POTENZA DEL RUMORE

σ_I^2 : potenza del rumore su canale AWGN sia nel tempo che in ogni elemento dello spazio euclideo.

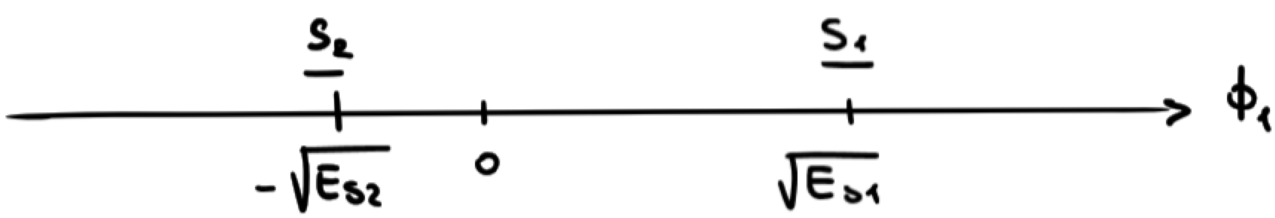
$$\underline{r} = \underline{s}_{a_0} + \underline{w}$$

$$\underline{w} = \left[w_1, \ldots, w_I\right] \qquad w_i \sim N(0, \sigma_I^2)$$

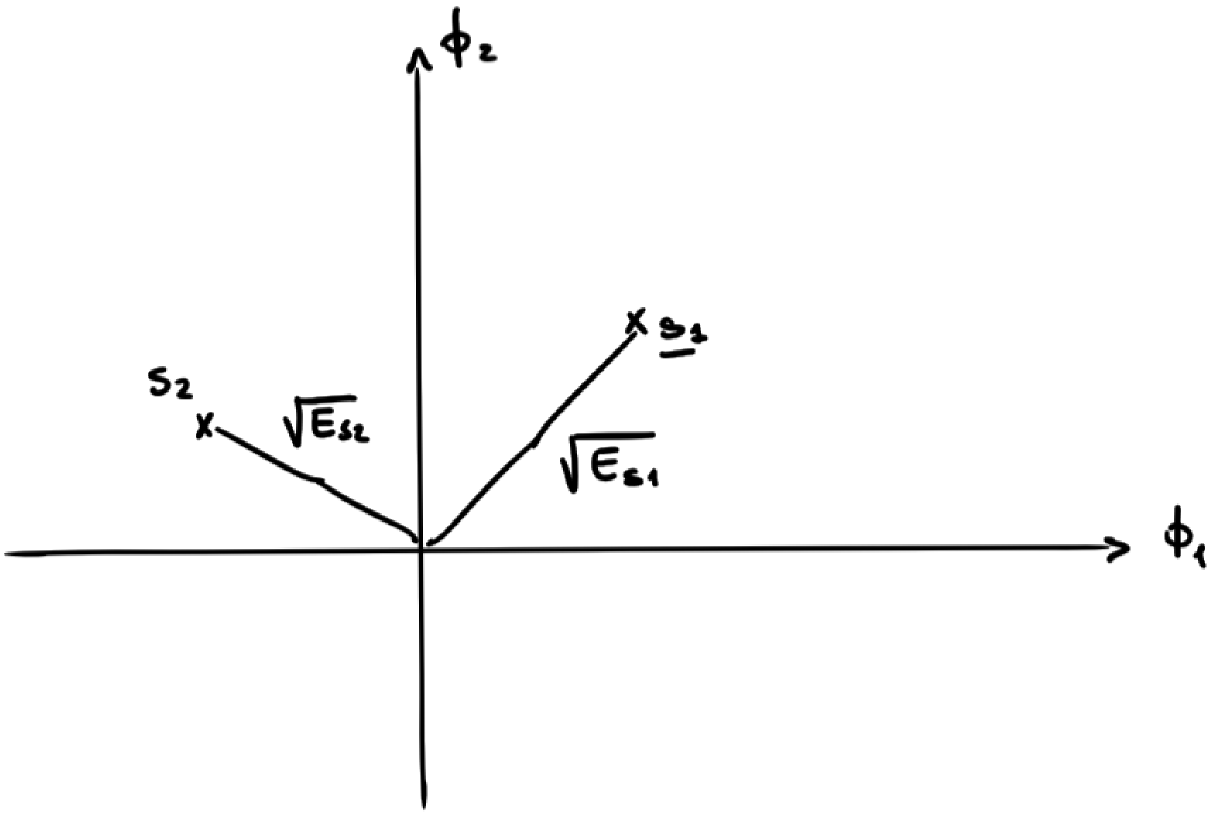
$$\sigma_I^2 = \frac{N_0}{2} \qquad \text{PSD} \qquad \text{Densità spettrale di potenza del rumore}$$

