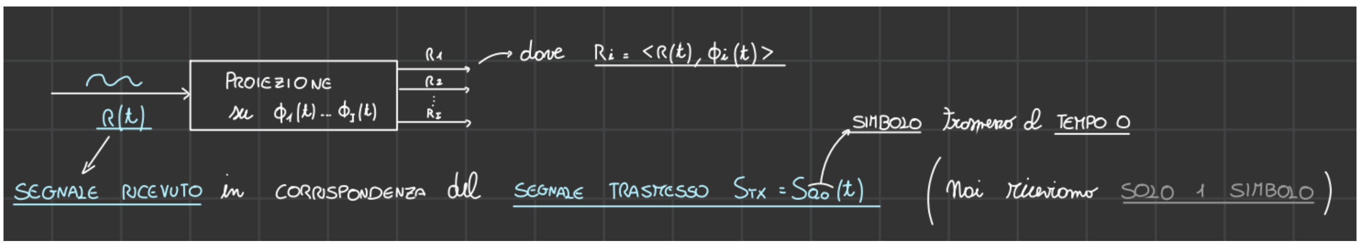
2022-10-20

REGIONI DI DECISIONE

Sulla base del segnale ricevuto $r(t)$ viene fatta una proiezione su una base $(\phi_1(t), \ldots, \phi_I(t))$ ottenendo $(r_1, \ldots, r_I)$, $r_i = \langle\ r(t),\ \phi_i(t)\ \rangle$
$r(t)$ il segnale ricevuto in corrispondenza del segnale trasmesso $S_{TX}(t) = s_{a_0}(t)$ con a_0 che è il simbolo trasmesso al tempo $0T$



Se ricevo $s_1(t) = r(t)$ nello spazio euclideo trovo $r_1 = \langle\ s_1(t),\ \phi_1(t)\ \rangle = \sqrt{T}$

Se trasmetto $s_2(t)$:

$$r_1 = \langle\ s_2(t),\ \phi_1(t)\ \rangle = -\sqrt{T}$$

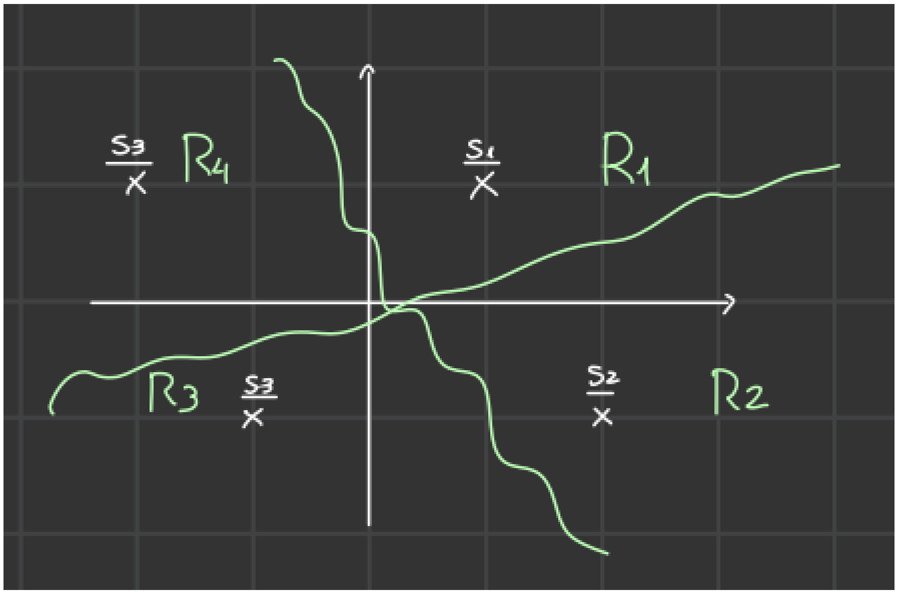
Per calcolare la proiezione del segnale con disturbo, vedo se circa si tratta di un segnale positivo o negativo, circa rispetto alla base ϕ_1 dove si trova e scommettiamo sulla posizione di r nella costellazione.

Se la proiezione cade "vicino" al segnale di s_2 proiettato, decido di optare per s_2, altrimenti opto per s_1

Dobbiamo capire come dividere la retta della costellazione per poter approssimare al meglio la scelta del segnale.

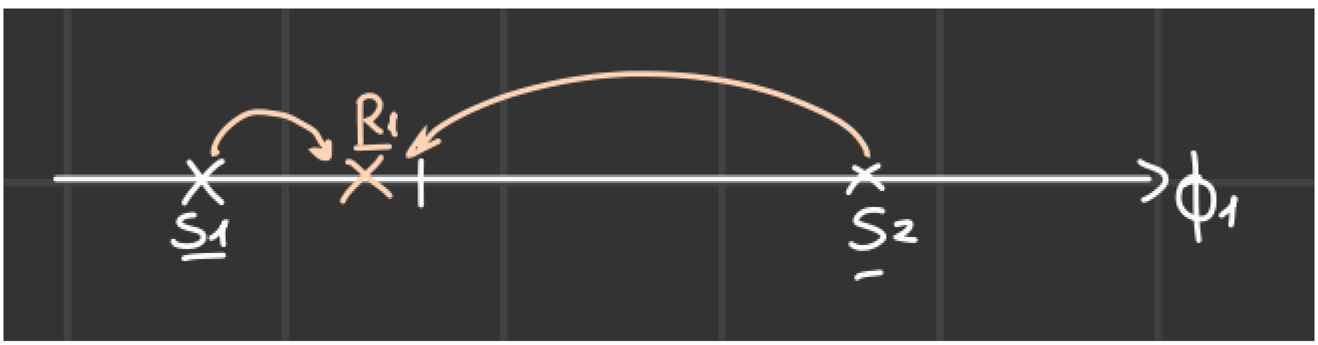
Se per esempio abbiamo quattro segnali, determino delle zone dello spazio euclideo, grazie alle quali posso decidere che segnale è stato trasmesso

