

# Fondamenti di Elettronica

04

## Circuiti con amplificatori operazionali

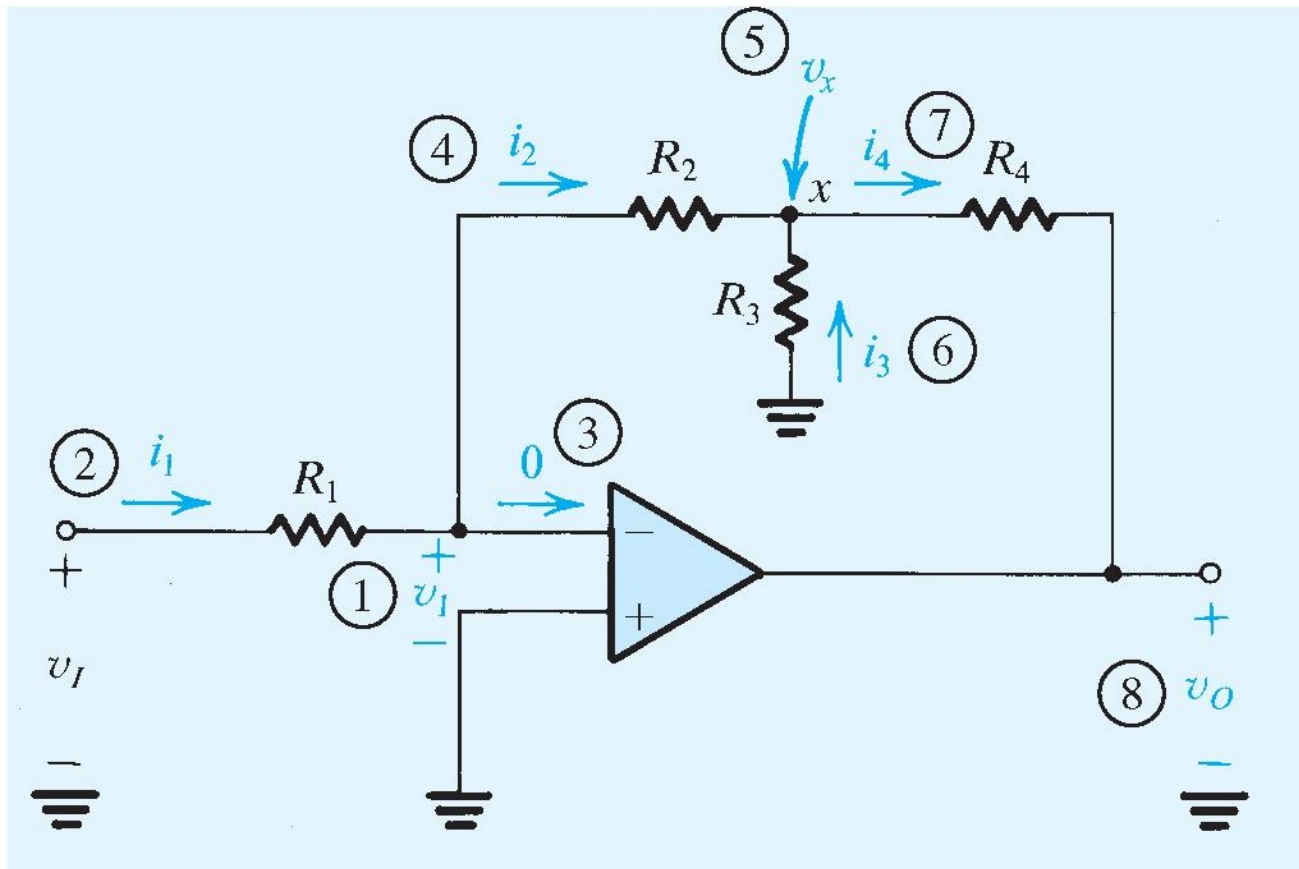


Enrico Zanoni

[enrico.zanoni@unipd.it](mailto:enrico.zanoni@unipd.it)

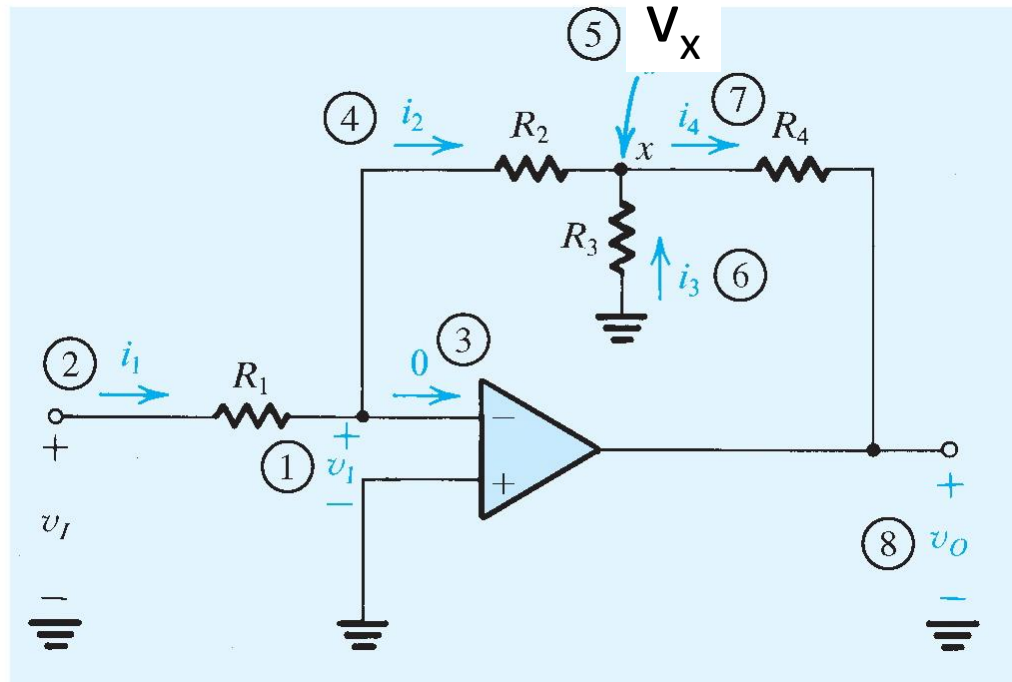
181696

# Rivisitiamo l'amplificatore invertente con feedback a T



Amplificatore con rete di feedback a T: permette di risolvere il conflitto tra resistenza di ingresso e guadagno nell'amplificatore invertente

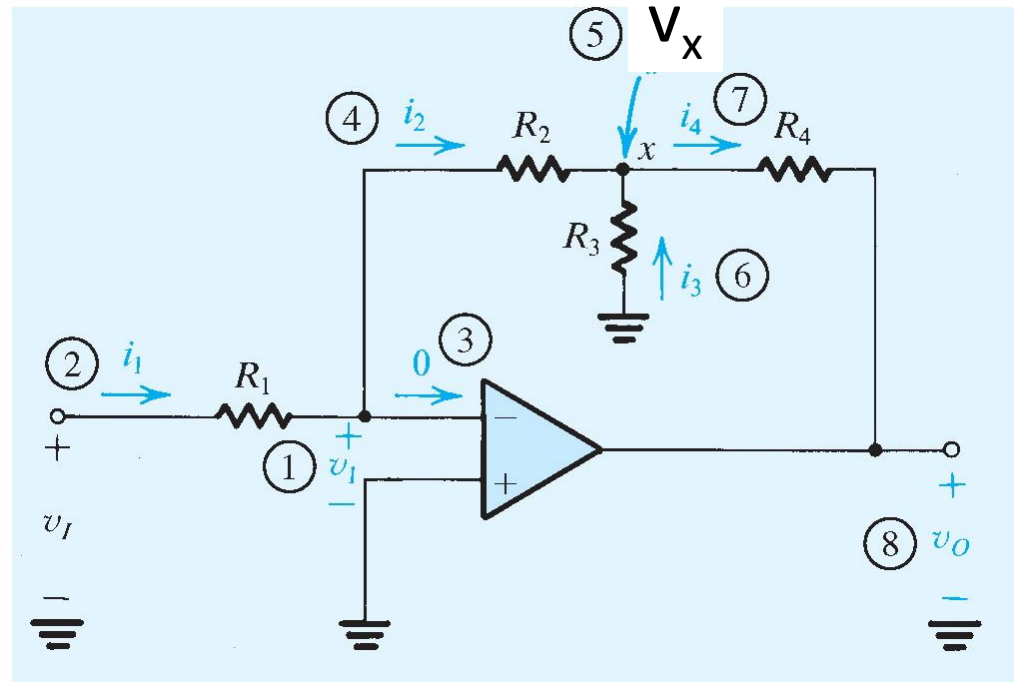
# Studiamo il rapporto di correnti



$$v_+ = v_- = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{v_I}{R_1} = i_2$$

$$v_x = v_+ - i_2 R_2 = -i_2 R_2 = -v_I \frac{R_2}{R_1}$$

# Studiamo il rapporto di correnti



$$v_x = -v_I \frac{R_2}{R_1}$$

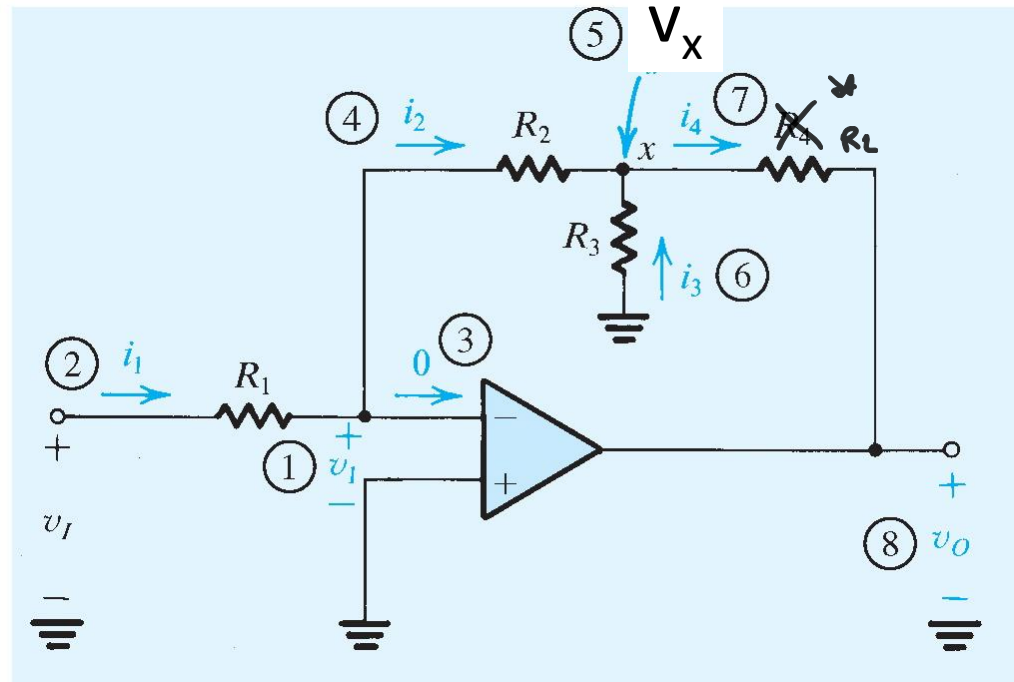
$$i_3 = -\frac{v_x}{R_3} = \frac{R_2}{R_1 R_3} v_I \quad i_1 = \frac{v_I}{R_1} = i_2 \quad \text{poniamo } \frac{R_2}{R_3} = k$$

$$i_3 = k i_2 \quad i_4 = i_2 + i_3 = \frac{v_I}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3} v_I = (1 + k) i_1;$$

Il circuito di feedback a T agisce come *moltiplicatore della corrente*

L'aumento di corrente in  $R_4$  fa aumentare  $v_O$  senza aumentare  $i_1$

La corrente su  $R_4$  non dipende dal valore di  $R_4$



$$v_x = -v_I \frac{R_2}{R_1}$$

$$i_4 = i_2 + i_3 = \frac{v_I}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3} v_I = \left( 1 + \frac{R_2}{R_3} \right) \frac{v_I}{R_1}; = i_L$$

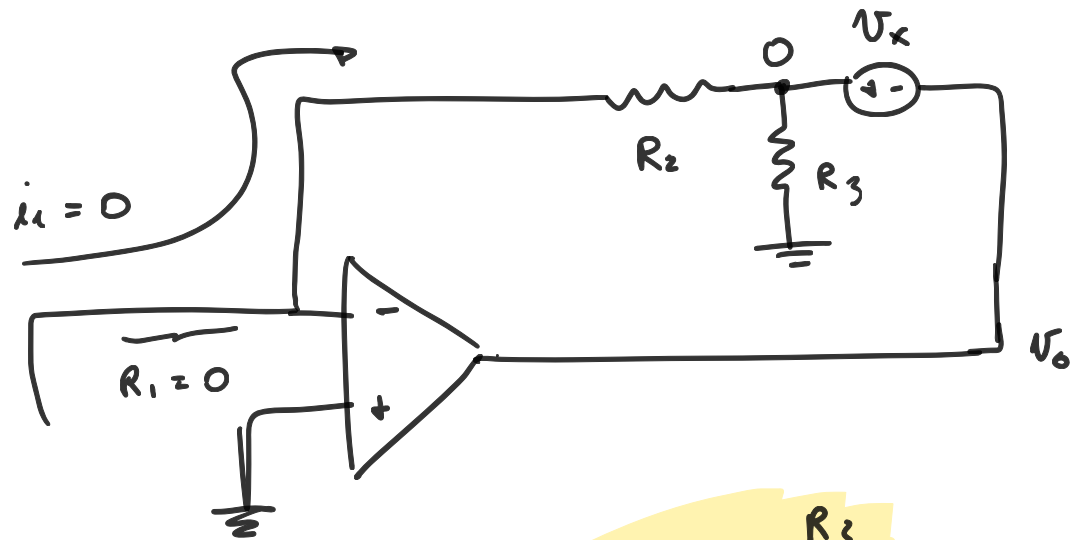
La corrente su  $R_4$  non dipende da  $R_4$  : possiamo trasformare l'amplificatore in un amplificatore di corrente con il carico al posto di  $R_4$  \*

$R_o$  ?

