2022-10-17

METODO DI ORTONOMALIZZAZIONE DI GRAM SCHMIDT

$$s_1(t), \ldots, s_2(t)$$

1. $s_1(t)$: se $s_1(t) = 0 \; \forall \; t$ lo scarto, altrimenti considero $\phi_1'(t) = s_1(t)$
2. $s_i(t)$: se $s_i(t) = 0 \; \forall \; t$ lo scarto

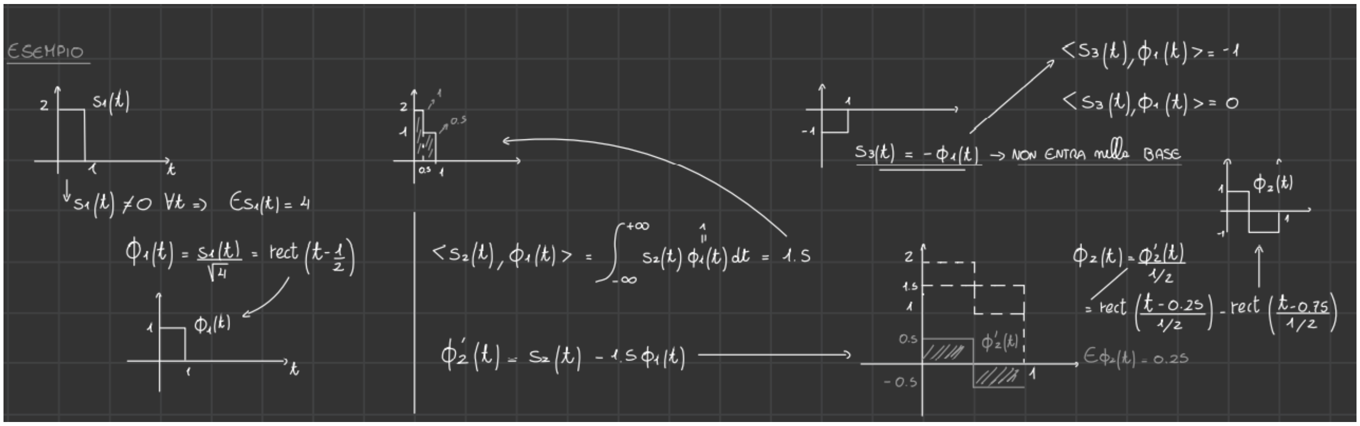
$$\phi_1'(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \; s_i(t), \; \phi_j(t) \; \rangle \; \phi_j(t)$$

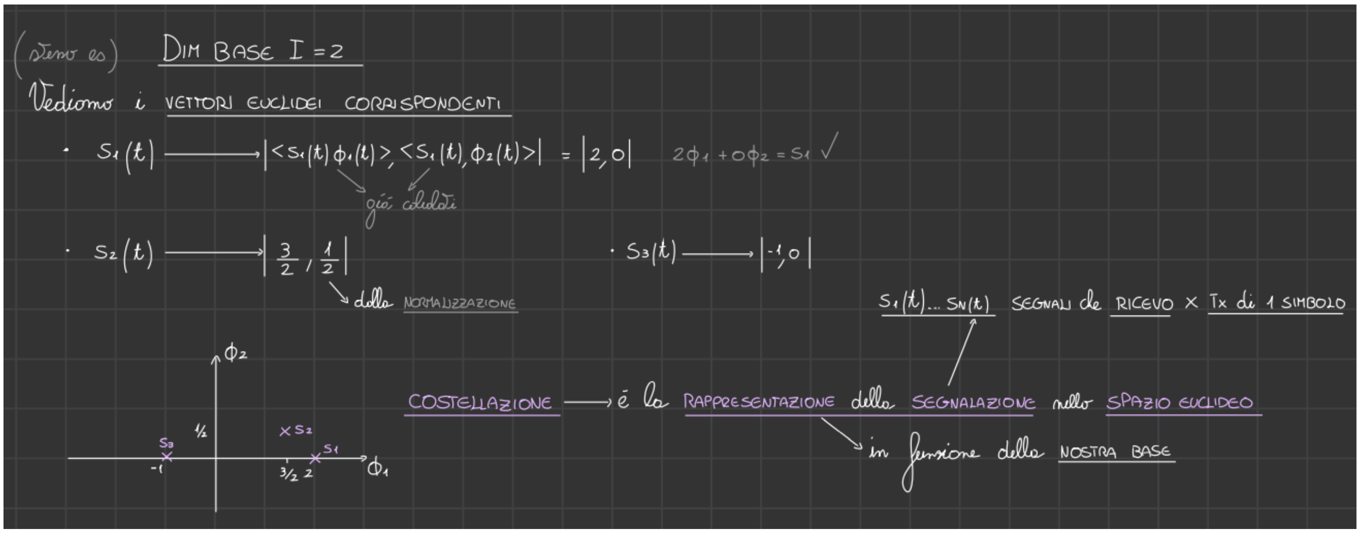
   se $\phi_1'(t) = 0 \; \forall \; t$ lo scarto, altrimenti

> **Normalizzazione di un vettore**
>
> $$\phi_i(t) = \frac{\phi_i'(t)}{\sqrt{E_{\phi_i'}}}$$

> **Ortogonalizzazione di una base**
>
> $$\phi_1'(t) = s_i(t) - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \; s_i(t), \; \phi_j(t) \; \rangle \; \phi_j(t)$$

