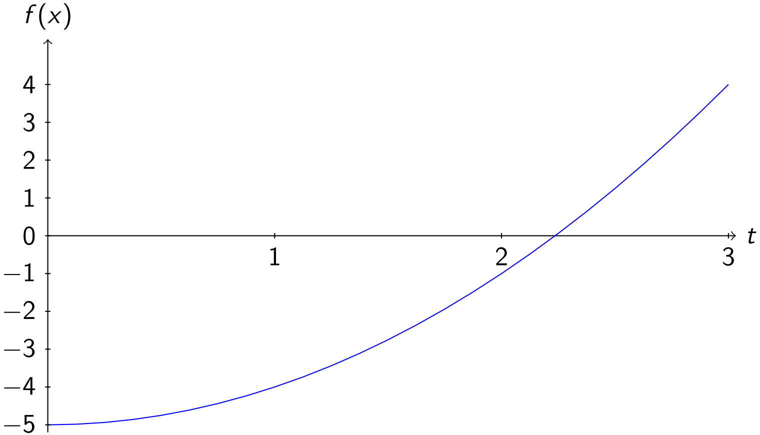
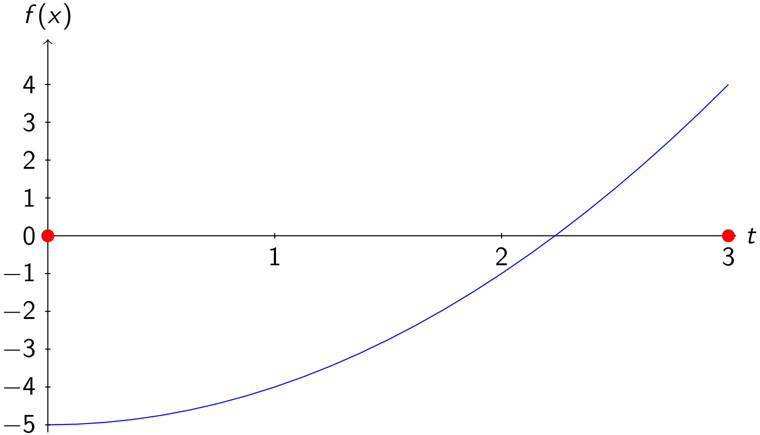
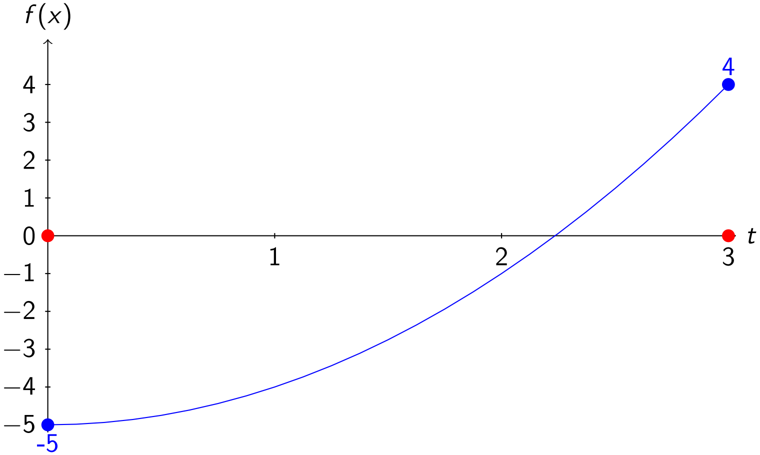
Løsning af ikke-lineære ligninger

