Compito Fondamenti di Elettronica – prima prova intermedia – Corso di Laurea in Ingegneria Informatica 12/4/2019. Testo e soluzioni.

Esercizio 1/5 – Tema A

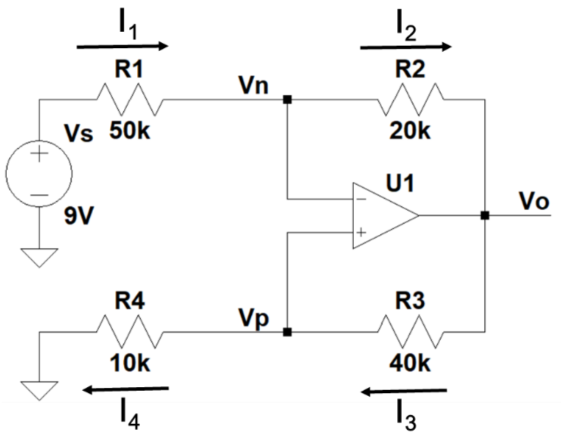


Figura 1: amplificatore con doppia reazione, negativa e positiva

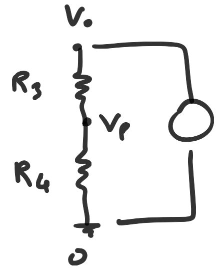
1. Dato il circuito in figura, dove Vs è una tensione continua pari a 9 V, R_1 = 50kΩ, R_2 = 20kΩ, R_3 = 40kΩ, R_4 = 10kΩ, e U1 è un amplificatore operazionale ideale,

   1.1 Scrivere l'espressione di Vp in funzione di Vo
   1.2 Calcolare il guadagno in tensione Vo/Vs
   1.3 Calcolare il valore della corrente I_2 e della corrente I_3
   1.3 Calcolare il valore di Vn e Vp

Soluzione

Notiamo che in questo circuito è presente sia una retroazione (data dalla rete R_1-R_2) , o un feedback negativo che un feedback positivo (dato dalla rete R_3-R_4). Facciamo l'ipotesi che il feedback negativo prevalga, e che valga quindi il principio di massa virtuale. Come vedremo, la validità di questa ipotesi dipende dai valori delle resistenze del circuito.

Dato che la corrente entrante nell'ingresso non invertente è nulla, R_3 e R_4 formano un partitore di tensione tra Vo e massa, quindi (1.1)



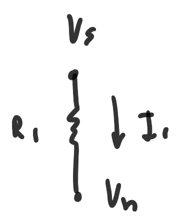
$$\frac{V_o}{R_3+R_4} = \frac{V_p}{R_4}$$

partitore di tensione

$$V_P = V_o\frac{R_4}{R_3+R_4} = V_o\frac{10}{10+40} = \frac{1}{5}V_o = V_N$$

V_P è uguale a V_N per il principio di massa virtuale.

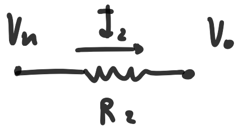
Calcolo la corrente I_1 e sostituisco a V_N la sua espressione:



$$I_1 = \frac{V_s - V_N}{R_1} = \frac{V_s}{R_1} - \frac{V_o}{5R_1}$$

Noto che la corrente entrante negli ingressi dell'opamp è nulla, quindi

$$I_2 = I_1$$



$V_n - V_o = I_2 R_2$

Calcolo la tensione di uscita V_o a partire dal nodo V_N

$$V_o = V_n - I_2 R_2 = \frac{V_o}{5} - \left(\frac{V_s}{R_1} - \frac{V_o}{5R_1}\right) R_2$$

$$V_o = \frac{V_o}{5} - V_s \frac{R_2}{R_1} + V_o \frac{R_2}{5R_1}$$

$$-V_s \frac{R_2}{R_1} = V_o - \frac{V_o}{5} - V_o \frac{R_2}{5R_1}$$

$$-V_s \frac{R_2}{R_1} = V_o \left(1 - \frac{1}{5} - \frac{R_2}{5R_1}\right)$$

Il guadagno in tensione (1.2) è dato da:

$$A_V = \frac{V_o}{V_s} = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{\frac{4}{5} - \frac{R_2}{5R_1}} \right)$$

Sostituendo i valori $R_1 = 50\ k\Omega$, $R_2 = 20\ k\Omega$ e $V_s = 9$ V si ottiene

$(V_o = A_V V_s)$

$$V_o = -9\frac{2}{5}\left(\frac{1}{\frac{4}{5} - \frac{2}{25}}\right) = -9\frac{2}{5}\left(\frac{25}{18}\right) = -5\ V$$

dato che il guadagno vale -5/9.
Le tensioni V_N e V_P valgono entrambe - 1 V:
$V_N = V_P = V_o/5 = -1$ V (1.4);
la corrente $I_2 = I_1$ (1.3) è data da $(V_N – V_o)/R_2 = 4/20 = 0.2$ mA;
la corrente $I_3 = I_4 = (V_o – V_P)/R_3 = (-5 – (-1))/40 = -4/40 = - 0.1$ mA (1.3).

Commento

1) Poichè la tensione V_s = 9 V è connessa all'ingresso invertente dell'amplificatore, la tensione di uscita è negativa. Quindi anche $V_n = V_p = V_o/5$ assumono valori negativi. Di conseguenza, se si adotta il verso mostrato nella Figura per le correnti I_3 e I_4, queste ultime avranno valore negativo (oppure verso opposto e valore positivo). L'uscita dell'amplificatore operazionale deve quindi assorbire una corrente pari a $I_2 + |I_3| = 0.3$ mA.

