2022-11-14

QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION (QAM)

Partiamo da due segnali ortogonali e andiamo a modificare le ampiezze di questi segnali ortogonali.

$$s_m(t) = \alpha_{m,I}\ h_{TX}(t)\ \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - \alpha_{m,Q}\ h_{TX}(t)\ \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

Con I: IN-PHASE e Q: QUADRATURE

$$\alpha_{m,I}, \alpha_{m,Q} \in \{\, 2l - L - 1\,\}$$

con $L = \sqrt{M}$ radice della cardinalità della costellazione
f_0 è la frequenza portante mentre φ_0 è la fase iniziale

Per

$$h_{TX}(t) = A\ rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$
$$s_m(t) = A\alpha_{m,I} cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - A\alpha_{m,Q} sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

$$per \qquad m = 1, \ldots, M \qquad t \in [0, T]$$

$$s_m(t) = 0 \qquad altrove$$

Se $f_0 >> \frac{1}{T}$

$$\text{Energia}\left[A sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) rect\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)\right] = \frac{T}{2} A^2$$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T \cancel{A^2}}} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \cancel{A} & t \in [0, T] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T\cancel{A^2}}}\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)\cancel{A} & t \in [0,T] \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Sotto opportune ipotesi:

Energia di $h_{TX}cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ è $\frac{E_{h_{TX}}}{2}$

BASE PER UNA QAM

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_{h_{TX}}}}\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)h_{TX}(t)$$

$$\phi_1(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_{h_{TX}}}}\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)h_{TX}(t)$$

$$E_h = E_{h_{TX}}$$

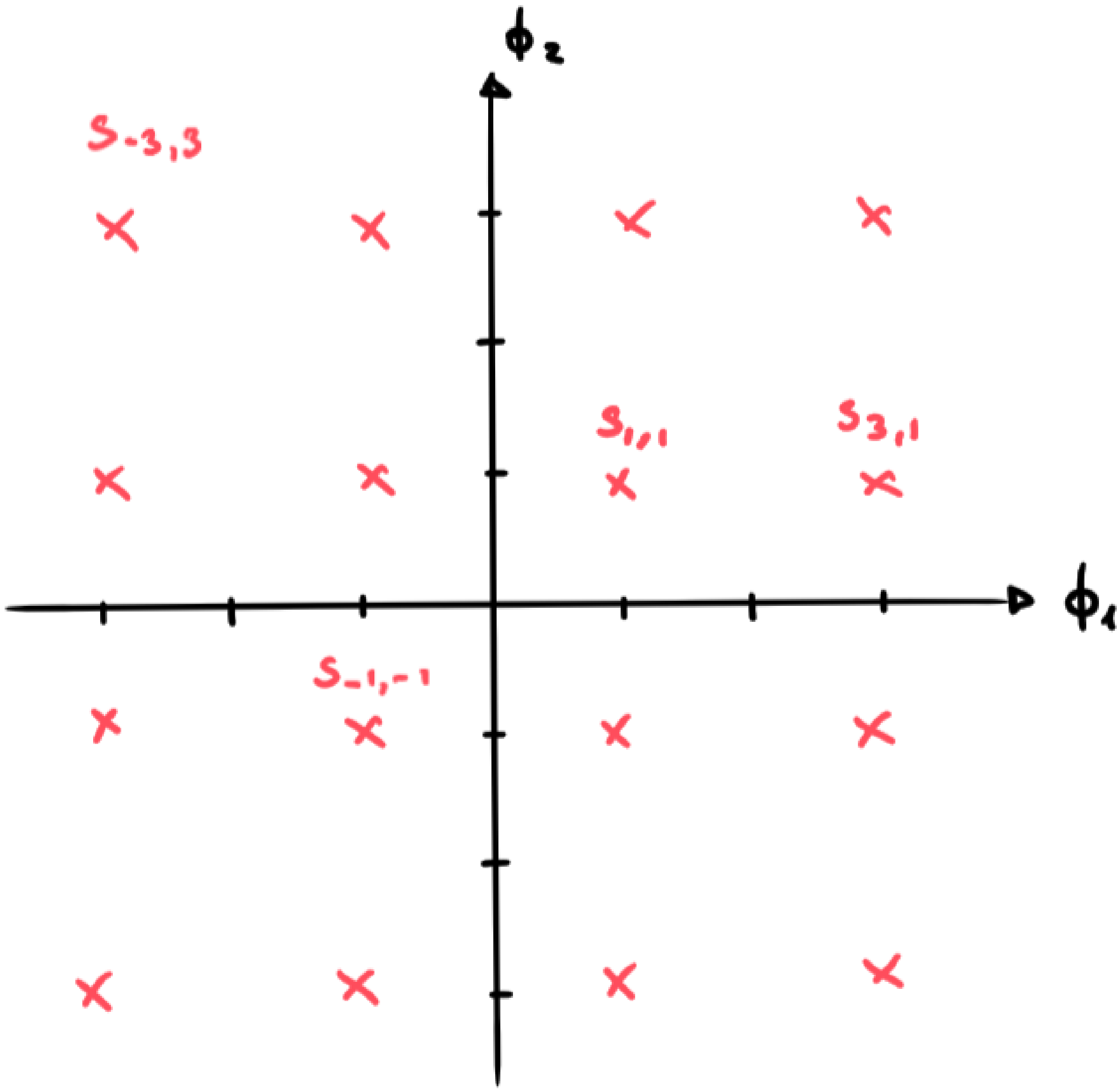
$$\alpha_{m.I}, \alpha_{m,Q} \in \left\{-1, 1\right\}$$