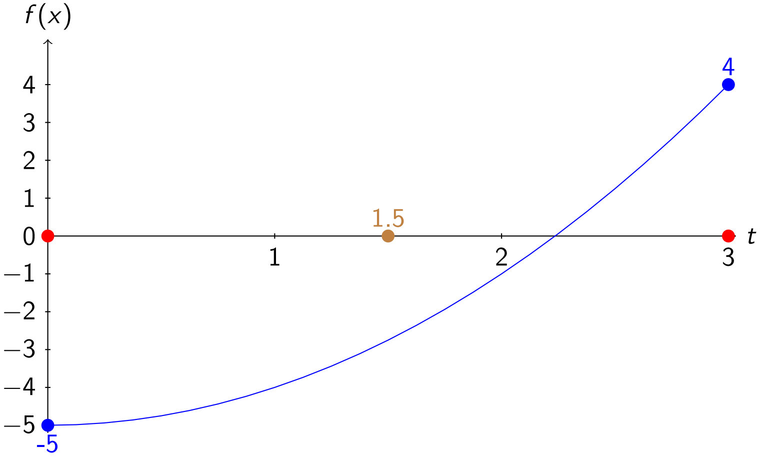
Bisektionsmetoden

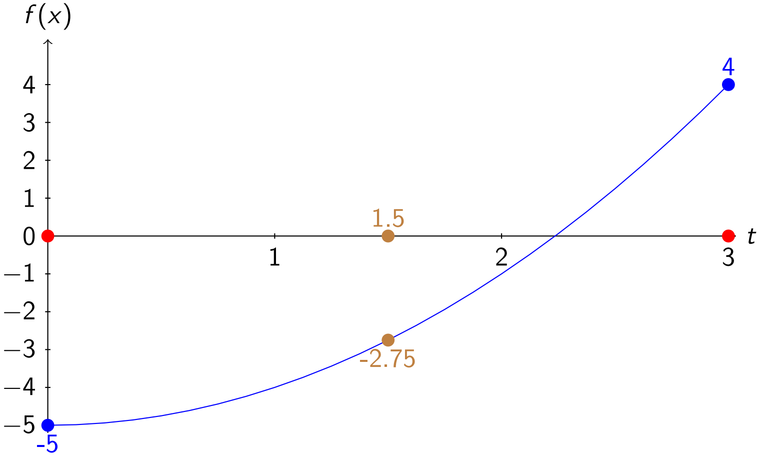
Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences


$f(x)$
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
1
2
3
t

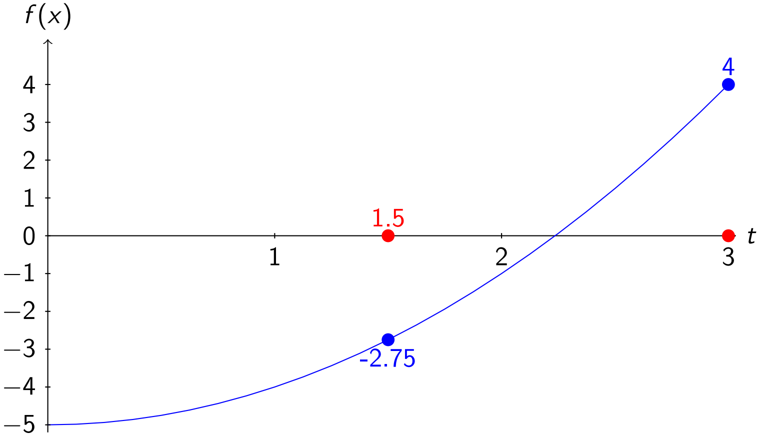

$f(x)$
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
1
2
3
t

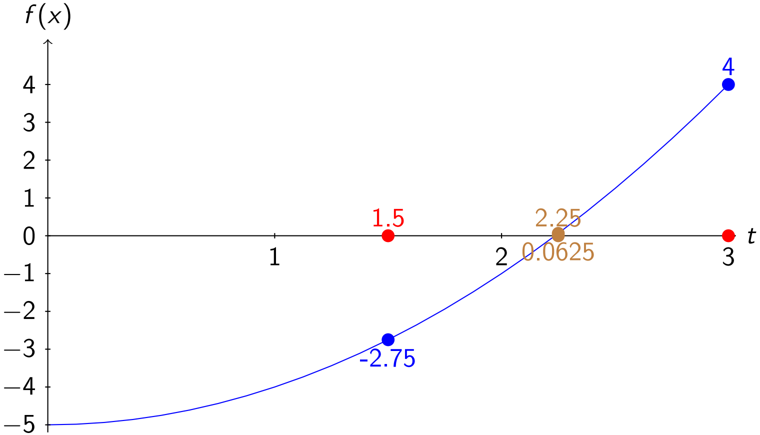

$f(x)$
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
1
2
3
t
4
-5


f(x)
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
-5
4
1.5
1
2
3
t

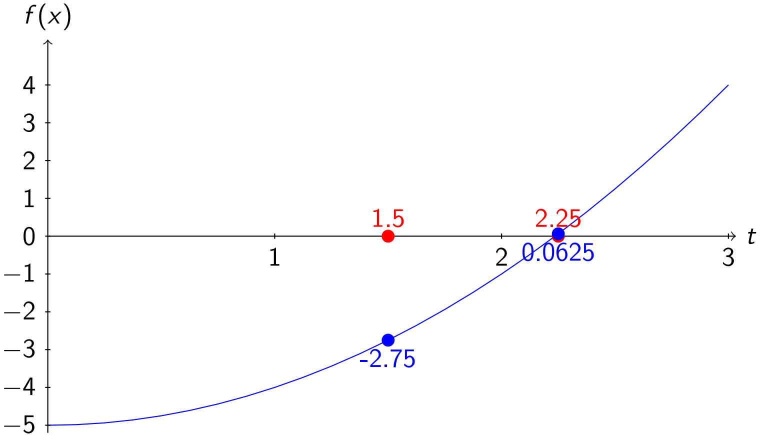


Gæt: 1.5


f(x)
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
1
2
3
t
1.5
4
-2.75



Gæt: 2.25



Denne procedure kaldes for bisektionsmetoden.