L'unione di queste zone, deve darmi l'intero spazio.. non posso avere punti senza un simbolo associato



$$\left(\bigcup_i \mathbb{R}^i\right) = \mathbb{R}^I, \qquad \mathbb{R}_i \cap \mathbb{R}_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

PROBABILITA' DI DECISIONE CORRETTA



$$r_1 = s_{a_0} + w_1$$

Non sempre il ricevitore farà la decisione corretta, quindi dobbiamo calcolare la probabilità che il ricevitore faccia la decisione corretta:

$$\begin{aligned} P(\hat{a_0}=a_0) &= \sum_{n=1}^{N}\Big(P(\hat{a_0}=a_0|a_0=n)P(a_0=n)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\Big(P(\hat{a_0}=n|a_0=n)P(a_0=n)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\Big(P(\underline{r}\in\mathbb{R}_n|a_0=n)P(a_0=n)\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{N}\Big(\int_{\mathbb{R}_n} p_{\underline{r}|a_0}(\underline{r}'|n)dr'\ P(a_0=n)\Big) \end{aligned}$$

($p_{\underline{r}|a_0}(\underline{r}'|n)$ è la densità di probabilità del vettore aleatorio $\underline{r}$ calcolata per $\underline{r}'$, condizionata al fatto che $a_0=n$)

$$P(C)=\sum_{n=1}^{N}\Big(\int_{\mathbb{R}_n} p_{\underline{r}|a_0}(\underline{r}'|n)P_{a_0}(n)dr'\Big)$$

probabilità di decisione corretta.
Voglio massimizzare la probabilità di decisione corretta $P(C)$ scegliendo le regioni di decisione.
Devo decidere $\forall\underline{r}'$ a che regione corrisponde

$$D(\underline{r}';\underline{n})=p_{\underline{r}|a_0}(\underline{r}'|n)P_{a_0}(n)$$

Il calcolo va fatto sulla regione in cui mi trovo: se mi trovo in $\mathbb{R}_3$, faccio il calcolo con $n=3$.
Quale deve essere la scelta della regione di appartenenza di r' per massimizzare $P(C)$?

Probabilità di decisione corretta

$$P(C)=\int D(\underline{r}';n)dr'+\int \text{tutti gli altri r' diversi}$$

Come faccio a scegliere le regioni di decisioni?
$p_{r|a_0}(\underline{r}'|n)$ dipende dal canale, $P_{a_0}(n)$ dipende dal trasmettitore

Osservo che la probabilità di decisione corretta dipende dalla regione che scelgo, tra tutti i possibili valori di n devo scegliere quello che mi da una $D(\dots)$ maggiore.

In parole povere, $D(r;n)$ è la probabilità che il segnale r sia stato interpretato correttamente, considerata anche la probabilità che sia stato trasmesso quel determinato segnale.

CRITERIO MAXIMUM A POSTERIORI (MAP)

Osservando un certo segnale $r(G) \rightarrow \underline{r}$ vettore euclideo $\rightarrow$ calcolo $D(\underline{r};1),\dots,D(\underline{r},N)$ e scelgo l'n che mi fornisce il massimo valore di D $(\hat{a_0})$

$$\hat{a_0} = argmax_n\Big(D(\underline{r},n)\Big)$$

$argmax_n$ restituisce l'indice n che trova il valore maggiore.

$$P_{\underline{r}|a_0}(\underline{r}'|n)P_{a_0}(n) = P_{\underline{r},\,a_0}(\underline{r}',n)$$

$$\Bigg(\qquad P(A,B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \qquad \Bigg)$$

quindi si ha che

$$\begin{aligned} argmax_n\Big(p_{\underline{r}|a_0}(\underline{r}'|n)P_{a_0}(n)\Big) &= argmax_n\Big(p_{a_0|\underline{r}}(n|\underline{r}')P_{\underline{r}}(\underline{r}')\Big) \\ &= argmax_n\Big(p_{a_0|\underline{r}}(n|\underline{r}')\Big) \end{aligned}$$

(cercare l'indice massimo in $p_{a_0|\underline{r}}(n|\underline{r}')P_{\underline{r}}(\underline{r}'))$ e in $p_{a_0|\underline{r}}(n|\underline{r}')$ è uguale in quanto $P_{\underline{r}}(\underline{r}')$ non dipende da n, quindi non cambia l'indice che ne risulta)