

09/02/2021 Fondamenti di Elettronica – esame su tutto il programma: 6 esercizi da risolvere in 3 ore.

Esercizio 1

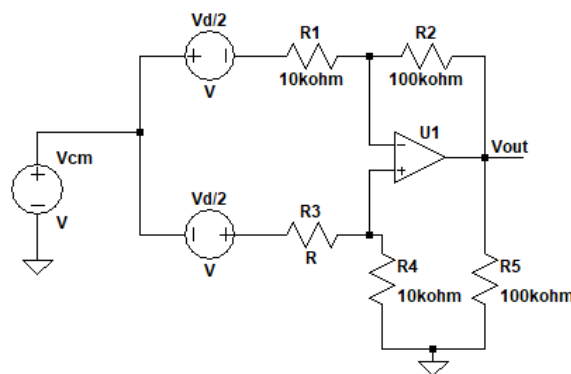
Nel circuito in figura, l'amplificatore operazionale U1 è ideale.

1.1 Trovare il valore di R per il quale il guadagno di modo comune A_{cm} vale 0 ($A_{cm} = V_{out}/V_{cm}$ con $V_d=0$).

1.2 Con il valore di R trovato al punto 1.1, calcolare il guadagno differenziale $A_d = V_{out}/V_d$

1.3 Con il valore di R trovato, quanto vale la resistenza di ingresso differenziale ?

1.4 Se $R = 50 \text{ kohm}$, quanto valgono A_d e A_{cm} ?



Soluzione

1.1 Utilizzo il principio di sovrapposizione degli effetti. Sia V_1 la tensione applicata alla resistenza R_1 e V_2 quella applicata alla resistenza R_3

Con $V_2 = 0$, l'ingresso non invertente è a massa. $V'_{out} = -(R_2/R_1) \cdot V_1$

Con $V_1 = 0$ $V''_{out} = V_+(1+R_2/R_1)$ (configurazione non invertente) ma $V_+ = V_2 \cdot (R_4/(R_3+R_4))$, quindi

$$V_{out} = V_2 \cdot (R_4/(R_3+R_4)) \cdot (1+R_2/R_1)$$

$$\text{Quindi } V_{out} = V'_{out} + V''_{out} = V_2 \cdot (R_4/(R_3+R_4)) \cdot (1+R_2/R_1) - (R_2/R_1) \cdot V_1 = A_2 V_2 + A_1 V_1$$

$$A_d = (A_2 - A_1)/2; A_{cm} = (A_1 + A_2)/2$$

$A_{cm} = -(R_2/R_1) + (R_4/(R_3 + R_4)) \cdot (1 + R_2/R_1)$. Perchè questa quantità sia nulla, deve essere

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4}\right) \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) =$$

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \left(\frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1(R_3 + R_4)}\right)$$

$$\left(\frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_1}\right) = \left(\frac{R_4(R_1 + R_2)}{R_1}\right)$$

$$R_2 R_3 + R_2 R_4 = R_4 R_1 + R_2 R_4$$

$$R_2 R_3 = R_4 R_1$$

$$\left(\frac{R2}{R1}\right) = \left(\frac{R4}{R3}\right)$$

Nel caso specifico, abbiamo $R2/R1 = 10$, $R4 = 10 \text{ k}\Omega$, quindi $R3 = 1 \text{ k}\Omega$. Nel caso generale, la condizione $A_{cm} = 0$ può essere ottenuta ponendo $R2=R4$ e $R1=R3$

$$\text{Inoltre } 2A_d = \left(\frac{R4(R1+R2)}{R1(R3+R4)}\right) + \left(\frac{R2}{R1}\right) = \left(\frac{R4(R1+R2)+R2(R3+R4)}{R1(R3+R4)}\right)$$

nella condizione per la quale $A_{cm} = 0$, si ha

$$2A_d = \left(\frac{R4(R1+R2)+R2(R3+R4)}{R1(R3+R4)}\right) = \left(\frac{R2(R1+R2)+R2(R1+R2)}{R1(R1+R2)}\right) = 2 \left(\frac{R2(R1+R2)}{R1(R1+R2)}\right) = 2 \left(\frac{R2}{R1}\right)$$

ovvero $A_d = R2/R1$ cioè $V_{out} = (R2/R1)(V2 - V1)$

Nel caso specifico deve essere

$$\begin{aligned} \left(\frac{100}{10}\right) &= \left(\frac{10(10 + 100)}{10(R3 + 10)}\right) \\ (10) * 10(R3 + 10) &= 10(10 + 100) \\ 10(R3 + 10) &= (10 + 100) \\ 10(R3 + 10) &= (10 + 100) \\ 10R3 + 100 &= 10 + 100 \end{aligned}$$

che fornisce $R3 = 1 \text{ k}\Omega$ (essendo le resistenze tutte espresse in $\text{k}\Omega$)

1.2 $A_d = 10 \text{ V/V}$

1.3 Applichiamo un generatore differenziale v_d tra gli ingressi e poniamo $V2 = 0$; quindi $V1 = v_d$;

$v_d - i_{in}R1 = V_-$.

$V_+ - i_{in}R3 = 0$; $V_+ = i_{in}R3 = V_-$.

quindi $v_d - i_{in}R1 = i_{in}R3$, cioè $v_d = i_{in}(R1 + R3)$ e la resistenza differenziale di ingresso vale $R1+R3$.