Bisektionsmetoden

Givet en **kontinuert** funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Bisektionsmetoden

Givet en **kontinuert** funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi ønsker at løse

$$f(x) = 0.$$

Bisektionsmetoden

Givet en **kontinuert** funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi ønsker at løse

$$f(x) = 0.$$

Find

$$a < b : \quad f(a)f(b) < 0.$$

Bisektionsmetoden

Givet en **kontinuert** funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vi ønsker at løse

$$f(x) = 0.$$

Find

$$a < b : \quad f(a)f(b) < 0.$$

Betragt algoritmen

1 Lad

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

2 Hvis $f(c) = 0$: en løsning er fundet, STOP.

L Hvis $f(a)f(c) < 0$: sæt $b = c$ og GOTO 1.

R Hvis $f(c)f(b) < 0$: sæt $a = c$ og GOTO 1.

Konvergens

Lad $a_0 = a$ og $b_0 = b$, og $[a_k, b_k]$ det resulterende interval i det k'te trin.

Konvergens

Lad $a_0 = a$ og $b_0 = b$, og $[a_k, b_k]$ det resulterende interval i det k'te trin. Så er

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = 2^{-k}(b - a),$$

Konvergens

Lad $a_0 = a$ og $b_0 = b$, og $[a_k, b_k]$ det resulterende interval i det k'te trin. Så er

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = 2^{-k}(b - a),$$

og

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b$$
$$b \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq a.$$

Konvergens

Lad $a_0 = a$ og $b_0 = b$, og $[a_k, b_k]$ det resulterende interval i det k'te trin. Så er

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = 2^{-k}(b - a),$$

og

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b$$
$$b \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq a.$$

Følgerne $\{a_k\}_{k \geq 0}$, $\{b_k\}_{k \geq 0}$ er derfor monotone og begrænsede, og dermed konvergente, i.e. $\exists r_1, r_2$:

$$r_1 = \lim_k a_k \quad \text{og} \quad r_2 = \lim_k b_k.$$

Konvergens

Lad $a_0 = a$ og $b_0 = b$, og $[a_k, b_k]$ det resulterende interval i det k'te trin. Så er

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = 2^{-k}(b - a),$$

og

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b$$
$$b \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq a.$$

Følgerne $\{a_k\}_{k\geq 0}$, $\{b_k\}_{k\geq 0}$ er derfor monotone og begrænsede, og dermed konvergente, i.e. $\exists r_1, r_2$:

$$r_1 = \lim_k a_k \quad \text{og} \quad r_2 = \lim_k b_k.$$

Men

$$r_2 - r_1 = \lim_k (b_k - a_k) = \lim_k 2^{-k}(b - a) = 0 \implies r_1 = r_2 = r.$$

Konvergens

Lad $a_0 = a$ og $b_0 = b$, og $[a_k, b_k]$ det resulterende interval i det k'te trin. Så er

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}) = \cdots = 2^{-k}(b-a),$$

og

$$a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq b$$
$$b \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq a.$$

Følgerne $\{a_k\}_{k\geq 0}$, $\{b_k\}_{k\geq 0}$ er derfor monotone og begrænsede, og dermed konvergente, i.e. $\exists r_1, r_2$:

$$r_1 = \lim_k a_k \quad \text{og} \quad r_2 = \lim_k b_k.$$

Men

$$r_2 - r_1 = \lim_k (b_k - a_k) = \lim_k 2^{-k}(b-a) = 0 \implies r_1 = r_2 = r.$$

