PROBABILITÀ

V.A. DISCRETA

Densità di probabilità

$P_x(a) := P(X=a) \in [0,1]$ con $a \in A$

$P(x \in A) = \sum P_x(a)$

Valore atteso

$E[x] = \sum a P_x(a) =: m_x$

$E[\alpha x + \beta y] = \alpha E[x] + \beta E[y]$

Potenza statistica

$E[x^2] = \sum_a a^2 P_x(a) =: M_x$

Varianza

$E[(x-m_x)^2] =: \sigma_x^2$

Deviazione standard

$\sigma_x = \sqrt{E[(x-m_x)^2]}$

Relazione Potenza - media - varianza

$M_x = \sigma_x^2 + m_x^2$

V.A. CONTINUA

Funzione di distribuzione

$F_x(a) := P(x \le a)$

Densità di probabilità

$f_x(a) = \frac{d}{da}(F_x(a))$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(a)\, da = 1$

$P(x \in (A,B]) = \int_A^B f_x(a)\, da$

Valore atteso

$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} a f_x(a)\, da =: m_x$

Potenza statistica

$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 f_x(a)\, da =: M_x$

Varianza

$E[(x-m_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (a-m_x)^2 f_x(a)\, da =: \sigma_x^2$

Funzione di distribuzione di una Gaussiana normale

$P(x > a) = Q\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right)$

SEGNALI

Segnale analogico: segnale continuo con valori continui

Segnale digitale: segnale discreto con valori discreti

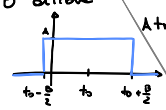
Rettangolo

$A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{B}\right) := \begin{cases} A & \text{per } t \in [t_0 - \frac{B}{2}; t_0 + \frac{B}{2}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Energia rettangolo

$s_1 = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{B}\right)$

$E(s_1) = A^2 B$



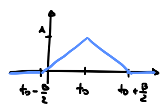
Triangolo

$A\,\mathrm{triang}\left(\frac{t-t_0}{\frac{B}{2}}\right) := \begin{cases} A\left(1 - \frac{|t-t_0|}{\frac{B}{2}}\right) & \text{per } t \in [t_0 - \frac{B}{2}; t_0 + \frac{B}{2}] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Energia triangolo

$s_1 = A\,\mathrm{triang}\left(\frac{t-t_0}{\frac{B}{2}}\right)$

$E(s_1) = \frac{A^2 B}{3}$



Energia di un segnale

$E(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\, dt$

$E(As) = A^2 E(s)$

$E(s(t-t_0)) = E(s)$

Potenza media

$M_s = \frac{E_s}{\Delta T}$ → intervallo considerato

$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$ $\quad \sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$

Spazi Vettoriali

Prodotto interno

$\langle s_1(t); s_2(t) \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t)\, dt$

$(\langle s_1(t); s_1(t) \rangle = E(s_1))$

Norma di un vettore

$\| s_1(t) \| := \sqrt{\langle s_1(t); s_2(t) \rangle} = \sqrt{E(s_1)}$

Segnali ortogonali

$\langle s_1(t); s_2(t) \rangle = 0 \Rightarrow s_1$ e s_2 sono ortogonali

Attenuazione

$10 \log\left(\frac{E_k'}{E_k}\right) = A$

$E_k' = 10^{\frac{A}{10}} E_k$

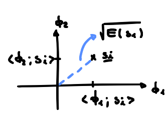
Metodo di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt

$\phi_1 = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E(s_1)}}$ (primo vettore della base)

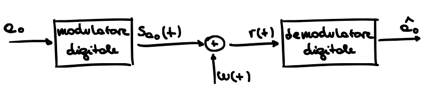
$\phi_k' = s_i(t) - \sum_j \langle \phi_j(t); s_i(t) \rangle \phi_j(t)$ $\quad \phi_k = \frac{\phi_k'}{\sqrt{E(\phi_k')}}$ (altri vettori della base)

Costellazione

$\underline{s_i} = (\langle \phi_1(t); s_i(t) \rangle ; \langle \phi_2(t); s_i(t) \rangle)$



Canale AWGN



$r(t) = s_{Tx}(t) + w(t)$

$w(t) = N(0; \sigma_w^2)$ → rumore normale con media 0 e varianza σ_w^2

$E[\langle w(t); \phi_i(t) \rangle] = 0$

$E[(\langle w(t); \phi_i(t) \rangle)^2] = \sigma_w^2$

$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} =: M_x$ → Potenza media statistica ($\frac{N_0}{2}$: PSD (Densità spettrale di potenza))

