NumIntro - Uge 6 Onsdag

Nick Laursen

Københavns Universitet

7. oktober 2020

1. **6.1.1**

2. **6.1.13**

3. **6.1.22**

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

a)

Vi har

x	3	7
y	5	1

6.1.1 Lav Poly.int på Matricerne som givet.

a)

Vi har

x	3	7
y	5	1

Vi husker ligning **(4), p.310** fra newton at

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

og

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_k - x_{k-1})}.$$

Dog ved vi at der gælder at $c_0 = y_0$, altid.

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

a)

Vi har

x	3	7
y	5	1

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

a)

Vi har

x	3	7
y	5	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 5$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

a)

Vi har

x	3	7
y	5	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 5 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 5$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

a)

Vi har

x	3	7
y	5	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 5 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 5$$
$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0}$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

a)

Vi har

x	3	7
y	5	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 5 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 5$$

$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{(-1) - 5}{7 - 3} = \frac{-3}{2}$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

a)

Vi har

x	3	7
y	5	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 5 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 5$$

$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{(-1) - 5}{7 - 3} = \frac{-3}{2}$$

$$\Rightarrow p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

a)

Vi har

x	3	7
y	5	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 5 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 5$$
$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{(-1) - 5}{7 - 3} = \frac{-3}{2}$$
$$\Rightarrow p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0) = 5 + \frac{-3}{2}(x - 3) = \frac{19}{2} - \frac{3}{2}x.$$

$\square$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

6.1.1 Lav Poly.int på Matricerne som givet.

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 146$$

6.1.1 Lav Poly.int på Matricerne som givet.

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 146 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 146$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 146 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 146$$

$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0}$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 146 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 146$$

$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{2 - 146}{1 - 7} = \frac{144}{6} = 24$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 146 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 146$$

$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{2-146}{1-7} = \frac{144}{6} = 24$$

$$\Rightarrow p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 146 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 146$$

$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{2-146}{1-7} = \frac{144}{6} = 24$$

$$\Rightarrow p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0) = 146 + 24(x-7) = 24x - 22$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 146 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 146$$

$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{2-146}{1-7} = \frac{144}{6} = 24$$

$$\Rightarrow p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0) = 146 + 24(x-7) = 24x - 22$$

$$c_2 = \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 146 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 146$$

$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{2-146}{1-7} = \frac{144}{6} = 24$$

$$\Rightarrow p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0) = 146 + 24(x-7) = 24x - 22$$

$$c_2 = \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1-26}{(2-7)(2-1)} = \frac{25}{5} = 5$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$c_0 = y_0 = 146 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 146$$

$$c_1 = \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{2 - 146}{1 - 7} = \frac{144}{6} = 24$$

$$\Rightarrow p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0) = 146 + 24(x - 7) = 24x - 22$$

$$c_2 = \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1 - 26}{(2 - 7)(2 - 1)} = \frac{25}{5} = 5$$

$$\Rightarrow p_2(x) = p_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$$

6.1.1 *Lav Poly.int på Matricerne som givet.*

b)

Vi har

x	7	1	2
y	146	2	1

Så udregningen går som følgende:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= y_0 = 146 \Rightarrow p_0(x) = c_0 = 146 \\
c_1 &= \frac{y_1 - p_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{2-146}{1-7} = \frac{144}{6} = 24 \\
\Rightarrow p_1(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) = 146 + 24(x-7) = 24x - 22 \\
c_2 &= \frac{y_2 - p_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1-26}{(2-7)(2-1)} = \frac{25}{5} = 5 \\
\Rightarrow p_2(x) &= p_1(x) + c_2(x - x_0)(x - x_1) = 24x - 22 + 5(x-7)(x-1) \\
&= 24x - 22 + 5x^2 - 40x + 35 = 5x^2 - 16x + 13
\end{aligned}
$$

$\square$

6.1.13

Vis, at hvis vi tager enhver mængde bestående af 23 noder i intervallet $[-1,1]$ *og interpolerer funktionen* $f(x)=\cosh(x)$ *med et poly. af grad 22, så vil den relative fejl være* $\frac{|p(x)-f(x)|}{|f(x)|}<5\cdot 10^{-16}$.

pf:

Vi bemærker først at der er skarp ulighed.

