NumIntro - Uge 6 Mandag

Nick Laursen

Københavns Universitet

6. oktober 2020

1. Teorien

2. Opgave **4.4.40**

3. Forklaring af Teorien

Teori.

Lad $Ax = b$ have en løsning. Hvad er fejlen på vores løsning?

$\kappa(A)$ er givet som

$$\kappa(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|.$$

F.eks hvis vi har $\|\cdot\|_\infty$ så skriver vi følgende:

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty.$$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

a)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a-1 \end{pmatrix}.$$

Vi husker at $\kappa(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$.
Vi bruger hintet givet i **Week 5**, i.e vi ser at vores matrice A er symetrisk og derfor har vi at normen er $\max_{i\in N} \{ \lambda_i \}$. Vi finder dens eigenvalues:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow A = \left|\begin{pmatrix} a+1-\lambda & a \\ a & a-1-\lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

Dette giver os at vi skal løse

$$(a+1-\lambda)(a-1-\lambda) - a^2 = \lambda^2 - 2a\lambda - 1 = 0.$$

Løsningen til denne andengradsligning vil give os

$$\lambda \in \left\{a + \sqrt{a^2+1}, a - \sqrt{a^2+1}\right\}$$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

a)

Så vi har at

$$\|A\|_2 = \max\left\{a + \sqrt{a^2+1}, a - \sqrt{a^2+1}\right\} = a + \sqrt{a^2+1}$$

Dette er klart da $a + \sqrt{a^2+1} > a - \sqrt{a^2+1}, \forall a \in \mathbb{R}$.

Vi ser at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -a+1 & a \\ a & -a-1 \end{pmatrix}.$$

Ved at gøre som før så får vi

$$\left\|A^{-1}\right\|_2 = \max\left\{-a + \sqrt{a^2+1}, -a - \sqrt{a^2+1}\right\} = -a + \sqrt{a^2+1}$$

Dette er klart da $-a + \sqrt{a^2+1} > -a - \sqrt{a^2+1}, \forall a \in \mathbb{R}$.
Så vi har

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \left\|A^{-1}\right\|_2 = \left(a + \sqrt{a^2+1}\right)\left(-a + \sqrt{a^2+1}\right) = -a^2 + a^2 + 1 = 1,$$

hvor det gælder $\forall a \in \mathbb{R}$. $\square$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

b)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi husker at

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \right\}.$$

Så i princippet så summer vi bare abselut værdien af elementerne for hver række. Vi får:

$$\|A\|_\infty = \max \{ 0 + 1, |-2| + 0 \} = 2.$$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

b)

Vi ser så at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Derfor får vi at $\left\|A^{-1}\right\|_\infty = 1$.
Derfor har vi så nu

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 2 \cdot 1 = 2.$$

□

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

c)

Lad

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

På præcis samme måde som i **b)** får vi $m_1 = |\alpha| + 1$ og $m_2 = 2$. Så vi får denne formel

$$\|A\|_\infty = \max\{2, |\alpha| + 1\}$$

*4.4.40) Find Condition tallet $\kappa(A)$ ved brug af normen $\|A\|_\infty$ for **b)**, **c)** og for $\|A\|_2$ for **a)**.*

c)

Vi har så nu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha-1} & \frac{-1}{\alpha-1} \\ \frac{-1}{\alpha-1} & \frac{\alpha}{\alpha-1} \end{pmatrix}.$$

Derfor får vi $m_1 = \left|\frac{1}{\alpha-1}\right| + \left|\frac{-1}{\alpha-1}\right| = \frac{2}{|\alpha-1|}$ og
$m_2 = \left|\frac{-1}{\alpha-1}\right| + \left|\frac{\alpha}{\alpha-1}\right| = \frac{|\alpha|+1}{|\alpha-1|}$.
Så

$$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \frac{\max\{2, |\alpha| + 1\}}{|\alpha - 1|}.$$

Så vi får

$$\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = \frac{(\max\{2, |\alpha| + 1\})^2}{|a - 1|}$$

$\square$

Forklaring af teori om condition number.

Lad $Ax = b$ have en løsning. Lad os nu antage at vi har fundet en løsning $\tilde{x}$. Hvad er den relative fejl for x i.e $\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|}$? For at vide svaret skal vi løse x ikke numerisk. Dette er klart ikke ønsket, da vi har brugt vores tid på at løse den numerisk, og derfor ikke ønsker at løse x mere præcist.

Her kommer ligning **(12), p.191**. Den siger

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\left\|b-\tilde{b}\right\|}{\|b\|}.$$

Vi har allerede fået givet b. Så ved at udregne $\tilde{b}$ ved brug af $\tilde{x}$, så kan vi finde vores error-bound for x løsningen.

Forklaring af teori om condition number.

F.eks. Antag at vi har $\kappa(A) = 100$ og $\frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|} = 0.1$. Så kunne man tænke at $\tilde{x}$ var en god løsning da vi kun havde 0.1 relativ fejl i vores $\tilde{b}$. Dette er en forkert antagelse da vi ikke kan garantere vores bound eksistere.

Derfor har vi κA. Den garanterer dette bound. Hvad er vores bound?

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|b-\tilde{b}\|}{\|b\|} = 100 \cdot 0.1 = 10.$$

Herved har vi fundet vores garanterert error bound.