$\underline{Es:}$





RICEVITORE DIGITALE

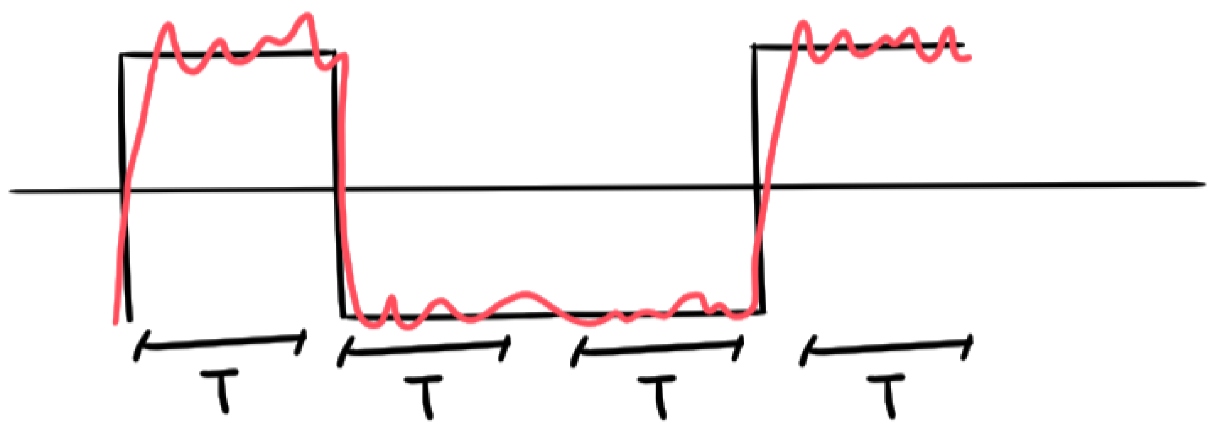
Il ricevitore digitale rappresenta un segnale ricevuto nello spazio della costellazione.

(Es:)

Segnale AWGN

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(s_{a_n}(t - nT) + w(t) \right)$$

con $s_{a_n}(t)$ è il segnale ricevuto.



Il ricevitore deve trovarsi le coordinate dei punti per estrarre i simboli del segnale trasmesso
Per demodulare il simbolo trasmesso a t=0 (da 0 a T):

$$\begin{cases} r_1 = \langle\ r(t),\ \phi_1(t)\ \rangle \\ \dots \\ r_I = \langle\ r(t),\ \phi_I(t)\ \rangle \end{cases}$$

$$[\ r_1, \dots, r_I\ ]$$

$$\langle\ r(t),\ \phi_1(t)\ \rangle = \langle\ s_{a_0}(t) + w(t),\ \phi_1(t)\ \rangle = \langle\ s_{a_0}(t),\ \phi_1(t)\ \rangle + \langle\ w(t),\ \phi_1(t)\ \rangle$$

Per demodulare i somboli trasmessi in tempi successivi, basta considerare il ritardo dei segnali (nT)

RUMORE DOPO LA PROIEZIONIE

$$r(t) = s_{a0}(t) + w(t)$$

con $w(t)\ \forall\ t$ è una v.a. gaussiana a media nulla $(E = 0)$ e varianza σ_w^2 indipendente dal rumore in altri istanti

$$r_i(t) = \langle\ r(t),\ \phi_i(t)\ \rangle = \langle\ s_{a0}(t),\ \phi_i(t)\ \rangle + \langle\ w(t),\ \phi_i(t)\ \rangle$$

$$\langle\ w(t),\ \phi_i(t)\ \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\phi_i(t)dt \rightsquigarrow V.A.\ Gaussiana$$

quindi

$$E\left[\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\phi_i(t)dt\right] = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[w(t)\phi_i(t)\right]dt = 0$$

in quanto la media del rumore $E[w(t)] = 0$ dato che si tratta di una V.A. Gaussiana.
La media del rumore nello spazio euclideo è 0

Per calcolare la varianza del rumore:

$$E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\phi_i(t)dt\right)^2\right] = E\left[\int\int w(t)w(t')\phi_i(t)\phi_i(t')\ dt\ dt'\right]$$

$$= \int\int E\left[w(t)w(t')\right]\phi_i(t)\phi_i(t')\ dt\ dt'$$

$$= \ldots$$

$$\left(\quad E\left[w(t)w(t')\right] = \begin{cases} 0 & t \neq t'; \\ \sigma_w^2 & t = t' \end{cases} \quad \right)$$

$$\ldots = \int \sigma_w^2 \phi_i^2(t)\ dt = \sigma_w^2; E_{\phi_i} = \sigma_w^2$$

Quindi si ha che:

$$\langle\ w(t),\ \phi_i(t)\ \rangle \sim N(0, \sigma_w^2) = r_i$$

$$\langle\ w(t),\ \phi_j(t)\ \rangle \sim N(0, \sigma_w^2) = r_j$$

$$E\left[r_i,\ r_j\right] \text{ correlazione :}$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\int w(t)\phi_i(t)\ dt \int w(t')\phi_j(t')\ dt'\right] &= \int\int E\Big[w(t)w(t')\Big]\phi_i(t)\phi_j(t')\ dt\ dt' \\
&= \int \sigma_w^2 \phi_i(t)\phi_j(t)\ dt \\
&= \sigma_w^2 \langle\ \phi_i(t),\ \phi_j(t)\ \rangle \\
&= \begin{cases} \sigma_w^2 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}
\end{aligned}
$$

Approssimazione del rumore

$$
w(t) \simeq N(0, \sigma_w^2)
$$