1) Aperto il carico  $\rightarrow$  generatore di test complementare  
alle grandezze d'uscita

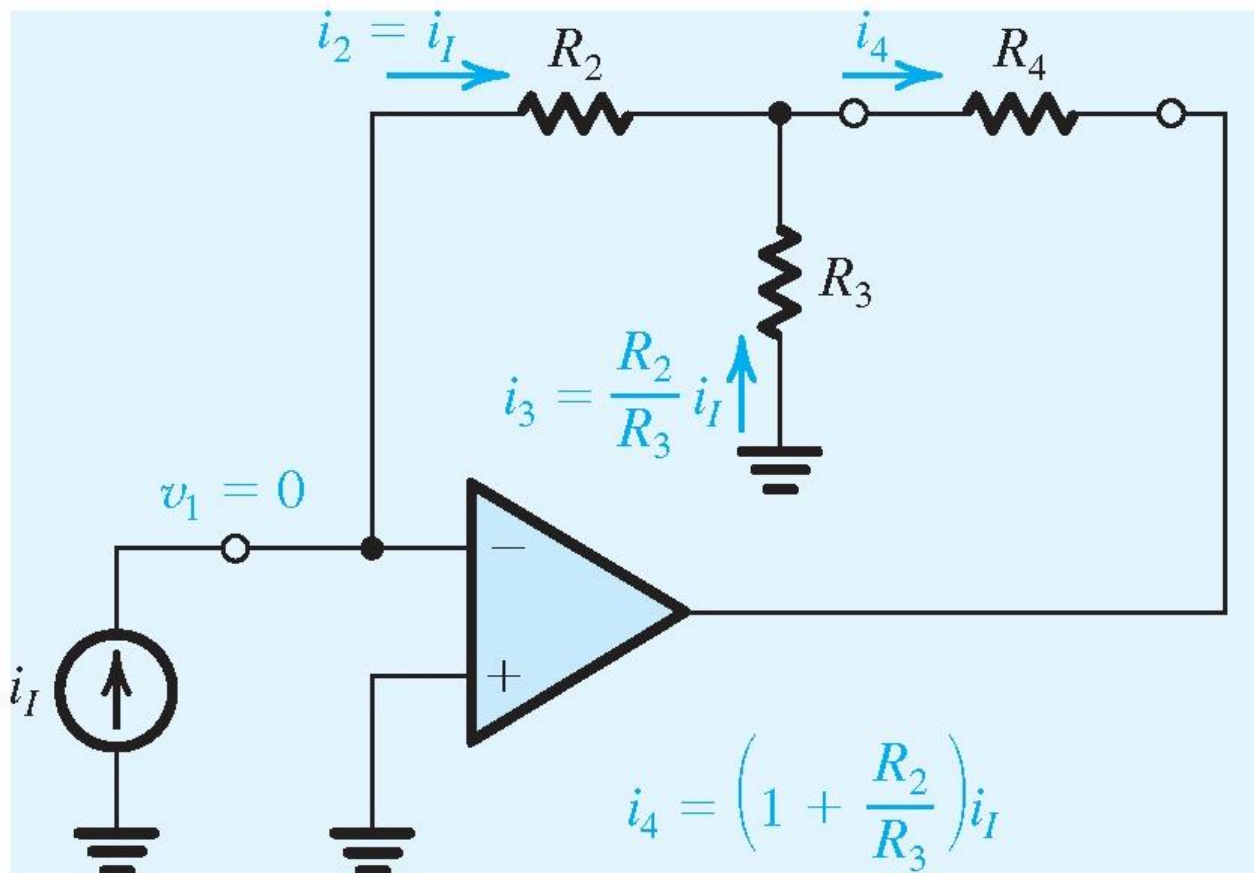
2) annullato il segnale d'ingresso  $i_s = 0$

$$R_o = \frac{V_x}{i_x} = \frac{V_x}{0} = +\infty$$



$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_3}$$

# Amplificatore di corrente con rete di feedback a T



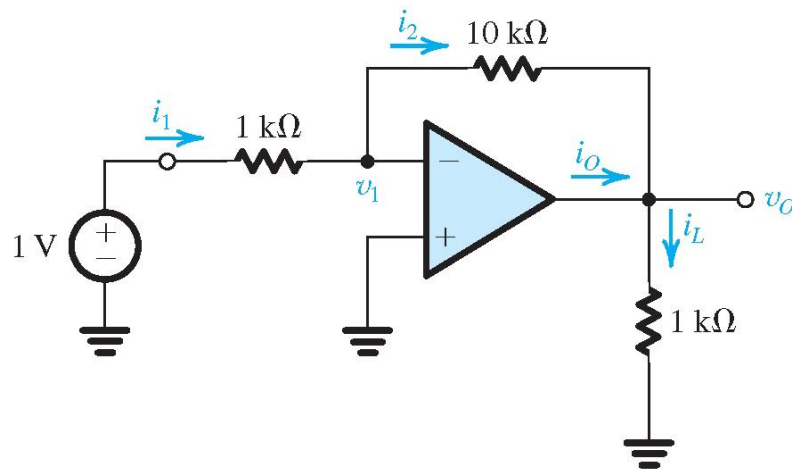
NB  $R_4$  è il carico ( $R_L$ ) del nostro amplificatore

$A_i = (1 + R_2/R_3)$  ;  $R_i = 0$  ;  $R_o = \infty$  (vedi sopra)

(per trovare  $R_o$  si applica un generatore di tensione al posto di  $R_4$   
e si annulla  $i_i$  ; le correnti sono ovunque nulle;  $R_o = v_x/i_x = v_x/0 = \infty$ )



# Esercizio



Per questo amplificatore si determinino

$$v_1 = 0$$

$$i_1 = 1 \text{ mA}$$

$$i_2 = 1 \text{ mA}$$

$$v_o = -10 \text{ V}$$

$$i_L = -10 \text{ mA}$$

$$i_o = -11 \text{ mA}$$

La resistenza da 10kΩ introduce un feedback negativo

Quindi vale il principio di massa virtuale :  $v_- = v_+ = 0 \text{ V}$

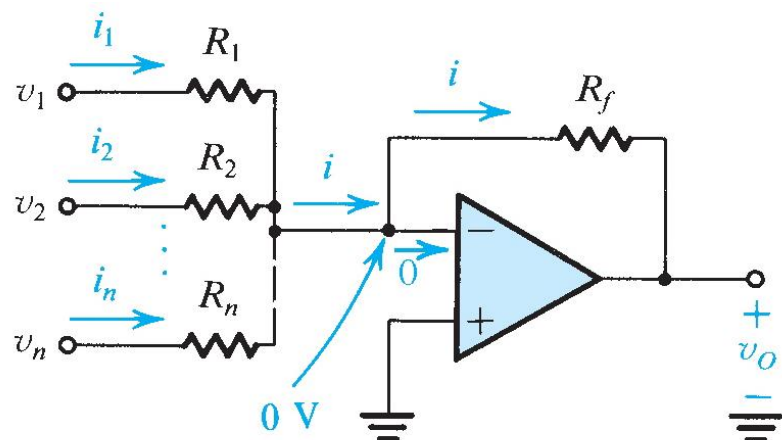
$$i_1 = 1 \text{ V} / 1 \text{ k}\Omega = 1 \text{ mA} = i_2$$

$$v_o = v_1 - i_2 R_2 = -1 \text{ mA} * 10 \text{ k}\Omega = -10 \text{ V} \text{ (} v_o \text{ non dipende dalla resistenza da } 10 \text{ k}\Omega \text{ tra uscita e massa: perchè ?); } A_v = -10 \text{ V} / 1 \text{ V} = -10 \text{ V/V}$$

$$i_L = v_o / R_L = -10 \text{ V} / 1 \text{ k}\Omega = -10 \text{ mA}$$

$$i_o = i_L - i_2 = -10 \text{ mA} - 1 \text{ mA} = -11 \text{ mA}$$

# Circuito sommatore



$$v_o = - \left( \frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n} v_n \right)$$

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{v_2}{R_2}, \quad \dots, \quad i_n = \frac{v_n}{R_n}$$

$$v_o = -i_{\text{totale}} \times R_f ; i_{\text{totale}} = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

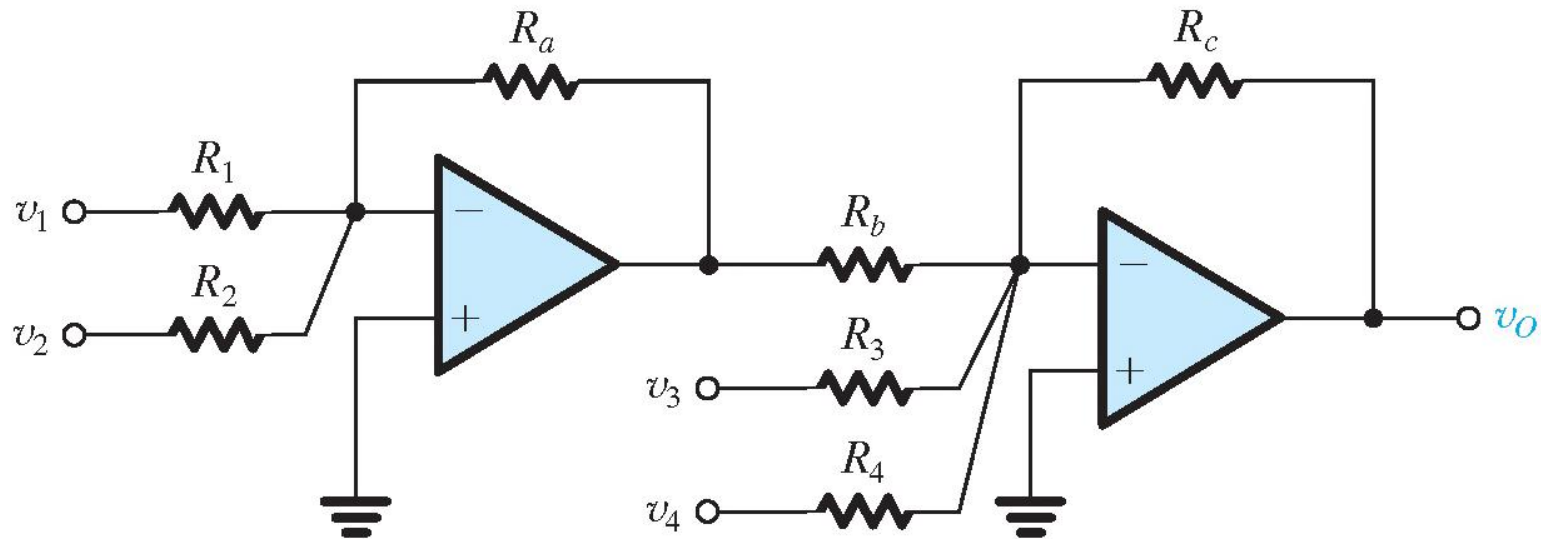
$$v_o = - \left( \frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n} v_n \right)$$

$$= - R_f \sum_{k=1}^n i_k$$

L'amplificatore operazionale è un elemento lineare per il quale vale il principio di sovrapposizione degli effetti:

l'effetto complessivo dell'applicazione di una serie di sorgenti si ottiene sommando gli effetti di ciascuna sorgente presa singolarmente, con tutte le altre sorgenti poste a zero