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{E_h}{2}}\alpha_{m,I}\phi_1(t) + \sqrt{\frac{E_h}{2}}\alpha_{m,Q}\phi_2(t)$$

$$\underline{s_m} = \left[\sqrt{\frac{E_h}{2}}\alpha_{m,I};\ \sqrt{\frac{E_h}{2}}\alpha_{m,Q}\right]$$

Coordinate simboli di una QAM

$$\underline{s_m} = \left[\sqrt{\frac{E_h}{2}}\alpha_{m,I};\ \sqrt{\frac{E_h}{2}}\alpha_{m,Q}\right]$$



ENERGIA MEDIA

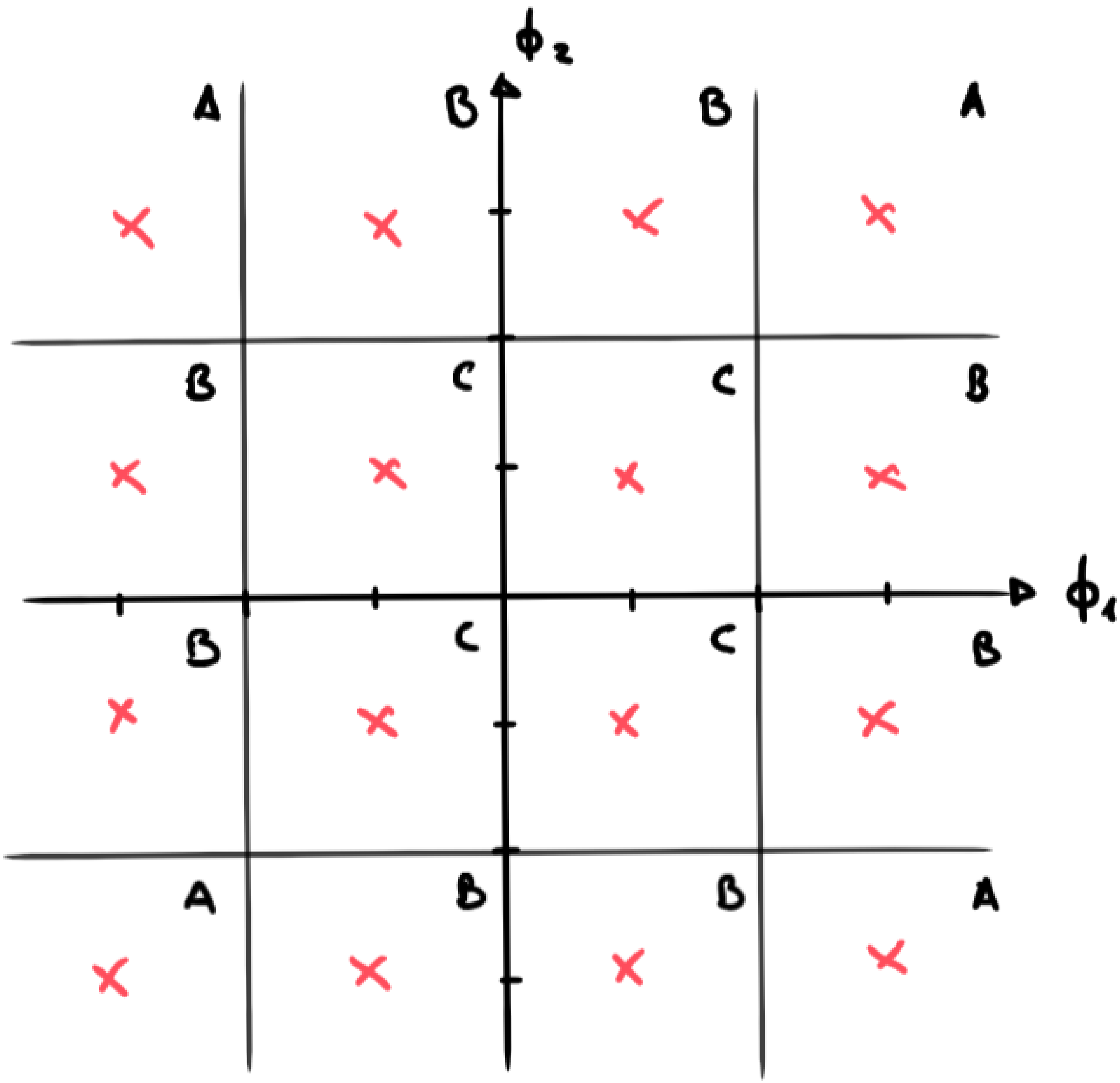
$$
\begin{aligned}
E_s &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\left[\left(\sqrt{\frac{E_h}{2}}\alpha_{m,I}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{E_h}{2}}\alpha_{m,Q}\right)^2\right] \\
&= \frac{E_h}{2M}\sum_{m=1}^{M}\left(\alpha_{m,I}^2+\alpha_{m,Q}^2\right) \\
&= \frac{M-1}{3}E_h
\end{aligned}
$$

