NumIntro - Uge 5 Onsdag

Nick Laursen

Københavns Universitet

1. oktober 2020

1. Opgaver

4.2.3) Vis at ***FS****,* ***BS*** *og deres permutationer altid løser* $Ax = b$*, hvis* A *er non-singulær.*

pf:

Lad A være en uppper triangulær matrice. Da vides det at $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$. Dette medfører $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$. Derved kan vi løse vores ligning $Ax = b$ med **BS**.

For **FS** med A som lower triangulær matrice laves det samme argument og vi ser at vi stadig løser ligningen $Ax = b$.

For permuterede matricer A med $\det(A) \neq 0$, sed det at vi bare skal lave rækkeoperationer. Hvis $\det(A) \neq 0$ vides det fra Linær algebra, at A stadig kan løse $Ax = b$, såfremt A er en upper eller lower triangulær matrice. $\square$

4.2.4) Hvor mange operationer er der i ***FS****?*

pf:

Er der nogen der har et svar? (*2 minutter*)

Vi ser at vi laver n divisioner. Vi laver $0 + 1 + 2 + 3 \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ multiplikationer. Vi laver samme antal subtraktion/additioner, i.e $\frac{n(n-1)}{2}$. Derved har vi totalt

$$n + 2\frac{n\,(n-1)}{2} = n + n\,(n-1) = n^2.$$

$\square$

2)

Find Gauss matricen for A på side 155 ***Ex. 1****. Hvad har LU dekomposition og Gauss elimination tilfælles? Er der forskelle?*

pf:

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

For anden sølje fås:

$$\begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & \frac{16}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2)

Find Gauss matricen for A på side 155 ***Ex. 1****. Hvad har LU dekomposition og Gauss elimination tilfælles? Er der forskelle?*

pf:

Så LU dekomposition er Gauss elimination i forklædning. Gauss løser $Ax = b$ direkte hvor LU dekomposition løser lignings systemet $Ly = b, Ux = y$. Hvad er så forskellen? Den første forskel er kompleksiteten. Gauss koster $\mathcal{O}\left(rn^3\right)$ hvor LU koster $\mathcal{O}\left(n^3 + rn^2\right)$ for ligningssystemet $Ax_1 = b_1, Ax_2 = b_2, \ldots, Ax_r = b_r$.

Som vi ser koster Gauss mindre for lille nok r, så Gauss er mere effektiv for mindre lignings systemer. Dog introducerer Gauss flere fejl, da den faktisk vil røre vores b matrice/vektor. Derfor vil man normalt bruge LU, da kost forskellen ikke er særligt stor og den giver et mere præcist resultat.

Den anden forskel er inverser. Det er utroligt dyrt at finde A^{-1} bare ved brug af Gauss-Jordan elimination. Derfor vil du i stedet bruge LU, da den løser ligninger uden at skulle introducere fejl i begge dine matricer $A, B = I$. $\square$

3)

Hvis A har en LU faktorisering hvor L er enheds lower matricen, har den så også en LU-faktorisering hvor U er en enheds upper matrice?

pf:

Svaret er ja. Jeg vil ikke gennemgå noget bevis, men man kan se i **Example 1, p. 155** en generel måde man kan skrifte imellem crout og Doolittle. Det er et theorem man bevise selv ved at følge eksemplet.

Theorem 1.1

Lad A være en non singulær matrice. Da er følgende sandt:

$$\textbf{\textit{Doolittle}} \Leftrightarrow \textbf{\textit{Crout}}.$$

$\square$

4.2.30) Find LU dekompositionen for matricen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

.

pf:

Vi bruger Gauss Elimination og får så følgende:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{26}{3} \end{pmatrix} = U$$

Herved har vi nu fundet vores U matrice. Nu finder vi vores L matrice. Dette gøres ved at lave de samme række operationer på identitets matricen $I_{n \times n}$. Dette giver os nu vores L matrice:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4.2.31) Faktor matricen A sådan at $A = LL^T$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

pf:

Vi ser at vi skal bruge **Cholesky Dekomposition**. Altså vi skal bruge formlerne:

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} (l_{ij} \cdot l_{kj})}{l_{ii}} \text{ og } l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}.$$

Så vi har følgende udregninger

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{a_{11}} = 1 \\ l_{21} &= \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{1} = 2 \\ l_{22} &= \sqrt{a_{22} - l_{21}} = \sqrt{5 - 2^2} = 1 \\ l_{12} &= \frac{a_{12} - l_{21} \cdot l_{11}}{l_{22}^2} = \frac{2 - 2 \cdot 1}{1} = 0 \end{aligned}$$

4.2.31) Faktor matricen A sådan at $A = LL^T$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

pf:

Derved har vi så $l_{11} = 1, l_{21} = 2, l_{12} = 0$ og $l_{22} = 1$. . Derfor får vi

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Derved får vi så

$$A = LL^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. $\square$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

a)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix}.$$

Vi husker at $\kappa(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$.
Vi bruger hintet givet i **Week 5**, i.e vi ser at vores matrice A er symetrisk og derfor har vi at normen er $\max_{i\in N}\{\lambda_i\}$. Vi finder dens eigenvalues:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow A = \left|\begin{pmatrix} a+1-\lambda & a \\ a & a-1-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

Dette giver os at vi skal løse

$$(a+1-\lambda)(a-1-\lambda) - a^2 = \lambda^2 - 2a\lambda - 1 = 0.$$

Løsningen til denne andengradsligning vil give os

$$\lambda \in \left\{a + \sqrt{a^2+1}, a - \sqrt{a^2+1}\right\}$$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

a)

Så vi har at

$$\|A\|_2 = \max\left\{a + \sqrt{a^2+1}, a - \sqrt{a^2+1}\right\} = a + \sqrt{a^2+1}$$

Dette er klart da $a + \sqrt{a^2+1} > a - \sqrt{a^2+1}, \forall a \in \mathbb{R}$.

Vi ser at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -a+1 & a \\ a & -a-1 \end{pmatrix}.$$

Ved at gøre som før så får vi

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \max\left\{-a + \sqrt{a^2+1}, -a - \sqrt{a^2+1}\right\} = -a + \sqrt{a^2+1}$$

Dette er klart da $-a + \sqrt{a^2+1} > -a - \sqrt{a^2+1}, \forall a \in \mathbb{R}$.
Så vi har

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = \left(a + \sqrt{a^2+1}\right)\left(-a + \sqrt{a^2+1}\right) = -a^2 + a^2 + 1 = 1,$$

hvor det gælder $\forall a \in \mathbb{R}$. $\square$

4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for b), c) og for $\|A\|_2$ for a).

b)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi husker at

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right\}.$$

Så i princippet så summer vi bare abselut værdien af elementerne for hver række. Vi får:

$$\|A\|_\infty = \max \{ 0 + 1, |-2| + 0 \} = 2.$$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

b)

Vi ser så at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Derfor får vi at $\left\|A^{-1}\right\|_\infty = 1$.
Derfor har vi så nu

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 2 \cdot 1 = 2.$$

$\square$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

c)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

På præcis samme måde som i **b)** får vi $m_1 = |\alpha| + 1$ og $m_2 = 2$. Så vi får denne formel

$$\|A\|_\infty = \max 2, |\alpha| + 1$$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

c)

Vi har så nu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha-1} \\ \frac{-1}{\alpha-1} & \frac{\alpha}{\alpha-1} \end{pmatrix}.$$

Derfor får vi $m_1 = \left|\frac{1}{\alpha-1}\right| + \left|\frac{-1}{\alpha-1}\right| = \frac{2}{|\alpha-1|}$ og
$m_2 = \left|\frac{-1}{\alpha-1}\right| + \left|\frac{\alpha}{\alpha-1}\right| = \frac{|\alpha|+1}{|\alpha-1|}$.
Så

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \frac{\max\{2, |\alpha|+1\}}{|\alpha-1|}.$$

Så vi får

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = \frac{\left(\max\{2, |\alpha|+1\}\right)^2}{|a-1|}$$

$\square$