1.4 Se $R3 = 50 \text{ k}\Omega$, si ha

$$\begin{aligned} A_{cm} &= -\left(\frac{R2}{R1}\right) + \left(\frac{R4}{R3 + R4}\right) * \left(1 + \frac{R2}{R1}\right) = -\left(\frac{100}{10}\right) + \left(\frac{10}{50 + 10}\right) * \left(1 + \frac{100}{10}\right) = -10 + \frac{1}{6} * 11 \\ &= -10 + 1,833 = -8.16 \text{ V/V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_d &= \left(\frac{R4(R1 + R2) + R2(R3 + R4)}{2R1(R3 + R4)}\right) = \left(\frac{10(10 + 100) + 100(50 + 10)}{20(50 + 10)}\right) = \left(\frac{1100 + 6000}{1200}\right) \\ &= 5.92 \text{ V/V} \end{aligned}$$

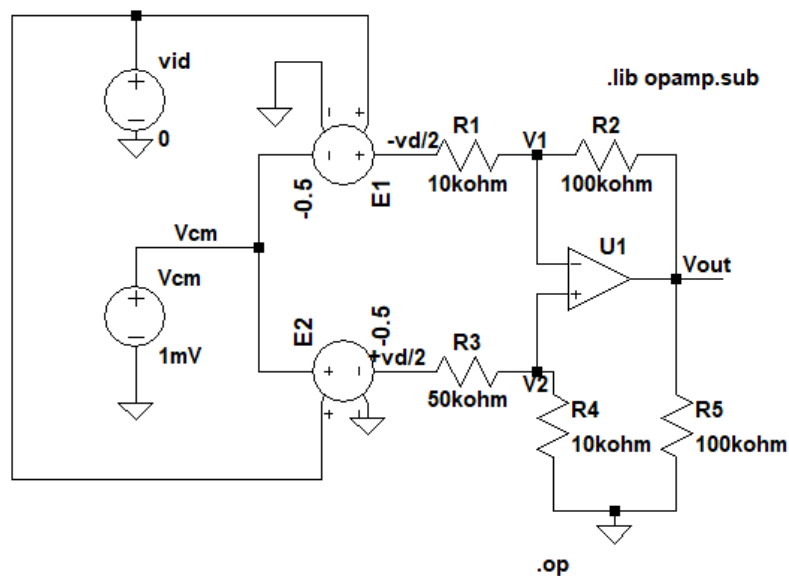


Figura: Circuito per la simulazione del guadagno di modo comune A_{cm} e del guadagno differenziale A_d .

--- Operating Point ---

```

V(vout):      -0.00816577    voltage
V(v2):        0.000166667    voltage
V(v1):        0.000166748    voltage
V(-vd/2):     0.001          voltage
V(+vd/2):     0.001          voltage
V(vcm):       0.001          voltage
V(n001):      0              voltage
I(R5):        -8.16577e-008   device_current
I(R4):        1.66667e-008    device_current
I(R3):        1.66667e-008    device_current
I(R1):        8.33252e-008    device_current
I(R2):        8.33252e-008    device_current
I(E2):        1.66667e-008    device_current
I(E1):        -8.33252e-008   device_current
I(Vid):       0              device_current
I(Vcm):       -9.99918e-008   device_current
Ix(u1:3):     1.64983e-007    subckt_

```

Punto operativo del circuito con una tensione di ingresso di modo comune pari a 1mV.

--- Operating Point ---

```

V(vout):      0.00591602     voltage
V(v2):        8.33333e-005    voltage
V(v1):        8.32742e-005    voltage
V(-vd/2):     -0.0005        voltage
V(+vd/2):     0.0005         voltage
V(vcm):       0              voltage
V(n001):      0.001          voltage
I(R5):        5.91602e-008    device_current
I(R4):        8.33333e-009    device_current
I(R3):        8.33333e-009    device_current
I(R1):        -5.83274e-008   device_current
I(R2):        -5.83274e-008   device_current
I(E2):        8.33333e-009    device_current
I(E1):        5.83274e-008    device_current
I(Vid):       0              device_current

```

I (Vcm) : 4.99941e-008 device_current
 Ix (u1:3) : -1.17488e-007 subckt_

Punto operativo del circuito con una tensione di ingresso differenziale pari a 1mV.

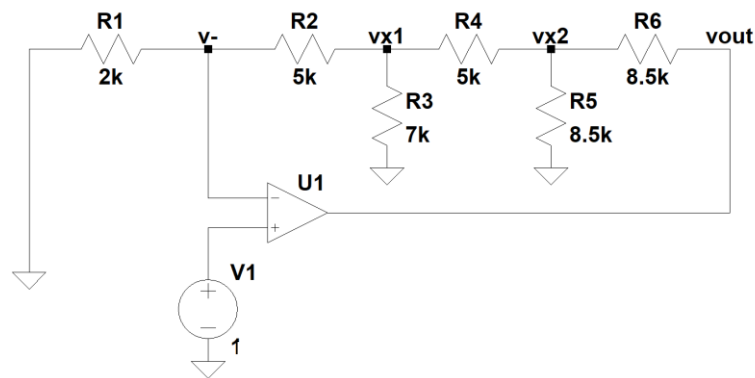
Esercizio 2

Dato il circuito in figura, nel quale U1 rappresenta un amplificatore operazionale ideale,