2) In questo circuito si utilizza sia la retroazione negativa che quella positiva. Con i valori R_1-R_4 adottati, la retroazione negativa prevale e si ottiene una tensione di uscita finita. Tuttavia ci si può chiedere per quali valori delle resistenze si otterrà una condizione per la

quale il guadagno diventa teoricamente infinito (in pratica si otterrebbe la saturazione della tensione di uscita dell'amplificatore). Facendo riferimento all'espressione del guadagno,

$$A_V = \frac{V_o}{V_s} = -\frac{R_2}{R_1}\left(\frac{1}{\frac{4}{5} - \frac{R_2}{5R_1}}\right)$$

Mantenendo i valori di R_3 e R_4 pari rispettivamente a 40 kΩ e 10 kΩ, si vede che in questo caso particolare il guadagno diventa infinito per

$$\frac{4}{5} - \frac{R_2}{5R_1} = 0$$

Soluzione dell'esercizio con la sovrapposizione degli effetti

Una soluzione alternativa, che permette anche di studiare il comportamento del guadagno in funzione dei valori scelti per le resistenze si ottiene applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. In questo caso sovrapponiamo l'effetto di V_S e quello di V_o per calcolare $V_N = V_P$ (come se V_o fosse un generatore indipendente)

$$V_n = V_p = V_s\frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_o\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

uguagliando questa espressione di $V_N = V_P$ a quella trovata precedentemente è possibile trovare l'espressione del rapporto V_o / V_s , ovvero del guadagno, in funzione di R_1, R_2, R_3 e R_4:

$$V_n = V_p = V_o\frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$V_s\frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_o\frac{R_1}{R_1 + R_2} = V_o\frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$V_s\frac{R_2}{R_1 + R_2} = V_o\left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$$

$$V_s = V_o\left(\frac{R_4}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)\frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$$V_s = V_o\left[\left(\frac{R_4}{R_2}\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4}\right) - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right]$$

$$V_o = V_s\frac{1}{\frac{1 + \frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} - \frac{R_1}{R_2}} = V_s\frac{1 + \frac{R_3}{R_4}}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{R_1}{R_2}\left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right)}$$

Con i valori mostrati in figura, $1+R_3/R_4 = 5$, $1+R_1/R_2 = 3.5$, $R_1/R_2 = 2.5$

quindi

$$\frac{V_o}{V_s} = A_V = \frac{1+\frac{R_3}{R_4}}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)-\frac{R_1}{R_2}\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right)} = \frac{5}{3.5-2.5\times 5} = \frac{5}{3.5-12.5} = \frac{5}{-9} = -\frac{5}{9}$$

che conferma il risultato trovato precedentemente.
Si può quindi usare anche il principio di sovrapposizione degli effetti per risolvere il problema.

Ora variamo il valore delle resistenze in modo da trovare i valori per i quali il feedback positivo domina e l'amplificatore satura (o la tensione di uscita diverge): il denominatore dell'espressione del guadagno in tensione si annulla se

$$1+\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_1}{R_2}-\frac{R_1R_3}{R_2R_4}=0$$

$$1-\frac{R_1R_3}{R_2R_4}=0$$

Quindi se poniamo

$$R_1R_3 = R_2R_4$$

V_o diventa infinita (la tensione di uscita satura al massimo valore possibile).

Listato SPICE del circuito

```
* 20190412 primo compitino FDE 1.asc
XU1 Vn Vp Vo opamp Aol=1000k GBW=100Meg
R1 Vn N001 50k
R2 Vn Vo 20k
R3 Vo Vp 40k
R4 Vp 0 10k
Vs N001 0 9V
.lib opamp.sub
.op
.backanno
.end
```

Valori delle grandezze nel punto operativo ottenute con la simulazione SPICE

```
       --- Operating Point ---

V(vo):          -4.99999       voltage
V(vp):          -0.999998      voltage
V(vn):          -0.999993      voltage
V(n001):        9              voltage
I(R4):          -9.99998e-005  device_current
I(R3):          -9.99998e-005  device_current
I(R2):          0.0002         device_current
I(R1):          -0.0002        device_current
```

```
I(Vs):          -0.0002         device_current
Ix(u1:3):       0.0003          subckt_current
```

Si noti che in SPICE il segno della corrente dipende dalla numerazione dei nodi: la corrente entra nel primo nodo indicato ed esce dal successivo. Per V_S pari a 9 V la simulazione conferma V_o = -5V e V_P = V_N =-1 V. I valori sono approssimati a causa del valore finito del guadagno ad anello aperto dell'opamp. La corrente I_x è la corrente assorbita in uscita dall'amplificatore, pari, come calcolato, a 0.3 mA.

Seconda parte dell'esercizio

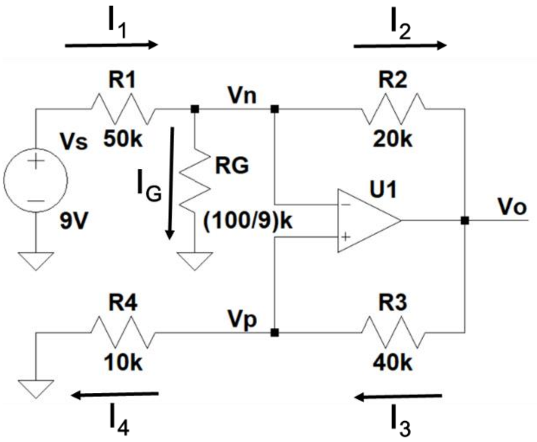


Figura 2: Inserendo una resistenza R_G tra V_N e massa è possibile aumentare il valore assoluto del guadagno in tensione

1.4 Connettere una resistenza da 100/9 kΩ tra Vn e massa, come mostrato in figura, e calcolare la corrente IG e il nuovo valore di tensione di uscita Von

1.5 Quale valore dovrebbe avere la resistenza RG per ottenere un valore di tensione di uscita
pari al doppio del valore Von trovato senza R_G ?
quale valore dovrebbe avere per moltiplicare ulteriormente per 2 il guadagno rispetto a quello trovato al punto 1.4 ?

