Løsning af lineære ligninger

Cholesky dekomposition

Mogens Bladt
bladt@math.ku.dk
Department of Mathematical Sciences

Cholesky dekomposition

Antag, at $\boldsymbol{A}$ is positiv definit, i.e.

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$$

for alle $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

Cholesky dekomposition

Antag, at $\boldsymbol{A}$ is positiv definit, i.e.

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$$

for alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Så gælder, at

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

thi hvis dette ikke var tilfældet ville der eksistere en $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ med $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ men så ville også $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$.

Cholesky dekomposition

Antag, at $\boldsymbol{A}$ is positiv definit, i.e.

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$$

for alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Så gælder, at

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

thi hvis dette ikke var tilfældet ville der eksistere en $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ med $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ men så ville også $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$.

Dermed er alle søjler i $\boldsymbol{A}$ are linæert uafhængige, og $\boldsymbol{A}$ er invertibel

Cholesky dekomposition

Antag, at $\boldsymbol{A}$ is positiv definit, i.e.

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$$

for alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Så gælder, at

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

thi hvis dette ikke var tilfældet ville der eksistere en $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ med $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ men så ville også $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$.

Dermed er alle søjler i $\boldsymbol{A}$ are linæert uafhængige, og $\boldsymbol{A}$ er invertibel

Anvend samme argument på $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$ hvorved vi får at $\boldsymbol{A}_k$, $k = 1, ..., n$, alle er invertible.

Cholesky dekomposition

Antag, at $\boldsymbol{A}$ is positiv definit, i.e.

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$$

for alle $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Så gælder, at

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

thi hvis dette ikke var tilfældet ville der eksistere en $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ med $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ men så ville også $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$.

Dermed er alle søjler i $\boldsymbol{A}$ are linæert uafhængige, og $\boldsymbol{A}$ er invertibel

Anvend samme argument på $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)$ hvorved vi får at $\boldsymbol{A}_k$, $k = 1, ..., n$, alle er invertible.

Det følger derfor, at $\boldsymbol{A}$ har en LU dekomposition,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{U}.$$

Cholesky dekomposition

Da

$$0 \neq \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{L})\det(\boldsymbol{U})$$

så er $\boldsymbol{U}$ og $\boldsymbol{L}$ også invertible.

Cholesky dekomposition

Da

$$0 \neq \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{L})\det(\boldsymbol{U})$$

så er $\boldsymbol{U}$ og $\boldsymbol{L}$ også invertible.

Lemma

Den inverse matrix til en øvre (nedre) triangulær matrix er igen en øvre (nedre) triangulær matrix.

Cholesky dekomposition

Da

$$0 \neq \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{L})\det(\boldsymbol{U})$$

så er $\boldsymbol{U}$ og $\boldsymbol{L}$ også invertible.

Lemma

Den inverse matrix til en øvre (nedre) triangulær matrix er igen en øvre (nedre) triangulær matrix.

Bevis: Trivielt. Gennemfør Gauss–Jordan elimination og check hvad der sker med den tilsvarende procedure for identitetsmatricen. $\square$

Antag nu, at $\boldsymbol{A}$ også er symmetrisk.

Antag nu, at $\boldsymbol{A}$ også er symmetrisk. Så er

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{L}'$$

Antag nu, at $\boldsymbol{A}$ også er symmetrisk. Så er

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{L}'$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{U}'$$

Antag nu, at $\boldsymbol{A}$ også er symmetrisk. Så er

$$\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{L}'$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{U}'$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{U}'$$

Antag nu, at $\boldsymbol{A}$ også er symmetrisk. Så er

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{L}'$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{U}'$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{U}'$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{L}'$$

Antag nu, at $\boldsymbol{A}$ også er symmetrisk. Så er

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{U}'\boldsymbol{L}' \\
\Downarrow\quad & \\
&\boldsymbol{U}(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{U}' \\
\Downarrow\quad & \\
&\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{U}' \\
\Downarrow\quad & \\
&\boldsymbol{U} = \boldsymbol{DL}' \\
\Downarrow\quad & \\
&\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU} = \boldsymbol{LDL}'
\end{aligned}
$$

for en diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$.