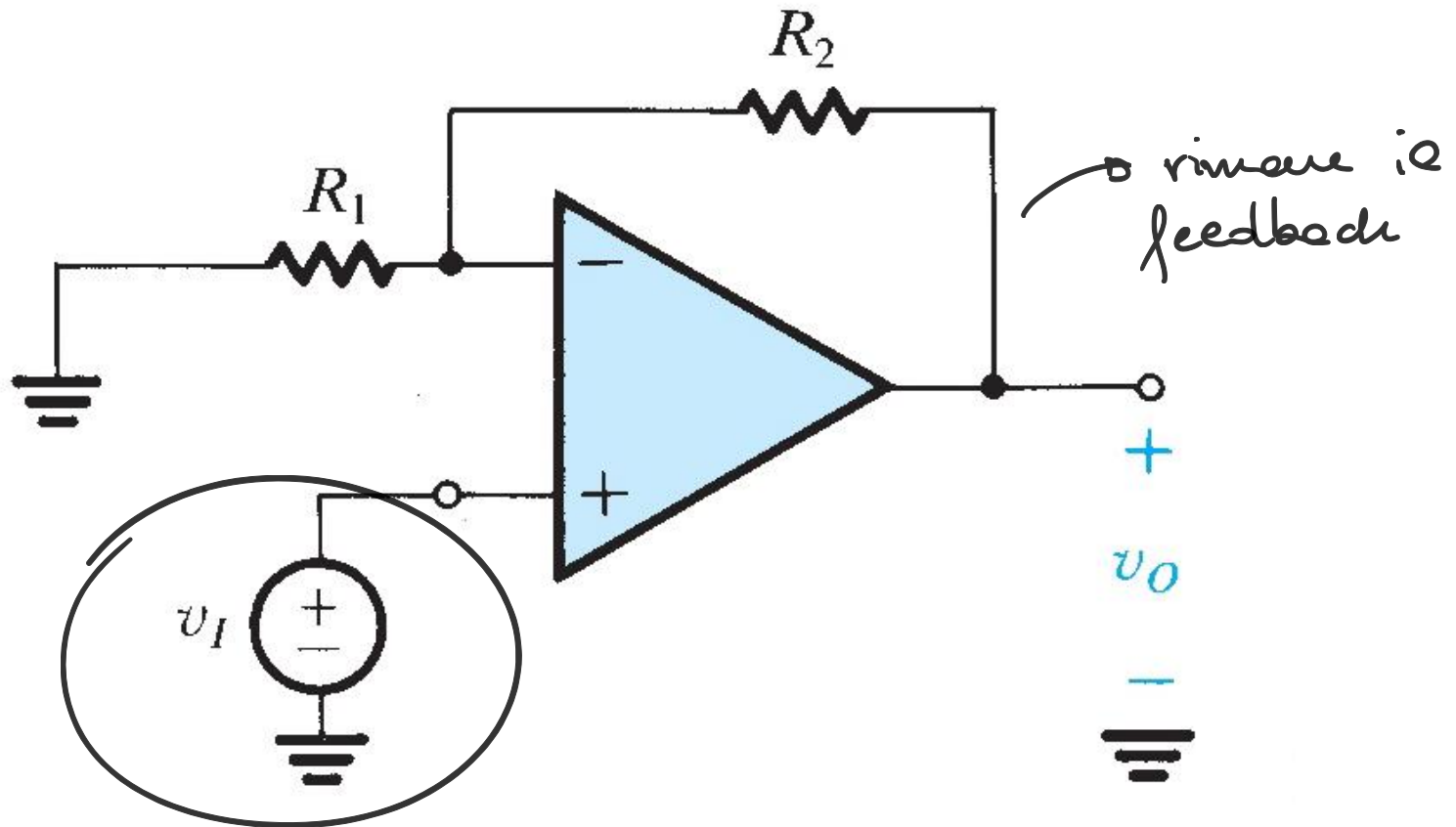
# Somma e sottrazione con amplificatore operazionale



All'uscita del primo stadio :  $v_{o1} = -\frac{R_a}{R_1} v_1 - \frac{R_a}{R_2} v_2$

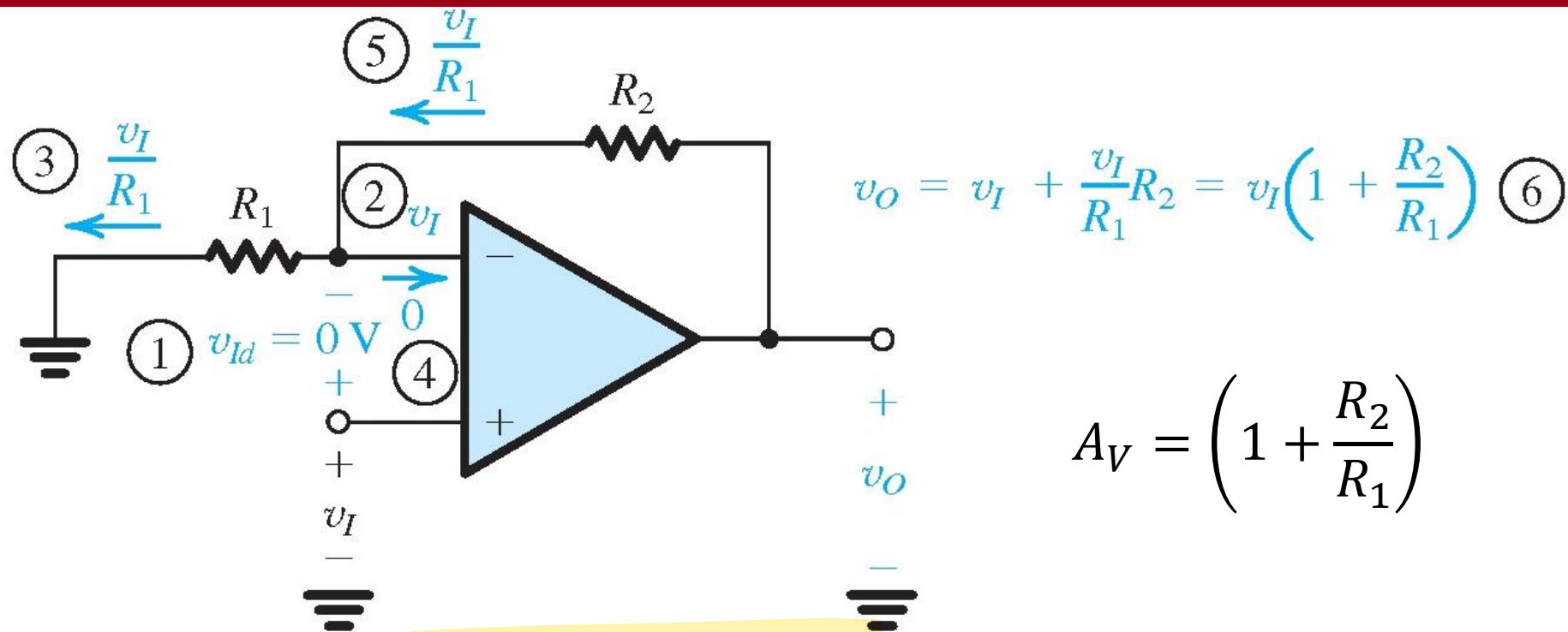
$$v_o = \left( \frac{R_a}{R_1} v_1 + \frac{R_a}{R_2} v_2 \right) \frac{R_c}{R_b} - \frac{R_c}{R_3} v_3 - \frac{R_c}{R_4} v_4$$

# Amplificatore non invertente



ho spostato il generatore

# Amplificatore non invertente



E' presente la stessa rete di retroazione dell'amplificatore invertente  
 → applico il principio di massa virtuale

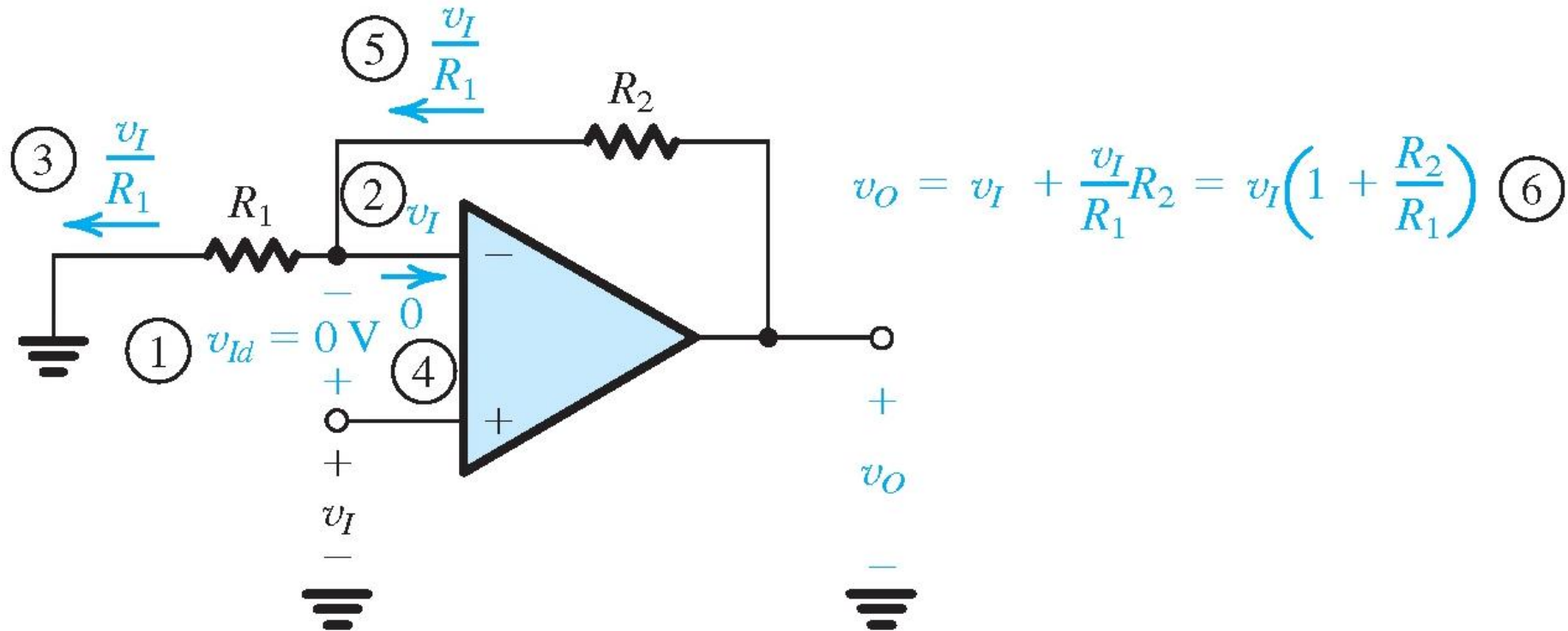
$v_+ = v_-$ ; il nodo 2 si trova alla tensione  $v_I$

sulla resistenza  $R_1$  scorre la corrente  $i_{R1} = v_I/R_1$

$i_{R1} = i_{R2}$  perchè nell'amplificatore non entra corrente

$$v_O = v_I + v_I \frac{R_2}{R_1} = v_I \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \quad A = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

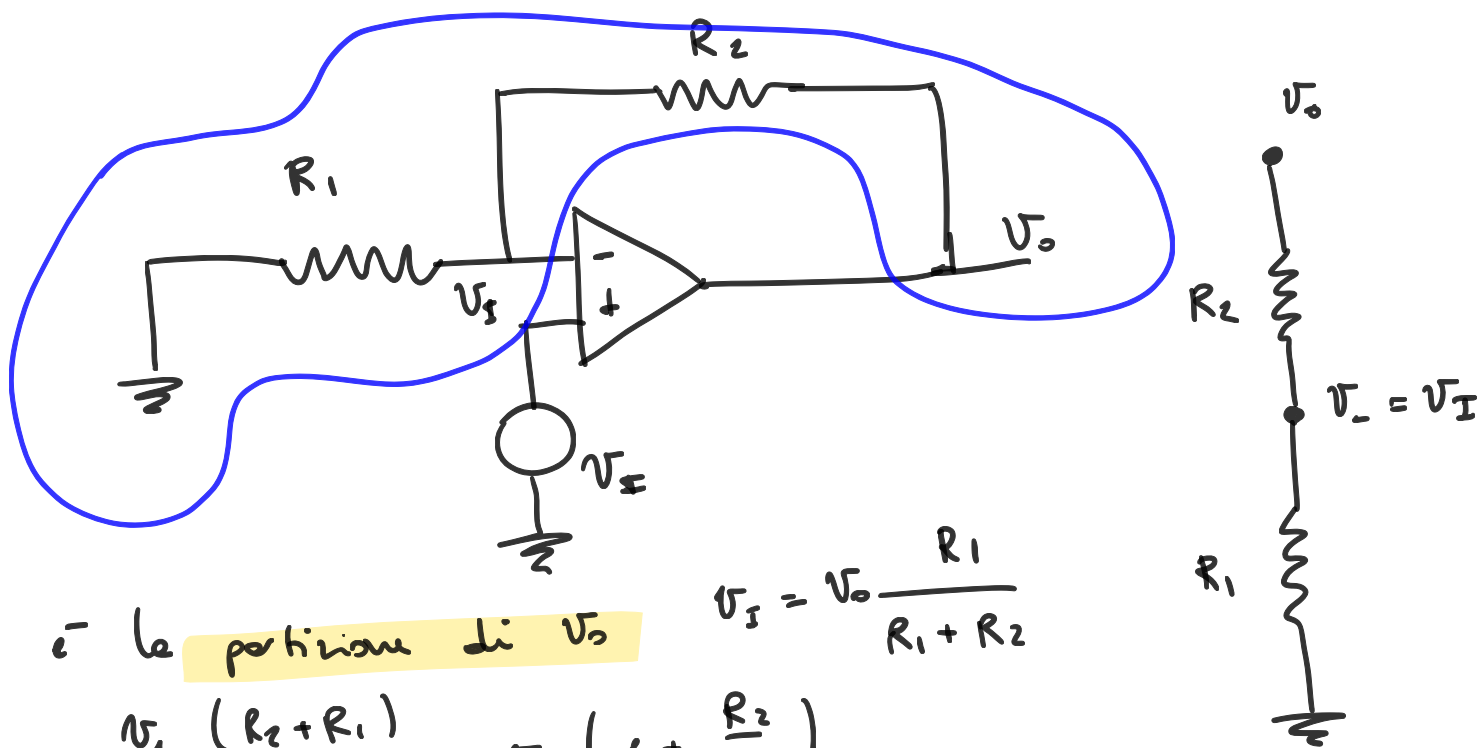
# Guadagno dell'amplificatore non invertente