Soluzione (1.4):

Inserire la resistenza R_G non cambia la relazione tra V_o e $V_N = V_P = V_o/5$, perchè il partitore di tensione formato da R_3 e R_4 rimane invariato. Calcolo la corrente I_1 per V_s = 9 V

$$I_1 = \frac{V_s - V_N}{R_1} = \frac{9}{50} - \frac{V_o}{250}$$ (come prima)

calcolo la corrente I_G

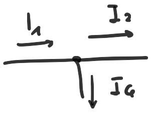
Vn ≈ 0 massa

$$I_G = \frac{V_N}{R_G} = \frac{9V_o}{500}$$

calcolo la corrente I_2

$$I_2 = \frac{V_N - V_o}{R_2} = \frac{\frac{V_o}{5} - V_o}{20} = \frac{V_o}{100} - \frac{V_o}{20} = -\frac{4V_o}{100}$$

La corrente I_1 è la somma di I_G e I_2. Imponendo questa condizione alle espressioni di I_G e I_2 appena trovate, posso calcolare il valore di V_o, che è pari a -10 V.



$$I_1 = I_G + I_2$$

$$\frac{9}{50} - \frac{V_o}{250} = \frac{9V_o}{500} - \frac{4V_o}{100}$$

$$\frac{9}{50} = V_o\left(\frac{1}{250} + \frac{9}{500} - \frac{4}{100}\right)$$

$$\frac{9}{50} = V_o\left(\frac{2+9-20}{500}\right)$$

$$\frac{9}{50}\left(\frac{500}{-9}\right) = V_o = -10\ V$$

La nuova tensione di uscita V_{on} è di -10 V (1.4).
I_G = (-2 V)/(11.11 kΩ) = -180 μA.
I_2 = 40 V/100kΩ = 400 μA;
I_1=I_G+I_2= -180 + 400= 220 μA = I(V_s). Questa è la corrente che deve essere erogata dal generatore di tensione collegato all'ingresoo.
Il valore di R_G =100/9 kΩ soddisfa la condizione richiesta dalla domanda 1.5, e non sono necessari altri calcoli.

Soluzione alternativa: trasformare V_S , R_1 e R_G in un generatore equivalente di Thevenin V_{EQ}

Un'altra soluzione possibile consiste nel sostituire V_S, R_1 e R_G con un generatore di tensione equivalente di Thevenin, in modo da ricondurre il circuito al caso precedente:

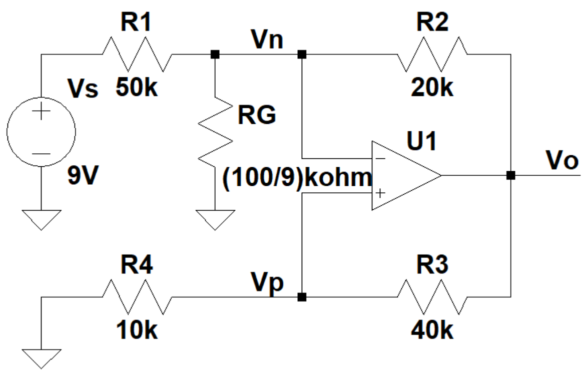


Figura 3: Il circuito con R_G

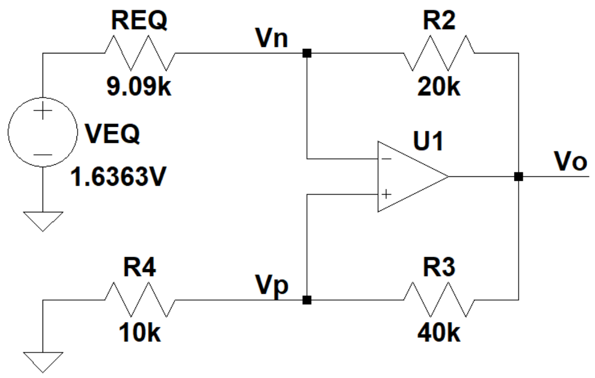


Figura 4: L'amplificatore dopo aver sostituito V_S , R_1 e R_G con l'equivalente di Thevenin V_{EQ}, R_{EQ}

$$V_{EQ} = V_s \frac{R_G}{R_1 + R_G} = 9 \frac{100/9}{50 + \frac{100}{9}} = \frac{100}{\frac{550}{9}} = \frac{900}{550} = 1.6363\ V$$

$$R_{EQ} = R_1 || R_G = \frac{R_1 R_G}{R_1 + R_G} = \frac{50 \times \frac{100}{9}}{\frac{550}{9}} = \frac{5000}{9} \times \frac{9}{550} = 9.090\ k\Omega$$

Notiamo che così facendo abbiamo "fatto sparire" R_G, ottenendo un circuito identico a quello iniziale, dove a R_1 si sostiuisce R_{EQ} e a V_S si sostituisce V_{EQ}. A questo punto operiamo questa sostituzione nelle formule già trovate:

$$V_o = V_s \frac{1+\frac{R_3}{R_4}}{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)-\frac{R_1}{R_2}\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right)} \; diventa \; V_o = V_{EQ} \frac{1+\frac{R_3}{R_4}}{\left(1+\frac{R_{EQ}}{R_2}\right)-\frac{R_{EQ}}{R_2}\left(1+\frac{R_3}{R_4}\right)} = V_o$$

$$= 1.6363 \frac{1+\frac{40}{10}}{\left(1+\frac{9.090}{20}\right)-\frac{9.090}{20}\left(1+\frac{40}{10}\right)}$$

$$= 1.6363 \frac{5}{(1+0,4545)-0,4545\times 5} == 1.6363 \frac{5}{(1,4545)-2.2725} = -1.6363 \frac{5}{0,818} =$$

$$= -10.001 \cong -10\, V\; c.v.d.$$

Simulazione SPICE del punto operativo con R_G:

Listato SPICE

```
*primo compitino FDE rivisto il 20221019 Thevenin.asc
XU1 Vn Vp Vo opamp Aol=1000k GBW=100Meg
REQ Vn N001 9.09k
R2 Vn Vo 20k
R3 Vo Vp 40k
R4 Vp 0 10k
VEQ N001 0 1.6363V
.lib opamp.sub
.op
.backanno
.end

       --- Operating Point ---

V(vo):          -10.0017       voltage
V(vp):          -2.00035       voltage
V(vn):          -2.00034       voltage
V(n001):        1.6363         voltage
I(R4):          -0.000200035   device_current
I(R3):          -0.000200035   device_current
I(R2):          0.00040007     device_current
I(Req):         -0.00040007    device_current
I(Veq):         -0.00040007    device_current
Ix(u1:3):       0.000600105    subckt_
```

E se volessimo raddoppiare ulteriormente la tensione, portandola a -20V ?