2.1 trovare l'espressione della tensione vx1 in funzione della tensione V1;

2.2 trovare l'espressione della tensione vx2 in funzione della tensione V1;

2.3 trovare l'espressione della tensione vout in funzione della tensione V1;



2.1 Per il principio di massa virtuale, il nodo v- si trova alla tensione V1, e la corrente che scorre da v- a massa nella resistenza R1 è data da $i_1 = V1/R1 = V1/2$ [mA]. La stessa corrente scorre anche in R2. Di conseguenza vx1 è dato da $V1 + i_2 \cdot R2 = V1 + i_1 \cdot R2 = V1 + 5 \cdot 0.5V1 = 3.5V1$

2.2 La corrente che scorre in R4 è data dalla somma delle correnti in R2 e R3. La corrente in R2 è $V1/R1 = V1/2$; la corrente in R3 è $vx1/R3 = 3.5V1/7 = V1/2$. Quindi la corrente totale i4 è pari al valore V1 in mA. Quindi $vx2 = vx1 + i_4 \cdot R4 = 3.5V1 + 5V1 = 8.5V1$.

2.3 La corrente che scorre in R6 è data dalla somma della corrente in R4 e di quella in R5, ovvero $V1$ [mA] + $i_5 = V1 + 8.5V1/8.5V1 = 2V1$ [mA]. La tensione vout è $vx2 + 8.5 \cdot i_6 = 8.5V1 + 2 \cdot 8.5V1 = 25.5V1$. L'uscita dell'amplificatore operazionale assorbe una corrente pari a $2V1$ [mA].

In forma analitica, senza esplicitare i valori di R1, R2, R3, R4, R5, R6

$$v_{x1} = V1 + V1 \frac{R2}{R1}$$

$$v_{x2} = v_{x1} + v_{x1} \frac{R4}{R3} + V1 \frac{R4}{R1}$$

$$v_{x2} = V1 + V1 \frac{R2}{R1} + V1 \frac{R4}{R1} + V1 \frac{R4}{R3} + V1 \frac{R2 R4}{R1 R3}$$

$$v_{out} = v_{x2} + \left(i_4 + \frac{v_{x2}}{R5} \right) R6 = v_{x2} + \left(i_4 R6 + v_{x2} \frac{R6}{R5} \right)$$

$$v_{out} = V1 + V1 \frac{R2}{R1} + V1 \frac{R4}{R1} + V1 \frac{R4}{R3} + V1 \frac{R2 R4}{R1 R3} + \left[\frac{V1}{R1} + \frac{V1 + V1 \frac{R2}{R1}}{R3} \right] R6 +$$

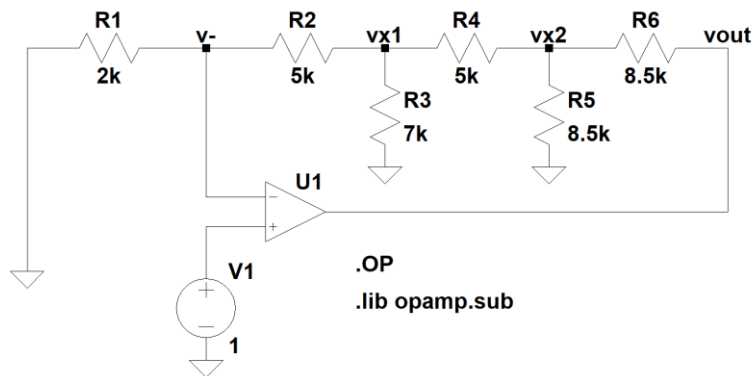
$$+ V1 \frac{R6}{R5} + V1 \frac{R2 R6}{R1 R5} + V1 \frac{R4 R6}{R1 R5} + V1 \frac{R4 R6}{R3 R5} + V1 \frac{R2 R4 R6}{R1 R3 R5}$$

$$\frac{v_{out}}{V1} = 1 + \frac{R2}{R1} + \frac{R4}{R1} + \frac{R4}{R3} + \frac{R2 R4}{R1 R3} + \frac{R6}{R1} + \frac{R6}{R3} + \frac{R2 R6}{R1 R3} + \frac{R6}{R5} + \frac{R2 R6}{R1 R5} + \frac{R4 R6}{R1 R5} + \frac{R4 R6}{R3 R5} + \frac{R2 R4 R6}{R1 R3 R5}$$

nel nostro caso

$$1 + 5/2 + 5/2 + 5/7 + 25/14 + 8.5/2 + 8.5/7 + (5 \cdot 8.5/2 \cdot 7) + 1 + (5 \cdot 8.5/2 \cdot 8.5) + (5 \cdot 8.5/2 \cdot 8.5) + (5 \cdot 8.5/7 \cdot 8.5) + (5 \cdot 5 \cdot 8.5)/(2 \cdot 7 \cdot 8.5) =$$

$$1 + 2.5 + 2.5 + 0.714 + 1.786 + 4.25 + 1.214 + 3.036 + 1 + 2.5 + 2.5 + 0.714 + 1.786 = 25.5$$