Dato che nell'amplificatore non entra corrente,  $v_I$  può essere vista come risultante dalla applicazione del partitore di tensione  $R_1 - R_2$  alla tensione  $v_O$ :

$$v_I = v_O \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad * \quad v_O = v_I \frac{R_1 + R_2}{R_1} = v_I \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

\*

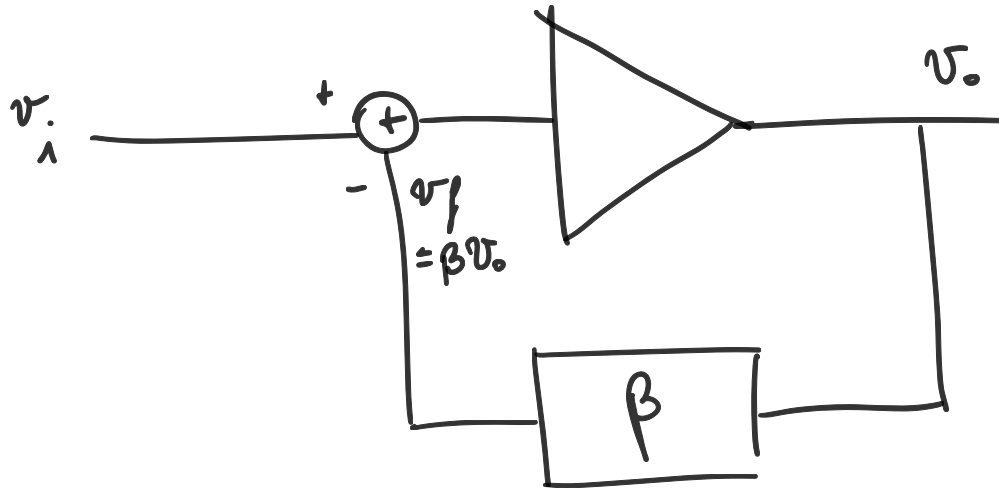


$V_I$  è la **partizione di  $V_O$**

$$V_I = V_O \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_O = \frac{V_I (R_2 + R_1)}{R_1} = V_I \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

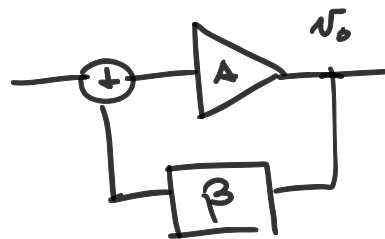
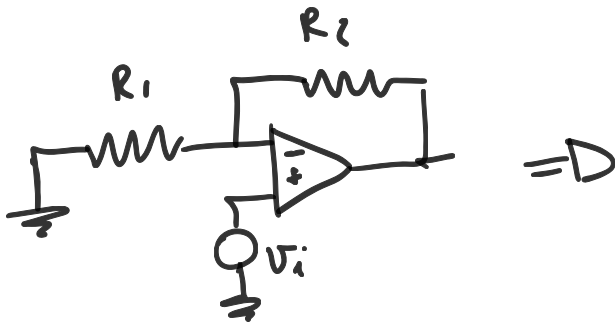
Amplificatore non invertente = amplificatore con feedback



$$v_o = A (v_i - \beta v_o)$$

$$v_o + A\beta v_o = A v_i$$

$$v_o (1 + A\beta) = A v_i$$

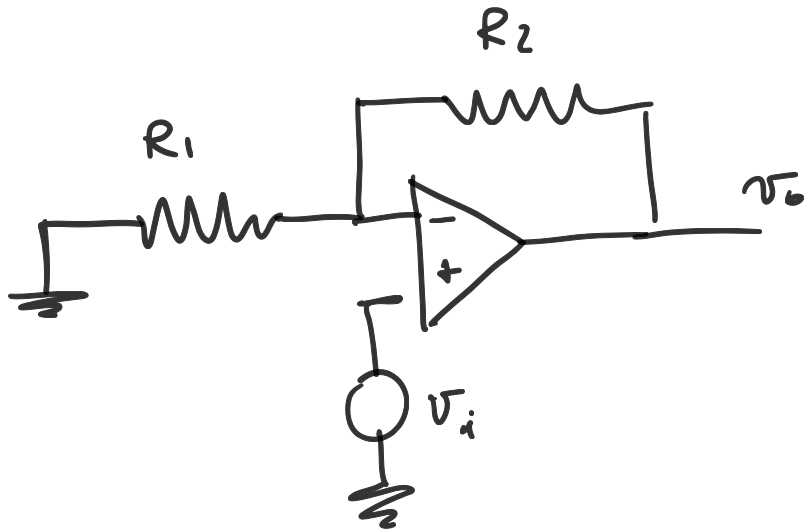


$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1 + A\beta}$$

$\hookrightarrow$  &  $A \rightarrow \infty \quad \frac{v_o}{v_i} \rightarrow \frac{1}{\beta}$

\*



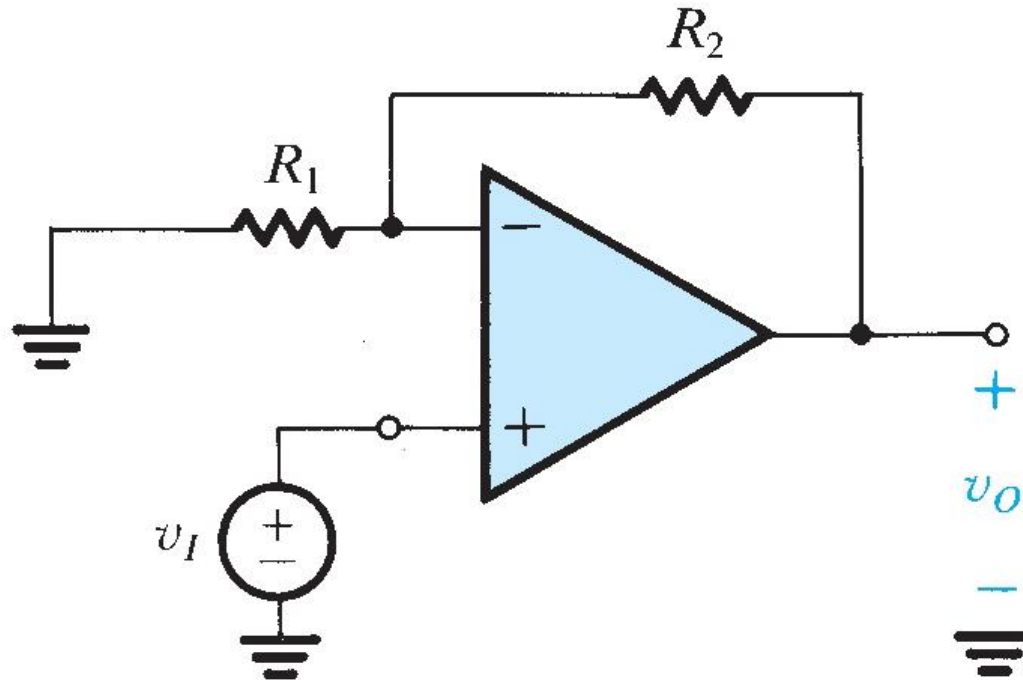


$$v_i = v_o \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} *$$

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{\beta} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

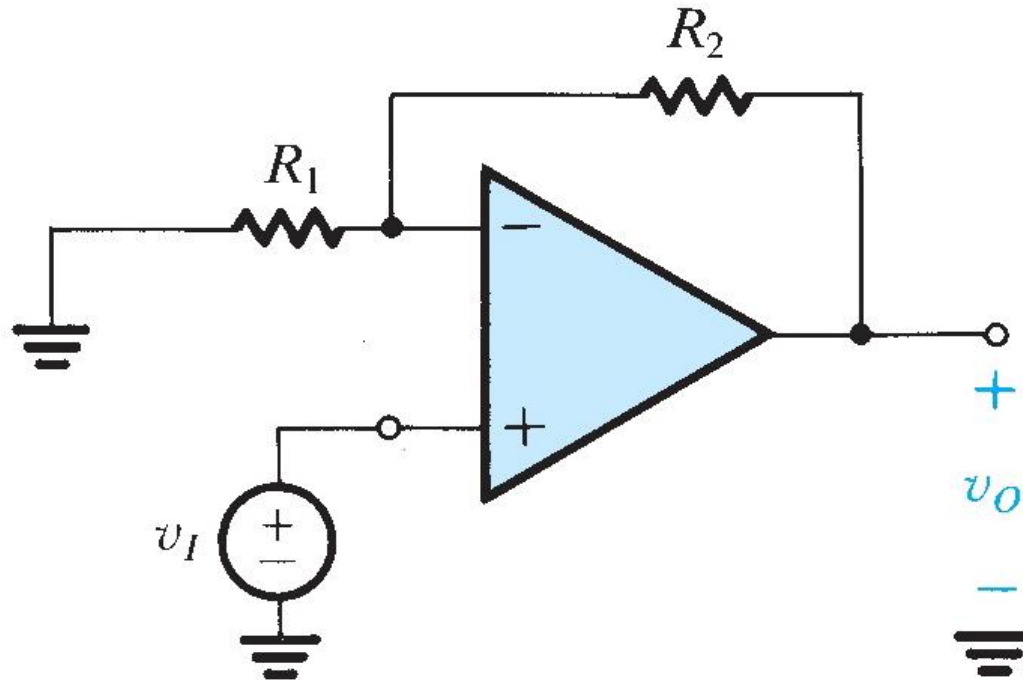
# Amplificatore non invertente con guadagno finito A



Dimostrare che  $(v_+ - v_-) = v_o/A \rightarrow$

$$G_V = \frac{v_o}{v_I} = \frac{1 + \left(R_2/R_1\right)}{1 + \frac{1 + \left(R_2/R_1\right)}{A}}$$

# Amplificatore non invertente: $R_{in}$ , $R_o$

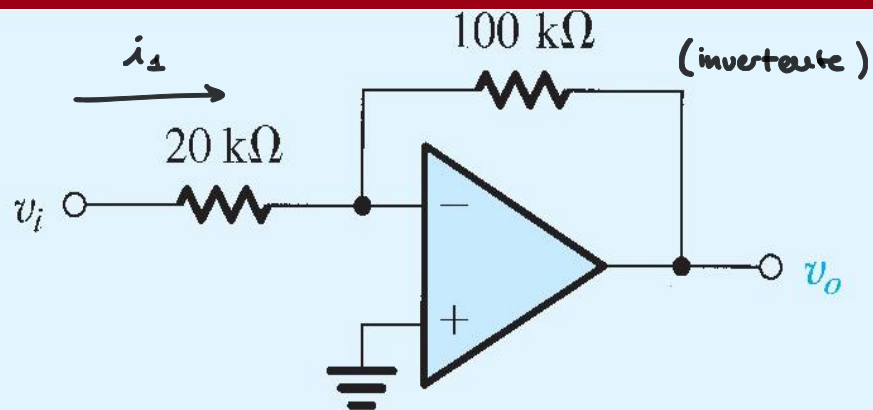


La resistenza di ingresso  $R_{in}$  è infinita

La resistenza di uscita  $R_o$  è nulla

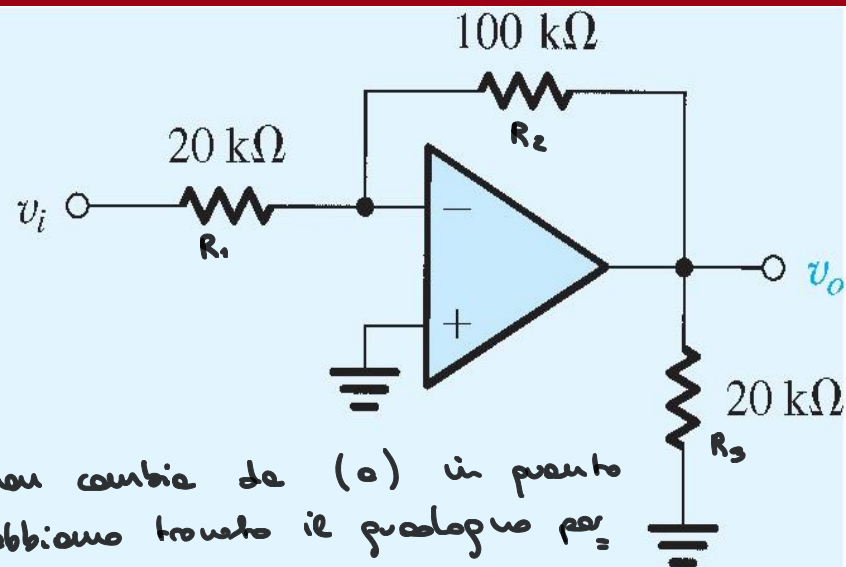
L'amplificatore non invertente con operazionale è un  
amplificatore ideale di tensione

# Trovare le differenze ...



$$v_o = - \frac{100 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega} = -5 \text{ V/V}$$

(a)