Se la tensione di uscita raddoppia e si porta a -20 V, V_P e V_N, che rimangono pari a 1/5 di V_o, si porteranno a - 4 V.
Conosco quindi la tensione ai capi di R_G in queste condizioni, pari a V_N = -4 V; per determinare il valore di R_G basta trovare la corrente I_G corrispondente a V_S= 9 V, V_o = -20V

Quindi

$$I_1 = \frac{V_s - V_N}{R_1} = \frac{9+4}{50} = 0.26\, mA$$

$$I_2 = \frac{V_N - V_o}{R_2} = \frac{-4+20}{20} = 0.8\, mA$$

$I_1 = I_2 + I_G$ --> $I_G = I_1 - I_2$ = 0.26 mA – 0.8 mA = -0.54 mA

Quindi deve essere $R_G = V_N/I_G$ = -4/-0.54 = 7.407 kΩ (1.5)

Verifico che i calcoli siano corretti con una simulazione, utilizzando il circuito di

Simulazione SPICE

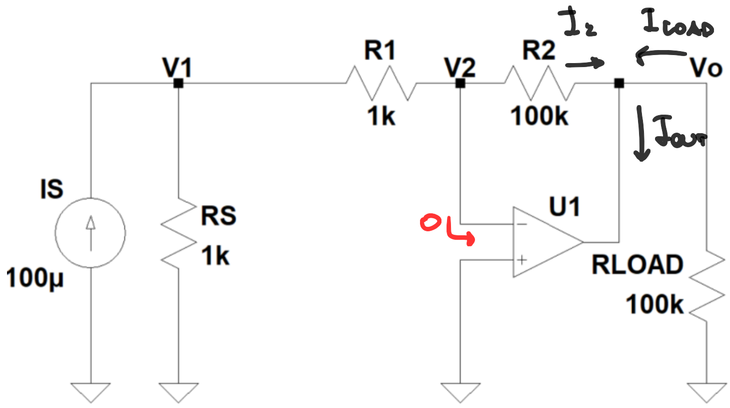
```
       --- Operating Point ---

V(vo):          -20.0028       voltage
V(vp):          -4.00057       voltage
V(vn):          -4.00055       voltage
V(n001):        9              voltage
I(Rg):          -0.000540104   device_current
I(R4):          -0.000400057   device_current
I(R3):          -0.000400057   device_current
I(R2):          0.000800115    device_current
I(R1):          -0.000260011   device_current
I(Vs):          -0.000260011   device_current
Ix(u1:3):       0.00120017     subckt_current
```

Vp = (1/5)Vo	Vo/Vs = -5/9	I2 = 0.2 mA	I3 = 0.1 mA	Vn = -1 V Vp = -1 V	Von =

RG = 7407Ω

Esercizio 2/5 – Tema A



$I_L = \dfrac{0 - V_0}{R_L}$

2. Dato il circuito in figura, nel quale il parallelo IS//RS rappresenta un generatore di corrente (Norton) con Is = 100 µA, U1 è un amplificatore operazionale ideale e i valori delle resistenze sono espressi in kΩ (1k = 1kΩ),

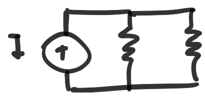
2.1 Determinare l'espressione del guadagno di transimpedenza Vo/Is e calcolare la tensione di uscita Vo.

2.2 Quanto vale la resistenza di ingresso del circuito vista al nodo V1 (eliminando IS e RS)?

2.3 Calcolare la corrente erogata in uscita dall'amplificatore operazionale

Soluzione.

2.1 Esiste una retroazione negativa, quindi vale il principio di massa virtuale.
Il nodo V2 si trova quindi a massa (0 V);
di conseguenza, la corrente I_S = 100 µA si divide in parti uguali nelle due resistenze da 1 kΩ, R_S e R_1;
la corrente I_1 che scorre in R1 è di 50 µA (con verso entrante da V1 a V2);
la tensione V1 è pari a 50 µA × 1kΩ = 50 mV.



La corrente I_2 che scorre in R2, entrante da V2 a V_o è uguale a I_1, perchè la corrente entrante nell'ingresso invertente dell'opamp è nulla. Quindi $V_o = V_- - I_1R_2 = 0 - 50$ µA x 100 kΩ = $-5 \times 10^{-5} \times 10^5 = -5$ V. *

$V_- \xrightarrow[I_2]{R_2} V_0$

Il guadagno di transresistenza $R_m = V_o/I_s = -I_1R_2/2I_1 = -R_2/2 = -5 \times 10^4$ (la corrente in uscita va da Vo a massa) (2.1).

$R_{in} = \dfrac{V_x}{i_x}$ $\quad i_x = \dfrac{V_x - V_-}{R_1}$ ↳ $R_1 = \dfrac{V_x}{i_x}$ $\quad R_{in} = R_x$

2.2 La resistenza di ingresso del circuito è R1 = 1 kΩ. *₁

2.3 La corrente I_L che scorre da massa verso V_o nel carico R_{LOAD} è $I_{LOAD} = -V_o/R_{LOAD}$=5V/100kΩ = 50 µA. La corrente che scorre in R2 (con il verso da V2 a V_o) è $I_2 = I_1$ = 50 µA. Quindi l'uscita dell'amplificatore deve *assorbire* la somma $I_2 + I_{LOAD}$ = 100 µA = 10^{-4} IA = I_{out}.

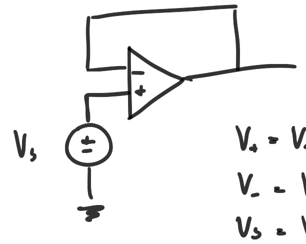
* V_0 non dipende dal carico quindi abbiamo un amplific. ideale, quindi: $R_{out} = 0$

*₁ dato che vogliamo amplificare più corrente possibile, Rin deve essere → 0 così da far passare più corrente possibile.