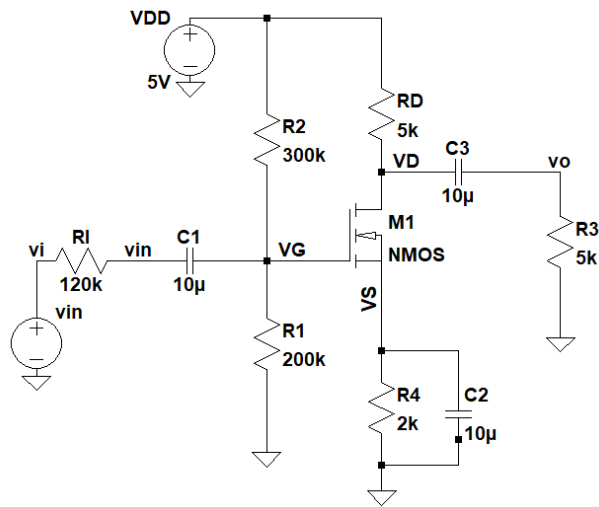
--- Operating Point ---

```

V(vx1):      3.5      voltage
V(v-):       1        voltage
V(vx2):      8.5      voltage
V(vout):     25.5     voltage
V(n001):     1        voltage
I(R6):       0.002    device_current
I(R5):       0.001    device_current
I(R4):       0.001    device_current
I(R3):       0.0005   device_current
I(R1):       0.0005   device_current
I(R2):       0.0005   device_current
I(V1):       0        device_current
Ix(u1:3):    -0.0020002 subckt_current

```

Si noti come il circuito sia stato progettato in modo che la corrente che scorre nelle resistenze raddoppi ogni volta che si passa da R2 a R4 e da R4 a R6.



Esercizio 3

Nel circuito in esame, il transistor ha $V_T = 0.5\text{ V}$, e $\lambda = 0$ la corrente di drain del transistor è pari a 0.25 mA .

3.1 Qual è il valore di k_n del transistor ?

Calcolo V_{GS} :

$$V_G = 5V \cdot (R_1 / (R_1 + R_2)) = 5 \cdot 200 / 500 = 2\text{ V}$$

$$V_S = I_D \cdot R_4 = 0.25 \cdot 2 = 0.5\text{ V}$$

$$V_{GS} = 2V - 0.5V = 1.5V; V_{OV} = V_{GS} - V_T = 1.5V - 0.5V = 1V$$

$$V_{OV}^2 = 1\text{ V}^2;$$

$$\text{Calcolo } k_n = 2I_D / V_{OV}^2 = 0.5\text{ mA/V}^2.$$

3.2. Qual è il guadagno in tensione v_o/v_i ? (attenzione vi non vin)

Calcolo la resistenza di ingresso

$$R_{in} = R_1 // R_2 = (R_1 R_2 / (R_1 + R_2)) = 60000 / 500 = 120\text{ k}\Omega$$

La resistenza di uscita vale $R_D = 5\text{ k}\Omega$

Il guadagno in tensione A_v senza effetti di carico in ingresso o in uscita è dato da $-g_m R_D$

$$g_m = k_n V_{OV} = 0.5 \cdot 1 = 0.5\text{ mA/V}$$

$$A_v = -0.5 \cdot 5 = -2.5\text{ V/V}$$

$$\text{Il guadagno complessivo } A'_v = v_o/v_i = v_o/v_{in} \cdot v_{in}/v_i = -g_m R_D \cdot (R_D / (R_D + R_L)) \cdot (R_{in} / (R_i + R_{in})) = -2.5 \cdot (1/2) \cdot (1/2) = -0.625$$

3.3 Quanto vale la resistenza di ingresso ? $R_{in} = 120\text{ k}\Omega$

3.4 Qual è il massimo valore della resistenza di drain per il quale il transistor si trova ancora in saturazione ?

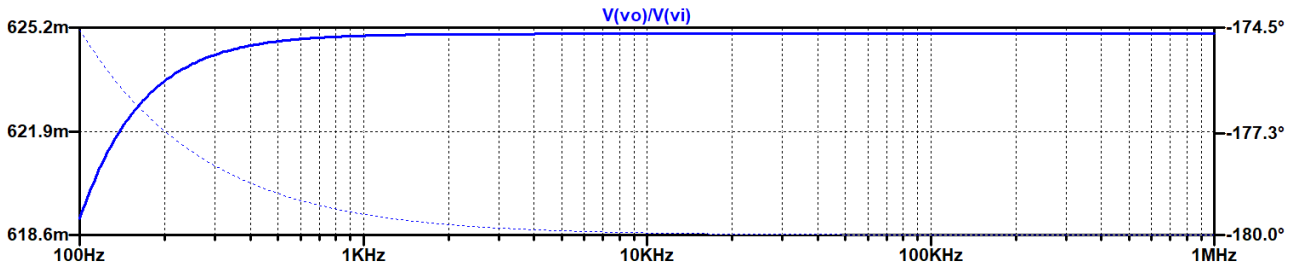
Il valore di R_D influenza la tensione V_D ma non la corrente ($\lambda=0$).