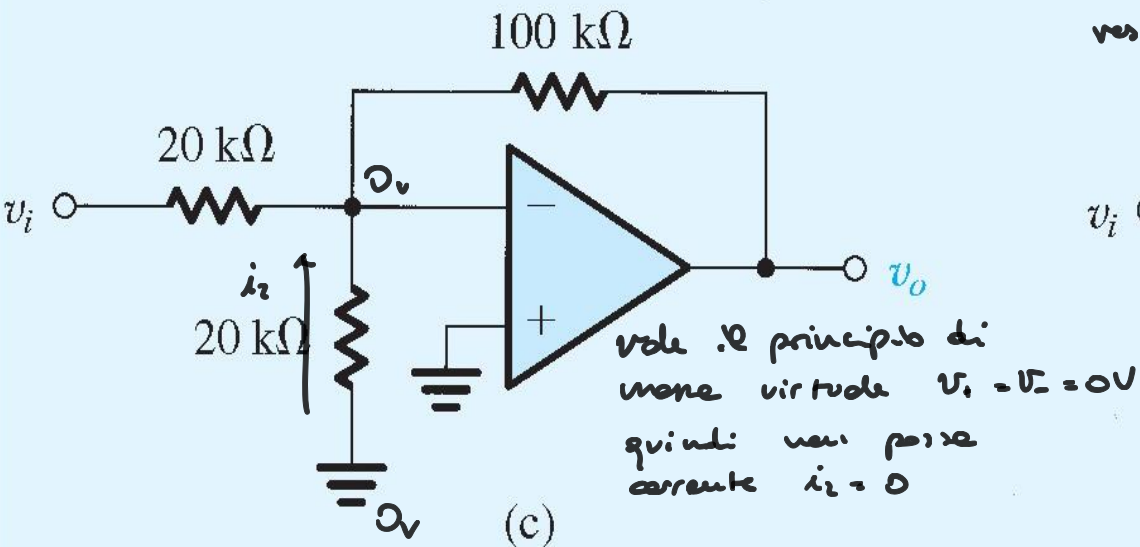


non cambia da (a) in quanto  
abbiamo trovato il guadagno per  
tendo da  $i_1$ , dato (b) che

$$R_3 = R_1 \text{ carico}$$

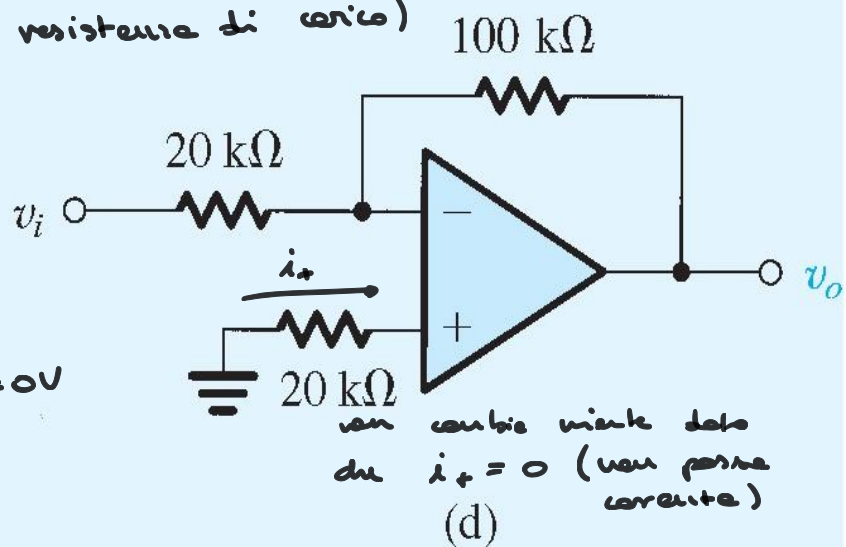
$$R_o = 0 \Omega$$

(le correnti non dipendono dalla  
resistenza di carico)



vale il principio di  
nodo virtuale  $v_+ = v_- = 0 \text{ V}$   
quindi non passa  
corrente  $i_2 = 0$

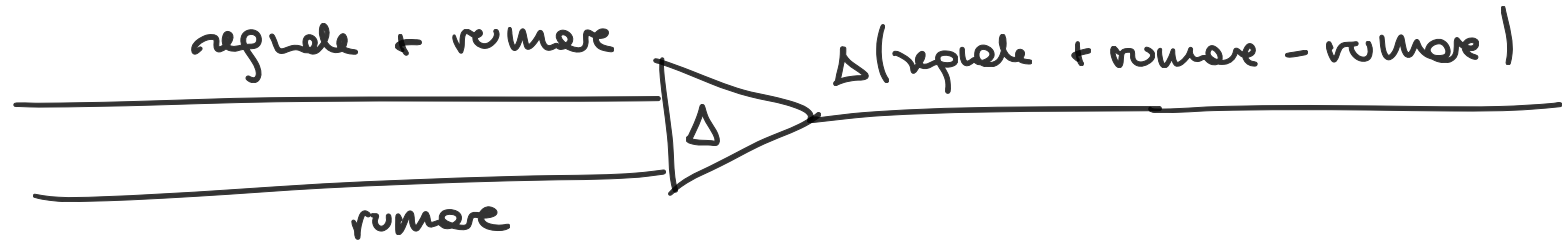
(c)



non cambia niente dato  
che  $i_+ = 0$  (non passa  
corrente)

(d)

nel mondo vede, un segnale è disturbato da un rumore



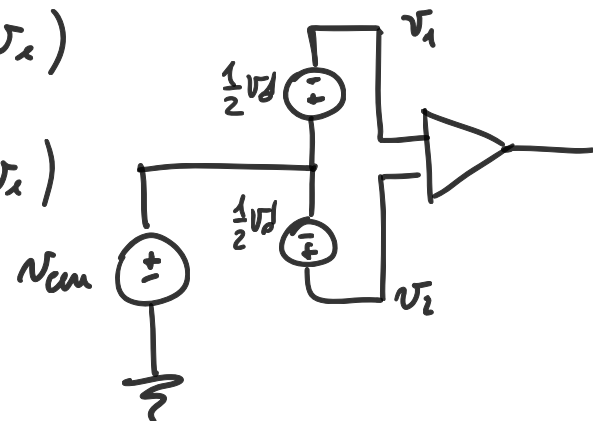
i rumori possono essere simili

segnale differenziale  $v_d = v_2 - v_1$

segnale di modo comune:  $v_{cm} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$  media dei segnali

$$v_1 = v_{cm} - \frac{1}{2}v_d = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$$

$$v_2 = v_{cm} + \frac{1}{2}v_d = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$$



# Segnale differenziale e di modo comune

Obiettivo : definire uno schema che permetta di amplificare la differenza tra due segnali, cioè il «segnale differenziale»

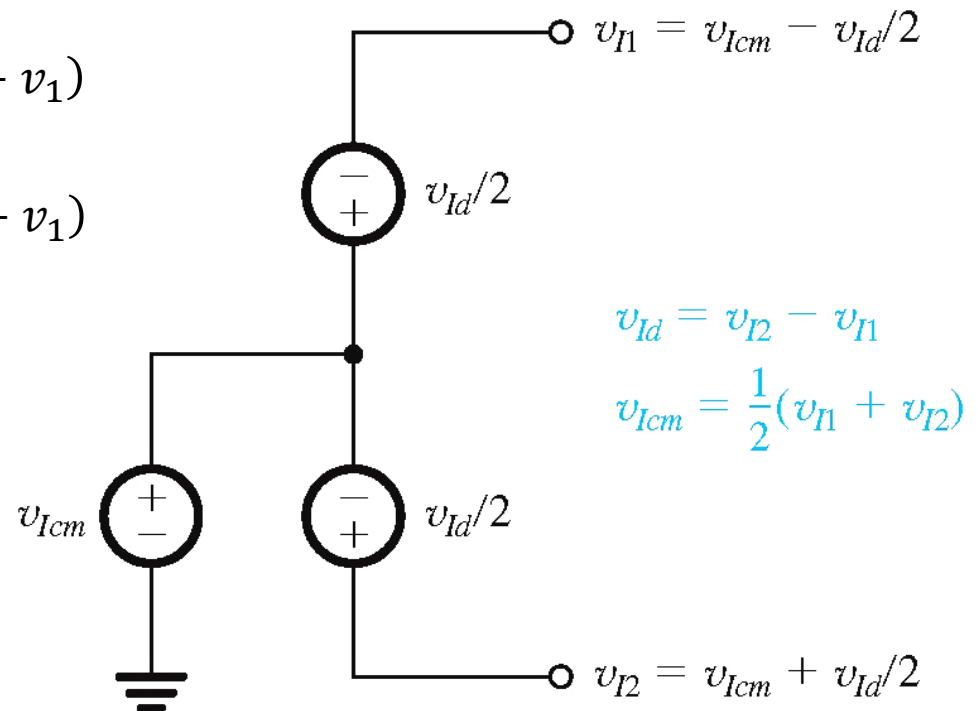
Segnale di ingresso differenziale  $v_d = v_2 - v_1$  (differenza)

Segnale di ingresso di modo comune  $v_{cm} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$  (media dei due segnali)

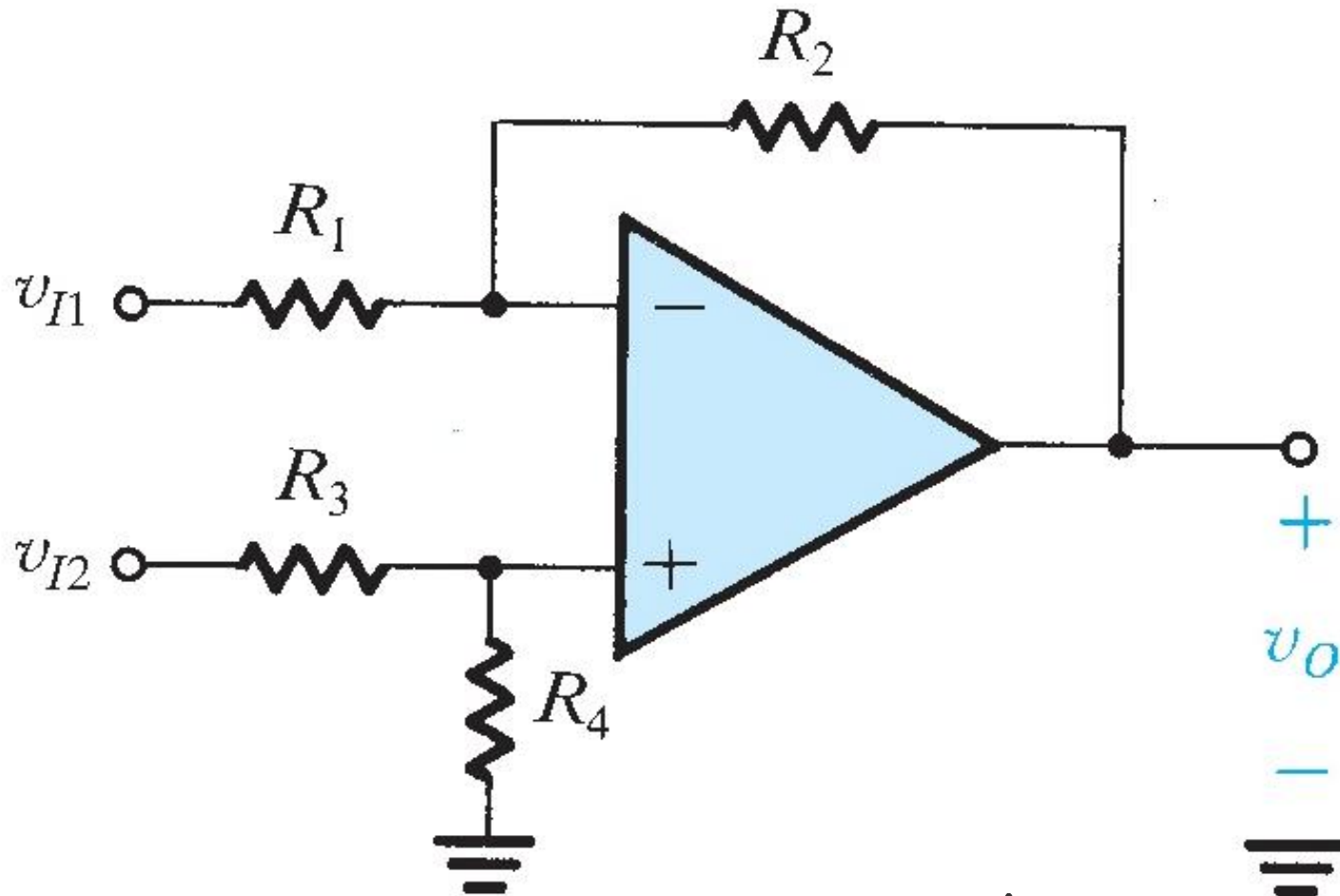
$$v_1 = v_{cm} - \frac{1}{2}v_d = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$$

$$v_2 = v_{cm} + \frac{1}{2}v_d = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(v_2 - v_1)$$

