$\underline{Es}$

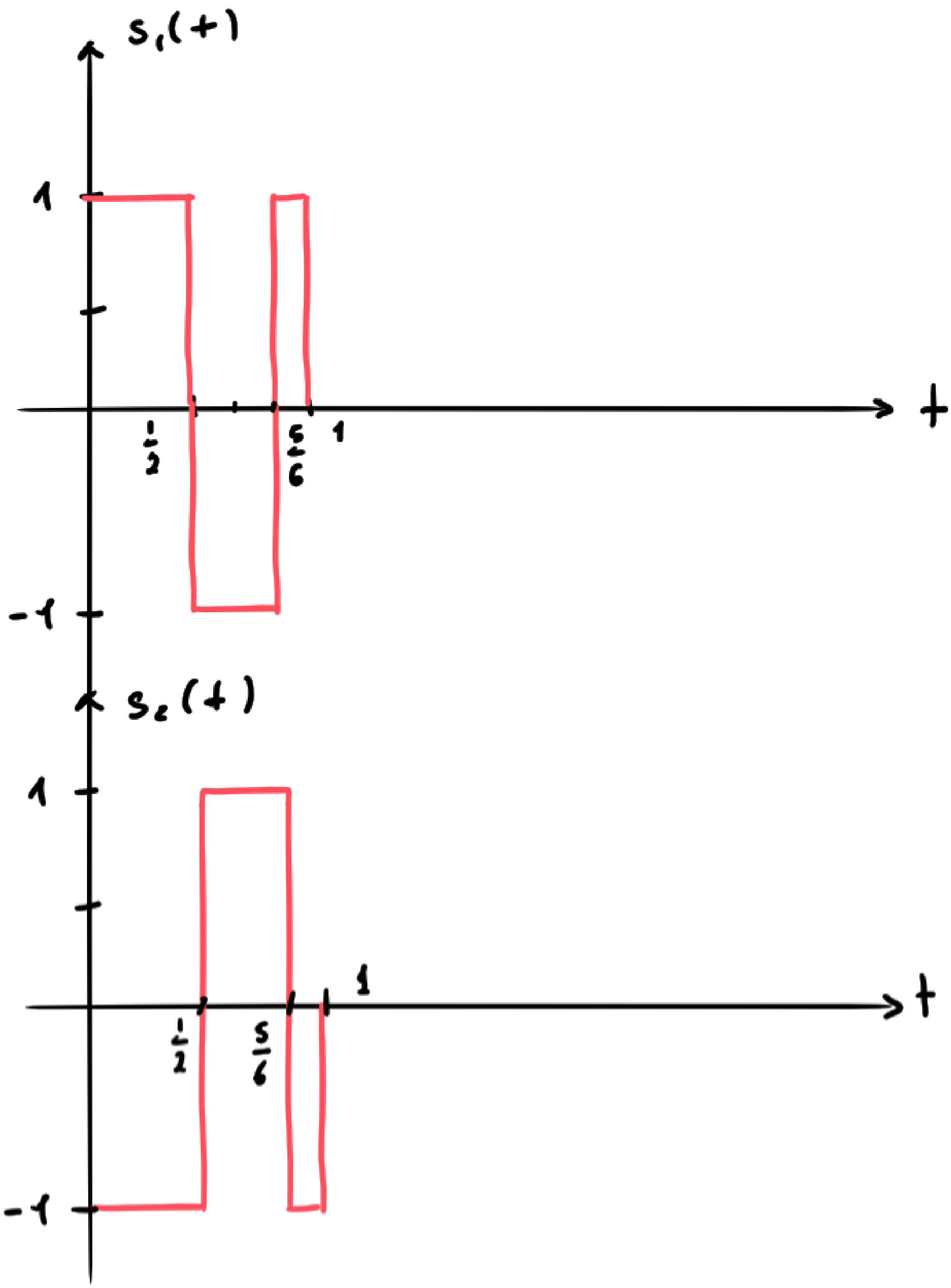
Consideriamo le due forme d'onda

$$s_1(t) = rect(t - 0.5) - 2rect(3t - 2)$$

$$s_2(t) = -s_1(t)$$

1. Disegnare i grafici dei segnali e calcolare il periodo di simbolo minimo che garantisce assenza di interferenza

$$2rect(3t - 2): \qquad -\frac{1}{2} \leq 3t - 2 \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{5}{6}$$