La condizione di saturazione è data da $V_D = V_G - V_T$ ($V_S = I_D R_S$ e rimane costante al variare di R_D)

Quindi $V_{DD} - I_D R_D = V_G - V_T$; $5 - 0.25 * R_{Dmax} = 2V - 0.5V$;

$$5V - 2V + 0.5V = 0.25 R_{Dmax}$$

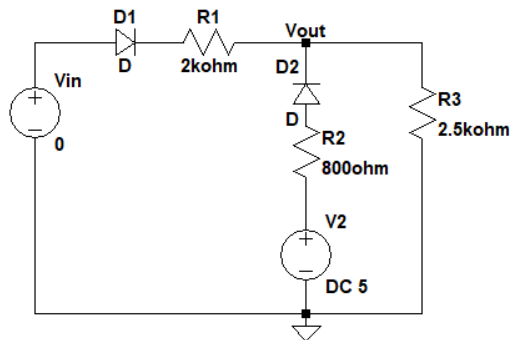
$$R_{Dmax} = 3.5 / 0.25 = 14k\Omega$$



Simulazione LTSpice del guadagno in tensione dell'amplificatore

Esercizio 4

Nel circuito in figura, i diodi hanno resistenza serie nulla e tensione di ginocchio di 1 V. Con V_i che va da -10V a +10V, e $V_2 = 5$ V



4.1 Identificare le condizioni di accensione di D1 e D2

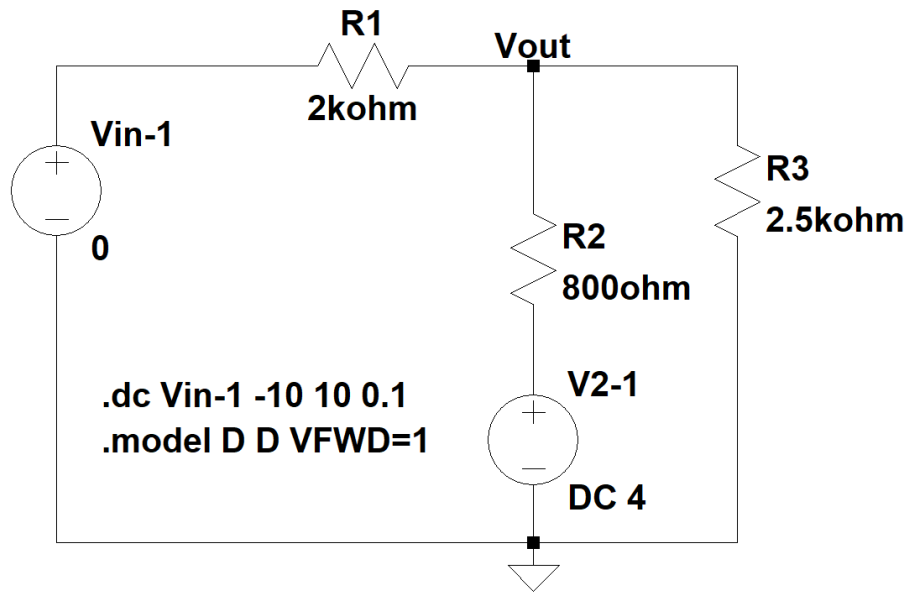
Il generatore V_2 tende a portare in diretta D2 e in inversa D1. Finché V_{in} è negativa, D1 sarà certamente OFF e la corrente attraverso D1 e R1 sarà nulla. D2 è ON e la corrente che lo attraversa vale

$$(V_2 - V_\gamma) / (R_2 + R_3) = 5 - 1 / 3.3k\Omega = 4 / 3.3 = 1.21 \text{ mA}$$

Quindi $V_{out} = 1.21 * 2.5 = 3.025$ V, costante

Quando V_{in} supera $3.025V + V_\gamma$, il diodo D1 va in diretta. Questo avviene quindi per $V_i > 4.025$ V.

Se entrambi i diodi sono accesi, la tensione V_{out} può essere valutata considerando la sovrapposizione degli effetti di V_{in} e V_2 . Sotto questa ipotesi, i diodi D1 e D2 possono equivalgono ad una caduta di tensione pari a 1 V tra anodo e catodo, il che equivale a sostituire V_{in} con $V_{in}-1$ e $V_2=5V$ con $V_2-1=4V$. Il circuito equivalente con D1=ON e D2=ON è il seguente:



Analizziamo questo circuito mediante la sovrapposizione degli effetti di Vin-1 e V2-1

a) Anullo il generatore Vin-1 (lo cortocircuito); la resistenza R1=2kohm risulta in parallelo a R3=2.5kohm.

Quindi $R1//R3 = (R1R3)/(R1+R3) = 5/4.5 = 1.111$

Calcolo l'effetto di V2-1: $V'_{out} = (V2-1) * (R1//R3) / (R1//R3 + R2) = 4 * 1.111 / 1.911 = 2.325484 \text{ V}$

b) Anullo il generatore V2-1 (lo cortocircuito); la resistenza da 0.8 kohm risulta in parallelo alla resistenza R3=2.5 kohm. Quindi $R2//R3 = (R2 * R3) / (R2 + R3) = (0.8 * 2.5) / 3.3 = 0.606 \text{ kohm}$.