In questo modo abbiamo evidenziato la componente di modo comune dei due segnali



# Amplificatore differenziale con opamp

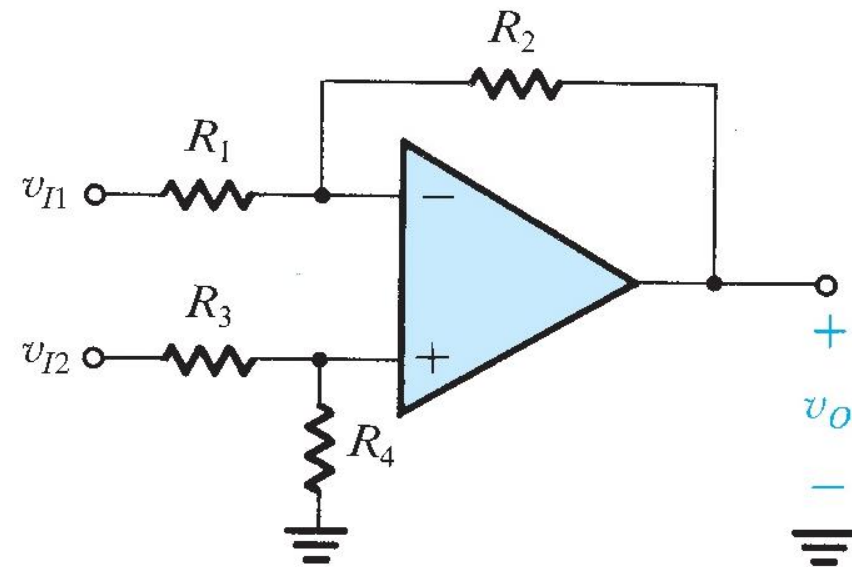


Come si vede le resistenze in modo che  $v_O = A(v_2 - v_1)$   
e che  $v_O$  non dipende da  $v_{cm}$

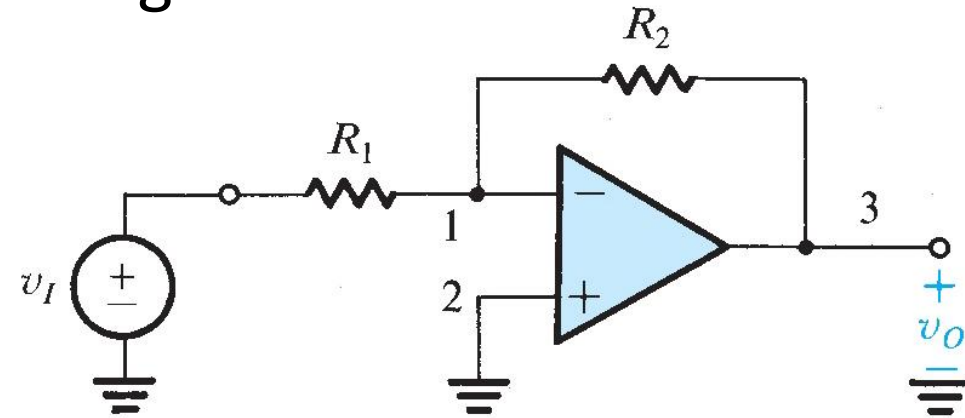
# Amplificatore differenziale con opamp

Applichiamo la sovrapposizione degli effetti

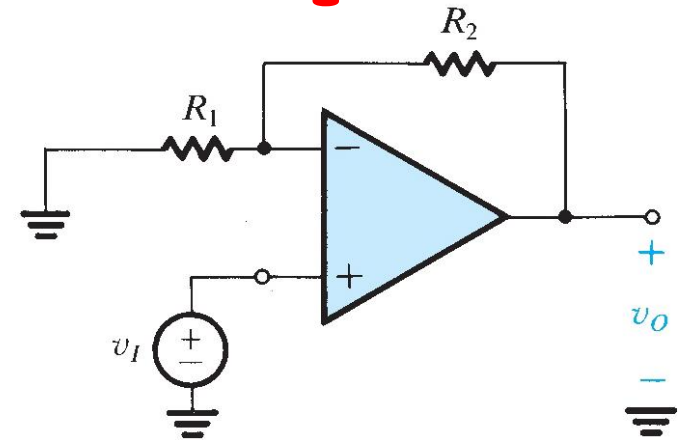
$$v_{o1} = -v_{I1} \frac{R_2}{R_1}$$



=



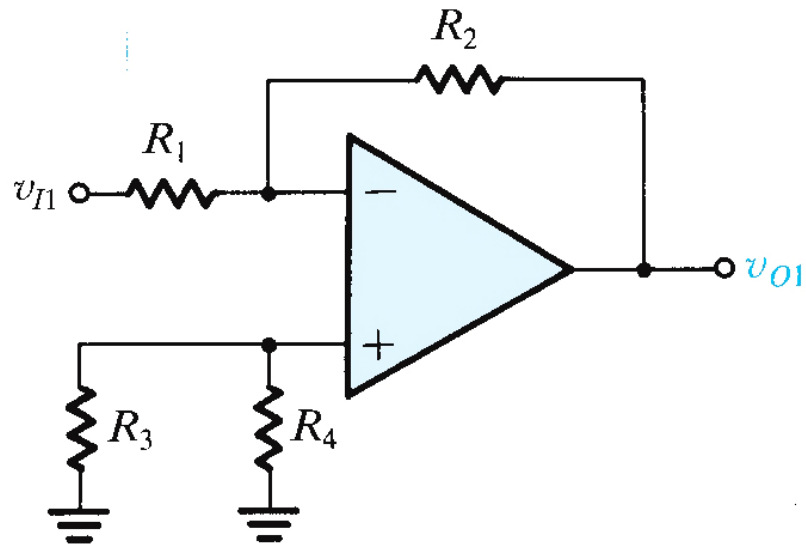
+



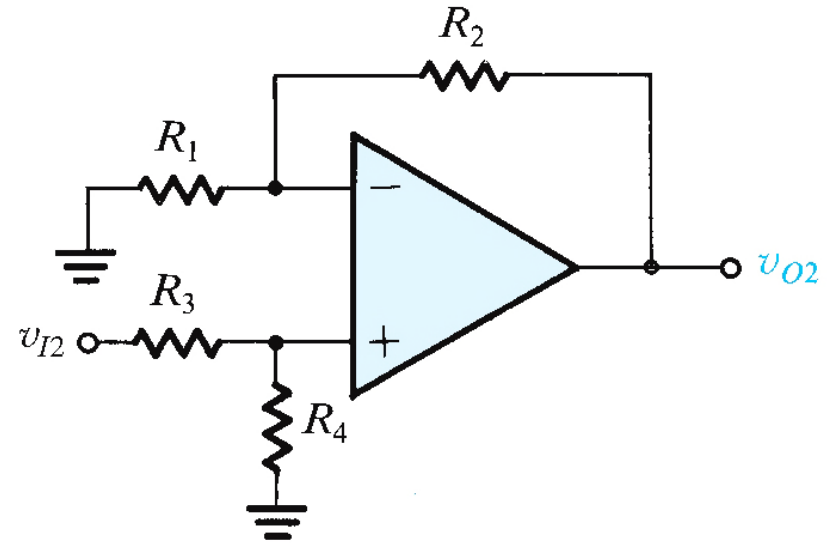
$$v_{o2} = v_{I2} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$



# Principio di sovrapposizione degli effetti



$$v_{O1} = -v_{I1} \frac{R_2}{R_1}$$

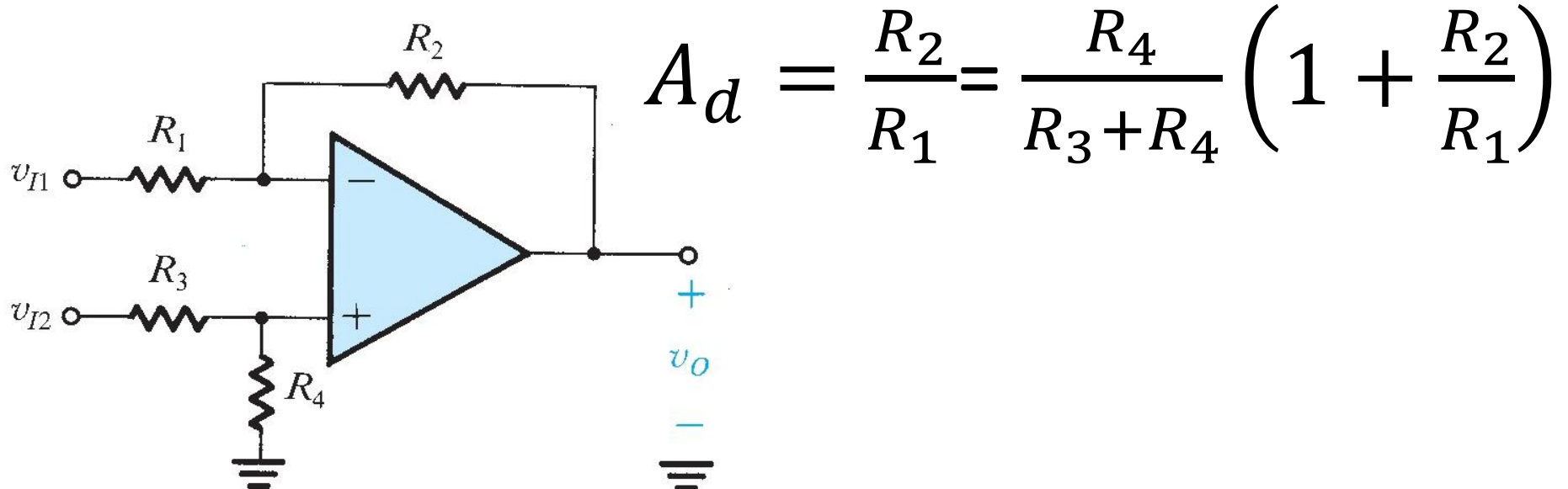


$$v_{O2} = v_{I2} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

# Amplificatore differenziale con opamp

$$v_{o1} = -v_{I1} \frac{R_2}{R_1} \qquad v_{o2} = v_{I2} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

ora vogliamo che l'uscita sia data da  $A_d(v_2 - v_1) = A_d v_2 - A_d v_1$   
quindi deve essere:



# Amplificatore differenziale con opamp

devo imporre:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$\frac{\frac{R_2}{R_1}}{\left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$\frac{1}{\left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right)} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

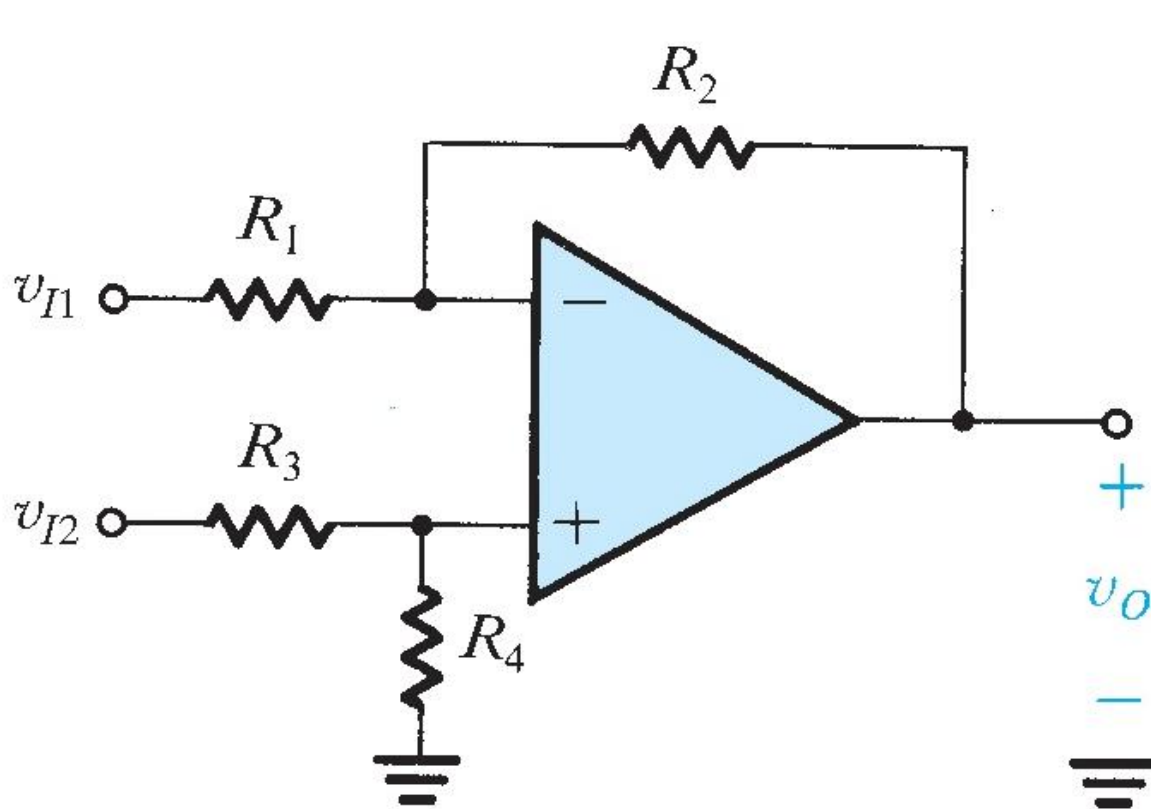
$$\frac{1}{\left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right)} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{R_3}{R_4} \right)}$$

$$\left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) = \left( 1 + \frac{R_3}{R_4} \right)$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