Da

$$f(a_k)f(b_k) \leq 0$$

så vil

$$f(r)^2 = \lim_k f(a_k)f(b_k) \leq 0 \implies f(r) = 0.$$

Fejlanalyse

Antag, at vi ønsker en fejl på maximum ϵ. Lad os finde et antal iterationer der sikrer, at

$$|r - c_n| < \epsilon.$$

Fejlanalyse

Antag, at vi ønsker en fejl på maximum ϵ. Lad os finde et antal iterationer der sikrer, at

$$|r - c_n| < \epsilon.$$

Vi har, at

$$r, c_n \in [a_n, b_n] \implies |r - c_n| \leq 2^{-n}(b - a).$$

Fejlanalyse

Antag, at vi ønsker en fejl på maximum ϵ. Lad os finde et antal iterationer der sikrer, at

$$|r - c_n| < \epsilon.$$

Vi har, at

$$r, c_n \in [a_n, b_n] \implies |r - c_n| \leq 2^{-n}(b - a).$$

Vi løser så i stedet:

$$2^{-n}(b - a) < \epsilon.$$

Fejlanalyse

Antag, at vi ønsker en fejl på maximum ϵ. Lad os finde et antal iterationer der sikrer, at

$$|r - c_n| < \epsilon.$$

Vi har, at

$$r, c_n \in [a_n, b_n] \implies |r - c_n| \leq 2^{-n}(b - a).$$

Vi løser så i stedet:

$$2^{-n}(b - a) < \epsilon.$$

Dette har løsning

$$n > \frac{\log(b - a) - \log \epsilon}{\log(2)}.$$

Fejlanalyse

Antag, at vi ønsker en fejl på maximum ϵ. Lad os finde et antal iterationer der sikrer, at

$$|r - c_n| < \epsilon.$$

Vi har, at

$$r, c_n \in [a_n, b_n] \implies |r - c_n| \leq 2^{-n}(b-a).$$

Vi løser så i stedet:

$$2^{-n}(b-a) < \epsilon.$$

Dette har løsning

$$n > \frac{\log(b-a) - \log \epsilon}{\log(2)}.$$

Antag, at vi ønsker en relativ fejl på højst ϵ,

$$\frac{|r - c_n|}{|r|} < \epsilon.$$

Så kan vi bruge

$$\frac{|r - c_n|}{|r|} \leq \frac{|r - c_n|}{a} \leq 2^{-n}\frac{b-a}{a} < \epsilon$$

og løse for n.

Eksempel

Find den største rod for

$$f(x) = x^6 - x - 1.$$

Eksempel

Find den største rod for

$$f(x) = x^6 - x - 1.$$

1. Find ud af hvor roden ca. befinder sig: Visuel inspektion.

Eksempel

Find den største rod for

$$f(x) = x^6 - x - 1.$$

1. Find ud af hvor roden ca. befinder sig: Visuel inspektion.
2. Vi ser, at roden kan lokaliseres i $[1, 1.3]$, så vi tager

$$a = 1 \quad \text{og} \quad b = 1.3.$$

Eksempel

Find den største rod for
$$f(x) = x^6 - x - 1.$$

1. Find ud af hvor roden ca. befinder sig: Visuel inspektion.
2. Vi ser, at roden kan lokaliseres i $[1, 1.3]$, så vi tager
$$a = 1 \quad \text{og} \quad b = 1.3.$$
3. Antal iterationer for en præcision på den absolutte fejl (og også relative fejl da $a = 1$) på $\epsilon = 10^{-8}$:
$$n > \frac{\log(1.3-1) - \log 10^{-8}}{\log(2)} = 24.3,$$
så vi tager $n = 25$.

Opsummering af bisektionsmetoden

- Funktionen skal være kontinuert.

Opsummering af bisektionsmetoden

- Funktionen skal være kontinuert.
- Man skal finde punkter a, b for hvilke $f(a)f(b) < 0$. Grafisk inspektion anbefalet.

Opsummering af bisektionsmetoden

- Funktionen skal være kontinuert.
- Man skal finde punkter a, b for hvilke $f(a)f(b) < 0$. Grafisk inspektion anbefalet.
- Konvergerer altid.

Opsummering af bisektionsmetoden

- Funktionen skal være kontinuert.
- Man skal finde punkter a, b for hvilke $f(a)f(b) < 0$. Grafisk inspektion anbefalet.
- Konvergerer altid.
- Hastighed af konvergens: fejlen i iteration n er det halve af fejlen i den foregående iteration, altså lineær konvergenshastighed.

Opsummering af bisektionsmetoden

- Funktionen skal være kontinuert.
- Man skal finde punkter a, b for hvilke $f(a)f(b) < 0$. Grafisk inspektion anbefalet.
- Konvergerer altid.
- Hastighed af konvergens: fejlen i iteration n er det halve af fejlen i den foregående iteration, altså lineær konvergenshastighed.
- Langsom da metoden stort set ikke anvender funktionens karakteristika overhovedet.