Задание к зачёту

Часть I

Реализовать в виде программы следующий алгоритм.

Варианты.

1. Алгоритм описания многогранника $\mathcal{X} = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^M\} \subset \mathbb{R}^3$ в виде полиэдра:

$$\mathcal{X} = \bigcap_{k=1}^{K} \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^k, x) \leqslant a_k\}.$$

2. Алгоритм описания ограниченного полиэдра

$$\mathcal{X} = \bigcap_{k=1}^{K} \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^k, x) \leqslant a_k\} \subset \mathbb{R}^3$$

в виде многогранника $\mathcal{X} = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^M\}$.

3. Алгоритм построения множества 0-управляемости $\mathcal{X}(N)$ за произвольное число шагов $N \in \mathbb{N}$ для заданной системы управления

$$\begin{aligned}
&x(k+1) = Ax(k) + u(k),\\
&x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U} = \mathrm{conv}\{u^1, \dots, u^M\},\\
&x(k), u(k) \in \mathbb{R}^2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.
\end{aligned}$$

4. Алгоритм определения принадлежности точки $x \in \mathbb{R}^4$ некоторому многограннику $\mathcal{X} = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^M\} \subset \mathbb{R}^4$.

5. Алгоритм последовательной внутренней полиэдральной аппроксимации шара $\mathcal{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ последовательностью многогранников $\{\mathcal{X}_k\}_{k=4}^{\infty}$, где $\mathcal{X}_k = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^k\}$, а каждая очередная вершина x^{k+1} определяется из условия:

$$x^{k+1} = \arg \min_{x \in \partial \mathcal{B}_1(0)} \mu(\mathcal{B}_1(0) \setminus \mathrm{conv}\{\mathcal{X}_k \cup x\}).$$

Первоначальное приближение $\mathcal{X}_4$ является входным параметром алгоритма.

6. Алгоритм последовательной внешней полиэдральной аппроксимации шара $\mathcal{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ последовательностью полиэдров $\{\mathcal{X}_k\}_{k=4}^{\infty}$, где $\mathcal{X}_k = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^i, x) \leqslant 1\}$, а каждая очередная гиперплоскость $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^{k+1}, x) \leqslant 1\}$ определяется из условия:

$$p^{k+1} = \arg \min_{p \in \partial \mathcal{B}_1(0)} \mu(\mathcal{X}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (p^{k+1}, x) \leqslant 1\} \setminus \mathcal{B}_1(0)).$$

Первоначальное приближение $\mathcal{X}_4$ является входным параметрами алгоритма.

7. Алгоритм последовательной комбинированной полиэдральной аппроксимации шара $\mathcal{B}_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ последовательностью полиэдров $\{\mathcal{X}_k\}_{k=3}^{\infty}$ и многогранников $\{\mathcal{Y}_k\}_{k=3}^{\infty}$, где

$$\mathcal{X}_k = \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (x^i, x) \leqslant 1\},$$

$$\mathcal{Y}_k = \mathrm{conv}\{x^1, \dots, x^k\},$$

а каждая очередная точка x^{k+1} определяется из условия:

$$x^{k+1} = \arg \min_{x \in \partial \mathcal{B}_1(0)} \mu(\mathcal{X}_k \cap \{x \in \mathbb{R}^3 \colon (x^{k+1}, x) \leqslant 1\} \setminus \operatorname{conv}\{\mathcal{Y}_k \cup x\}).$$

Первоначальные приближения $\mathcal{X}_3, \mathcal{Y}_3$ являются входными параметрами алгоритма.

8. Алгоритм вычисления N_{min} для заданной системы управления

$$\begin{aligned} &x(k+1) = Ax(k) + u(k),\\ &x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U} = \operatorname{conv}\{b; -b\},\\ &x(k), u(k) \in \mathbb{R}^2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

9. Алгоритм проверки, возможно ли представить заданный многогранник $\mathcal{X} = \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^M\} \subset \mathbb{R}^3$ в виде алгебраической суммы некоторого многогранника $\mathcal{Y} = \operatorname{conv}\{y^1, \ldots, y^N\} \subset \mathbb{R}^3$ и отрезка $\operatorname{conv}\{b^1, b^2\} \subset \mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{X} = \mathcal{Y} + \operatorname{conv}\{b^1, b^2\}.$$

10. Алгоритм построения $\operatorname{Ext} \operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^M\} \subset \mathbb{R}^3$.

11. Алгоритм построения $\operatorname{Ext}(\operatorname{conv}\{x^1, \ldots, x^M\} + \operatorname{conv}\{y^1, \ldots, y^N\}) \subset \mathbb{R}^2$.

12. Алгоритм построения множеств $\mathcal{X}(N-k, k)$ за произвольное число шагов $N \in \mathbb{N}$, для всех $k = \overline{1, N}$ для заданной 2-периодической нестационарной системы управления

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A(k)x(k) + u(k),\\ &x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U} = \operatorname{conv}\{u^1, \ldots, u^M\},\\ &x(k), u(k) \in \mathbb{R}^2,\ A(2k) = A_1,\ A(2k+1) = A_2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

13. Алгоритм вычисления N_{min} для заданной 2-периодической нестационарной системы управления

$$\begin{aligned} &x(k+1) = A(k)x(k) + u(k),\\ &x(0) = x_0,\ u(k) \in \mathcal{U} = \operatorname{conv}\{b; -b\},\\ &x(k), u(k) \in \mathbb{R}^2,\ A(2k) = A_1,\ A(2k+1) = A_2,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

14. Алгоритм построения дискретного аналога линейной непрерывной системы

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = Ay(t) + v(t),\\ &y(0) = y_0,\\ &y(t), v(t) \in \mathbb{R}^4,\ t \in [0; +\infty). \end{aligned}$$

Предполагается, что управление релейно:

$$v(t) = v_k \in \mathcal{V},\ t \in [k\Delta; (k+1)\Delta),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

15. Алгоритм построения дискретного аналога линейной непрерывной системы

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = Ay(t) + v(t),\\ &y(0) = y_0,\\ &y(t), v(t) \in \mathbb{R}^4,\ t \in [0; +\infty). \end{aligned}$$

Предполагается, что управление импульсно:

$$v(t) = v_k \delta(t - k\Delta),\ v_k \in \mathcal{V},\ t \in [k\Delta; (k+1)\Delta),\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Часть II