Interpolation

Horners metode

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Horner's metode

Fra

$$p_0(x) = c_0, \quad p_i(x) = p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j).$$

fås

$$p_n(x) \quad = \quad c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j).$$

Horner's metode

Fra

$$p_0(x) = c_0, \quad p_i(x) = p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

fås

$$p_n(x) \quad = \quad c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j).$$

Så kan vi faktorisere nedefra:

Horner's metode

Fra

$$p_0(x) = c_0, \quad p_i(x) = p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j).$$

fås

$$p_n(x) \quad = \quad c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j).$$

Så kan vi faktorisere nedefra:

- konstanten c_0 isoleres.

Horner's metode

Fra

$$p_0(x) = c_0, \quad p_i(x) = p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j).$$

fås

$$p_n(x) \quad = \quad c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j).$$

Så kan vi faktorisere nedefra:

- konstanten c_0 isoleres.
- $(x - x_0)$ forekommer i resten af udtrykkene: sæt uden for parantes (faktoriser).

Horner's metode

Fra

$$p_0(x) = c_0, \quad p_i(x) = p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j).$$

fås

$$p_n(x) \quad = \quad c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j).$$

Så kan vi faktorisere nedefra:

- konstanten c_0 isoleres.
- $(x - x_0)$ forekommer i resten af udtrykkene: sæt uden for parantes (faktoriser).
- Dette isolerer c_1 som konstant plus resten.

Horner's metode

Fra

$$p_0(x) = c_0, \quad p_i(x) = p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j).$$

fås

$$p_n(x) \quad = \quad c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j).$$

Så kan vi faktorisere nedefra:

- konstanten c_0 isoleres.
- $(x - x_0)$ forekommer i resten af udtrykkene: sæt uden for parantes (faktoriser).
- Dette isolerer c_1 som konstant plus resten.
- I resten er $(x - x_2)$ divisor og kan faktoriseres.

Horner's metode

Fra

$$p_0(x) = c_0, \quad p_i(x) = p_{i-1}(x) + c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j).$$

fås

$$p_n(x) \quad = \quad c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n \prod_{j=0}^{n-1}(x - x_j).$$

Så kan vi faktorisere nedefra:

- konstanten c_0 isoleres.
- $(x - x_0)$ forekommer i resten af udtrykkene: sæt uden for parantes (faktoriser).
- Dette isolerer c_1 som konstant plus resten.
- I resten er $(x - x_2)$ divisor og kan faktoriseres.
- etc.

Hermed fås, at det oprindelige polynomium

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 \\ &\quad +c_1(x-x_0) \\ &\quad +c_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad +c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad \cdots \\ &\quad +c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

kan faktoriseres som

$$\begin{aligned} p_n(x) = c_0 + (x-x_0)\big[c_1 + (x-x_1)\big[c_2 + (x-x_2)\big[c_3 + \cdots \\ \cdots\big[c_{n-1} + (x-x_{n-1})c_n\big]\cdots\big]\big]\big] \end{aligned}$$

Hermed fås, at det oprindelige polynomium

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 \\ &\quad + c_1(x-x_0) \\ &\quad + c_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad \cdots \\ &\quad + c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

kan faktoriseres som

$$\begin{aligned} p_n(x) = c_0 + (x-x_0)\big[c_1 + (x-x_1)\big[c_2 + (x-x_2)\big[c_3 + \cdots \\ \cdots\big[c_{n-1} + (x-x_{n-1})c_n\big]\cdots\big]\big]\big] \end{aligned}$$

Hermed fås, at det oprindelige polynomium

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 \\ &\quad +c_1(x-x_0) \\ &\quad +c_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad +c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad \dots \\ &\quad +c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

kan faktoriseres som

$$\begin{aligned} p_n(x) = c_0 + (x-x_0)\Big[c_1 + (x-x_1)\Big[c_2 + (x-x_2)\Big[c_3 + \cdots \\ \cdots\Big[c_{n-1} + (x-x_{n-1})c_n\Big]\cdots\Big]\Big]\Big] \end{aligned}$$

Hermed fås, at det oprindelige polynomium

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= c_0 \\
&\quad + c_1(x-x_0) \\
&\quad + c_2(x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&\quad \dots \\
&\quad + c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}).
\end{aligned}
$$

kan faktoriseres som

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = c_0 + (x-x_0)\big[c_1 + (x-x_1)\big[c_2 + (x-x_2)\big[c_3 + \cdots \\
\cdots\big[c_{n-1} + (x-x_{n-1})c_n\big]\cdots\big]\big]\big]
\end{aligned}
$$

Hermed fås, at det oprindelige polynomium

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 \\ &\quad +c_1(x-x_0) \\ &\quad +c_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad +c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad \cdots \\ &\quad +c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

kan faktoriseres som

$$\begin{aligned} p_n(x) = c_0 + (x-x_0)\big[c_1 + (x-x_1)\big[c_2 + (x-x_2)\big[c_3 + \cdots \\ \cdots\big[c_{n-1} + (x-x_{n-1})c_n\big]\cdots\big]\big]\big] \end{aligned}$$

Multiplikation er dyrt. I første udtryk ganges $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ gange.

Hermed fås, at det oprindelige polynomium

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 \\ &\quad +c_1(x-x_0) \\ &\quad +c_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad +c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad \cdots \\ &\quad +c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

kan faktoriseres som

$$\begin{aligned} p_n(x) = c_0 + (x-x_0)\big[c_1 + (x-x_1)\big[c_2 + (x-x_2)\big[c_3 + \cdots \\ \cdots\big[c_{n-1} + (x-x_{n-1})c_n\big]\cdots\big]\big]\big] \end{aligned}$$

Multiplikation er dyrt. I første udtryk ganges $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ gange. I Horner's udtryk ganges n gange.