$$T = 1$$

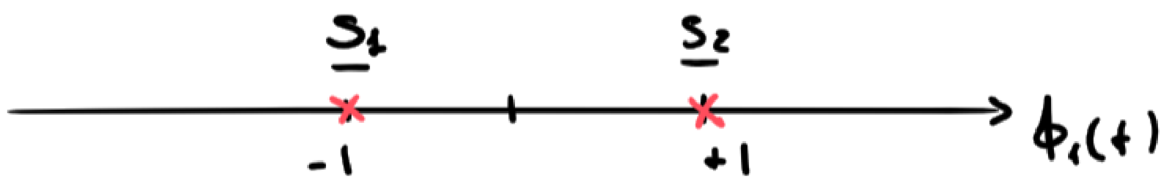
2. Trovare una base ortonormale per la segnalazione e calcolare le coordinate dei punti della costellazione
   Una base della segnalazione è semplicemente $s_1(t)$, se la vogliamo normalizzare possiamo notare che $E_{s_1} = 1$, quindi $\phi_1(t) = s_1(t)$

$$\phi_2(t) = s_2(t) - \langle\ s_2(t),\ \phi_1(t)\ \rangle\ \phi_1(t) = 0$$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}} = s_1(t)$$

$$\underline{s_1} = \langle\ s_1(t),\ \phi_1(t)\ \rangle \qquad \underline{s_2} = \langle\ s_2(t),\ \phi_1(t)\ \rangle$$

Costellazione:



3) Supponiamo che i due segnali siano equiprobabili e ricevuti su un canale AWGN con potenza $\sigma_w^2 = 3$
Trovare le regioni di decisione ottime (ovvero che massimizzano la probabilità di decisione corretta)
Criterio di MAP: per ogni punto dela costellazione devo associare il simbolo trasmesso che massimizza una certa funzione:

$$D(\underline{r}; a_0) = p_{\underline{r}|a_0}(\underline{r'}|n) p_{a_0}(n), \quad n \in \{1, 2\}$$

$$p_{a_0}(1) = \frac{1}{2} \quad p_{a_0}(2) = \frac{1}{2}$$

in quanto i due segnali sono equiprobabili

$$p_{r|a_0}(\underline{r'}|n) \rightarrow$$

$$\underline{r}(t) = s_{TX}(t) + w(t) \qquad AWGN$$

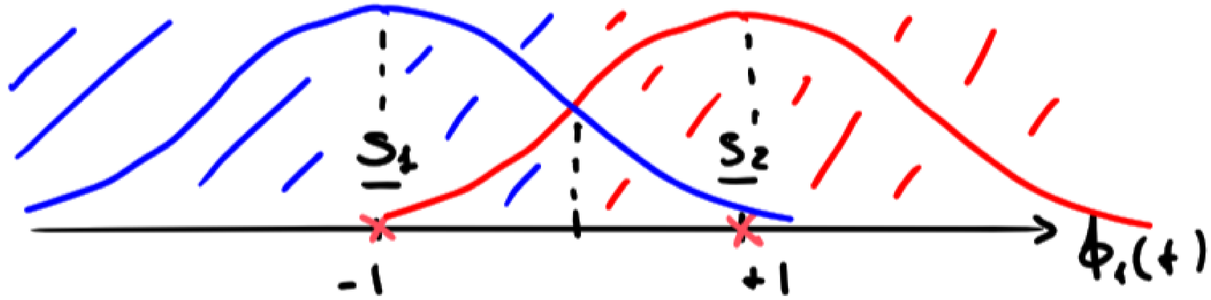
$$= s_{a_0}(t) + w(t) = s_n(t) + w(t) \qquad n \in \{1, 2\}$$

$$\underline{r} = \underline{s_n} + \underline{w} = N(s_n, \sigma_w^2) \qquad n \in \{1, 2\}, \quad \underline{w} = N(0, \sigma_w^2)$$

$$p_{r|a_0}(\underline{r'}|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{r'} - s_1}{\sigma_w}\right)^2}$$

$$p_{a_0}^{(1)} p_{r|a_0}(\underline{r'}|1) = D(\underline{r'}; 1) = p_{r|a_0}(\underline{r'}|1)\frac{1}{2}$$

$$p_{a_0}^{(2)} p_{r|a_0}(\underline{r'}|2) = D(\underline{r'}; 2) = p_{r|a_0}(\underline{r'}|2)\frac{1}{2}$$



Per ogni punto vado a verificare quale campana è più alta.

Sullo 0 abbiamo il confine della regione di decisione (è solo un caso che ce ne sia solo uno e che si trovi esattamente sullo 0) e se trovo un segnale in un punto di confine, mi tocca scegliere a caso.

