11/10/2022

SPAZIO VETTORIALE DI SEGNALI A ENERGIA FINITA

PRODOTTO INTERNO

$$< x(t), y(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt$$

NORMA

$$||x(t)|| = \sqrt{< x(t), y(t) >} = \sqrt{E_x}$$

E_x energia del segnale

BASE ORTONORMALE

Una base ortonormale di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori (segnali) $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ t.c.

$$< x_i(t), x_j(t) >= 0, \quad i \neq j, \quad \forall i, j$$

$$||x_i(t)|| = 1, \forall i$$

e inoltre deve valere che il generico segnale $y(t) \in V$ sia scrivibile come

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t) \\ \alpha_i =< y(t), x_i(t) > \end{cases}$$

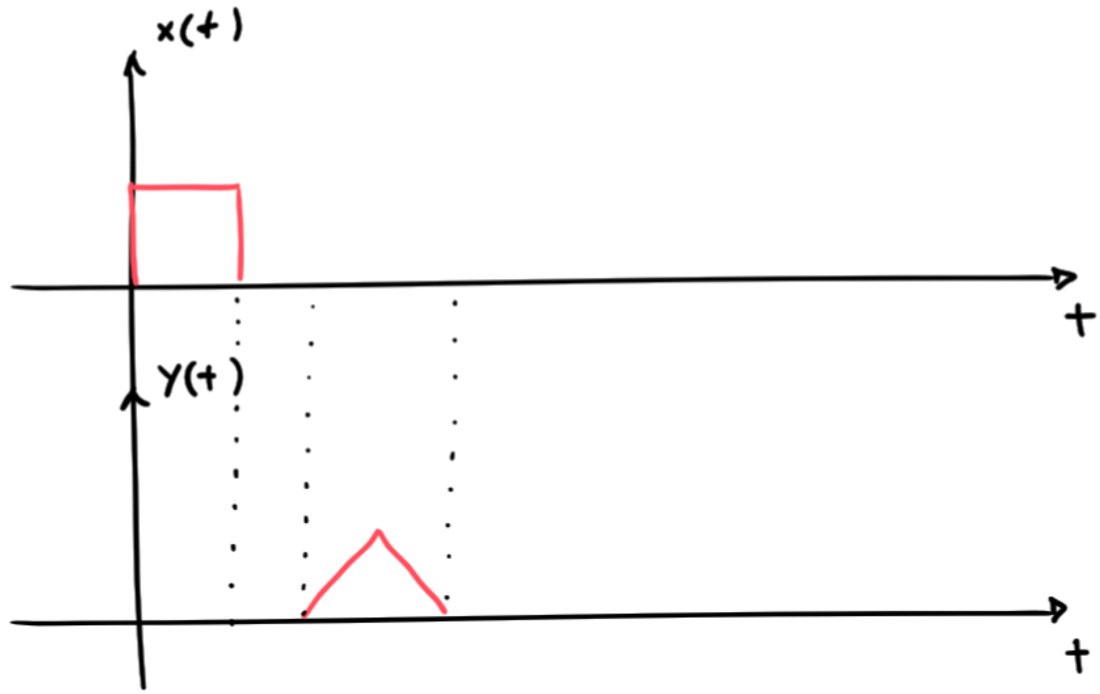
I vettori sono ortogonali in quanto il prodotto interno (scalare) da 0, sono normali in quanto il modulo di ogni vettore è 1

