2022-10-11

SPAZIO VETTORIALE DI SEGNALI A ENERGIA FINITA

PRODOTTO INTERNO

> **Prodotto interno**
>
> $$\langle\ x(t),\ y(t)\ \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\ dt$$

NORMA

> **Norma di un vettore**
>
> $$||x(t)|| = \sqrt{\langle\ x(t),\ y(t)\ \rangle} = \sqrt{E_x}$$

E_x energia del segnale

BASE ORTONORMALE

Una base ortonormale di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori (segnali) $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ t.c.

$$\langle\ x_i(t),\ x_j(t)\ \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad \forall\ i, j$$

$$||x_i(t)|| = 1, \qquad \forall\ i$$

e inoltre deve valere che il generico segnale $y(t) \in V$ sia scrivibile come

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n(t) \\ \\ \alpha_i = \langle\ y(t),\ x_i(t)\ \rangle \end{cases}$$

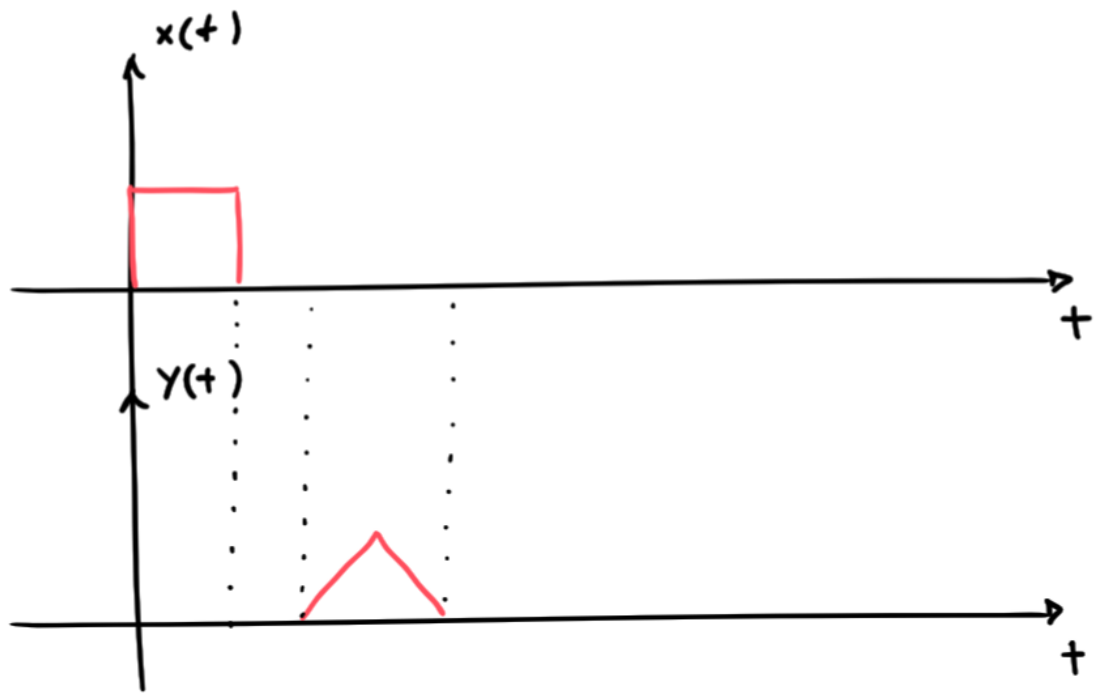
I vettori sono ortogonali in quanto il prodotto interno (scalare) da 0, sono normali in quanto il modulo di ogni vettore è 1