Energia media

$$E_s = \frac{M-1}{3} E_h$$

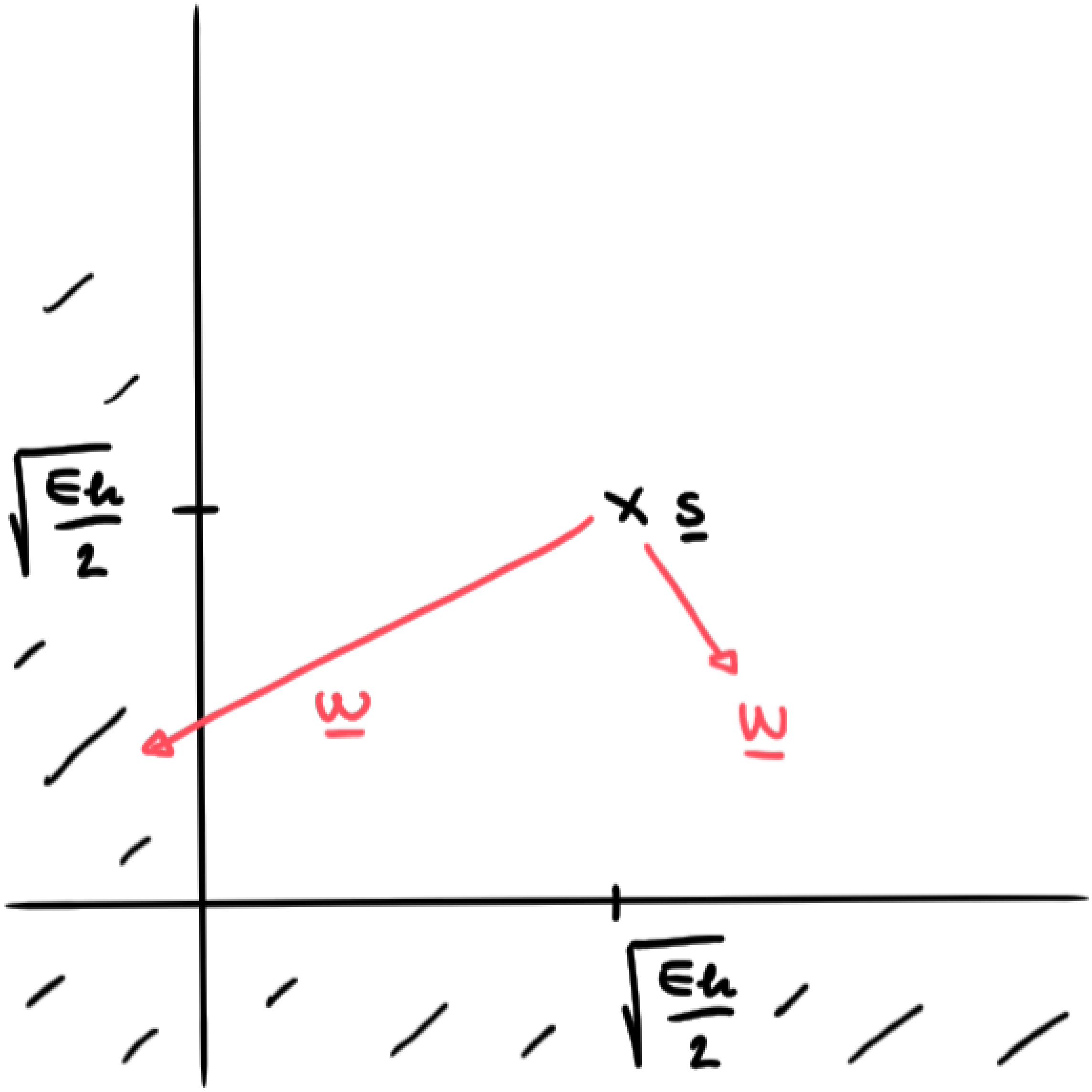
PROBABILITA D'ERRORE

Simboli equiprobabili con canale AWGN



Abbiamo 4 regioni di tipo A, 8 regioni di tipo B e 4 regioni di tipo C

Regioni di tipo A



$$P(C|a_0 = A) = P\left(w_1 > -\sqrt{\frac{E_h}{2}} \ \wedge \ w_2 > -\sqrt{\frac{E_h}{2}}\right)$$