Calcolo l'effetto di Vin-1: $V''_{out} = (Vin-1) * (R2//R3) / (R2//R3 + R1) = (Vin-1) * 0.606 / 2.606 =$

$= 0.232564 Vin - 0.232564 V$

Effetto totale $V_{out} = 2.325484 + 0.232564 Vin - 0.232564 V = 0.232564 Vin + 2.092920$

Verifico la condizione per la quale D1 va in diretta:

$V_{out} = (0.232564) * 4.025 + 2.092920 = 3.029 \text{ V}$ che coincide con la tensione al limite dell'accensione di D1.

Per $V_{out} = 4V$ il diodo D2 si interdice; verifichiamo per quale valore di Vin si verifica questa condizione:

$$4 = 0.232564 Vin + 2.092920$$

$$(4 - 2.092920) / 0.232564 = Vin = 8.2 \text{ V}$$

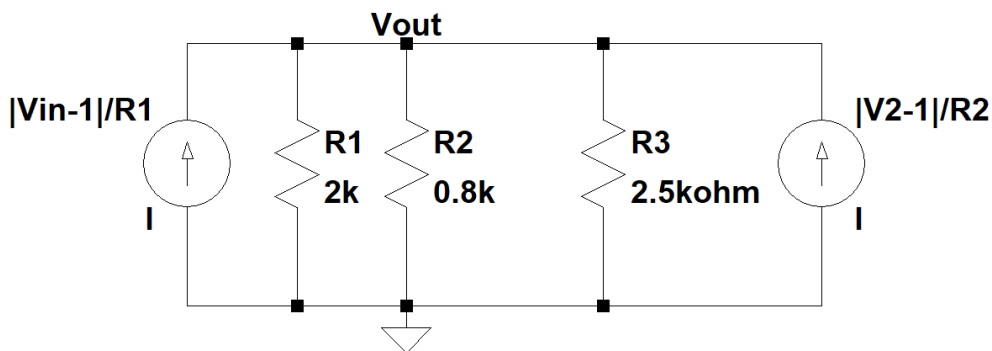
Oltre questo valore, $V_{out} = (Vin-1) * 2.5 / 4.5 = 0.555 Vin - 0.555$

Verifichiamo la continuità nel punto di spegnimento di D2

$$4 = 0.555 Vin - 0.555; 4.55 / 0.55 = Vin = 8.207 \text{ V};$$

*** metodo alternativo ***

In alternativa, nella condizione D1=ON, D2=ON si possono trasformare i due generatori di tensione in generatori di corrente equivalenti



I due generatori concorrono nell'iniettare corrente nel parallelo delle tre resistenze

La somma delle due correnti è pari a $V_{in}/2 - 0.5 + 4/0.8 = V_{in}/2 + 4.5$ [mA]

Le tre resistenze in parallelo equivalgono a $R_{totale} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{0.8} + \frac{1}{2.5}\right)^{-1} = (0.5 + 1.25 + 0.4)^{-1} = 2.15^{-1} = 0.465 \text{ kohm}$.

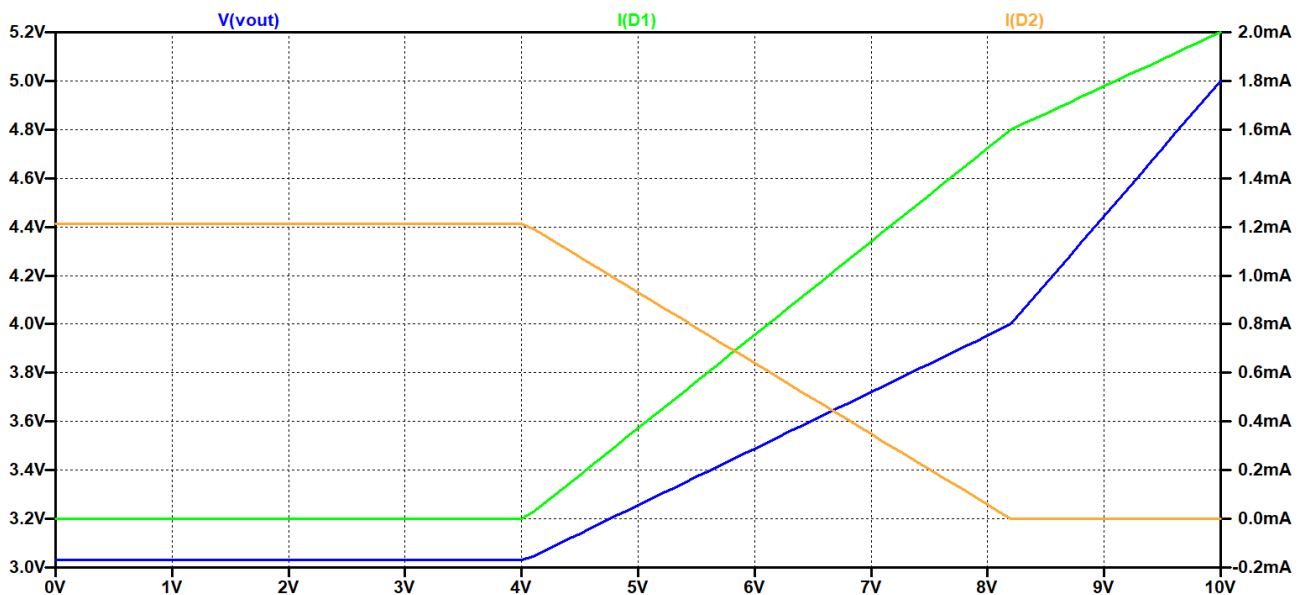
La tensione in uscita è quindi $V_{out} = (V_{in}/2 + 4.5) \cdot 0.465 = 0.2325V_{in} + 2.0930 \text{ V}$, che coincide con quella precedentemente trovata con il principio di sovrapposizione degli effetti.