Hermed fås, at det oprindelige polynomium

$$\begin{aligned} p_n(x) &= c_0 \\ &\quad +c_1(x-x_0) \\ &\quad +c_2(x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad +c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &\quad \cdots \\ &\quad +c_n(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

kan faktoriseres som

$$\begin{aligned} p_n(x) = c_0 + (x-x_0)\big[c_1 + (x-x_1)\big[c_2 + (x-x_2)\big[c_3 + \cdots \\ \cdots\big[c_{n-1} + (x-x_{n-1})c_n\big]\cdots\big]\big]\big] \end{aligned}$$

Multiplikation er dyrt. I første udtryk ganges $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ gange. I Horner's udtryk ganges n gange. Defor vil udregning af $p_n(x)$ være hurtigere vha. Horner's algoritme and ved direkte indsættelse.

Eksempel

Las os udregne:

$$p_4(x) = c_0 + (x - x_0)\left[c_1 + (x - x_1)\left[c_2 + (x - x_2)\left[c_3 + (x - x_3)c_4\right]\right]\right].$$

Dette gøres så “indefra” via Horner’s algoritme som følger.

- Sæt $u = c_4$.
- $u = u * (x - x_3) + c_3$
- $u = u * (x - x_2) + c_2$
- $u = u * (x - x_1) + c_1$
- $u = u * (x - x_0) + c_0$

Eksempel

Las os udregne:

$$p_4(x) = c_0 + (x - x_0)\left[c_1 + (x - x_1)\left[c_2 + (x - x_2)\left[c_3 + (x - x_3)c_4\right]\right]\right].$$

Dette gøres så "indefra" via Horner's algoritme som følger.

- Sæt $u = c_4$.
- $u = u * (x - x_3) + c_3$
- $u = u * (x - x_2) + c_2$
- $u = u * (x - x_1) + c_1$
- $u = u * (x - x_0) + c_0$

Så vil $u = p_4(x)$.

Eksempel

Las os udregne:

$$p_4(x) = c_0 + (x - x_0)\left[c_1 + (x - x_1)\left[c_2 + (x - x_2)\left[c_3 + (x - x_3)c_4\right]\right]\right].$$

Dette gøres så "indefra" via Horner's algoritme som følger.

- Sæt $u = c_4$.
- $u = u * (x - x_3) + c_3$
- $u = u * (x - x_2) + c_2$
- $u = u * (x - x_1) + c_1$
- $u = u * (x - x_0) + c_0$

Så vil $u = p_4(x)$.

Generelt, i pseudo-kode: $p_k(x)$ udregnes ved

$u = c_k$
for i=0 **to** k-1 **do**
  $u = u * (x - x_{k-1-i}) + c_{k-1-i}$
end for

Udregning af Newton's form via Horner

Nu ved vi hvordan vi udregner funktionsværdier af polynomiet $p_k(x)$ hvis det er kendt.

Udregning af Newton's form via Horner

Nu ved vi hvordan vi udregner funktionsværdier af polynomiet $p_k(x)$ hvis det er kendt.

Hvis vi ikke kender koefficienterne c_i, $i = 0, ..., n-1$, kan disse udregnes idet vi kender funktionsværdierne af $p_k(x)$ i punkterne x_i hvor de tager værdierne y_i.

Udregning af Newton's form via Horner

Nu ved vi hvordan vi udregner funktionsværdier af polynomiet $p_k(x)$ hvis det er kendt.

Hvis vi ikke kender koefficienterne c_i, $i = 0, ..., n-1$, kan disse udregnes idet vi kender funktionsværdierne af $p_k(x)$ i punkterne x_i hvor de tager værdierne y_i.

Vi starter nede fra, i.e. med $i = 0$: Her er $p_0(x_1) = c_0 = y_0$ kendt, så med $u = p_0(x_1) = c_0 = y_0$ har vi så

$$c_1 = \frac{y_1 - u}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Udregning af Newton's form via Horner

Nu ved vi hvordan vi udregner funktionsværdier af polynomiet $p_k(x)$ hvis det er kendt.

Hvis vi ikke kender koefficienterne c_i, $i = 0, ..., n-1$, kan disse udregnes idet vi kender funktionsværdierne af $p_k(x)$ i punkterne x_i hvor de tager værdierne y_i.

Vi starter nede fra, i.e. med $i = 0$: Her er $p_0(x_1) = c_0 = y_0$ kendt, så med $u = p_0(x_1) = c_0 = y_0$ har vi så

$$c_1 = \frac{y_1 - u}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

For $i = 1$: c_0, c_1 er nu kendt. Dermed er $p_1(x)$ således kendt. Kør så u–algoritmen til at finde $u = p_1(x_2)$, og sæt

$$c_2 = \frac{y_2 - u}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}.$$

Udregning af Newton's form via Horner

Nu ved vi hvordan vi udregner funktionsværdier af polynomiet $p_k(x)$ hvis det er kendt.

Hvis vi ikke kender koefficienterne c_i, $i = 0, ..., n-1$, kan disse udregnes idet vi kender funktionsværdierne af $p_k(x)$ i punkterne x_i hvor de tager værdierne y_i.

Vi starter nede fra, i.e. med $i = 0$: Her er $p_0(x_1) = c_0 = y_0$ kendt, så med $u = p_0(x_1) = c_0 = y_0$ har vi så

$$c_1 = \frac{y_1 - u}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

For $i = 1$: c_0, c_1 er nu kendt. Dermed er $p_1(x)$ således kendt. Kør så u–algoritmen til at finde $u = p_1(x_2)$, og sæt

$$c_2 = \frac{y_2 - u}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)}.$$

Så kendes c_0, c_1 og c_2 og dermed $p_2(x)$, o.s.v.