$E[v_i v_j] = \begin{cases} \sigma_w^2 & \text{se } i=j \\ \sigma_w^2 \langle \phi_i(t); \phi_j(t) \rangle = 0 & \text{se } i \ne j \end{cases}$

Convoluzione di due rect(t/T)

$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) * \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = T\,\mathrm{triang}\left(\frac{t}{T}\right)$

Trasmissione con canale a risposta impulsiva

segnalazione: $s_{Tx,1}(t-t_0)$; $s_{Tx,2}(t)$

canale con risposta impulsiva: $g_c(t) = A\delta(t) - B\delta(t-t_0')$

$s_1(t) = (s_{Tx,1} * g_c)(t) = A s_{Tx,1}(t-t_0) - B s_{Tx}(t-t_0-t_0')$

$s_2(t) = (s_{Tx,2} * g_c)(t) = A s_{Tx}(t) - B s_{Tx,2}(t-t_0')$

Probabilità di decisione corretta

$P(C) = P(\hat{a}_0 = a_0) = \sum_m P(\hat{a}_0 = a_0 | a_0 = m) P(a_0 = m)$

(probabilità che il segnale fosse a_0, avendo ricevuto $\hat{a}_0$; $P(a_0 = m)$: probabilità che fosse stato trasmesso quel segnale)

$= \sum_m \left(\int_{R_m} P(r | a_0 = m)\, dr \; P(a_0 = m) \right) = \sum_m \left(\int_{R'} \mu_m(r) P(r | a_0 = m)\, dr \; P(a_0 = m) \right)$

$= \int_{R'} \sum_m \mu_m(r) P(r | a_0 = m) P(a_0 = m)\, dr = \int_{R'} \sum_m \mu_m(r) D(r; m)\, dr$

Criteri di decisione del bit ricevuto

MAP

$\hat{a}_0 = \mathrm{argmax}_n\, D(r'; n) = \mathrm{argmax}_n\, P_{a_0|r}(n | r')$

ML (simboli equiprobabili)

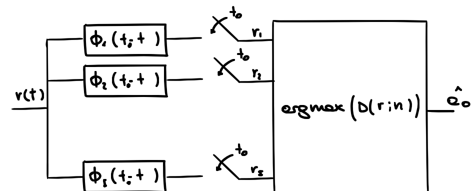
$\hat{a}_0 = \mathrm{argmax}_n\, D(r'; n) = \mathrm{argmax}_n\, P_{r|a_0}(r' | n)$

MD (simboli equiprobabili, canale AWGN)

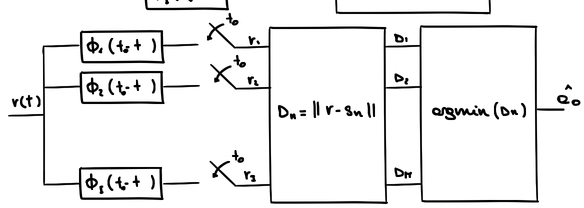
$\hat{a}_0 = \mathrm{argmin}_n\, d^2(r; s_n)$

Ricevitori digitali

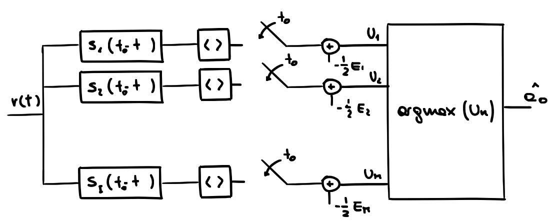
MAP - ML



MD - I



MD - II



Modulazione binaria

$I = 1: \begin{cases} \underline{s_1} = (\langle \phi_1(t); s_1(t) \rangle ; \langle \phi_2(t); s_1(t) \rangle) \\ \underline{s_2} = (\langle \phi_1(t); s_2(t) \rangle ; \langle \phi_2(t); s_2(t) \rangle) \end{cases}$ $\quad I = 1: \; s_2(t) = -s_1(t)$

Probabilità d'errore

$P(E)$ = sul simbolo = $P(\text{bit})$ = sul bit

$P(E) = Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right)$ → simboli equiprobabili in canale AWGN

Rapporto segnale-rumore

$\Gamma = \frac{E_s}{\sigma_I^2}$

Energia media di modulazione

$E_s := E[E_i] = \sum_i^I E_{s_i} P_a(i)$

Coefficiente di correlazione

$\rho = \frac{\langle s_1(t); s_2(t) \rangle}{\sqrt{E(s_1) E(s_2)}}$ → minore il coefficiente ⇓ maggiori le prestazioni

Se i segnali sono ortogonali: $\rho = 0$ $\quad (\langle s_1(t); s_2(t) \rangle = 0)$