Vo/Is =-R2/2	Vo = -5V	Rin = R1= 1 kΩ	Iout = 100 μA

Listato SPICE

"Buffer" (non invertente)



$V_+ = V_- = V_s$

$V_- = V_o$

$V_s = V_o$

$A_v = \frac{V_o}{V_s} = 1$

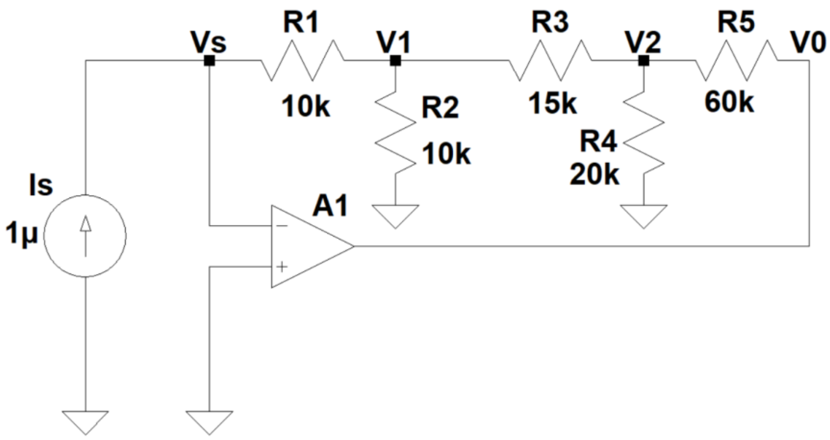
```
20190412 primo compitino FDE2A.asc
XU1 V2 0 Vo opamp Aol=1000K GBW=10Meg
R1 V2 V1 1k
R2 Vo V2 100k
RLOAD 0 Vo 100k
IS 0 V1 100µ
RS V1 0 1k
.lib opamp.sub
.op
.backanno
.end
```

Simulazione SPICE

```
     --- Operating Point ---

V(vo):          -4.99975       voltage
V(v2):          4.99984e-006   voltage
V(v1):          0.0500025      voltage
I(Is):          0.0001         device_current
I(Rs):          5.00025e-005   device_current
I(Rload):       4.99974e-005   device_current
I(R2):          -4.99975e-005  device_current
I(R1):          -4.99975e-005  device_current
Ix(u1:3):       9.99949e-005   subckt_current
```

Esercizio 3/5



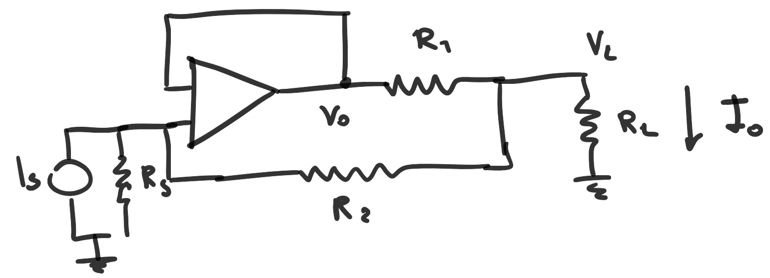
3. Considerando il circuito in figura, nel quale Is è un generatore di corrente pari a 1 μA, e i valori delle resistenze sono espressi in kΩ (es. 10k = 10 kΩ),

   3.1 Calcolare il valore di V1 e la corrente I(R2)

   3.2 Calcolare il valore di V2 e la corrente I(R3)

   3.3 Calcolare il valore di Vo e le correnti I(R4) e I(R5)

Soluzione – Tema A.



1) Calcolare la corrente I_o in R_L, calcolare il guadagno $\frac{I_o}{I_s}$

2) Calcolare R_o

sovrapposizione effetto di I_s e V_L

3.1 Nella resistenza R_1 scorre (da V_s a V_1) la corrente $I_s = 1\ \mu A$. Quindi $V_1 = -I_sR_1 = -10$ mV.

La corrente I_2 che scorre nella resistenza R_2 (da massa a V_1) è $10mV/10k\Omega = 1\ \mu A$.

3.2 La corrente I_3 che scorre nella resistenza R_3 (da V_1 a V_2) è la somma delle correnti in R_1 e R_2 ed è quindi pari a 2 μA.

La tensione $V_2 = V_1 – I_3R_3 = -10\ mV - 2\mu A \times 15k\Omega = -10\ mV – 30\ mV = -40\ mV$.

3.3 La corrente I_4 che scorre nella resistenza R_4 (da massa a V_2) è $40\ mV/20k\Omega = 2\ \mu A$.

La corrente I_5 che scorre nella resistenza R_5 (da V_2 a V_o) è data dalla somma delle correnti in R_3 e in R_4, cioè 4 μA.

La tensione di uscita V_o è data da $V_2 – I_5R_5 = -\ 40\ mV - 240\ mV = -280\ mV$.

Listato SPICE

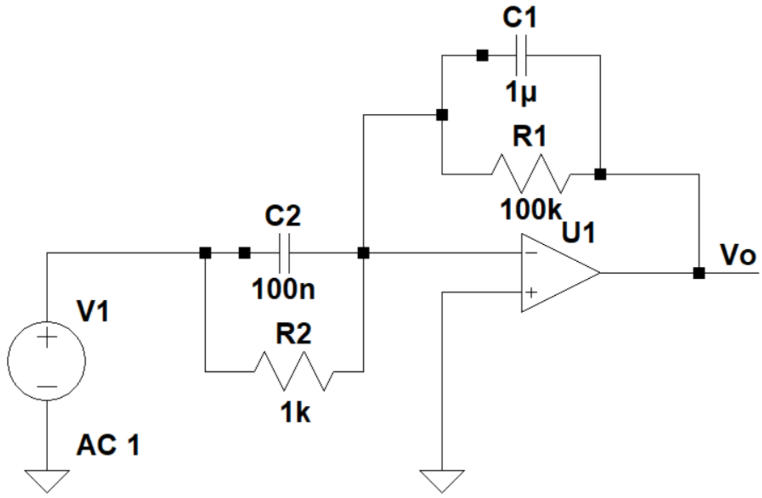
```
*20190412 primo compitino FDE 3.asc
XA1 Vs 0 V0 opamp Aol=1000k GBW=10Meg
R1 Vs V1 10k
Is 0 Vs 1µ
R3 V1 V2 15k
R5 V2 V0 60k
R4 0 V2 20k
R2 0 V1 10k
.lib opamp.sub
.op
.backanno
.end
```

Simulazione SPICE

```
       --- Operating Point ---

V(v0):          -0.279996      voltage
V(vs):          2.8e-007       voltage
V(v1):          -0.00999972    voltage
V(v2):          -0.0399993     voltage
I(Is):          1e-006         device_current
I(R2):          9.99972e-007   device_current
I(R4):          1.99996e-006   device_current
I(R5):          3.99994e-006   device_current
I(R3):          1.99997e-006   device_current
I(R1):          1e-006         device_current
Ix(a1:3):       3.99994e-006   subckt_current
```

Esercizio 4/5



4. Si consideri il circuito riportato in figura, supponendo l'amplificatore operazionale ideale, con R1 = 100 kΩ, C1 = 1 µF, R2= 1 kΩ e C2=100 nF.

