SPAZIO VETTORIALE DI SEGNALI A ENERGIA FINITA

PRODOTTO INTERNO

$$\boxed{\langle\ x(t),\ y(t)\ \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\ dt}$$

NORMA

$$\boxed{||x(t)|| = \sqrt{\langle\ x(t),\ y(t)\ \rangle} = \sqrt{E_x}}$$

E_x energia del segnale

BASE ORTONORMALE

Una base ortonormale di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori (segnali) $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ t.c.

$$\boxed{\begin{array}{c} \langle\ x_i(t),\ x_j(t)\ \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad \forall\ i, j \\ \\ ||x_i(t)|| = 1, \qquad \forall\ i \end{array}}$$

e inoltre deve valere che il generico segnale $y(t) \in V$ sia scrivibile come

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t) \\ \alpha_i = \langle\ y(t),\ x_i(t)\ \rangle \end{cases}$$

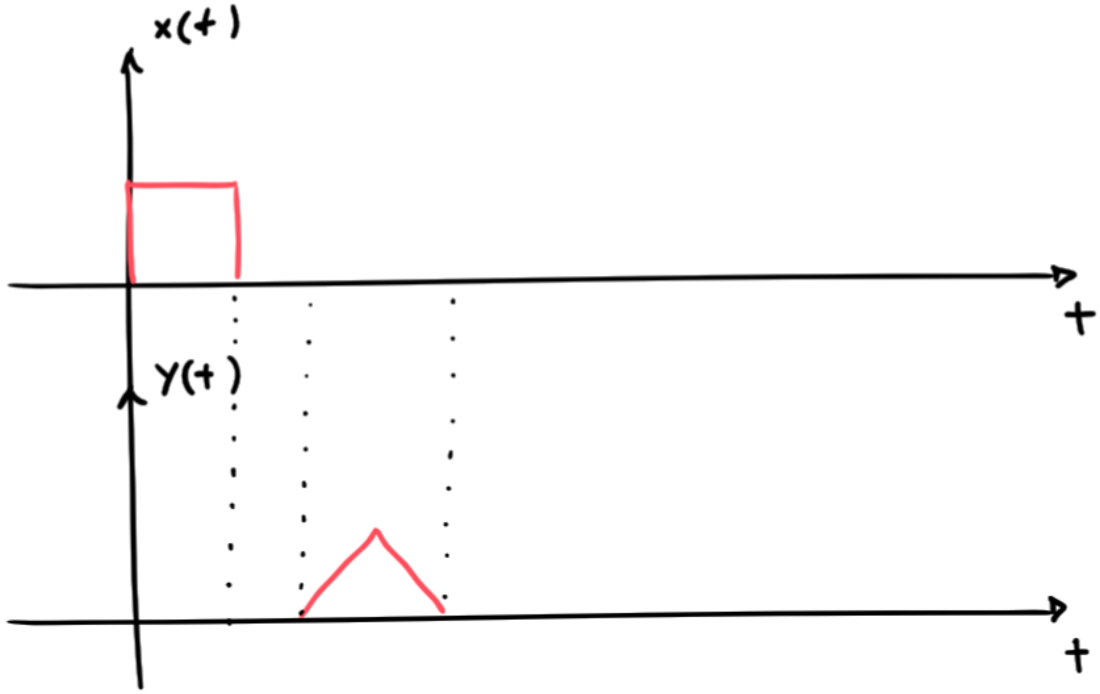
I vettori sono ortogonali in quanto il prodotto interno (scalare) da 0, sono normali in quanto il modulo di ogni vettore è 1

