2022-10-25

CONVOLUZIONE

(vale la proprietà commutativa tra i due segnali)

Riprendendo l'esempio di ieri:

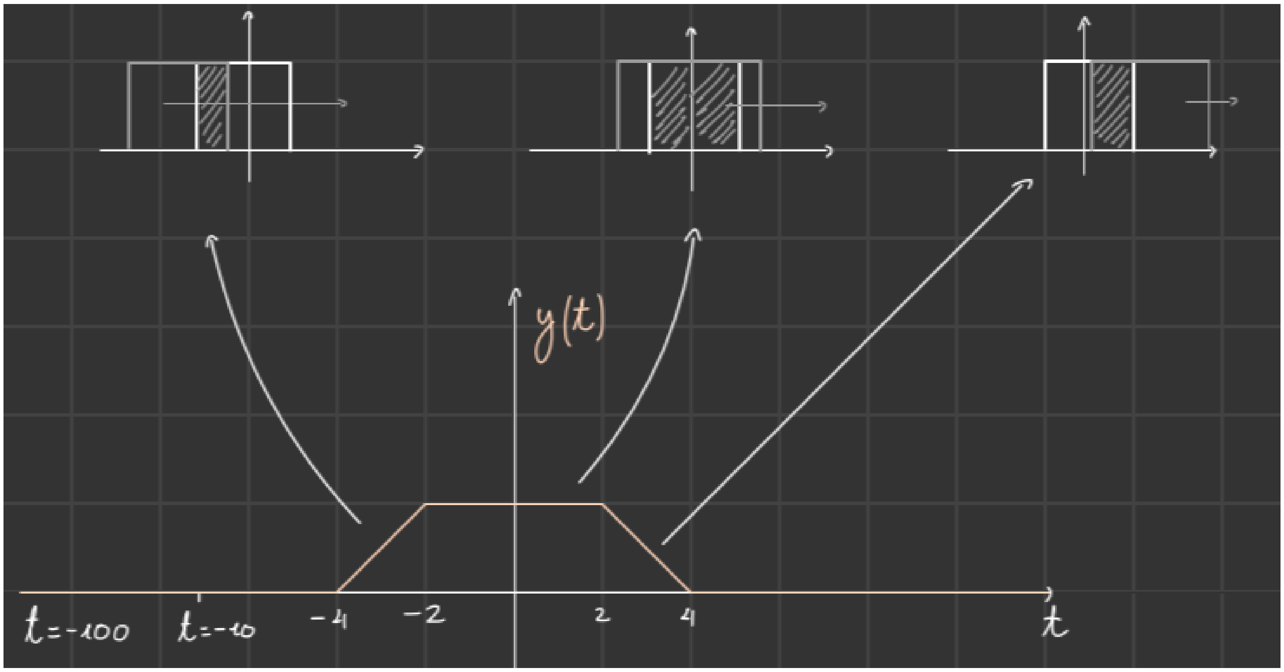
$$h(t) = rect(\frac{t}{2}) \qquad x(t) = rect(\frac{t}{6})$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(rect(\frac{\tau}{2}) rect(\frac{t-\tau}{6}) \right) \, d\tau \\
&=^{*1} \int_{-1}^{1} \left(rect(\frac{t-\tau}{6}) \right) d\tau \\
&= \int_{-1}^{1} \left(rect(\frac{\tau-t}{6}) \right) d\tau \\
&= \begin{cases} 1-(t-3) = 4-t \qquad t \in [2,4] \\ 2 \qquad t \in [-2,2) \\ t+4 \qquad t \in [-4,2] \\ 0 \qquad \text{altrove} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$*1 : \text{Il cambio di estremi è dovuto al } rect(\frac{t}{2}) \text{ dato che ha come estremi } [-1;1]$$

- in generale, la convoluzione tra due rettangoli è un trapezio.

- se i due rettangoli sono $h(t) = x(t) = rect(t)$, $y(t) = triang(t)$.



Causalità nella convoluzione

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(h(t)x(t-\tau) \Big) d\tau \\
&= \int_{0}^{\infty} \Big(h(\tau)x(t-\tau) \Big) d\tau \; + \int_{-\infty}^{0} \Big(h(\tau)x(t-\tau) \Big) d\tau
\end{aligned}
$$

$\int_0^\infty \ldots =$ dipendenza di y dal passato di x
$\int_{-\infty}^0 \ldots =$ dipendenza di y dal futuro di x (non dovrebbe esserci)

se la convoluzione modella una trasformazione fisica, devo avere $h(\tau) = 0$ per $\tau < 0$