MODULAZIONE BINARIA

$M = 2$ due segnali che mappano i valori di un bit.
Abbiamo a che fare con $s_1(t)$ e $s_2(t)$.
$I \leq 2$:
Se $I = 1$:



Se $I = 2$:



$$\underline{s_1} = \left[\langle\ s_1(t),\ \phi_1(t)\ \rangle, \langle\ s_1(t),\ \phi_2(t)\ \rangle \right]$$

$$\underline{s_2} = \left[\langle\ s_2(t),\ \phi_1(t)\ \rangle, \langle\ s_2(t),\ \phi_2(t)\ \rangle \right]$$

DISTANZA TRA S1 E S2 AL QUADRATO

$$\begin{aligned} d^2 &= \langle\ \underline{s}_1 - \underline{s}_2,\ \underline{s}_1 - \underline{s}_2\ \rangle \\ &= \sum_{i \times 1}^{I} \left(s_{1,\,i} - s_{2,\,i} \right)^2 \end{aligned}$$

PROBABILITA' D'ERRORE

$P(E)$: Probabilità d'errore sul simbolo

$$P(E) = 1 - P(C)$$

$P(C)$ probabilità di decisione corretta

P_{bit}: probabilità d'errore sul bit $P(E) = P_{bit}$

$$P(E) = 1 - P(C)$$

$$= *^1$$

$$P(C) = P\left(\hat{a}_0 = a_0\right)$$

$$= P\left(\hat{a}_0 = a_0 | a_0 = 1\right) P(1) + P\left(\hat{a}_0 = a_0 | a_0 = 2\right) P(2)$$

$$= P\left(\hat{a}_0 = 1 | a_0 = 1\right) \frac{1}{2} + P\left(\hat{a}_0 = 2 | a_0 = 2\right) \frac{1}{2}$$

$$= *^2$$

$$\begin{aligned}
P(\hat{a}_0 = 1 | a_0 = 1) &= P\left(||\underline{r} - \underline{s}_1||^2 < ||\underline{r} - \underline{s}_2||^2 | a_0 = 1\right) \\
&= P\left(||\underline{s}_1 + \underline{w} - \underline{s}_1||^2 < ||\underline{s}_! + \underline{w} - \underline{s}_2||^2\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{I} w_i^2 < \sum_{i=1}^{I} \left[(s_{1,\,i} - s_{2,\,i}) + w_i\right]^2\right) \\
&= P(\sum_{i=1}^{I} w_i^2 < \sum_{i=1}^{I} \left[(s_{1,\,i} - s_{2,\,i})^2 + 2(s_{1,\,i} - s_{2,\,i}) w_i + w_i^2\right]) \\
&= P\left(0 < \sum_{i=1}^{I} (s_{1,\,i} - s_{2,\,i})^2 + 2 \sum_{i=1}^{I} (s_{1,\,i} - s_{2,\,i}) w_i\right) \\
&= P\left(-\langle\, \underline{s}_1,\ \underline{w}\,\rangle < \frac{1}{2} d^2\right) \\
&= P\left(\langle\, \underline{s}_2 - \underline{s}_1,\ \underline{w}\,\rangle < \frac{1}{2} d^2\right) \\
&= *^3
\end{aligned}$$

$$\langle\, \underline{s}_2 - \underline{s}_1,\ \underline{w}\,\rangle = \sum_{i=1}^{I} \left(s_{2,\,i} - s_{1,\,i}\right) w_i \quad \sim N\left(0, \sigma_I^2\, d^2\right)$$

Dim:

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_i (s_{2,i} - s_{1_i}) w_i\right)^2\right] &= E\left[\left(\sum_i (s_{2,i} - s_{1_i}) w_i\right)\right] E\left[\left(\sum_j (s_{2,j} - s_{1_j}) w_j\right)\right] \\
&= \sum_i \sum_j \left(s_{2,i} - s_{1,i}\right)\left(s_{2,j} - s_{1,j}\right) E(w_i w_j) \\
&= \sum_{i=1}^{I} \left(s_{2,i} - s_{1,i}\right)^2 \sigma_I^2 \\
&= \sigma_I^2 \sum_{i=1}^{I} \left(s_{2,i} - s_{1,i}\right)^2 \\
&= \sigma_I^2 \, d^2
\end{aligned}
$$

$$
*^3 \qquad
\begin{aligned}
P(\hat{a}_0 = 1 | a_0 = 1) &= P\left(\langle \, \underline{s}_2 - \underline{s}_1, \ \underline{w} \, \rangle < \frac{1}{2} d^2\right) \\
&= 1 - Q\left(\frac{\frac{1}{2} d^2 - m_z}{\sigma_z}\right) \\
&= 1 - Q\left(\frac{\frac{1}{2} d^2}{\sigma_I d}\right) \\
&= 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right)
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda $P(\hat{a}_0 = 2 | a_0 = 2)$, siccome il risultato dipende solo dalla distanza tra i due simboli, troviamo la stessa cosa.