Da

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}$$

Da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

Da

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \\
&= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{x} \\
&= (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1})'
\end{aligned}
$$

Da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{x} \\ &= (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1})' \\ &> 0 \end{aligned}$$

da $\boldsymbol{A}$ positive definit, da er $\boldsymbol{D}$ også positiv definit.

Da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{x} \\ &= (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1})' \\ &> 0 \end{aligned}$$

da $\boldsymbol{A}$ positive definit, da er $\boldsymbol{D}$ også positiv definit. Tager vi $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{e}_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ følger, at

$$d_{ii} > 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{L}')^{-1}\boldsymbol{x} \\ &= (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}^{-1})' \\ &> 0 \end{aligned}$$

da $\boldsymbol{A}$ positive definit, da er $\boldsymbol{D}$ også positiv definit. Tager vi $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{e}_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ følger, at

$$d_{ii} > 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Så eksisterer

$$\sqrt{\boldsymbol{D}} = \mathrm{diag}(\sqrt{d_{11}}, ..., \sqrt{d_{nn}})$$

og

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}' = (\boldsymbol{L}\sqrt{\boldsymbol{D}})(\boldsymbol{L}\sqrt{\boldsymbol{D}})'.$$

Cholesky dekomposition

Vi har dermed vist (skrivende $\boldsymbol{L}$ i stedet for $\boldsymbol{L}\sqrt{\boldsymbol{D}}$)

Theorem (Cholesky decomposition-eksistens)

Lad $\boldsymbol{A}$ være symmetrisk og positiv defininit. Så er

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'.$$

for en nedre triangulær matrix $\boldsymbol{L}$.

Cholesky dekomposition

Vi har dermed vist (skrivende $\boldsymbol{L}$ i stedet for $\boldsymbol{L}\sqrt{\boldsymbol{D}}$)

Theorem (Cholesky decomposition-eksistens)

Lad $\boldsymbol{A}$ være symmetrisk og positiv defininit. Så er

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'.$$

for en nedre triangulær matrix $\boldsymbol{L}$.

Dekompositionen er entydig hvis diagonalelementer for $\boldsymbol{L}$ er positive.

Theorem (Cholesky decomposition-entydighed)

Lad $\boldsymbol{A}$ være symmetrisk og positiv defininit. Så findes en entydig triangulær matrix $\boldsymbol{L}$ med positiv diagonal så

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'.$$

Bevis for entydighed

Entydigheden følger direkte fra konstruktionen af LU dekompositionen idet $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$:

Bevis for entydighed

Entydigheden følger direkte fra konstruktionen af LU dekompositionen idet $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$:

Vælg først ℓ_{11} og $u_{11} = \ell_{11}$ så $a_{11} = \ell_{11} u_{11} = \ell_{11}^2$.

Bevis for entydighed

Entydigheden følger direkte fra konstruktionen af LU dekompositionen idet $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$:

Vælg først ℓ_{11} og $u_{11} = \ell_{11}$ så $a_{11} = \ell_{11} u_{11} = \ell_{11}^2$. Så $\ell_{11} = \pm\sqrt{a_{11}}$. Valget er dermed entydigt hvis $\ell_{11} > 0$.

Bevis for entydighed

Entydigheden følger direkte fra konstruktionen af LU dekompositionen idet $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{L}'$:

Vælg først ℓ_{11} og $u_{11} = \ell_{11}$ så $a_{11} = \ell_{11} u_{11} = \ell_{11}^2$. Så $\ell_{11} = \pm\sqrt{a_{11}}$. Valget er dermed entydigt hvis $\ell_{11} > 0$.

Tilsvarende for

$$a_{kk} = \ell_{kk} u_{kk} + \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki} u_{ik} = \ell_{kk}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \ell_{ki}^2. \qquad (1)$$

$\square$

Algoritmen fås nu direkte ved samme argumentation som for LU dekompositionen: udregn ℓ_{kk} ved (1) og resten ved indsættelse af $u_{ij} = \ell_{ji}$ i LU–algoritmen:

$$\ell_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is} u_{sk}}{u_{kk}} = \frac{a_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is} \ell_{ks}}{\ell_{kk}}$$