$\underline{Es:}$

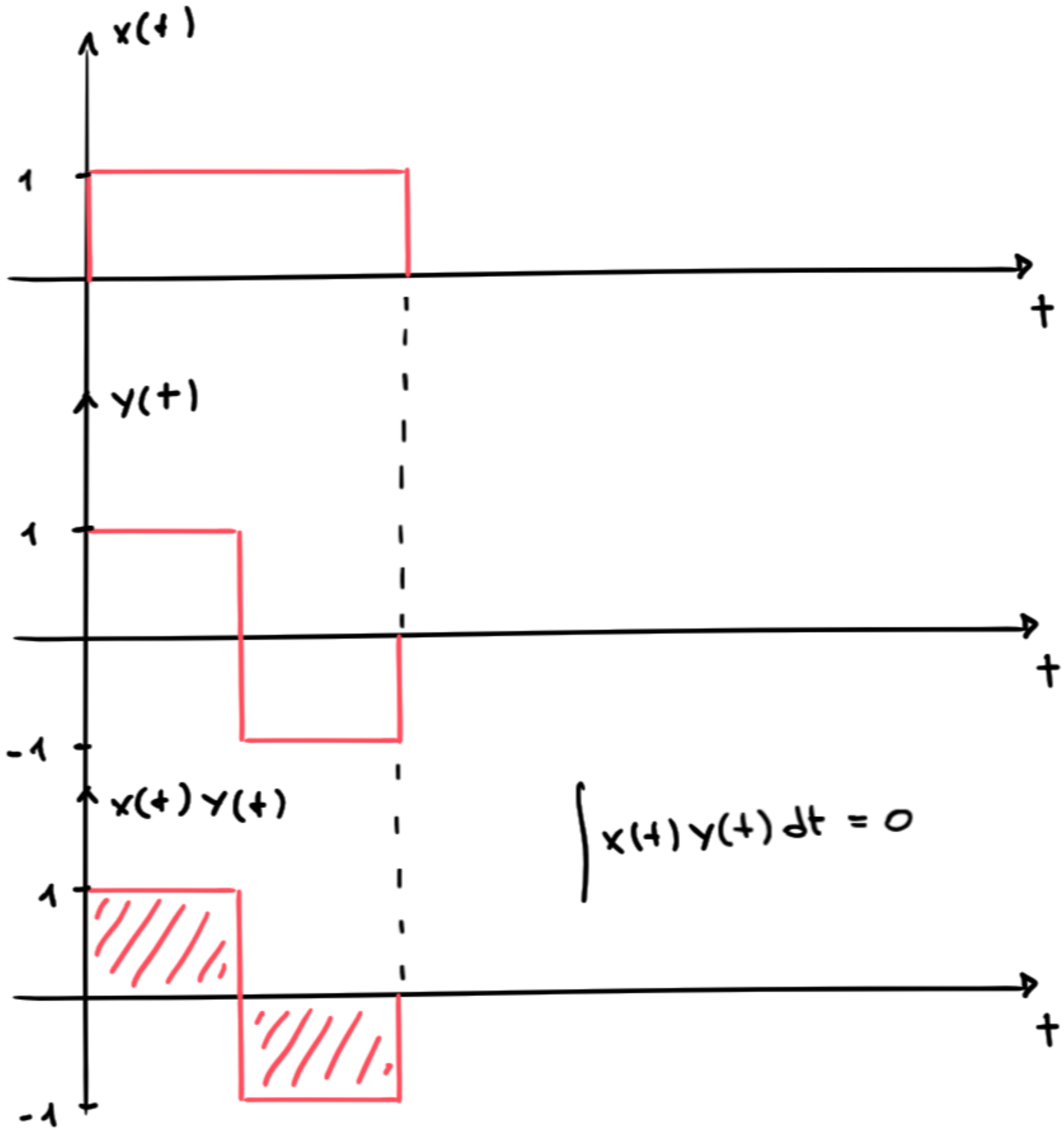
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = 0$$

questo caso si verifica

- se i due segnali hanno sostegni diversi (se sono non nulli in momenti diversi, il prodotto dei segnali sarà sempre nullo); in questo caso i segnali hanno supporto disgiunto



- se l'area del prodotto dei due segnali è nulla



SOTTOSPAZIO GENERATO DA UN INSIEME DI N SEGNALI A ENERGIA FINITA

Dati n segnali $s_1(t), \ldots, s_n(t)$, il sottospazio generato da questi segnali è l'insieme dei vettori (compresi quelli ottenuti da operazioni tra vettori):

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n s_n(t), \qquad \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \forall n$$

I vettori non sono per forza ortonormali
Perchè si tratti di un sottospazio vettoriale bisogna che sia chiuso per le operazioni di somma e prodotto

$$x(t) + y(t) = \sum_n \alpha_n s_n(t) + \sum_n \beta_n s_n(t) = \sum_n (\alpha_n + \beta_n) s_n(t)$$

Partendo da segnali che generano un sottospazio, posso descrivere il sottospazio con una base ortonormale di dimensione $I \leq N,\ \phi_1(t), \ldots, \phi_I(t)$

$$x(t) \iff x = [x1, \ldots, x_I]$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{I} x_i \phi_i(t)$$

PRODOTTO INTERNO NEI DUE SPAZI

$< x(t), y(t) >$ con $x(t)$ e $y(t)$ nel sottospazio $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_I(t)\}$

$$x_i =< x(t), \phi_i(t) >$$

$$y_i =< y(t), \phi_i(t) >$$

$$< x(t), y(t) >=< \sum_{i=1}^{I} x_i \phi_i(t), \sum_{i=1}^{I} y_i \phi_i(t) >= \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} < x_i \phi_i(t), y_j \phi_j(t) >$$

$=^{*0} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i y_j < \phi_i(t), \phi_j(t) >=^{*1} \sum_{i=1}^{I} x_i y_i < \phi_i(t), \phi_i(t) >=^{*2} \sum_{i=1}^{I} x_i y_i$
$=< \underline{x}, \underline{y} >$$
prodotto interno nello spazio euclideo.

*0: per linearità
*1: ortogonalità dei segnali della base
*2: normalizzazione dei segnali della base

ENERGIA

$$E_x =< x(t), x(t) >= \sum_{i=1}^{I} x_i^2$$

NORMA

$$||x(t)|| = \sqrt{E_x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{I} x_i^2} = ||\underline{x}||$$

DISTANZA

$$d^2(x(t), y(t)) = ||x(t) - y(t)||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - y(t)]^2 dt$$

$$x(t) - y(t) = \sum x_i \phi_i(t) - \sum y_i \phi_i(t) = \sum (x_i - y_i) \phi_i(t) \rightarrow \underline{x} - \underline{y}$$

$$d^2(x(t), y(t)) = \ldots = ||\underline{x} - \underline{y}||^2 = d^2(\underline{x}, \underline{y})$$