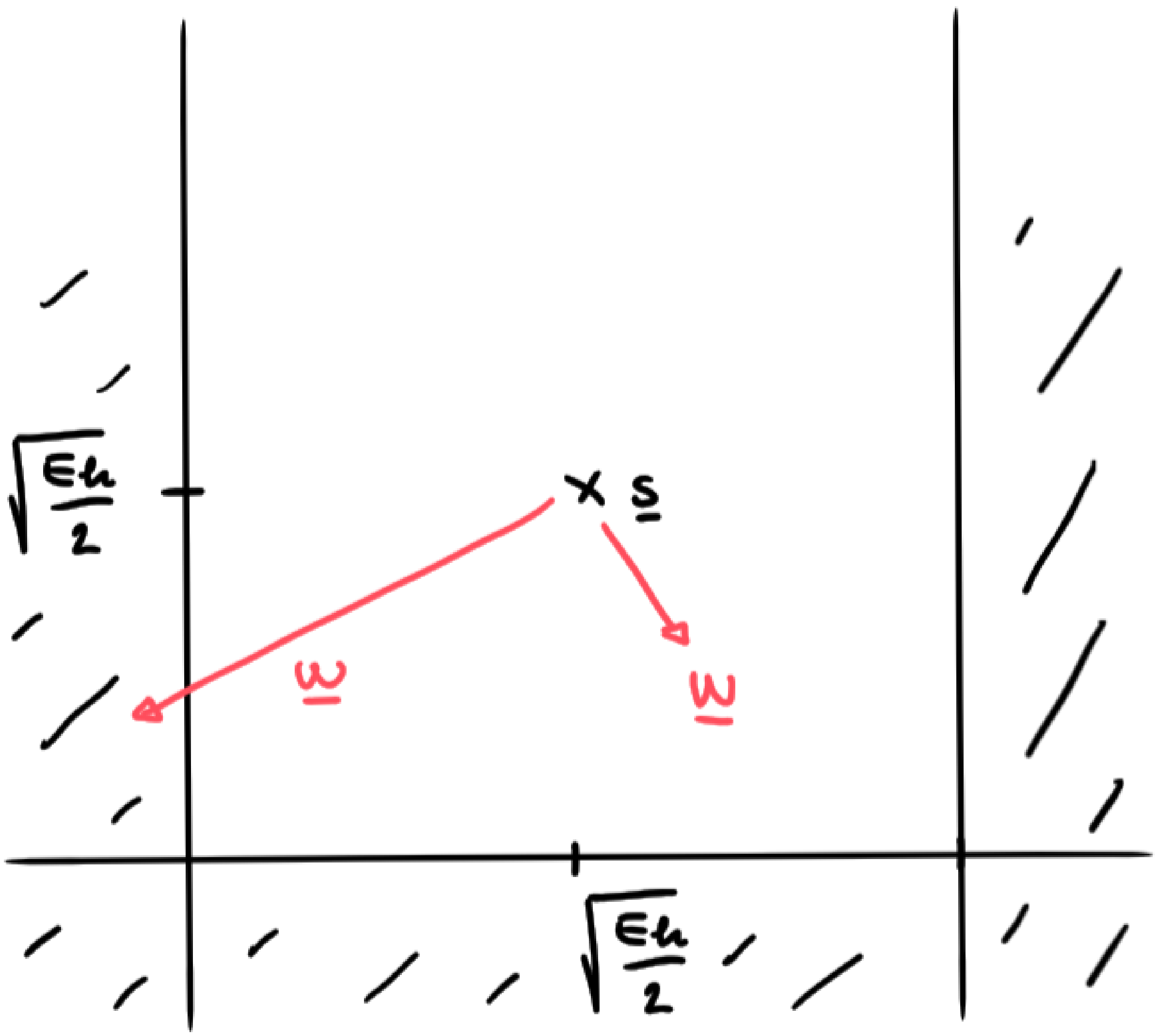
$$= \left[Q\left(-\frac{\sqrt{\frac{E_h}{2}}}{\sigma_I}\right)\right]^2$$

