Задание к зачёту

Часть I

Реализовать в виде программы следующий алгоритм.

Варианты.

1. Алгоритм описания многогранника $\mathcal{X} = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^M\} \subset \mathbb{R}^3$ в виде полиэдра:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{k=1}^{K} \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^k, x) \leqslant a_k\}.$$

2. Алгоритм описания ограниченного полиэдра

$$\mathcal{X} = \bigcap_{k=1}^{K} \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^k, x) \leqslant a_k\} \subset \mathbb{R}^3$$

в виде многогранника $\mathcal{X} = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^M\}$.

3. Алгоритм построения множества 0-управляемости $\mathcal{X}(N)$ за произвольное число шагов $N \in \mathbb{N}$ для заданной системы управления

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\ &x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U} = \mathrm{conv}\{u^1, \dots, u^M\}, \\ &x(k), u(k) \in \mathbb{R}^2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

4. Алгоритм определения принадлежности точки $x \in \mathbb{R}^4$ некоторому многограннику $\mathcal{X} = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^M\} \subset \mathbb{R}^4$.

5. Алгоритм последовательной внутренней полиэдральной аппроксимации шара $\mathcal{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ последовательностью многогранников $\{\mathcal{X}_k\}_{k=4}^{\infty}$, где $\mathcal{X}_k = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^k\}$, а каждая очередная вершина x^{k+1} определяется из условия:

$$x^{k+1} = \arg \min_{x \in \partial \mathcal{B}_1(0)} \mu(\mathcal{B}_1(0) \setminus \mathrm{conv}\{\mathcal{X}_k \cup x\}).$$

Первоначальное приближение $\mathcal{X}_4$ является входным параметром алгоритма.

6. Алгоритм последовательной внешней полиэдральной аппроксимации шара $\mathcal{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ последовательностью полиэдров $\{\mathcal{X}_k\}_{k=4}^{\infty}$, где $\mathcal{X}_k = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^i, x) \leqslant 1\}$, а каждая очередная гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^{k+1}, x) \leqslant 1\}$ определяется из условия:

$$p^{k+1} = \arg \min_{p \in \partial \mathcal{B}_1(0)} \mu(\mathcal{X}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^{k+1}, x) \leqslant 1\} \setminus \mathcal{B}_1(0)).$$

Первоначальное приближение $\mathcal{X}_4$ является входным параметрами алгоритма.

7. Алгоритм последовательной комбинированной полиэдральной аппроксимации шара $\mathcal{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ последовательностью полиэдров $\{\mathcal{X}_k\}_{k=3}^{\infty}$ и многогранников $\{\mathcal{Y}_k\}_{k=3}^{\infty}$, где

$$\mathcal{X}_k = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (x^i, x) \leqslant 1\},$$

$$\mathcal{Y}_k = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^k\},$$

а каждая очередная точка x^{k+1} определяется из условия:

$$x^{k+1} = \arg \min_{x \in \partial \mathcal{B}_1(0)} \mu(\mathcal{X}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (x^{k+1}, x) \leqslant 1\} \setminus \operatorname{conv}\{\mathcal{Y}_k \cup x\}).$$

Первоначальные приближения $\mathcal{X}_3, \mathcal{Y}_3$ являются входными параметрами алгоритма.

8. Алгоритм вычисления N_{min} для заданной системы управления

$$\begin{aligned}
&x(k+1) = Ax(k) + u(k),\\
&x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U} = \operatorname{conv}\{b; -b\},\\
&x(k), u(k) \in \mathbb{R}^2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

9. Алгоритм проверки, возможно ли представить заданный многогранник $\mathcal{X} = \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^M\} \subset \mathbb{R}^3$ в виде алгебраической суммы некоторого многогранника $\mathcal{Y} = \operatorname{conv}\{y^1, \ldots, y^N\} \subset \mathbb{R}^3$ и отрезка $\operatorname{conv}\{b^1, b^2\} \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} + \operatorname{conv}\{b^1, b^2\}.$$

10. Алгоритм построения $\operatorname{Ext} \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^M\} \subset \mathbb{R}^3$.

11. Алгоритм построения $\operatorname{Ext}(\operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^M\} + \operatorname{conv}\{y^1, \ldots, y^N\}) \subset \mathbb{R}^2$.

12. Алгоритм построения множеств $\mathcal{X}(N-k, k)$ за произвольное число шагов $N \in \mathbb{N}$, для всех $k = \overline{1, N}$ для заданной 2-периодической нестационарной системы управления

$$\begin{aligned}
&x(k+1) = A(k)x(k) + u(k),\\
&x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U} = \operatorname{conv}\{u^1, \ldots, u^M\},\\
&x(k), u(k) \in \mathbb{R}^2,\ A(2k) = A_1,\ A(2k+1) = A_2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

13. Алгоритм вычисления N_{min} для заданной 2-периодической нестационарной системы управления

$$\begin{aligned}
&x(k+1) = A(k)x(k) + u(k),\\
&x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U} = \operatorname{conv}\{b; -b\},\\
&x(k), u(k) \in \mathbb{R}^2,\ A(2k) = A_1,\ A(2k+1) = A_2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

14. Алгоритм построения дискретного аналога линейной непрерывной системы

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t) = Ay(t) + v(t),\\
&y(0) = y_0,\\
&y(t), v(t) \in \mathbb{R}^4,\ t \in [0; +\infty).
\end{aligned}$$

Предполагается, что управление релейно:

$$v(t) = v_k \in \mathcal{V},\ t \in [k\Delta; (k+1)\Delta),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