# Amplificatore differenziale con opamp



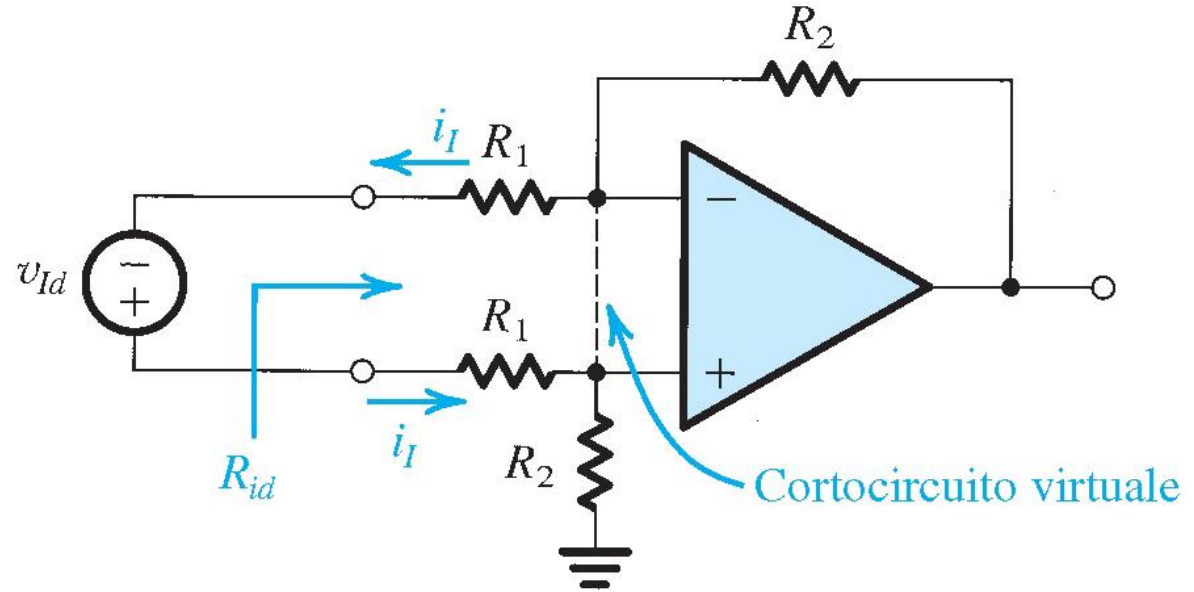
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$$

$$A_d = \frac{R_2}{R_1}$$

La scelta più semplice è  $R_2 = R_4$  ;  $R_1 = R_3$

# Amplificatore differenziale – resistenza di ingresso e di uscita

$$A_d = \frac{R_2}{R_1}$$



Qual è la resistenza di ingresso vista dal generatore di segnale differenziale ?

$$v_0 - i_I R_1 - i_I R_2 + v_{Id} - i_I R_1 - i_I R_2 = 0$$

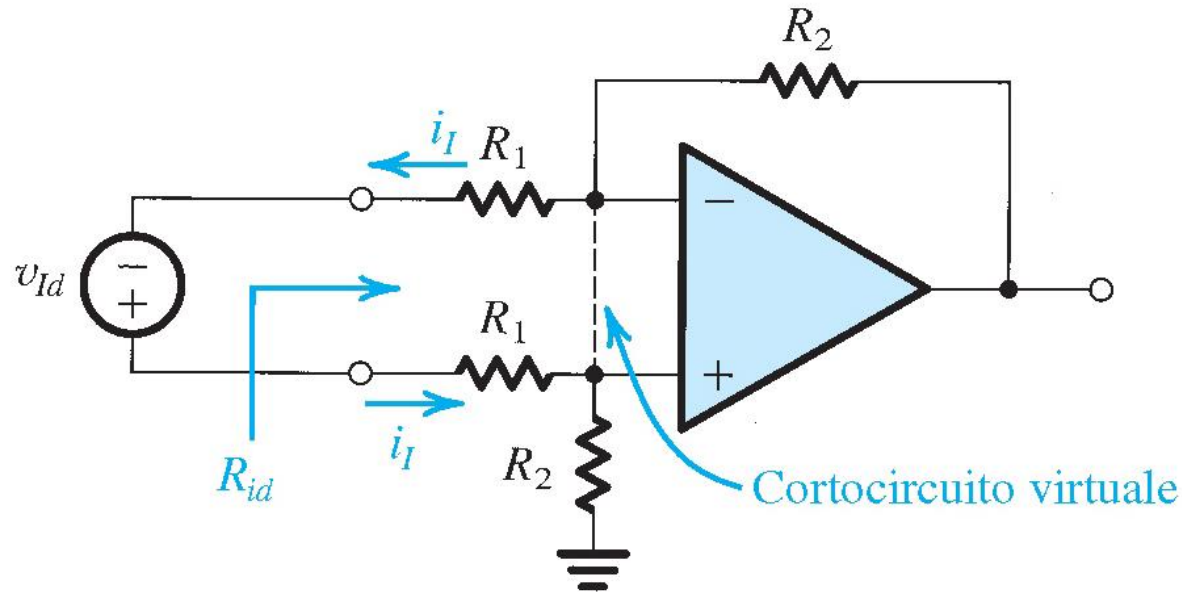
$$v_{Id}(R_2/R_1) - 2i_I(R_1 + R_2) + v_{Id} = 0$$

$$v_{Id}(1 + R_2/R_1) = 2i_I(R_1 + R_2)$$

$$v_{Id} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) = 2i_I(R_1 + R_2); \quad v_{Id} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1} \right) \left( \frac{1}{R_1 + R_2} \right) = 2i_I$$

$$\frac{v_{id}}{i_i} = 2R_1 \text{ resistenza differenziale di ingresso}$$

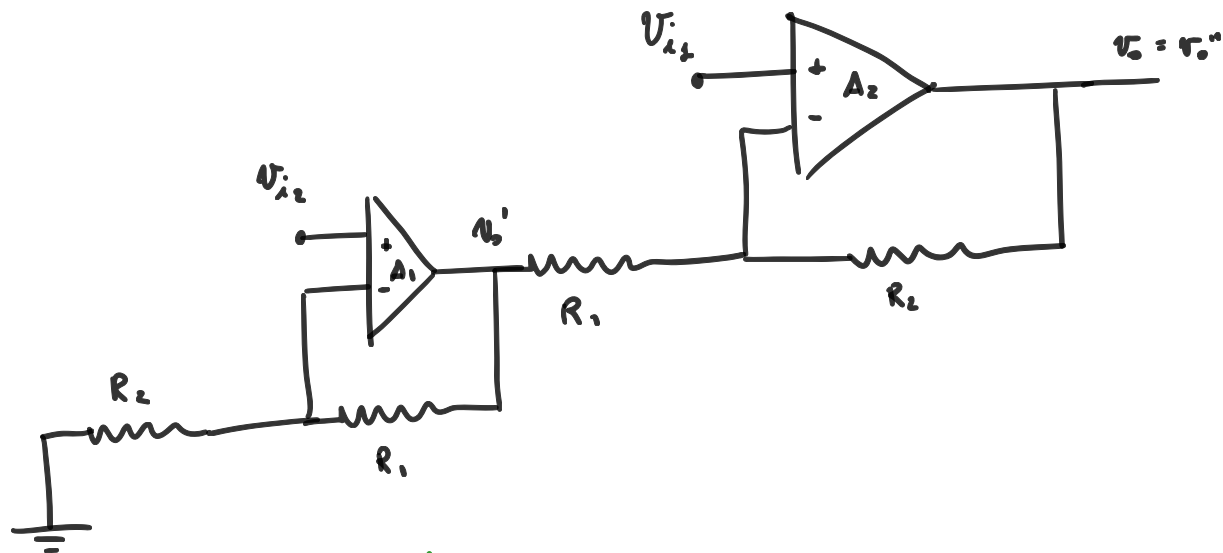
# Amplificatore differenziale – resistenza di ingresso e di uscita



$$A_d = \frac{R_2}{R_1}; \text{guadagno differenziale}$$

$$\frac{v_{id}}{i_i} = 2R_1 \text{ resistenza differenziale di ingresso}$$

Anche in questo amplificatore c'è un conflitto tra resistenza di ingresso e guadagno.



$$V_o' = V_{i2} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \quad \xrightarrow{A_1}$$

$$V_o = V_o' = V_o' \left( -\frac{R_2}{R_1} \right) + V_{i1} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \quad \xrightarrow{A_2}$$

sovrapposizione effetti  $A_2$   $V_o'$  e  $V_{i1}$

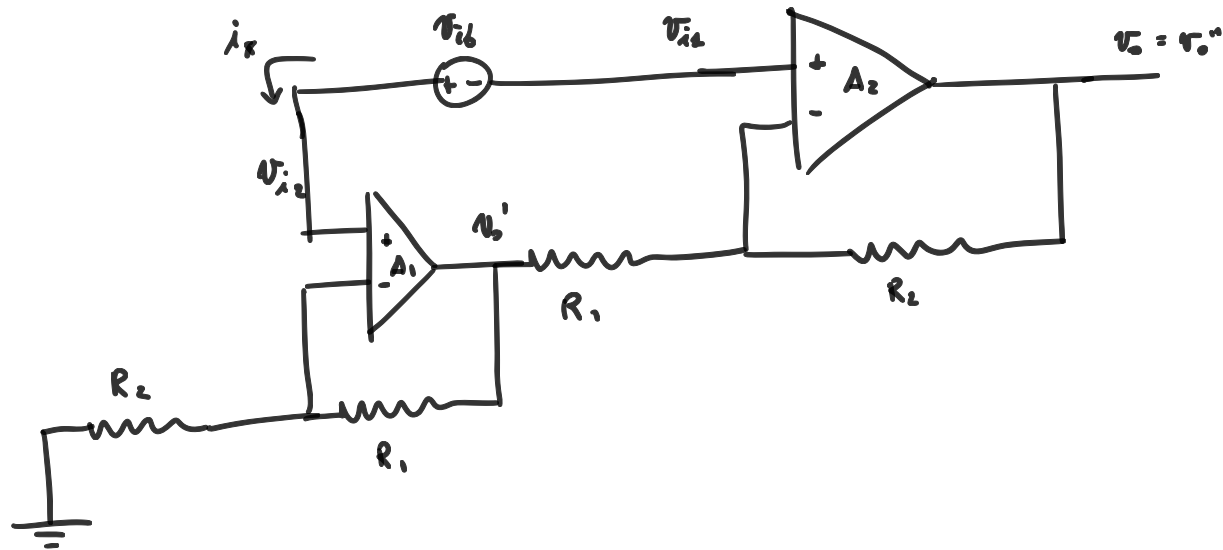
$$V_o = V_{i2} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \left( -\frac{R_2}{R_1} \right) + V_{i1} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$= -V_{i2} \frac{R_2}{R_1} - V_{i2} \frac{R_1}{R_2} \frac{R_2}{R_1} + V_{i1} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$= -V_{i2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + V_{i1} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = (V_{i1} - V_{i2}) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \quad \underbrace{A_d}$$

Guadagno di modo  
comune = 0

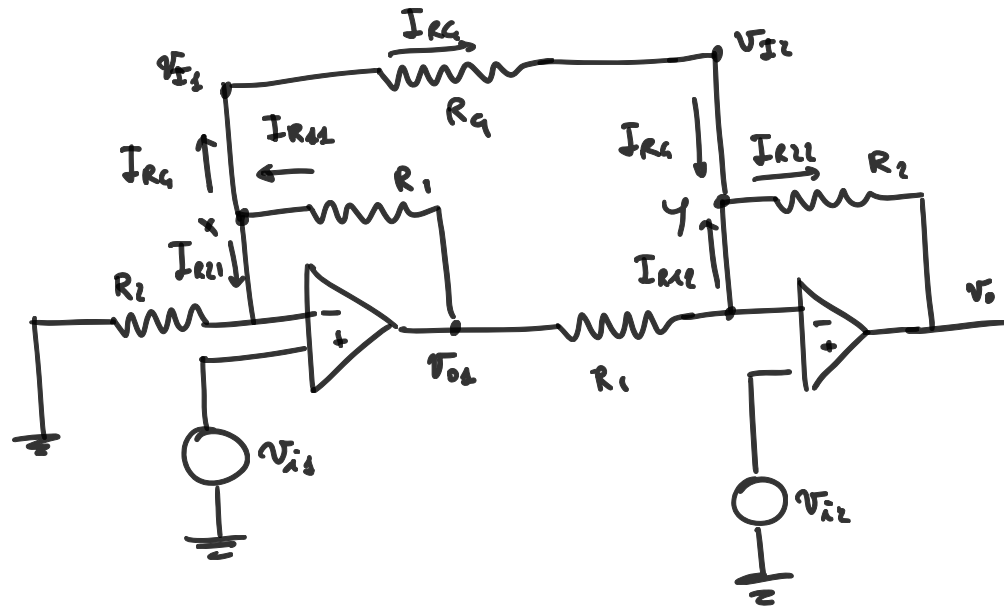
Per calcolarmi la resistenza d'ingresso:



$$R_{id} = \frac{V_{id}}{i_x} = \frac{V_{id}}{0} = \infty \rightarrow \text{per aumentare il guadagno}$$

Questa struttura funziona se le resistenze fossero perfette e in situazioni ideali (impossibile)





X:

$$I_{R1} = I_{R21} + I_{Rg}$$

$$\frac{V_{o1} - V_{i1}}{R_2} = \frac{V_{i2}}{R_2} + \frac{V_{i1} - V_{i2}}{R_g}$$

$$V_o = (V_{i2} - V_{i1}) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + (V_{i2} - V_{i1}) \left( 2 \frac{R_2}{R_g} \right)$$