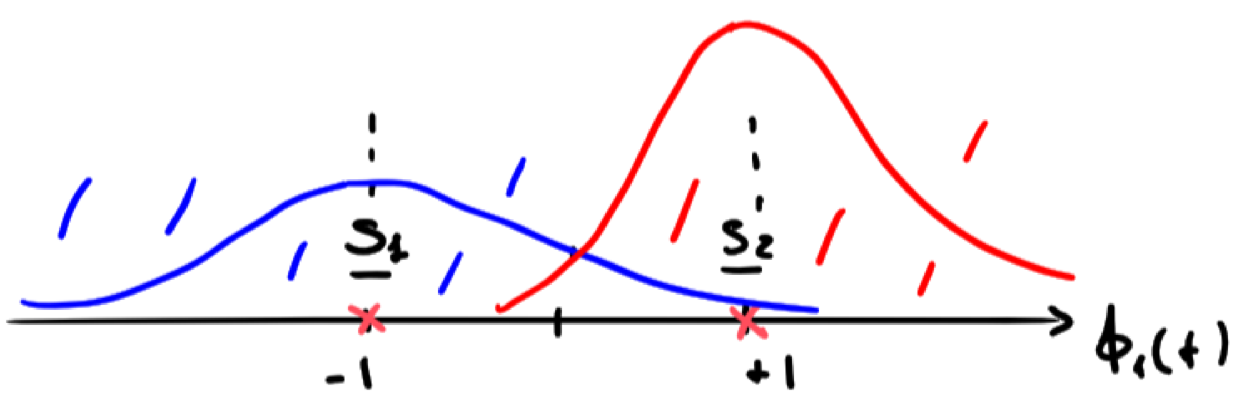
4) Se $r(t) = s_{a_0} + a_0 w(t)$ e $P_{a_0}(1) = 0.8$, $P_{a_0}(2) = 0.2$, $a_0 \in \{1, 2\}$

La costellazione rimane invariata... quello che cambia è la forma delle regioni di decisione

$$D(\underline{r'}; n) = P_{a_0}(n) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2 a_0^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{r'} - s_n}{n\sigma_w}\right)^2}$$

Per $n = 1$ si ha che $P_{a_0} = 0.8$ e la varianza vale σ_w^2

Per $n = 2$ si ha che $P_{a_0} = 0.2$ e la varianza vale $4\sigma_w^2$



Per trovare l'intersezione, in questo caso dobbiamo svolgere i calcoli:

$$\frac{0.8}{\sqrt{2\pi 3}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{r} - 1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{0.2}{\sqrt{2\pi 4 * 3}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{r} + 1}{\sqrt{4 * 3}}\right)^2}$$

$$\left(\qquad A = \frac{0.8}{\sqrt{2\pi 3}} \qquad B = \frac{0.2}{\sqrt{2\pi 4 * 3}} \qquad \right)$$

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{r}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \ln A} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{r}+1}{\sqrt{4*3}}\right)^2 + \ln B}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{r}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \ln A = -\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{r}+1}{\sqrt{4*3}}\right)^2 + \ln B$$

equazione di secondo grado (del tipo):

$$c_1 \underline{r}^2 + c_2 \underline{r} + c_3 = 0$$

$\underline{Es}$:

Trovare una base ortonormale per

$$s_1(t) = \begin{cases} 3\cos(2\pi t * 10^3) \qquad t \in [0,1) \\ 0 \; altrove \end{cases}$$

$$s_2(t) = \begin{cases} -2\sin(2\pi t * 10^3) \qquad t \in [0,1) \\ 0 \; altrove \end{cases}$$

$$E_{s_1} = \int_0^1 s_1^2(t)dt = 9\int_0^1 \cos^2(2\pi t * 10^3)dt = 4.5$$

$$\langle \; s_1(t), \; s_2(t) \; \rangle = -6\int_0^1 \cos(2\pi t * 10^3)\sin(2\pi t * 10^3)dt = -6\frac{1}{2\pi * 10^3}\left(-\frac{1}{2}\cos^2(x)\Big]_0^{2\pi * 10^3}\right) \simeq 0$$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}} = \frac{3}{\sqrt{4.5}}\cos(2\pi t * 10^3)$$

i segnali sono "ingegneristicamente" ortogonali (per scopi ingegneristici, i segnali possono essere considerati ortogonali anche se tecnicamente, non lo sono (in quanto il prodotto interno fa CIRCA 0))

In generale i segnali $sin()$ e $cos()$ sono ortogonali se si hanno frequenze abbastanza alte.

$$\phi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_{s_2}}}$$