6.1.13

Vis, at hvis vi tager enhver mængde bestående af 23 noder i intervallet $[-1,1]$ *og interpolerer funktionen* $f(x)=\cosh(x)$ *med et poly. af grad 22, så vil den relative fejl være* $\frac{|p(x)-f(x)|}{|f(x)|}<5\cdot 10^{-16}$.

pf:

Vi bemærker først at der er skarp ulighed. Det er klart

$$f(x)=\cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\in C^{23}[-1,1].$$

6.1.13

Vis, at hvis vi tager enhver mængde bestående af 23 noder i intervallet $[-1, 1]$ *og interpolerer funktionen* $f(x) = \cosh(x)$ *med et poly. af grad 22, så vil den relative fejl være* $\frac{|p(x)-f(x)|}{|f(x)|} < 5 \cdot 10^{-16}$.

pf:

Vi bemærker først at der er skarp ulighed. Det er klart

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \in C^{23}[-1, 1].$$

Lad $\{x_0, \ldots, x_{22}\}$ være de 23 noder i intervallet $[-1, 1]$ og lad $p(x)$ være det interpolerede poly.

6.1.13

Vis, at hvis vi tager enhver mængde bestående af 23 noder i intervallet $[-1,1]$ *og interpolerer funktionen* $f(x) = \cosh(x)$ *med et poly. af grad 22, så vil den relative fejl være* $\frac{|p(x)-f(x)|}{|f(x)|} < 5 \cdot 10^{-16}$.

pf:

Vi bemærker først at der er skarp ulighed. Det er klart

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \in C^{23}[-1,1].$$

Lad $\{x_0, \ldots, x_{22}\}$ være de 23 noder i intervallet $[-1,1]$ og lad $p(x)$ være det interpolerede poly. Så ved vi at

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{23!} f^{(23)}(\xi_x) \prod_{i=0}^{22} (x - x_i),$$

hvor $x, \xi_x \in [-1,1]$. Dette vides fra **Theorem 2, p. 315**.

6.1.13

Vis, at hvis vi tager enhver mængde bestående af 23 noder i intervallet $[-1,1]$ *og interpolerer funktionen* $f(x)=\cosh(x)$ *med et poly. af grad 22, så vil den relative fejl være* $\frac{|p(x)-f(x)|}{|f(x)|}<5\cdot 10^{-16}$.

pf:

Vi ved følgende er sandt pr. Analyse 0, at
$f^{(23)}(\xi_x)=\sinh(\xi_x)=\frac{e^{\xi_x}-e^{-\xi_x}}{2}$ er en monoton voksende funktion, sådan at

$$\left|f^{(23)}(\xi_x)\right|\leq \sinh(1)=1.1752,\ \xi_x\in[-1,1],$$

6.1.13

Vis, at hvis vi tager enhver mængde bestående af 23 noder i intervallet $[-1,1]$ *og interpolerer funktionen* $f(x) = \cosh(x)$ *med et poly. af grad 22, så vil den relative fejl være* $\frac{|p(x)-f(x)|}{|f(x)|} < 5 \cdot 10^{-16}$.

pf:

Vi ved følgende er sandt pr. Analyse 0, at
$f^{(23)}(\xi_x) = \sinh(\xi_x) = \frac{e^{\xi_x} - e^{-\xi_x}}{2}$ er en monoton voksende funktion, sådan at

$$\left| f^{(23)}(\xi_x) \right| \leq \sinh(1) = 1.1752, \ \xi_x \in [-1,1],$$

og yderligere ved vi at

$$\left| \prod_{i=0}^{22} (x - x_i) \right| < 2^{23}, \ x \in [-1,1].$$

6.1.13

Vis, at hvis vi tager enhver mængde bestående af 23 noder i intervallet $[-1,1]$ *og interpolerer funktionen* $f(x) = \cosh(x)$ *med et poly. af grad 22, så vil den relative fejl være* $\frac{|p(x)-f(x)|}{|f(x)|} < 5 \cdot 10^{-16}$.