4.1 Si calcoli la funzione di trasferimento al variare della pulsazione s, W (s)

4.2 Si disegni il diagramma di Bode del modulo in dB della funzione di trasferimento W (s)

Soluzione – Tema A

La funzione di trasferimento risulta essere

$$A_V(j\omega) = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$Z_1 = R_1||C_1 = \frac{R_1\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

$$Z_2 = R_2||C_2 = \frac{R_2\frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

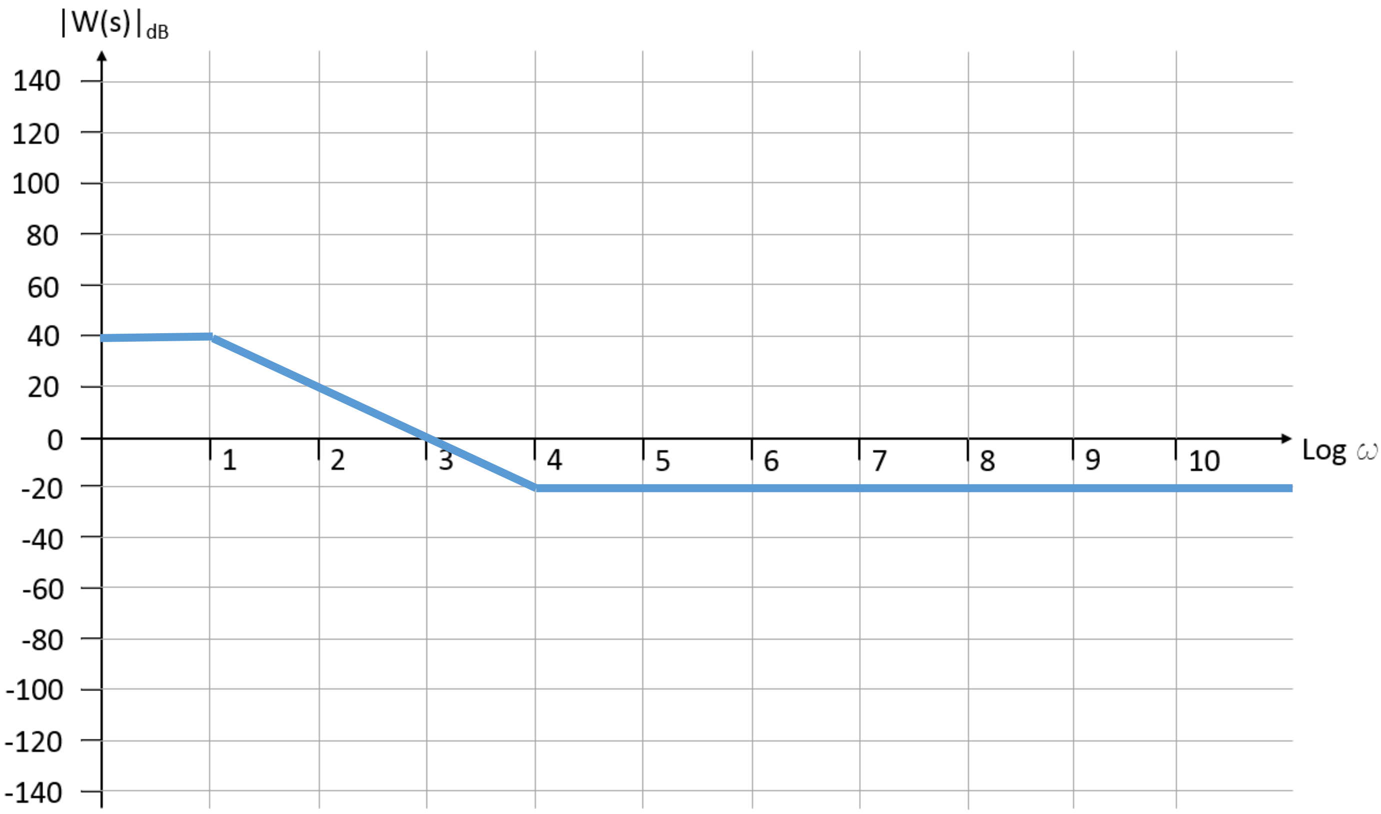
$$-\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1 + j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_1 C_1}\right) = -\frac{R_1}{R_2}\left(\frac{1 + j\omega/\omega_2}{1 + j\omega/\omega_1}\right)$$

Il guadagno a centro banda (a basse frequenze) è $-R_1/R_2 = -100$. In dB,
20 log $|A_V|$ = 20 log 100 = 40 dB.

Il guadagno ad alta frequenza si ottiene facendo il limite per $\omega \rightarrow \infty$;
$A_{Vhf} = -C_2/C_1 = 10^{-7}/10^{-6} = 10^{-1}$
20 log $|A_{Vhf}|$ = 20 log 10^{-1} = -20 dB