Se i segnali sono antipodali: $\rho = -1$ $\quad (s_2(t) = -s_1(t))$

Se i segnali hanno la stessa energia: $\begin{cases} \underline{s_1} = [\sqrt{E_s}; 0] \quad \underline{s_2} = [\rho\sqrt{E_s}; \pm\sqrt{E_s}\sqrt{1-\rho^2}] \\ P(E) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s(1-\rho)}{2\sigma^2}}\right) \end{cases}$

Modulazione B-PSK

Ortogonale

$s_1(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t) h_{Tx}(t) & \text{per } t \in [0; T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$s_2(t) = \begin{cases} A\sin(2\pi f_0 t) h_{Tx}(t) & \text{per } t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Antipodale

$s_1(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t) h_{Tx}(t) & \text{per } t \in [0; T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$s_2(t) = \begin{cases} -A\cos(2\pi f_0 t) h_{Tx}(t) & \text{per } t \in [0; T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Modulazioni M-arie

Limite inferiore probabilità d'errore

$P(E) \ge \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M} Q\left(\frac{d_{min,m}}{2\sigma_I}\right)$

Limite superiore probabilità d'errore

$P(E) \le (M-1) Q\left(\frac{d_{min}}{2\sigma_I}\right)$

Modulazione ortogonale

$\frac{M+1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\sigma_I^2}}\right) \le P(E) \le (M-1) Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\sigma_I^2}}\right)$

Modulazione bi-ortogonale (metà ortogonali e metà antipodali)

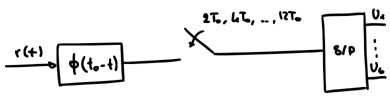
$\frac{M-1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\sigma_I^2}}\right) + \frac{1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\sigma_I^2}}\right) \le P(E) \le (M-2) Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\sigma_I^2}}\right) + Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\sigma_I^2}}\right)$

Pulse Position Modulation

la segnalazione consiste in un segnale ripetuto con ritardo

ES: $s_n(t) = A \,\mathrm{rect}\left(\frac{t-t_n}{T_0}\right), \quad n \in \{1, \dots, N\}$

Si può utilizzare uno schema come il seguente:

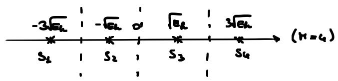


$$P(E) = (M-1)\,Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\sigma_z^2}}\right)$$

PAM

$s_m = \alpha_m h_{tx}(t) \qquad \alpha_m = 2m-1-M \qquad m \in [1, M]$

dim. base $I = 1 \qquad \phi_1 = \frac{h_{TX}(t)}{\sqrt{E_h}}$



Distanza tra due punti adiacenti $= 2\sqrt{E_h}$

Energia media $E_s = \frac{M^2-1}{3} E_h$

2 diverse regioni di decisione: $\begin{cases} P(E \mid E_{st}) = P(w > \sqrt{E_h}) = Q\left(\frac{\sqrt{E_h}}{\sigma_z}\right) \\ P(E \mid int) = P(|w| < \sqrt{E_h}) = 2Q\left(\frac{\sqrt{E_h}}{\sigma_z}\right) \end{cases}$

$$P(E) = 2\,\frac{M-1}{M}\,Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{\sigma_z^2}}\right) = 2\,\frac{M-1}{M}\,Q\left(\sqrt{\frac{3E_s}{(M^2-1)\sigma_z^2}}\right)$$

Utilizziamo la mappatura di Grey $\rightarrow \qquad P_{bit} = \frac{P(E)}{\log_2(M)}$

QAM

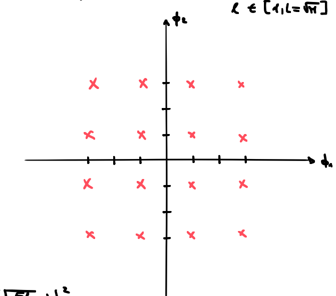
$s_m(t) = \alpha_{m,I}\, h_{tx}(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) - \alpha_{m,Q}\, h_{tx}(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$

$\alpha_{m,I}, \alpha_{m,Q} = 2\ell - 1 - L, \quad \ell \in [1, L = \sqrt{M}]$

Base della QAM

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_h}}\, h_{TX}(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_h}}\, h_{TX}(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$



Simboli $\quad s_m = \left[\sqrt{\frac{E_h}{2}}\,\alpha_{m,I} \,;\, \sqrt{\frac{E_h}{2}}\,\alpha_{m,Q}\right]$

Energia media $\quad E_s = \frac{M-1}{3} E_h$

Regioni di decisione

A) simboli agli angoli $\qquad P(C|A) = \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_z^2}}\right)\right)^2$