Y:

$$I_{R21} = I_{Rg} + I_{R12}$$

$$\frac{V_{i2} - V_o}{R_2} = \frac{V_{i1} - V_{i2}}{R_g} + \frac{V_{o1} - V_{i1}}{R_1}$$

$$A = 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{2R_2}{R_g}$$

variando  $R_g$ , cambia

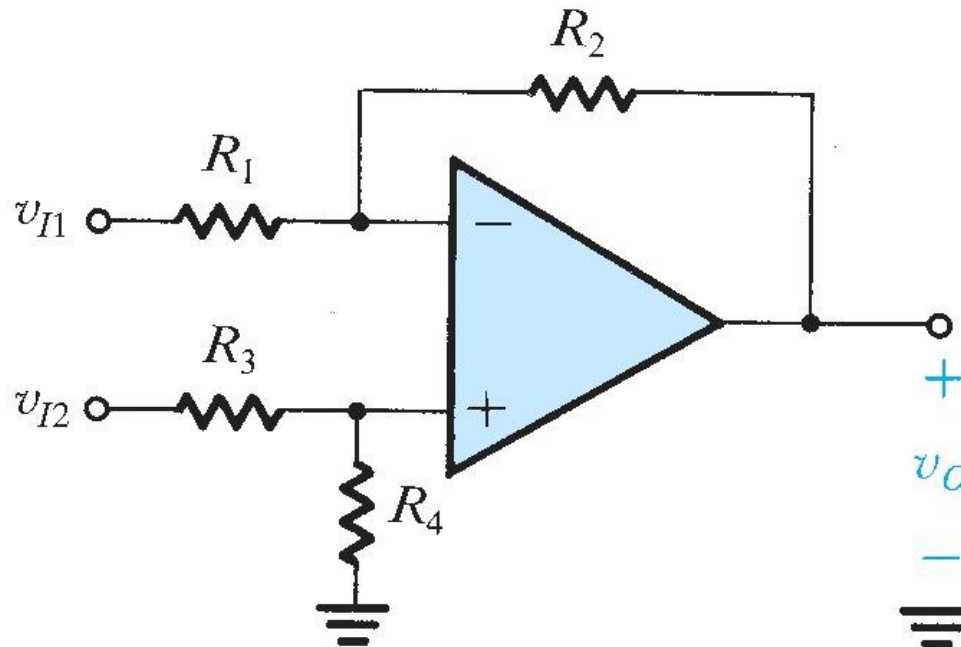
il guadagno, mantenendo  
il resto invariato.

il guadagno, mantenendo  
il resto invariato.

# Amplificatore differenziale – guadagno di modo comune

torniamo un passo indietro... ora  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$  non sono specificate per il principio di sovrapposizione degli effetti abbiamo che:

$$v_o = -v_{I1} \frac{R_2}{R_1} + v_{I2} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$



# Amplificatore differenziale – guadagno di modo comune

trasformiamo l'espressione della tensione di uscita utilizzando la definizione di segnale differenziale e segnale di modo comune:

$$v_o = -v_{I1} \frac{R_2}{R_1} + v_{I2} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$$v_{I1} = v_{Icm} - \frac{1}{2} v_{Id}$$

$$v_{I2} = v_{Icm} + \frac{1}{2} v_{Id}$$

$$v_o = -v_{Icm} \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2} v_{Id} \frac{R_2}{R_1} + v_{Icm} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \\ + \frac{1}{2} v_{Id} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

# Amplificatore differenziale – guadagno di modo comune

$$v_o = -v_{Icm} \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2} v_{Id} \frac{R_2}{R_1} + v_{Icm} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{2} v_{Id} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$A_{cm}$  guadagno di modo comune

$$v_o = v_{Icm} \left( \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{R_2}{R_1} \right) + v_{Id} \left( \frac{1}{2} \frac{R_4}{R_3 + R_4} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1} \right)$$

~~$A_{cm}$~~  guadagno differenziale

In questo particolare amplificatore, se  $R_2/R_1 = R_4/R_3$   $A_{cm} = 0$ ,  $A_d = R_2/R_1$  ma il rapporto tra resistenze deve essere assolutamente identico

# Fattore di reiezione di modo comune (CMRR)

$$v_o = A_d v_d + A_{cm} v_{cm}$$

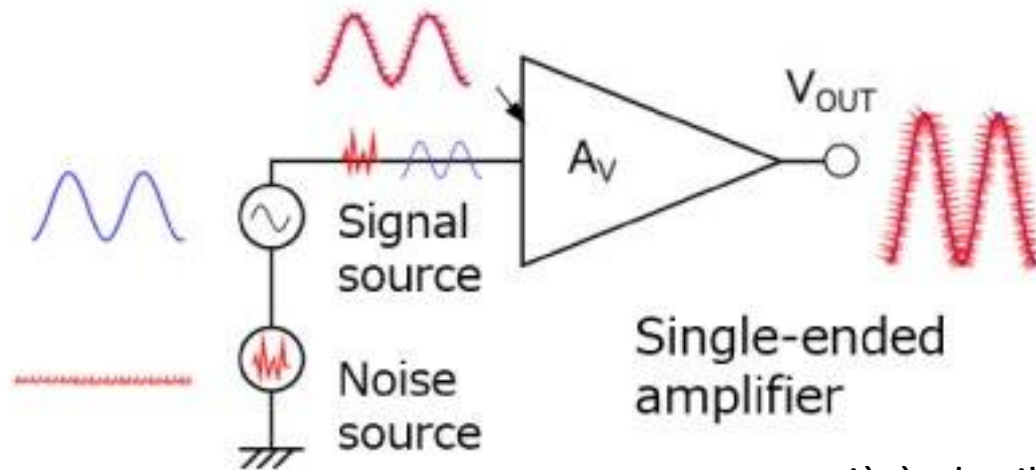
$$20 \log_{10} \frac{|A_d|}{|A_{cm}|} = CMRR \text{ (dB)} = \text{"Common Mode Rejection Ratio"}$$

Segnale di ingresso differenziale  $v_d = v_2 - v_1$  (differenza)

Segnale di ingresso di modo comune  $v_{cm} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$  (media dei due segnali)

L'unico modo per applicare all'amplificatore un segnale differenziale puro ( $v_d \neq 0$  con  $v_{cm} = 0$ ) è quello di porre  $v_2 = -v_1$ . In questo modo la media dei due segnali è nulla.

# Reiezione del rumore con amplificatore differenziale

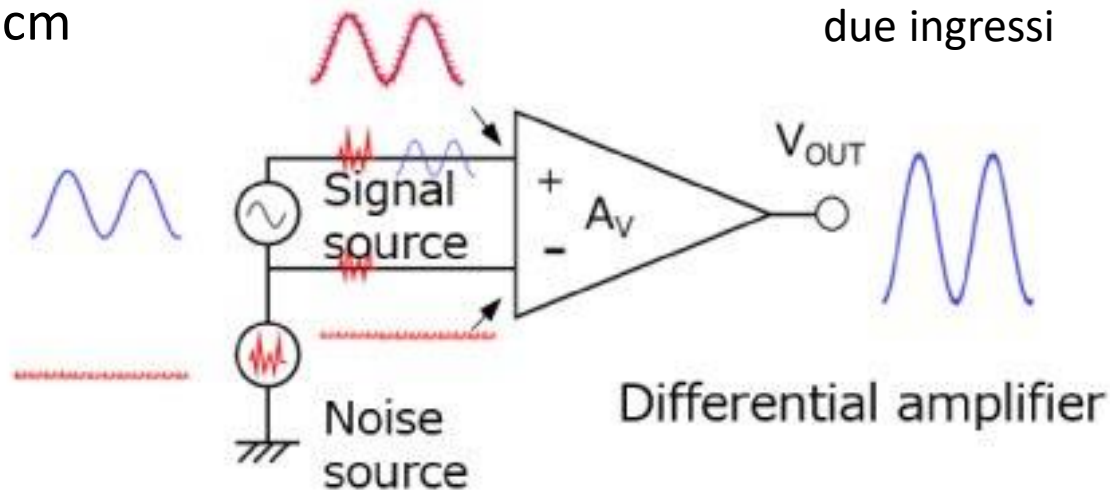


signal =  $v_d$

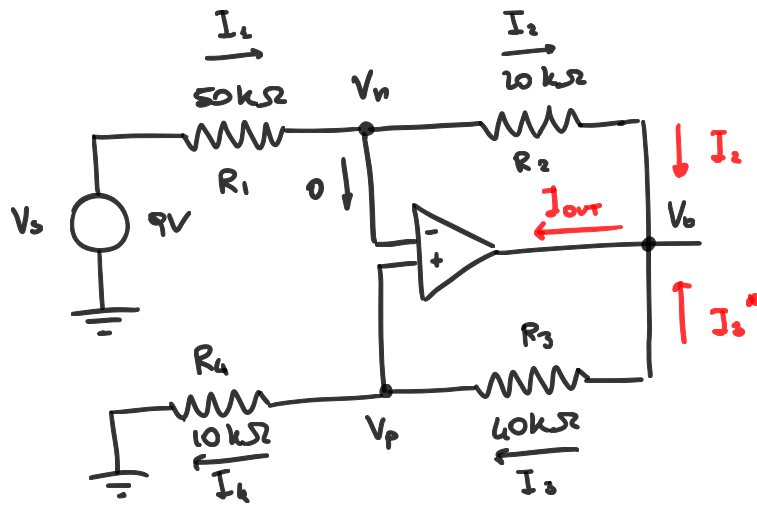
noise =  $v_{cm}$

Single-ended amplifier

più è alto il CMRR  
migliore è l'immunità  
a disturbi comuni ai  
due ingressi



Differential amplifier



$$I_1 = I_2 = \frac{V_s - V_n}{R_1}$$

$$V_o = V_n - I_2 R_2 = \frac{1}{5} V_o - \left( \frac{V_s - V_n}{R_1} \right) R_2$$

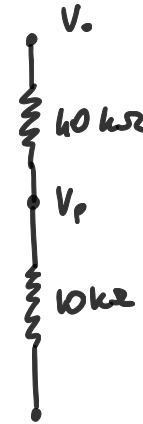
$$= \frac{V_o}{5} - V_s \frac{R_2}{R_1} + V_o \frac{R_2}{5R_1}$$

$$V_o \left( 1 - \frac{1}{5} - \frac{20}{250} \right) = -V_s \frac{2}{5}$$

$$V_o = -\frac{5}{9} V_s$$

$$A = V_o / V_s = -5/9$$

$$1) \quad V_p(V_o) = ?$$



$$V_p = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_o$$

$$= \frac{1}{5} V_o$$

$$V_n = V_p = \frac{1}{5} V_o$$

$$V_o = -\frac{5}{9} V_s$$

$$V_n = V_p = \frac{V_o}{5}$$

$$V_s = 9V$$

$$V_o = -5V$$

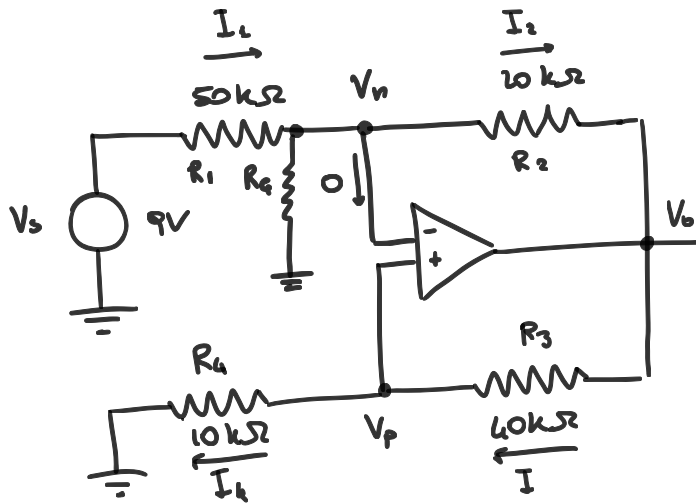
$$V_n = -1V$$

$$V_p = -1V$$

$$V_n - V_o = R_2 I_2 \rightarrow I_1 = I_2 = \frac{V_n - V_o}{R_2}$$

$$I_1 = I_2 = \frac{-1 + 5}{20} [\text{mA}] = 0.2 \text{ mA}$$

$$V_p - V_o = R_3 I_3 \rightarrow I_3 = \frac{V_p - V_o}{R_3} = -0.1 \text{ mA}$$



$$R_a = \frac{100}{9} \text{ k}\Omega$$

Cosa cambia?

Il ramo inferiore non cambia

$$V_p = V_o \frac{R_4}{R_4 + R_5} = \frac{V_o}{5} = V_n$$

$$I_1 = \frac{V_s - V_n}{50} \quad I_a = \frac{V_n}{R_a} = \frac{9}{100} V_n \rightarrow I_4 = \frac{9 V_o}{800}$$

$$I_2 = I_1 - I_4 = \frac{V_n - V_o}{20} = \frac{V_o}{100} - \frac{V_o}{20} = -\frac{V_o}{25}$$

$$\hookrightarrow I_1 = I_4 + I_2$$

$$I_1 = \frac{V_s - V_n}{50} \\ = V_s - \frac{V_o}{5} \cdot \frac{1}{50}$$

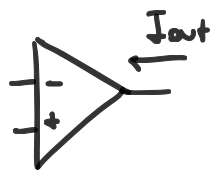
Applicando la resistenza  $R_{a1}$

il valore di  $V_o$  raddoppia

$$\underbrace{\frac{9}{50} - \frac{V_o}{250}}_{I_1} = \underbrace{\frac{9 V_o}{800} - \frac{4 V_o}{100}}_{I_4 + I_2}$$

$$\rightarrow V_o = -10V \rightarrow$$





⊕ : entrante

⊖ : uscente