver så

$$\begin{aligned} r &= 0.4510551586088556 4 + 1.002364571587165\mathrm{i} \\ \bar{r} &= 0.4510551586088556 4 - 1.002364571587165\mathrm{i} \end{aligned}$$

Den sidste rod må dermed være reel (da vi allerede har fundet en reel rod). Tag $x_0 = -1.5$ og vi får

$$r = -0.7780895986786011.$$