$$= \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right]^2$$

Probabilità di decisione corretta regione A

$$P(C|a_0 = A) = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right]^2$$

Regioni di tipo B

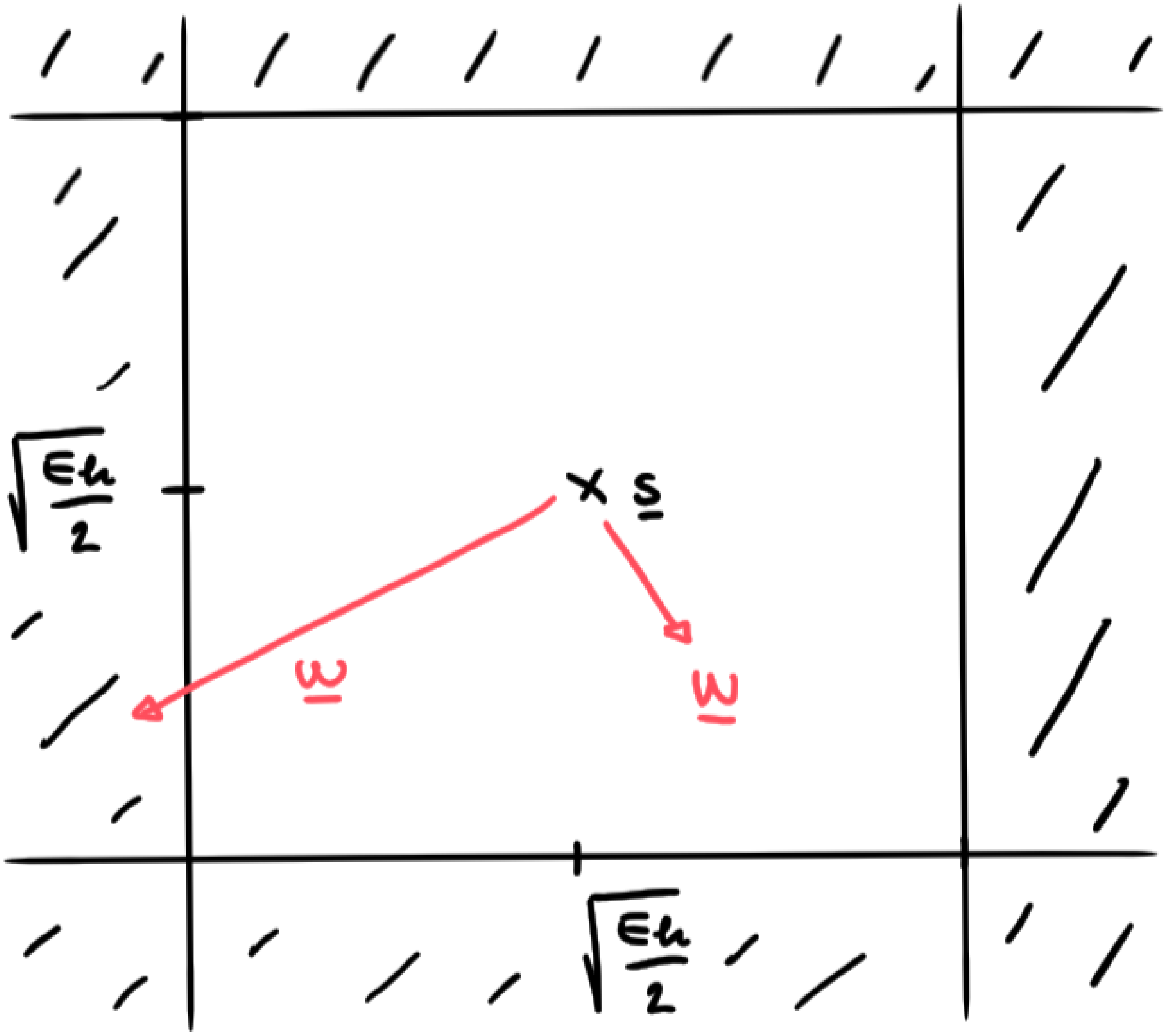


$$
\begin{aligned}
P(C|a_0 = B) &= P(w_1 > -\sqrt{\frac{E_h}{2}} \wedge |w_2| < \sqrt{\frac{E_h}{2}}) \\
&= Q\left(-\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\left(1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right) \\
&= \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right]\left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

♨ **Probabilità di decisione corretta regione B**

$$P(C|a_0 = B) = \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right]\left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right]$$

Regioni di tipo C



$$P(C|a_0 = C) = P(|w_1| < \sqrt{\frac{E_h}{2}} \wedge |w_2| < \sqrt{\frac{E_h}{2}})$$
$$= \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right]^2$$

$$
\begin{aligned}
P(E) &= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} P\Big(E|a_0=m\Big) \\
&= \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\Big[1-P\Big(C|a_0=m\Big)\Big] \\
&= 4\frac{L-1}{L}Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)-\left[2\frac{L-1}{L}Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right]^2
\end{aligned}
$$

Se Q è piccola, Q^2 è ancora più piccola, si può quindi ignorare.

$$
P(E) \leq 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3E_s}{(M-1)2\sigma_I^2}}\right)
$$

Probabilità di decisione corretta regione C

$$
P(E) \leq 4\left(1-\frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3E_s}{(M-1)2\sigma_I^2}}\right)
$$