$\underline{Es:}$

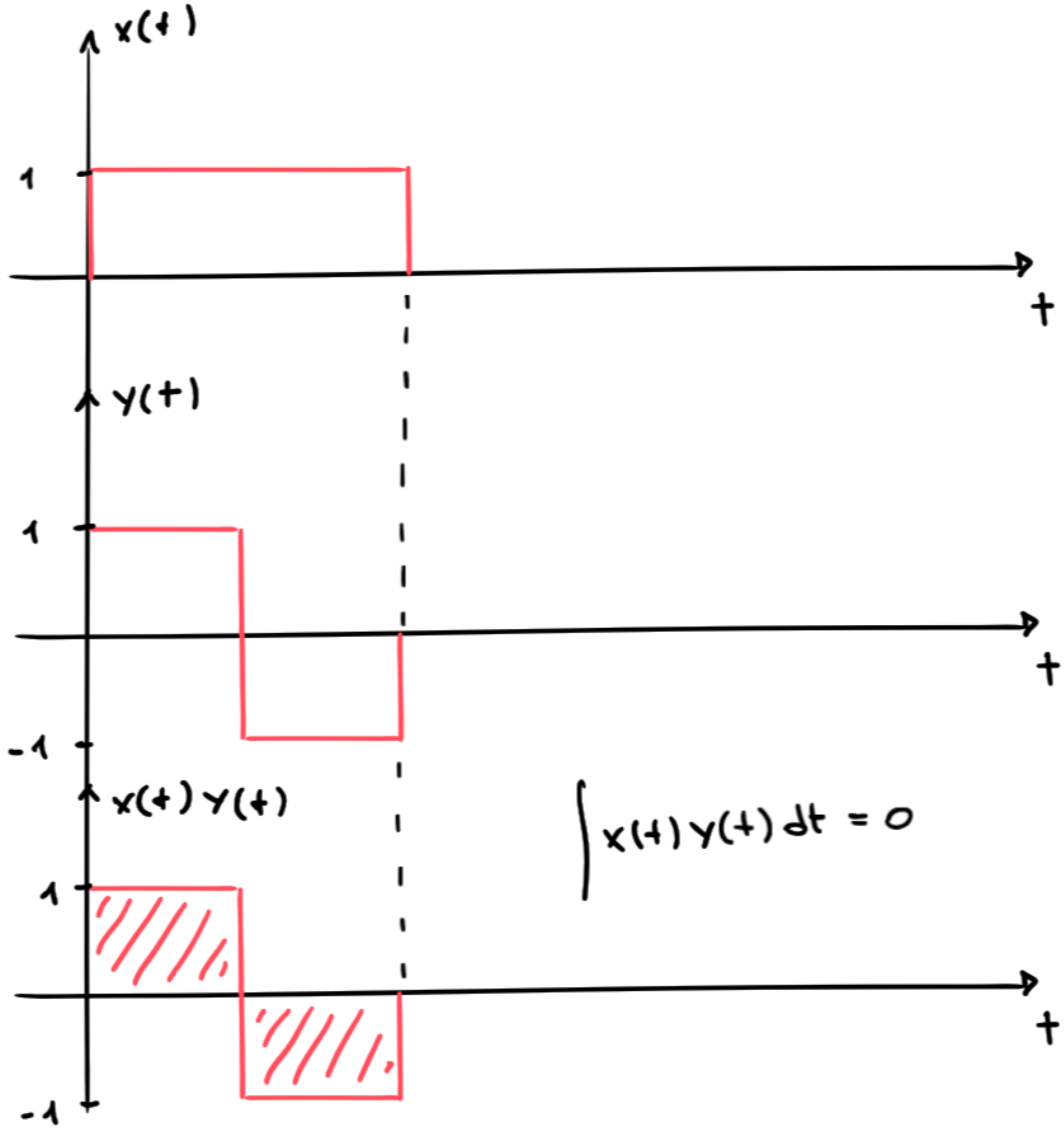
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\ dt = 0$$

questo caso si verifica

- se i due segnali hanno sostegni diversi (se sono non nulli in momenti diversi, il prodotto dei segnali sarà sempre nullo); in questo caso i segnali hanno supporto disgiunto



- se l'area del prodotto dei due segnali è nulla



SOTTOSPAZIO GENERATO DA UN INSIEME DI N SEGNALI A ENERGIA FINITA

Dati n segnali $s_1(t), \ldots, s_n(t)$, il sottospazio generato da questi segnali è l'insieme dei vettori (compresi quelli ottenuti da operazioni tra vettori):

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n s_n(t), \qquad \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \forall n$$

I vettori non sono per forza ortonormali
Perchè si tratti di un sottospazio vettoriale bisogna che sia chiuso per le operazioni di somma e prodotto

$$x(t)+y(t)=\sum_n \alpha_n s_n(t)+\sum_n \beta_n s_n(t)=\sum_n(\alpha_n+\beta_n)s_n(t)$$

Partendo da segnali che generano un sottospazio, posso descrivere il sottospazio con una base ortonormale di dimensione $I \leq N,\ \phi_1(t),\dots,\phi_I(t)$

$$x(t)\iff x=[x1,\dots,x_I]$$

$$x(t)=\sum_{i=1}^{I} x_i\phi_i(t)$$

PRODOTTO INTERNO NEI DUE SPAZI

$\langle\ x(t),\ y(t)\ \rangle$ con $x(t)$ e $y(t)$ nel sottospazio $\{\phi_1(t),\dots,\phi_I(t)\}$

$$x_i=\langle\ x(t),\ \phi_i(t)\ \rangle$$

$$y_i=\langle\ y(t),\ \phi_i(t)\ \rangle$$

$$\begin{aligned}\langle\ x(t),\ y(t)\ \rangle &= \langle\ \sum_{i=1}^{I}\Big(x_i\phi_i(t)\Big),\ \sum_{i=1}^{I}\Big(y_i\phi_i(t)\Big)\ \rangle\\ &=\sum_{i=1}^{I}\Big(\sum_{j=1}^{I}\langle\ x_i\phi_i(t),\ y_j\phi_j(t)\ \rangle\Big)\\ &=^{*0}\sum_{i=1}^{I}\Big(\sum_{j=1}^{I}x_iy_j\ \langle\ \phi_i(t),\ \phi_j(t)\ \rangle\Big)\\ &=^{*1}\sum_{i=1}^{I}\Big(x_iy_i\ \langle\ \phi_i(t),\ \phi_i(t)\ \rangle\Big)\\ &=^{*2}\sum_{i=1}^{I}\Big(x_iy_i\Big)\\ &=\langle\ \underline{x},\ \underline{y}\ \rangle\end{aligned}$$

prodotto interno nello spazio euclideo.

*0: per linearità
*1: ortogonalità dei segnali della base
*2: normalizzazione dei segnali della base

ENERGIA

$$E_x = \langle\ x(t),\ x(t)\ \rangle = \sum_{i=1}^{I} x_i^2$$

NORMA

$$||x(t)|| = \sqrt{E_x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{I} x_i^2} = ||\underline{x}||$$

DISTANZA

\begin{align*} d^2(x(t),y(t)) &=||x(t)-y(t)||^2\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}[x(t)-y(t)]^2dt\\ &=... \end{alig