Løsning af lineære ligninger

Konditionstal

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Eksempel: Dårlig konditionering

Betragt ligningssytemet

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

med løsning

$$\boldsymbol{x} = (1, 1, 1, 1).$$

Eksempel: Dårlig konditionering

Betragt ligningssytemet

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

med løsning

$$\boldsymbol{x} = (1, 1, 1, 1).$$

Vi laver nu en mindre pertubation af højresiden:

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix}$$

som har (eksakt!) løsning

$$\boldsymbol{x} = (9.2, -12.6, 4.5, -1.1).$$

Eksempel

Vi kan også risikere at data fra matricen er behæftet med usikkerhed (hvis f.eks. de er baseret på målinger). F.eks. vil

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.98 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

resultere i løsningen

$$\boldsymbol{x} = (-81, 13, -34, 22).$$

Eksempel

Vi kan også risikere at data fra matricen er behæftet med usikkerhed (hvis f.eks. de er baseret på målinger). F.eks. vil

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.98 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

resultere i løsningen

$$\boldsymbol{x} = (-81, 13, -34, 22).$$

Hvad der går galt her skal vi formalisere i det følgende.

Betragt ligningssystemet

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

på en eller anden numerisk måde.

Betragt ligningssystemet

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

på en eller anden numerisk måde.

1. Ved det direkte problem forstås givet $\boldsymbol{A}$ og data $\boldsymbol{x}$ at beregne $\boldsymbol{b}$ (output eller "løsning").

Betragt ligningssystemet

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

på en eller anden numerisk måde.

1. Ved det direkte problem forstås givet $\boldsymbol{A}$ og data $\boldsymbol{x}$ at beregne $\boldsymbol{b}$ (output eller "løsning").
2. Ved det omvendte problem forstås givet $\boldsymbol{A}$ og data $\boldsymbol{b}$ at beregne $\boldsymbol{x}$.

Betragt ligningssystemet

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

på en eller anden numerisk måde.

1. Ved det direkte problem forstås givet $\boldsymbol{A}$ og data $\boldsymbol{x}$ at beregne $\boldsymbol{b}$ (output eller "løsning").
2. Ved det omvendte problem forstås givet $\boldsymbol{A}$ og data $\boldsymbol{b}$ at beregne $\boldsymbol{x}$.

Ved numerisk beregning af ovenstående finder vi altså i stedet for de eksakte løsninger $\boldsymbol{x}$ eller $\boldsymbol{b}$ nogle tilnærmede løsninger $\tilde{\boldsymbol{x}}$ eller $\tilde{\boldsymbol{b}}$.

Betragt ligningssystemet

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

på en eller anden numerisk måde.

1. Ved det direkte problem forstås givet $\boldsymbol{A}$ og data $\boldsymbol{x}$ at beregne $\boldsymbol{b}$ (output eller "løsning").
2. Ved det omvendte problem forstås givet $\boldsymbol{A}$ og data $\boldsymbol{b}$ at beregne $\boldsymbol{x}$.

Ved numerisk beregning af ovenstående finder vi altså i stedet for de eksakte løsninger $\boldsymbol{x}$ eller $\boldsymbol{b}$ nogle tilnærmede løsninger $\tilde{\boldsymbol{x}}$ eller $\tilde{\boldsymbol{b}}$. I begge tilfælde vil

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Betragt ligningssystemet

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

på en eller anden numerisk måde.

1. Ved det direkte problem forstås givet $\boldsymbol{A}$ og data $\boldsymbol{x}$ at beregne $\boldsymbol{b}$ (output eller "løsning").
2. Ved det omvendte problem forstås givet $\boldsymbol{A}$ og data $\boldsymbol{b}$ at beregne $\boldsymbol{x}$.

Ved numerisk beregning af ovenstående finder vi altså i stedet for de eksakte løsninger $\boldsymbol{x}$ eller $\boldsymbol{b}$ nogle tilnærmede løsninger $\tilde{\boldsymbol{x}}$ eller $\tilde{\boldsymbol{b}}$. I begge tilfælde vil

$$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Definition

Vi definerer fejlen ved løsningen til at være

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$$

og residuet til

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}.$$

Da $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ og $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, så vil

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}.$$

Da $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ og $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, så vil

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}.$$

Da $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ og $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, så vil

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}.$$

Det er klart, at

$$\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\| = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}})\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|$$

Da $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ og $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, så vil

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}.$$

Det er klart, at

$$\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\| = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}})\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|$$

og

$$\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}})\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|.$$

Da $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$ og $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, så vil

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}.$$

Det er klart, at

$$\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\| = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}})\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|$$

og

$$\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| = \|\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}})\| \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|.$$

Definition

Vi siger, at $\|\boldsymbol{A}\|$ er konditionstal for den absolutte fejl for det direkte problem og at $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ er konditionstal på den absolutte fejl for det omvendte problem.