$\underline{Es:}$

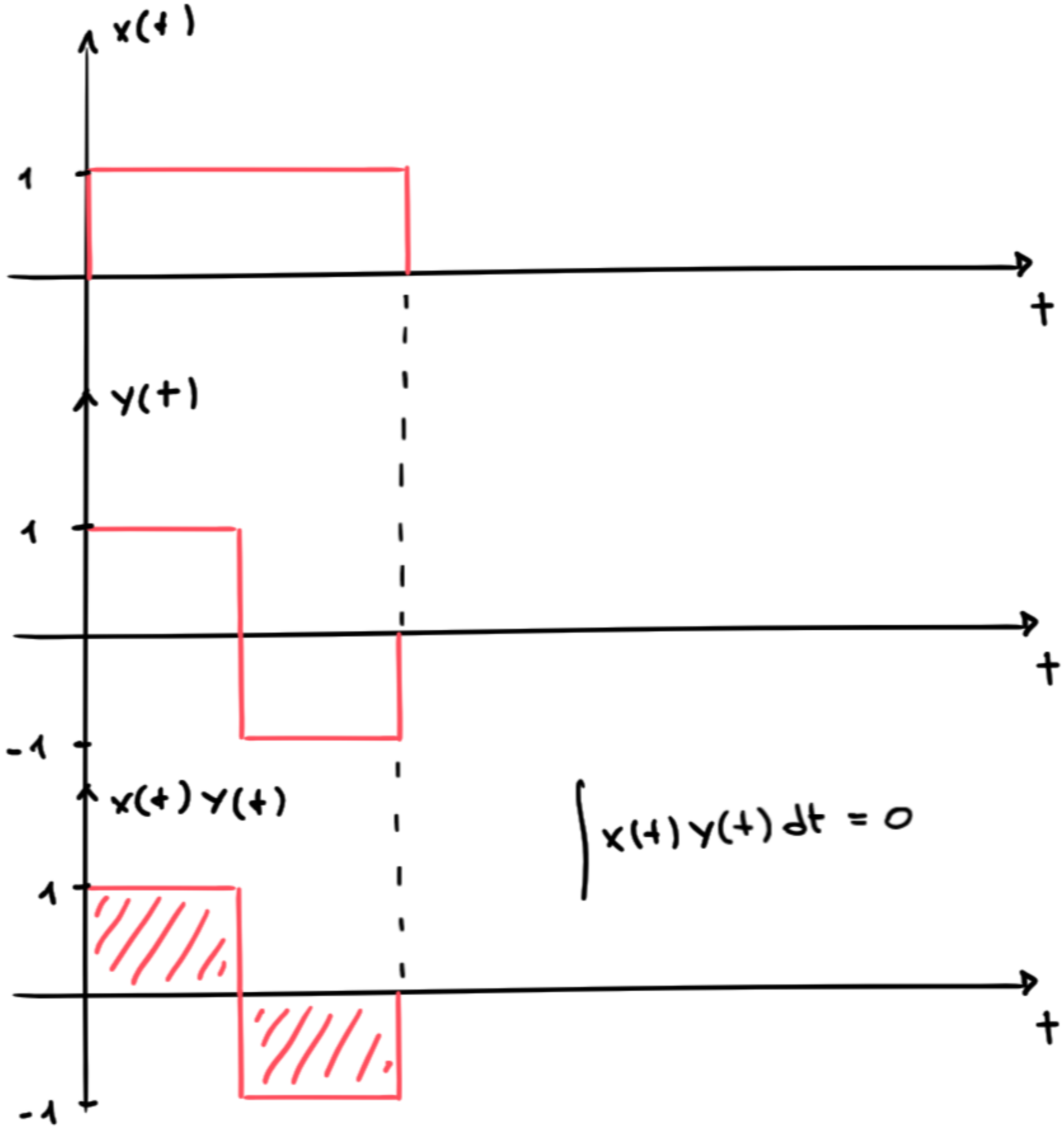
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)\ dt = 0$$

questo caso si verifica

- se i due segnali hanno sostegni diversi (se sono non nulli in momenti diversi, il prodotto dei segnali sarà sempre nullo); in questo caso i segnali hanno supporto disgiunto



- se l'area del prodotto dei due segnali è nulla



SOTTOSPAZIO GENERATO DA UN INSIEME DI N SEGNALI A ENERGIA FINITA

Dati n segnali $s_1(t), \ldots, s_n(t)$, il sottospazio generato da questi segnali è l'insieme dei vettori (compresi quelli ottenuti da operazioni tra vettori):

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n s_n(t), \qquad \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \forall n$$

I vettori non sono per forza ortonormali
Perchè si tratti di un sottospazio vettoriale bisogna che sia chiuso per le

operazioni di somma e prodotto

$$x(t) + y(t) = \sum_n \alpha_n s_n(t) + \sum_n \beta_n s_n(t) = \sum_n (\alpha_n + \beta_n) s_n(t)$$

Partendo da segnali che generano un sottospazio, posso descrivere il sottospazio con una base ortonormale di dimensione $I \leq N,\ \phi_1(t), \ldots, \phi_I(t)$

$$x(t) \iff x = [x1, \ldots, x_I]$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{I} x_i \phi_i(t)$$

PRODOTTO INTERNO NEI DUE SPAZI

$\langle\ x(t),\ y(t)\ \rangle$ con $x(t)$ e $y(t)$ nel sottospazio $\{\phi_1(t), \ldots, \phi_I(t)\}$

$$x_i = \langle\ x(t),\ \phi_i(t)\ \rangle$$

$$y_i = \langle\ y(t),\ \phi_i(t)\ \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle\ x(t),\ y(t)\ \rangle &= \langle\ \sum_{i=1}^{I} \Big(x_i \phi_i(t)\Big),\ \sum_{i=1}^{I} \Big(y_i \phi_i(t)\Big)\ \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{j=1}^{I} \langle\ x_i \phi_i(t),\ y_j \phi_j(t)\ \rangle \right) \\
&=^{*0} \sum_{i=1}^{I} \left(\sum_{j=1}^{I} x_i y_j\ \langle\ \phi_i(t),\ \phi_j(t)\ \rangle \right) \\
&=^{*1} \sum_{i=1}^{I} \Big(x_i y_i\ \langle\ \phi_i(t),\ \phi_i(t)\ \rangle \Big) \\
&=^{*2} \sum_{i=1}^{I} \Big(x_i y_i \Big) \\
&= \langle\ \underline{x},\ \underline{y}\ \rangle
\end{aligned}$$

prodotto interno nello spazio euclideo.

*0: per linearità

*1: ortogonalità dei segnali della base

*2: normalizzazione dei segnali della base

ENERGIA

$$E_x = \langle\ x(t),\ x(t)\ \rangle = \sum_{i=1}^{I} x_i^2$$

NORMA

$$||x(t)|| = \sqrt{E_x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{I} x_i^2} = ||\underline{x}||$$

DISTANZA

$$\begin{aligned} d^2(x(t), y(t)) &= ||x(t) - y(t)||^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - y(t)]^2 dt \\ &= \dots \end{aligned}$$

$$\left(\quad x(t) - y(t) = \sum x_i \phi_i(t) - \sum y_i \phi_i(t) = \sum (x_i - y_i) \phi_i(t) \to \underline{x} - \underline{y} \quad \right)$$

$$\begin{aligned} \dots &= ||\underline{x} - \underline{y}||^2 \\ &= d^2(\underline{x}, \underline{y}) \end{aligned}$$