$$
*^2 \qquad
\begin{aligned}
P(C) &= P\left(\hat{a}_0 = 1 | a_0 = 1\right) \frac{1}{2} + P\left(\hat{a}_0 = 2 | a_0 = 2\right) \frac{1}{2} \\
&= 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right)
\end{aligned}
$$

$$
*^1 \qquad \boxed{P(E) = Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right)}
$$

(La funzione $Q(A)$ mi rappresenta l'area della gaussiana per i valori $> A$)
Se l'argomento di Q è grande, Q è piccola
Per diminuire la probabilità d'errore devo aumentare la distanza tra i segnali
σ_I è la varianza del rumore, ovviamente maggiore è la varianza del rumore, maggiore è la probabilità d'errore

ENERGIA MEDIA DELLA MODULAZIONE

$$\begin{aligned} E_s &= E\left[E s_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^{I} E s_i P a_0(i) \end{aligned}$$

Ci interessa l'energia in trasmissione
$s_i(t)$ segnali ricevuti
Qui assumo un canale AWGN che non introduce attenuazione

$$r(t) = s_{TX}(t) + w(t)$$

(senza attenuazione)

$$\begin{aligned} E_s &= E s_1 P a_0(1) + E s_2 P a_0(2) \\ &= \frac{1}{2} E s_1 + \frac{1}{2} E s_2 \end{aligned}$$

per segnali equiprobabili

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE TRA DUE VETTORI

$$\rho = \frac{\langle\ \underline{s}_1,\ \underline{s}_2\ \rangle}{\sqrt{E s_1, E s_2}}$$

Se $\rho = 0$ il prodotto interno è nullo, quindi i vettori sono ortogonali
Se $\rho = -1$ i due vettori potrebbero essere uno l'opposto dell'altro rispetto all'origine e i segnali sono detti antipodali
Non avrebbe senso avere $\rho = 1$ in quanto non riesco a distinguere i due segnali...

Se $E s_1 = E s_2$:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\langle\ s_1(t),\ s_2(t)\ \rangle}{\sqrt{E_s^2}} \\ &= \frac{\langle\ s_1(t),\ s_2(t)\ \rangle}{E_s} \end{aligned}$$

E_s energia media.

A partire da $s_1(t)$ e $s_2(t)$ scelgo $s_1(t) \neq 0$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}}$$

supponendo che $E_{s_1} = E_{s_2}$:

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_s}} \qquad \underline{s}_1 = \left[\sqrt{E_s}, 0\right]$$

$$\begin{aligned} \langle\ s_2(t),\ \phi_1(t)\ \rangle &= \frac{\langle\ s_2(t),\ s_1(t)\ \rangle}{\sqrt{E_s}} \\ &= \rho\sqrt{E_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2'(t) &= s_2(t) - \langle\ s_2(t),\ \phi_1(t)\ \rangle\ \phi_1(t) \\ &= s_2(t) - \frac{\langle\ s_2(t),\ s_1(t)\ \rangle}{\sqrt{E_s}}\phi_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{s}_2 &= \left[\langle\ s_2(t),\ \phi_1(t)\ \rangle, \langle\ s_2(t),\ \phi_2(t)\ \rangle\right] \\ &= \left[\rho\sqrt{E_s}, \sqrt{E_s - \rho^2 E_s}\right] \end{aligned}$$

$$\underline{s}_1 = \left[\sqrt{E_s}, 0\right]$$

$$\underline{s}_2 = \left[\rho\sqrt{E_s}, \sqrt{E_s}\sqrt{1-\rho^2}\right]$$

1. Segnali ortogonali, $\rho = 0$:

$$\underline{s}_1 = \left[\sqrt{E_s}, 0\right] \qquad \underline{s}_2 = \left[0, \sqrt{E_s}\right]$$

2. Segnali antipodali, $\rho = -1$:

$$\underline{s}_1 = \left[\sqrt{E_s}, 0\right] \qquad \underline{s}_2 = \left[-\sqrt{E_s}, 0\right]$$