Proiezione di un segnale su una base come convoluzione

Consideriamo

$$\phi_1(-(t-t_0)) = \bar{\phi}_1(t)$$

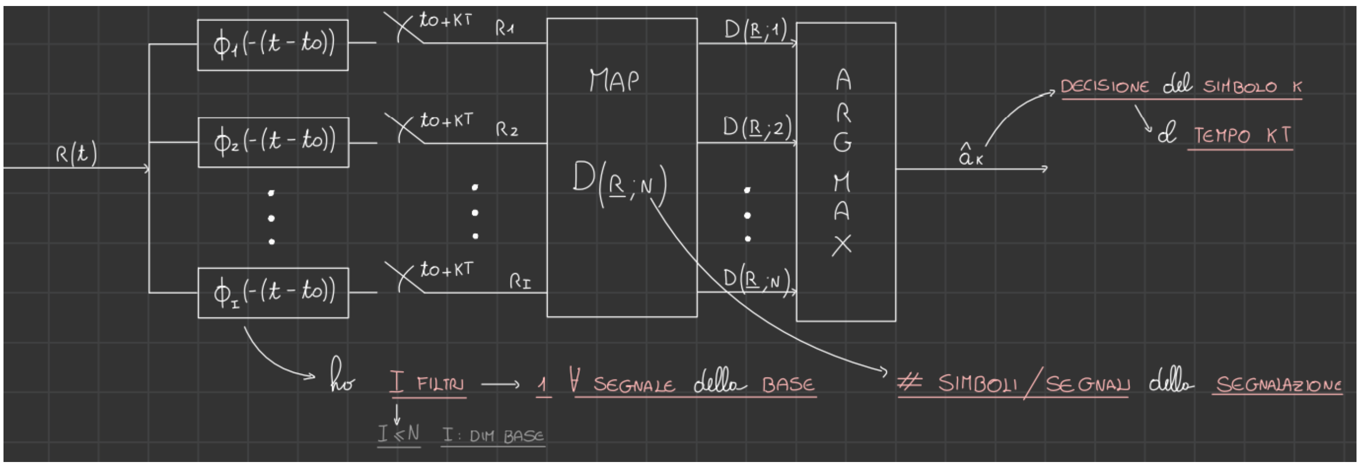
$$(r * \bar{\phi}_1)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\phi_1(-(t-\tau-t_0))\, d\tau$$

Quanto vale la convoluzione in $t = t_0$:

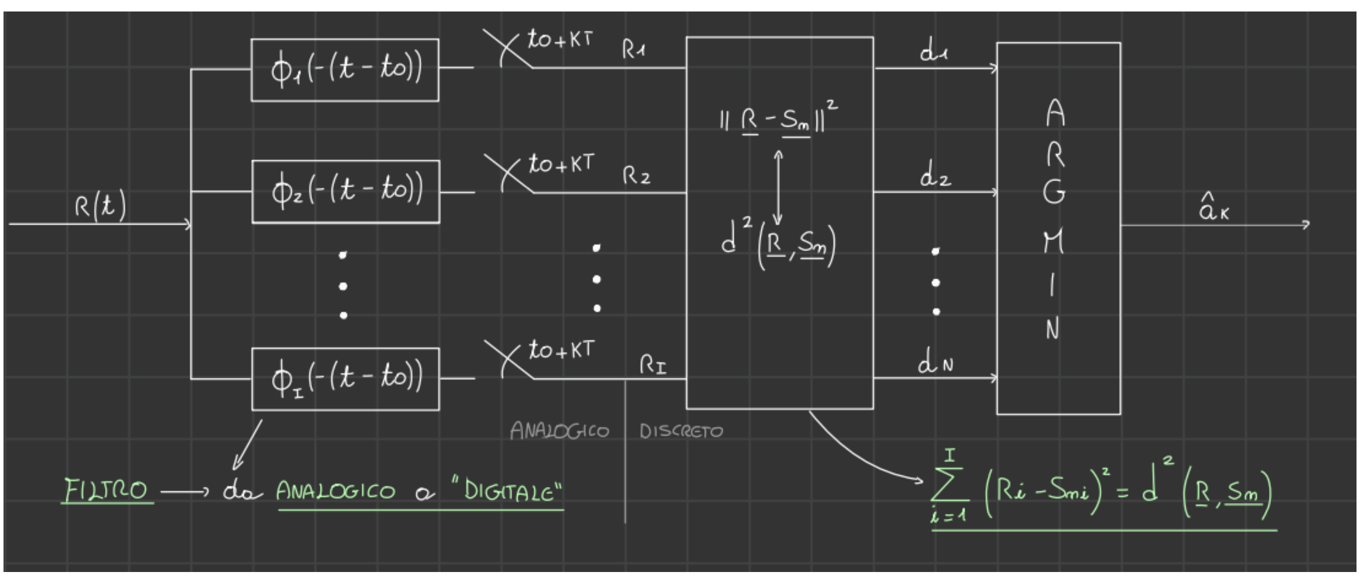
$$(r * \bar{\phi}_1)(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)\phi_1(\tau)\, d\tau$$

Per rendere la convoluzione interamente causale, devo far si che tutti i punti in cui il segnale è diverso da 0, siano a destra dello 0: $x(t) = 0,\ \forall t < 0$, in quanto facendo la convoluzione, rovescio il segnale e se avessi un segnale con tempi negativi, questi andranno a proiettarsi nel futuro.