Lad os nu betragte de relative fejl.

Lad os nu betragte de relative fejl. Til det omvendte problem får vi

$$\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| \quad \leq \quad \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|$$

Lad os nu betragte de relative fejl. Til det omvendte problem får vi

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| &\leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\| \\ &= \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}\end{aligned}$$

Lad os nu betragte de relative fejl. Til det omvendte problem får vi

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\| &\leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\| \\
&= \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \\
&\leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}
\end{aligned}$$

Lad os nu betragte de relative fejl. Til det omvendte problem får vi

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| &\leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\| \\ &= \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \\ &\leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \end{aligned}$$

hvilket giver

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}. \tag{1}$$

Til de direkte problem fås tilsvarende

$$\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\| = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}})\|$$

Til de direkte problem fås tilsvarende

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\| &= \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}})\| \\ &\leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|\end{aligned}$$

Til de direkte problem fås tilsvarende

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\| &= \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}})\| \\
&\leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\| \\
&= \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}
\end{aligned}$$

Til de direkte problem fås tilsvarende

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\| &= \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}})\| \\
&\leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\| \\
&= \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \\
&\leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}
\end{aligned}
$$

Til de direkte problem fås tilsvarende

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\| &= \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}})\| \\
&\leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| \\
&= \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \\
&\leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}
\end{aligned}$$

hvilket medfører

$$\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}. \tag{2}$$

Til de direkte problem fås tilsvarende

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\| &= \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}})\| \\ &\leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\| \\ &= \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \\ &\leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\end{aligned}$$

hvilket medfører

$$\frac{\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\frac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}. \tag{2}$$

Definition

Tallet

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|$$

kaldes konditiontallet for den relative fejl på både det direkte og det omvendte problem.

Vi har også vist følgende sætning:

Sætning

Der eksisterer følgende relation mellem de relative fejl og residuer:

$$\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{A})}\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{e}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \kappa(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

eller, med oprindelige symboler,

$$\frac{1}{\kappa(\boldsymbol{A})}\frac{\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \kappa(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

Tilbage til vores oprindelige eksempel.

Tilbage til vores oprindelige eksempel. Her er konditionstallet med maksimumsnormen

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = 4488.$$

Tilbage til vores oprindelige eksempel. Her er konditionstallet med maksimumsnormen

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = 4488.$$

Det betyder, at den relative fejl på løsningen $\boldsymbol{x}$,

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \kappa(\boldsymbol{A}) \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

fra (1) kan være op til 4488 gange den relative fejlspecifikation på data $\boldsymbol{b}$.

Tilbage til vores oprindelige eksempel. Her er konditionstallet med maksimumsnormen

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = 4488.$$

Det betyder, at den relative fejl på løsningen $\boldsymbol{x}$,

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \kappa(\boldsymbol{A}) \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

fra (1) kan være op til 4488 gange den relative fejlspecifikation på data $\boldsymbol{b}$. I eksemplet med $\boldsymbol{b}$ pertuberet havde vi faktisk en relativ fejl på data $\boldsymbol{b}$ givet ved

$$\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{0.1}{33} \approx 0.003 = 0.3\%$$

så den relative fejl på $\boldsymbol{x}$ kan være op til

$$\frac{1}{330} * 4488 = 13.6.$$

Tilbage til vores oprindelige eksempel. Her er konditionstallet med maksimumsnormen

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = 4488.$$

Det betyder, at den relative fejl på løsningen $\boldsymbol{x}$,

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \kappa(\boldsymbol{A}) \frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

fra (1) kan være op til 4488 gange den relative fejlspecifikation på data $\boldsymbol{b}$. I eksemplet med $\boldsymbol{b}$ pertuberet havde vi faktisk en relativ fejl på data $\boldsymbol{b}$ givet ved

$$\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{0.1}{33} \approx 0.003 = 0.3\%$$

så den relative fejl på $\boldsymbol{x}$ kan være op til

$$\frac{1}{330} * 4488 = 13.6.$$

Den aktuelle relative fejl på $\boldsymbol{x}$, under antagelse at den eksakte løsning er $\boldsymbol{e} = (1, 1, 1, 1)$, var faktisk på 13.6 !