pf:

Vi ved følgende er sandt pr. ANALYSE 0, at $f^{(23)}(\xi_x) = \sinh(\xi_x) = \frac{e^{\xi_x} - e^{-\xi_x}}{2}$ er en monoton voksende funktion, sådan at

$$\left|f^{(23)}(\xi_x)\right| \le \sinh(1) = 1.1752,\ \xi_x \in [-1,1],$$

og yderligere ved vi at

$$\left|\prod_{i=0}^{22}(x - x_i)\right| < 2^{23},\ x \in [-1,1].$$

Ved at sammensætte disse uligheder og da vi ved at $1.5431 \ge |f(x)| \ge 1$ får vi så:

$$\frac{|p(x) - f(x)|}{|f(x)|} < \frac{\frac{1}{23!} \cdot (1.17) \cdot 2^{23} \cdot 3}{1.54} = \frac{2^{23} \cdot 3 \cdot 1.17}{23! \cdot 1.54} = 3.707 \cdot 10^{-16} < 5 \cdot 10^{-16}.$$

□

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger ligning **(9)** og **(10)** på **p. 312**.

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger ligning **(9)** og **(10)** på **p. 312**. Ligning **(10)** siger $\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger ligning **(9)** og **(10)** på **p. 312**. Ligning **(10)** siger $\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. Vi begynder nu at regne:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}$$

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger ligning **(9)** og **(10)** på **p. 312**. Ligning **(10)** siger $\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Vi begynder nu at regne:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \cdots = \frac{x^2 - x}{6}.$$

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger ligning **(9)** og **(10)** på **p. 312**. Ligning **(10)** siger $\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Vi begynder nu at regne:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \cdots = \frac{x^2 - x}{6}.$$

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger ligning **(9)** og **(10)** på **p. 312**. Ligning **(10)** siger $\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. Vi begynder nu at regne:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \cdots = \frac{x^2 - x}{6}.$$

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \cdots = \frac{x^2 + x - 2}{-2}$$

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

<u>**pf:**</u>

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger ligning **(9)** og **(10)** på **p. 312**. Ligning **(10)** siger $\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. Vi begynder nu at regne:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \cdots = \frac{x^2-x}{6}.$$

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \cdots = \frac{x^2+x-2}{-2}$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger ligning **(9)** og **(10)** på **p. 312**. Ligning **(10)** siger $\mathcal{L}_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Vi begynder nu at regne:

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \cdots = \frac{x^2 - x}{6}.$$

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \cdots = \frac{x^2 + x - 2}{-2}$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \cdots = \frac{x^2 + 2x}{3}.$$

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger nu ligning **(9)** som siger

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \mathcal{L}_k(x).$$

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger nu ligning **(9)** som siger

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \mathcal{L}_k(x).$$

Herved får vi så:

$$p(x) = 0 \cdot \mathcal{L}_0\left(x\right) + \mathcal{L}_1\left(x\right) - \mathcal{L}_2\left(x\right) =$$

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger nu ligning **(9)** som siger

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \mathcal{L}_k(x).$$

Herved får vi så:

$$p(x) = 0 \cdot \mathcal{L}_0\left(x\right) + \mathcal{L}_1\left(x\right) - \mathcal{L}_2\left(x\right) = \cdots = 1 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x.$$

6.1.22

Find Lagrange og Newton interpolation formen af følgende matrice, og vis de er det samme poly. $ax^2 + bx + c$.

pf:

Vi har

x	-2	0	1
y	0	1	-1

Vi bruger nu ligning **(9)** som siger

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \mathcal{L}_k(x).$$

Herved får vi så:

$$p(x) = 0 \cdot \mathcal{L}_0\left(x\right) + \mathcal{L}_1\left(x\right) - \mathcal{L}_2\left(x\right) = \cdots = 1 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x.$$

Find selv newton polynomiet og indse det er det samme poly.

□