15. Алгоритм построения дискретного аналога линейной непрерывной системы

$$\begin{aligned}
&\dot{y}(t) = Ay(t) + v(t),\\
&y(0) = y_0,\\
&y(t), v(t) \in \mathbb{R}^4,\ t \in [0; +\infty).
\end{aligned}$$

Предполагается, что управление импульсно:

$$v(t) = v_k \delta(t - k\Delta),\ v_k \in \mathcal{V},\ t \in [k\Delta; (k+1)\Delta),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Часть II

Пусть задана система управления $(A, \mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + u(k), \\ &x(0) = x_0, \\ &u(k) \in \mathcal{U} = \mathcal{B}_1(0),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

В предположении, что $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$, для заданных оператора системы $A\colon \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ и пространства состояния $\mathbb{L}$ с помощью принципа максимума выполнить следующие задания:

1) построить операторы A^{-1} и A^*;

2) для произвольного шага $N \in \mathcal{N}$ построить множество 0-управляемости $\mathcal{X}(N)$;

3) определить начальное состояние сопряжённой системы $\psi(0)$;

4) построить траекторию сопряжённой системы $\{\psi(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$;

5) построить оптимальное по быстродействию управлеие $\{u(k)\}_{k=0}^{N_{min}-1}$;

6) построить оптимальную по быстродействию траекторию $\{x^*(k)\}_{k=0}^{N_{min}}$;

7) для значения $N_{min} = 4$ подобрать конкретный вектор $x_0 \in \partial\mathcal{X}(N_{min})$ и построить для него оптимальную по быстродействию траекторию;

8) визуализировать пункт 6) графически.

Варианты.

1. $\mathbb{L} = l_2$,
$$Ax = (x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots).$$

2. $\mathbb{L} = l_2$,
$$Ax = (x_3, x_2, x_1, x_6, x_5, x_4, \ldots).$$

3. $\mathbb{L} = l_2$,
$$Ax = (x_3, x_1, x_2, x_6, x_4, x_5, \ldots).$$

4. $\mathbb{L} = l_2$,
$$Ax = (x_2, x_3, x_1, x_5, x_6, x_4, \ldots).$$

5. $\mathbb{L} = l_2$,
$$Ax = (x_2, x_1, x_3, x_5, x_4, x_6, \ldots).$$

6. $\mathbb{L} = l_2$,
$$Ax = (x_1, x_3, x_2, x_4, x_6, x_5, \ldots).$$

7. $\mathbb{L} = C_2([0;1])$,
$$(Ax)(t) = x(1-t).$$

8. $\mathbb{L} = C_2([0;1])$,
$$(Ax)(t) = -x(t).$$

9. $\mathbb{L} = C_2([0;1])$,
$$(Ax)(t) = -x(1-t).$$

10. $\mathbb{L} = C_2([0;1])$,
$$(Ax)(t) = \frac{1}{2}x(1-t).$$

11. $\mathbb{L} = L_2([0;1])$,
$$(Ax)(t) = \begin{cases} x(t+\frac{2}{3}),\ t \in [0;\frac{1}{3}), \\ x(t-\frac{1}{3}),\ t \in [\frac{1}{3};\frac{2}{3}), \\ x(t-\frac{1}{3}),\ t \in [\frac{2}{3};1], \end{cases}$$

12. $\mathbb{L} = L_2([0;1])$,

$$(Ax)(t) = \begin{cases} x(t+\frac{2}{3}), \ t \in [0;\frac{1}{3}), \\ -x(t-\frac{1}{3}), \ t \in [\frac{1}{3};\frac{2}{3}), \\ -x(t-\frac{1}{3}), \ t \in [\frac{2}{3};1], \end{cases}$$

13. $\mathbb{L} = L_2([0;1])$,

$$(Ax)(t) = \begin{cases} -x(t+\frac{2}{3}), \ t \in [0;\frac{1}{3}), \\ x(t-\frac{1}{3}), \ t \in [\frac{1}{3};\frac{2}{3}), \\ -x(t-\frac{1}{3}), \ t \in [\frac{2}{3};1], \end{cases}$$

14. $\mathbb{L} = L_2([0;1])$,

$$(Ax)(t) = \begin{cases} -x(t+\frac{2}{3}), \ t \in [0;\frac{1}{3}), \\ -x(t-\frac{1}{3}), \ t \in [\frac{1}{3};\frac{2}{3}), \\ x(t-\frac{1}{3}), \ t \in [\frac{2}{3};1], \end{cases}$$

15. $\mathbb{L} = L_2([0;1])$,

$$(Ax)(t) = \begin{cases} -x(t+\frac{2}{3}), \ t \in [0;\frac{1}{3}), \\ -x(t-\frac{1}{3}), \ t \in [\frac{1}{3};\frac{2}{3}), \\ -x(t-\frac{1}{3}), \ t \in [\frac{2}{3};1], \end{cases}$$

Часть II

Для заданных $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3 \subset \mathbb{R}^2$ требуется построить графически множества:
1) $\mathcal{U}_1$;
2) $\mathcal{U}_2$;
3) $\mathcal{U}_3$;
4) $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$;
5) $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3$.

Варианты.

$$1.\ \mathcal{U}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$2.\ \mathcal{U}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$3.\ \mathcal{U}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$4.\ \mathcal{U}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$5.\ \mathcal{U}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$
$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. $\mathcal{U}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

7. $\mathcal{U}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

8. $\mathcal{U}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

9. $\mathcal{U}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

10. $\mathcal{U}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

11. $\mathcal{U}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

12. $\mathcal{U}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} x \leqslant 1\right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

13. $\mathcal{U}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

14. $\mathcal{U}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

15. $\mathcal{U}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$

$$\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \colon x^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} x \leqslant 1 \right\},$$

$$\mathcal{U}_3 = \operatorname{conv} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$