Quindi

$-10 \text{ V} < V_{in} < 4.025 \text{ V}$, D1 OFF, D2 ON, $V_{out} = 3.025 \text{ V}$

$4.025 < V_{in} < 8.2 \text{ V}$, D1 ON, D2 ON, $V_{out} = 0.2325V_{in} + 2.0930 \text{ V}$

$V_{in} > 8.2 \text{ V}$, D1 ON, D2 OFF, $V_{out} = 0.555V_{in} - 0.555 \text{ V}$



4.2 Tracciare il grafico della tensione di uscita V_{out}

4.3 Tracciare il grafico della corrente che attraversa D2

4.4 Tracciare il grafico della corrente che attraversa D1

Esercizio 5

Il transistor MOS del circuito in Figura è caratterizzato da una tensione di soglia di 1 V, $k_n = 4 \text{ mA/V}^2$. $\lambda = 0 \text{ V}^{-1}$.

5.1 Calcolare V_{GSQ} , I_{DQ} e V_{DSQ}

Calcolo il valore di $V_G = 16 \cdot (10/40) = 4 \text{ V}$

Calcolo il valore di V_S

$$V_S = I_D R_S = 1 \cdot I_D = (1/2) k_n (V_G - V_S - V_T)^2 = 2 \cdot (4 - V_S - 1)^2 = 2 \cdot (3 - V_S)^2 = 2(9 - 6V_S + V_S^2) = 18 - 12V_S + 2V_S^2$$

$$V_S = 18 - 12V_S + 2V_S^2$$

$$2V_S^2 - 13V_S + 18 = 0$$

$V_S = 4.5 \text{ V}$; $V_S = 2 \text{ V}$ La prima soluzione è evidentemente inaccettabile.

Con la seconda $V_{GS} - V_T = V_G - V_S = 4 - 2 - 1 = V_{OV} = 1 \text{ V}$

$$I_D = 0.5 \cdot k_n V_{OV}^2 = 0.5 \cdot 4 \cdot (1)^2 = 2 \text{ mA}, \text{ e quindi } V_S = I_D R_S = 2 \text{ mA} \cdot 1 \text{ k}\Omega = 2 \text{ V OK}$$

Verifico la condizione di saturazione

$$V_{DS} = V_D - V_S = 16 \text{ V} - V_S = 16 - 2 \text{ V} = 14 \text{ V} \gg 1 \text{ V} = V_{OV}. \text{ OK}$$

5.2 Disegnare il modello per piccolo segnale e identificare la configurazione dell'amplificatore

Si tratta di un amplificatore a drain comune

5.3 Calcolare il guadagno in tensione, v_{out}/v_{in}

$$g_m = k_n V_{OV} = 4 \cdot 1 = 4 \text{ mA/V}$$

$$R_L = R_S // R_L = 0.5 \text{ k}\Omega$$

$$A_v = 4 \cdot 0.5 / (1 + 4 \cdot 0.5) = 2/3 = 0.667 \text{ V/V}$$

5.4 Calcolare la resistenza di ingresso a valle di C_2

$$R_{in} = 30 // 10 = 300/40 \text{ k}\Omega = 7.5 \text{ k}\Omega$$

Guadagno tenendo conto della resistenza di ingresso finita

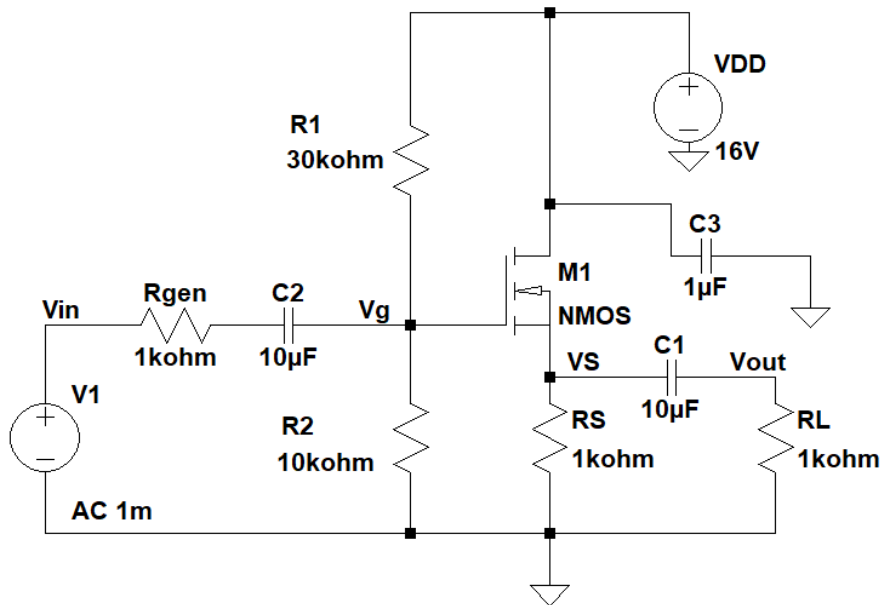
$$A_v' = A_v \cdot (R_{in} / (R_{gen} + R_{in})) = 0.667 \cdot (7.5/8.5) = 0.667 \cdot 0.882 = 0.588 \text{ V/V}$$