RICEVITORE MAP



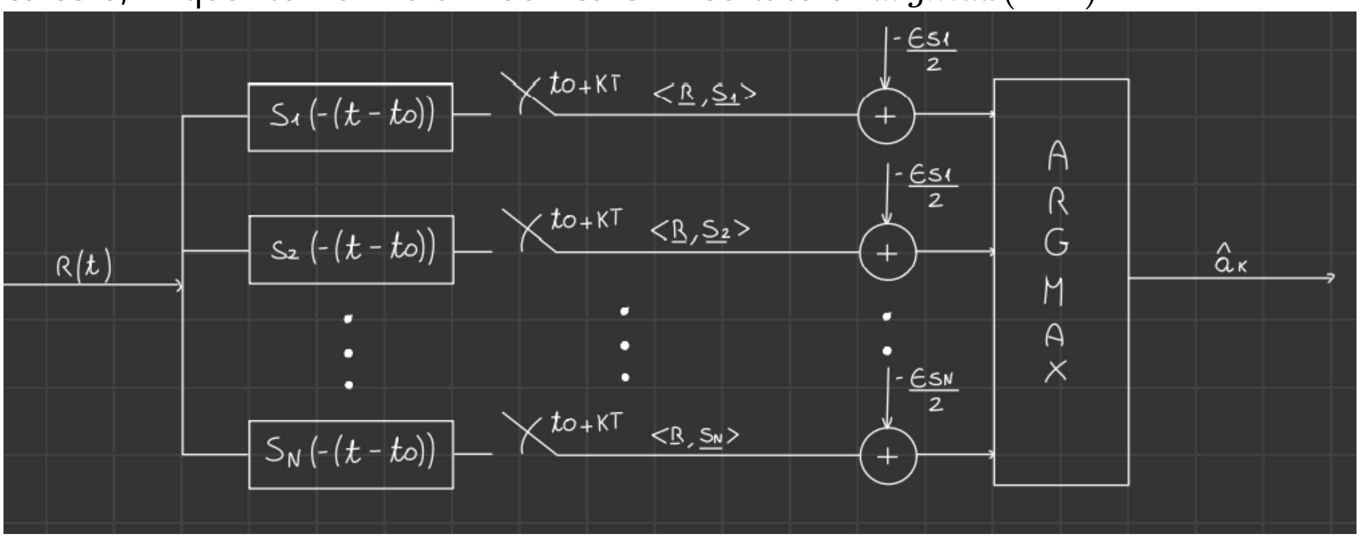
RICEVITORE MD DI TIPO 1



RICEVITORE MD DI TIPO 2

$$\begin{aligned}
\hat{a}_0 &= argmin_n \left(||\underline{r} - \underline{s}_n|| \right)^2 \\
&= argmin_n \left(\sum_{i=1}^{I} \left(r_i - s_{ni} \right)^2 \right) \\
&= argmin \left(\sum_{i=1}^{I} \left(r_i^2 + s_{ni}^2 - 2 r_i s_{ni} \right) \right) \\
&= argmin_n \left(\sum_{i=1}^{I} r_i^2 \; + \underline{\sum_{i=1}^{I} s_{ni}^2} \; - s \sum_{i=1}^{I} r_i s_{ni} \right) \\
&= argmin \left(\underline{E s_n} - 2 \langle \, \underline{r}, \; \underline{s}_n \, \rangle \right) \\
&= arg\underline{max} \left(- \frac{E s_n}{2} + \langle \, \underline{r}, \; \underline{s}_n \, \rangle \right)
\end{aligned}$$

Se L'energia dei segnali è uguale, non serve neanche che sottraggo l'energia al calcolo, in quanto non va a modificare il risultato di $argmax(\dots)$



TEOREMA DELL'IRRILEVANZA

Consideriamo un canale AWGN e ricordiamo che con criterio MAP:

$$\hat{a}_0 = argmax_n \left(p_{\underline{r}|a_0}(\underline{r}'|n) P_{a_0}(n) \right)$$

Consideriamo un ricevitore con una base più grande di quella trovata nella segnalazione.

$$\underline{r} = \left[r_1, \ldots, r_I, r_{I+1}, \ldots, r_{I+I'} \right]$$

I dimensinoe della base dlela segnalazione

$$\begin{aligned}\underline{r} &= \left[r_1, \ldots, r_I, r_{I+1}, \ldots, r_{I'} \right] \\ &= \left[s_{a_0,1}, \ldots, s_{a_0,I}, 0, \ldots 0 \right] + \left[w_1, \ldots, w_{I'} \right]\end{aligned}$$

con w_i indipendenti tra di loro e gli altri vettori della base

$$\begin{aligned}\hat{a}_0 &= argmax_n \left(p_{\underline{r}|\underline{a}_0}(\underline{r}'|n) P_{a_o}(n) \right) \\ &= argmax_n \left(p_{r_1,\ldots,r_I|a_0}(r'_1,\ldots,r'_I|n) p_{r_{I+1},\ldots,r_{I+I'}|a_0}(r'_{I+1},\ldots,r'_{I+I'}|n) P_{a_0}(n) \right) \\ &= argmax_n \left(p_{r_1,\ldots,r_I|a_0}(r'_1,\ldots,r'_I|n) P_{a_0}(n) \right)\end{aligned}$$

dimostrando quindi che la componente non appartenente alla base della segnalazione non cambia il risultato, rendendola quindi irrilevante.