$\omega_1 = 1/R_1C_1 = 1/(10^5 \times 10^{-6}) = 10$ rad/s

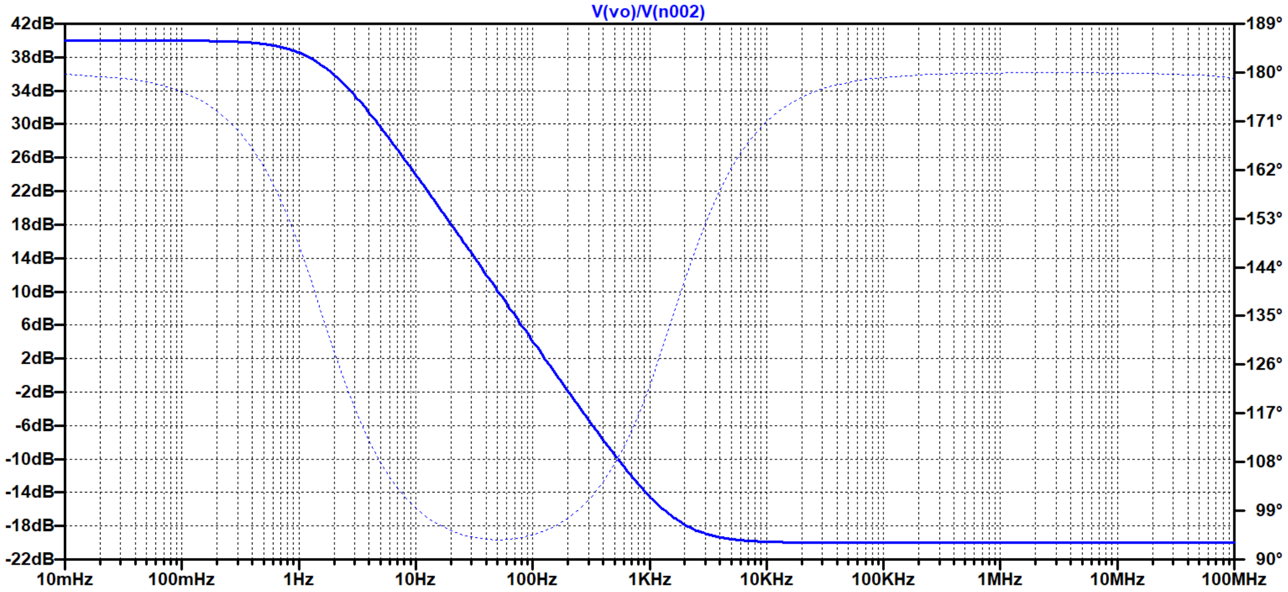
$\omega_2 = 1/R_2C_2 = 1/(10^3 x 10^{-7}) = 10^4$ rad/s



Netlist SPICE

```
* Primo compitino FDE 4.asc
XU1 N001 0 Vo opamp Aol=100K GBW=10000Meg
C1 Vo N001 1µ
R1 Vo N001 100k
C2 N001 N002 100n
R2 N001 N002 1k
V1 N002 0 AC 1
.ac dec 10 0.01 100MEG
.lib opamp.sub
.backanno
.end
```

Simulazione SPICE

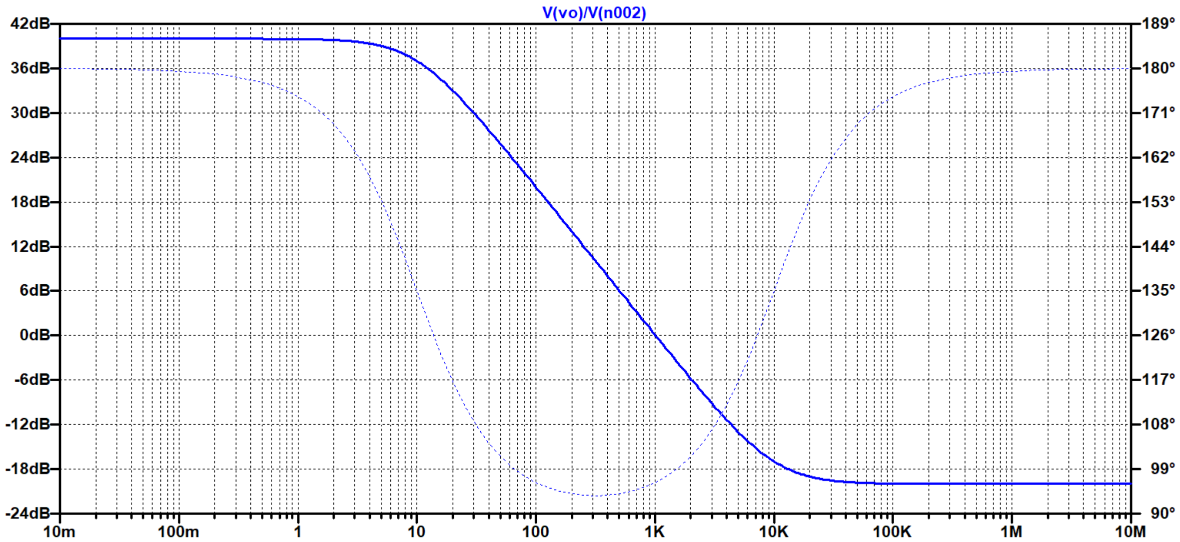


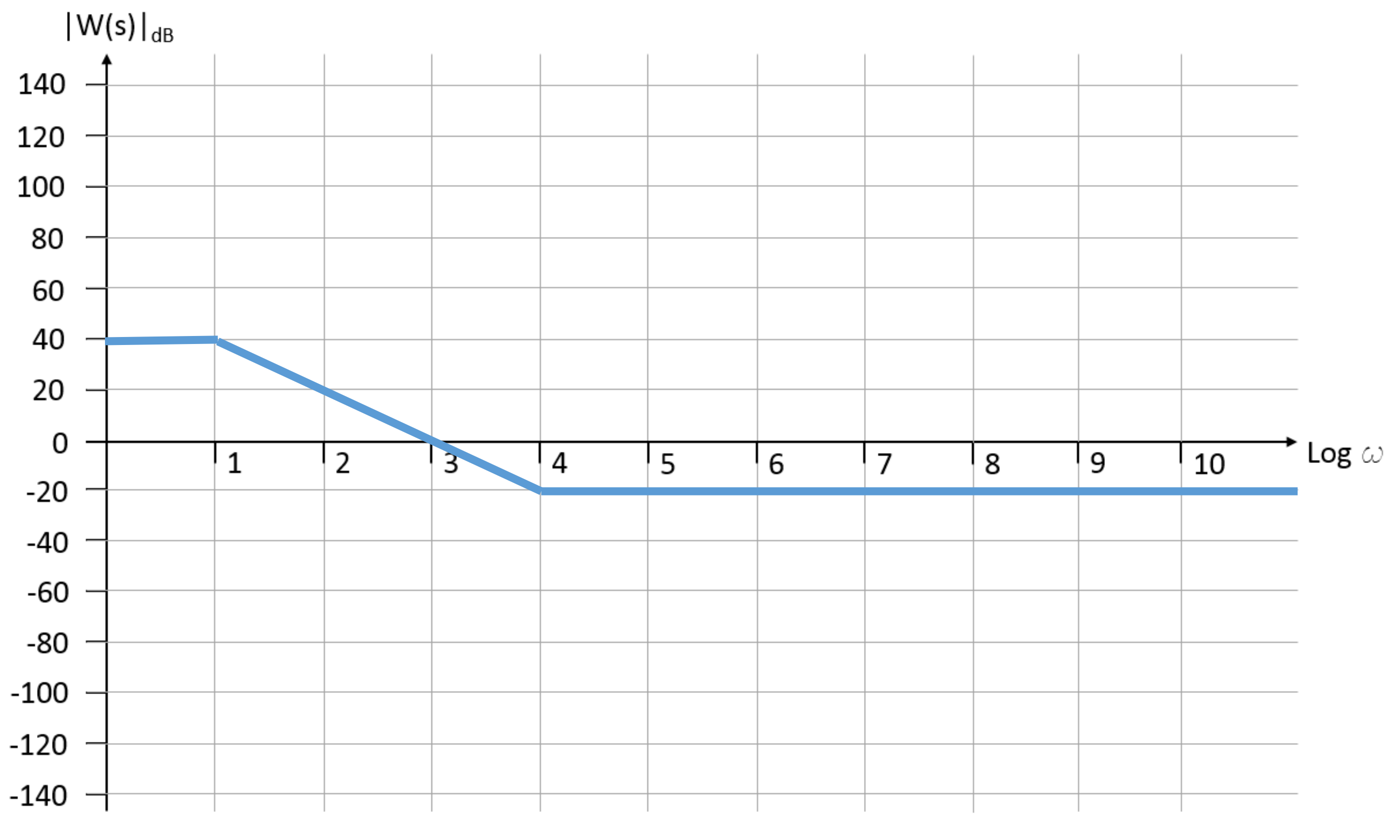
La netlist precedente fornisce la funzione di trasferimento dell'amplificatore in funzione della frequenza. Per ottenere il diagramma di Bode dell'ampiezza e della fase, funzione della pulsazione in rad/s, si deve definire la variabile ω = w, come nel listato seguente