5.5 Calcolare la resistenza di uscita (senza considerare R_L)

La resistenza di uscita è $1/g_m // R_S$

$$1/4 = 0.250 \text{ k}\Omega$$

$$R_{out} = 0.250 / 1.250 \text{ k}\Omega = 0.2 \text{ k}\Omega$$

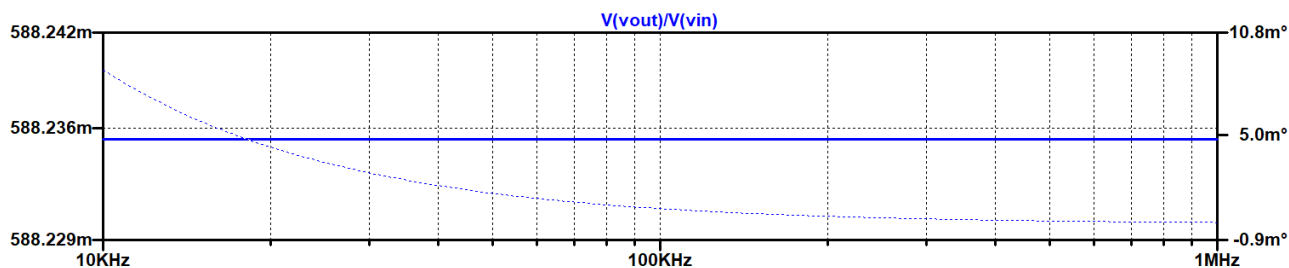


--- Operating Point ---

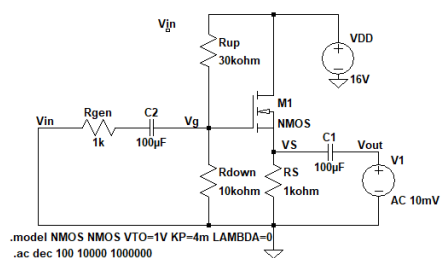
V(n001):	16	voltage
V(vg):	4	voltage
V(vs):	2	voltage
V(vout):	2e-013	voltage
V(n002):	4e-013	voltage
V(vin):	0	voltage
Id(M1):	0.002	device_current
Ig(M1):	0	device_current
Ib(M1):	-1.401e-011	device_current
Is(M1):	-0.002	device_current
I(C2):	4e-016	device_current
I(C1):	-2e-016	device_current
I(Rgen):	4e-016	device_current
I(Rl):	2e-016	device_current
I(Rs):	0.002	device_current
I(Rdown):	0.0004	device_current
I(Rup):	0.0004	device_current
I(V1):	4e-016	device_current
I(Vdd):	-0.0024	device_current

Name:	m1
Model:	nmos
Id:	2.00e-03
Vgs:	2.00e+00
Vds:	1.40e+01
Vbs:	0.00e+00
Vth:	1.00e+00
Vdsat:	1.00e+00
Gm:	4.00e-03

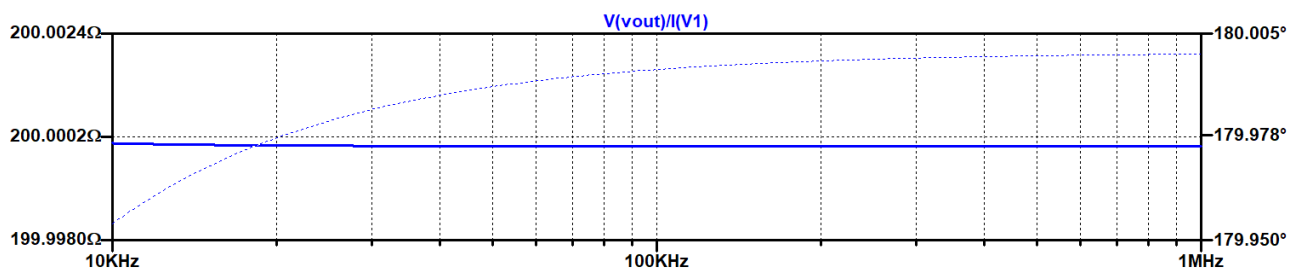
Punto operativo del transistor M1



Simulazione del guadagno in tensione v_{out}/v_{in} dell'amplificatore a drain comune



Circuito utilizzato per la simulazione della resistenza di uscita



Calcolo della resistenza di uscita dell'amplificatore a drain comune

Esercizio 6

6.1 Si disegni una porta logica in grado di realizzare la funzione $\bar{Y} = (A + B)(C + D) + CE$;

6.2 Per la porta logica disegnata calcolare i rapporti dimensionali (W/L) dei MOSFET di tipo n e di tipo p affinché la porta presenti nei casi peggiori un comportamento al nodo di uscita corrispondente a quello di un inverter con rapporti di dimensioni $n = W_n / L_n$ e $p = W_p / L_p$; nel calcolo si cerchi di minimizzare l'area della porta stessa.