B) simboli laterali $\qquad P(C|B) = \left(1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_z^2}}\right)\right)\left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_z^2}}\right)\right)$

C) simboli centrali $\qquad P(C|C) = \left(1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_z^2}}\right)\right)^2$

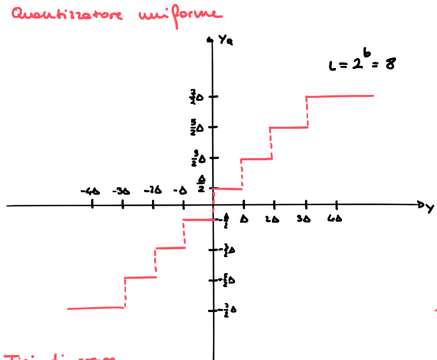
$$P(E) = 4\left(1 - \frac{1}{L}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3/2}{M-1}\,\frac{E_s}{\sigma_z^2}}\right)$$

Utilizziamo la mappatura di Grey $\rightarrow \qquad P_{bit} = \frac{P(E)}{\log_2(M)}$

Quantizzazione

Processo che trasforma $Y(kT) \in \mathbb{R}$ in $Y_Q(kT) \in A$ alfabeto di valori discreti

Quantizzatore uniforme

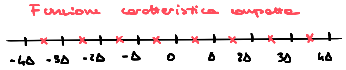


Δ = passo di quantizzazione

L = n° di livelli $= 2^b$ | b n° bit

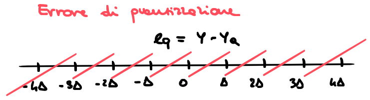
per $|Y| > \frac{L}{2}\Delta$ vi c'è saturazione ($Y = V_{sat}$)

Funzione caratteristica compatta



Errore di quantizzazione

$e_q = Y - Y_Q$



Tipi di errore

- Granulare $\quad Y \in [-V_{sat}; V_{sat}] \quad \rightarrow \quad \Delta = \frac{2V_{sat}}{L}$
- Saturazione $\quad Y \notin [-V_{sat}; V_{sat}] \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \text{se } Y \text{ limitata scelgo } A = V_{sat} \quad (Y \in [-V_{sat}; V_{sat}]) \\ \text{se } Y \text{ non limitata scelgo } V_{sat} \text{ minima che permetta } P(Y \notin [-V_{sat}; V_{sat}]) < P_{sat} \end{cases}$

$\qquad P(Y \notin [-V_{sat}; V_{sat}]) = 2Q\left(\frac{V_{sat}}{\sigma_Y}\right)$

↳ Data

Errore quadratico medio

$$E[e_q^2] = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} P_{eq}(e)\, e^2\, de = \frac{\Delta^2}{12}$$

Rapporto segnale - rumore

$$\Lambda_Q = \frac{E[Y^2]}{E[e_q^2]} = \frac{E[Y^2]}{\frac{\Delta^2}{12}} \Rightarrow (\Lambda_Q)_{dB} = 10 \log(\Lambda_Q)$$

$$\Delta = \frac{2V_{sat}}{L} = 2^{1-b} V_{sat}$$

$$= 20 \log\left(\frac{\sigma_Y}{V_{sat}}\right) + 4{,}77 + 6{,}02\, b$$

↳ aumentare di 1 bit, aumenta di 6 l'SNR

Rapporto segnale - rumore segnale sinusoidale

$$(\Lambda_q)_{dB} = 6.02\, dB + 1.76$$

Trasformazione di un segnale

$$\tilde{s} = \frac{s(t) - \frac{\max(s(t)) - \min(s(t))}{2}}{\frac{\max(s(t)) - \min(s(t))}{2}} \Rightarrow V_{sat} = 1$$

Quantizzatore non uniforme

Considerare un quantizzatore non uniforme a 4 livelli con una soglia a 0, una a valore positivo e una a valore negativo

Trovare i valori delle soglie, in modo che i quattro valori quantizzati si presentino all'uscita del quantizzatore con la stessa probabilità

(I campioni sono realizzazioni indipendenti di una gaussiana con var. σ_x^2

$$P(x \in [0; v_1]) = \frac{1}{4}$$

$$Q(0) - Q(v_1) = \frac{1}{4}$$

↳ $\frac{1}{2}$

$$Q(v_1) = \frac{1}{4}$$

Per simmetria della gaussiana, $v_2 = -v_1$

Gli intervalli di quantizzazione sono $]-\infty; v_2]$

$[v_2; 0]$

$[0; v_1]$

$[v_1; +\infty[$