Netlist SPICE con output in rad/s (istruzioni evidenziate)

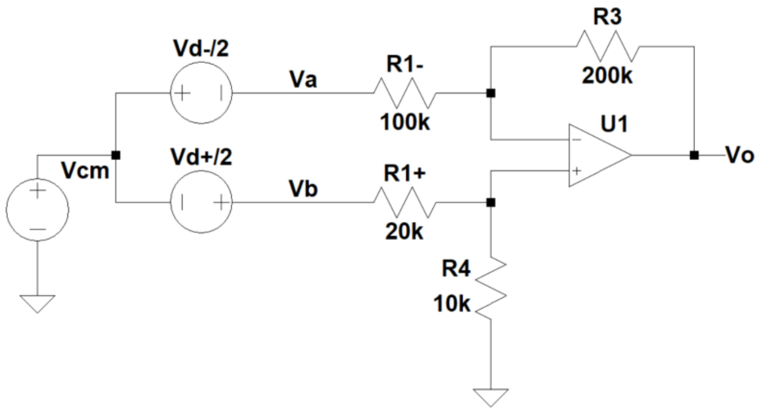
```
* Primo compitino FDE 4.asc
XU1 N001 0 Vo opamp Aol=100K GBW=10000Meg
C1 Vo N001 1µ
R1 Vo N001 100k
C2 N001 N002 100n
R2 N001 N002 1k
V1 N002 0 AC 1
.lib opamp.sub
.ac list {w/(2*pi)}
.step dec param w 0.01 10MEG 10
.backanno
.end
```

Quest'ultima netlist produce il diagramma di Bode mostrato nella pagina seguente, confrontato con il diagramma approssimato.


V(vo)/V(n002)
42dB
36dB
30dB
24dB
18dB
12dB
6dB
0dB
-6dB
-12dB
-18dB
-24dB
189°
180°
171°
162°
153°
144°
135°
126°
117°
108°
99°
90°
10m
100m
1
10
100
1K
10K
100K
1M
10M


|W(s)|dB
140
120
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Log ω

Esercizio 5/5



5. Dato il circuito in figura, nel quale U1 è un amplificatore operazionale ideale, e il valore delle resistenze è espresso in kΩ,
   - 5.1 Calcolare il guadagno differenziale Ad = Vo/Vd, con Vcm = 0 V.
   - 5.2 Calcolare il guadagno di modo comune Acm = Vo/Vcm, con Vd = 0 V.
   - 5.3 Calcolare il CMRR in dB
   - 5.4 Modificare il valore di R1+ e R4 in modo da ottenere Acm = 0, CMRR = ∞
   - 5.5 Calcolare, dopo la modifica al punto 5.4, la resistenza differenziale di ingresso.

Soluzione – Tema A.
Quando agli ingressi sono applicate le tensioni -Vd/2=Va e +Vd/2=Vb, com Vcm=0, il principio di sovrapposizione degli effetti fornisce

$$V_o = -\frac{V_d}{2}\left(-\frac{R_3}{R_{1-}}\right) + \frac{V_d}{2}\left(\frac{R_4}{R_{1+}+R_4}\right)\left(1+\frac{R_3}{R_{1-}}\right) = \frac{V_d}{2}\left(\left(\frac{200}{100}\right) + \left(\frac{10}{20+10}\right)\left(1+\frac{200}{100}\right)\right)$$
$$= \frac{V_d}{2}\left(2+\left(\frac{1}{3}\right)(1+2)\right) = V_d\frac{3}{2}$$

quindi A_d = 3/2; 20 log(3/2) = 3.52 dB (5.1)

Listato SPICE

```
* D:\@FONDAMENTI DI ELETTRONICA\circuiti.cir\20190412 primo compitino FDE 5A.asc
R1- N001 Va 100k
R1+ N003 Vb 20k
R3 Vo N001 200k
R4 0 N003 10k
XU1 N001 N003 Vo opamp Aol=1000000MEG GBW=10Meg
Vd+/2 Vb N002 10m
Vd-/2 N002 Va 10m
Vcm N002 0 0
.lib opamp.sub
.op
.backanno
.end
```

Simulazione SPICE (per Vd/2 = 10 mV, Vd = 20 mV, Vcm = 0 V)

```
        --- Operating Point ---

V(n001):        0.00333333     voltage
V(va):          -0.01          voltage
V(n003):        0.00333333     voltage
V(vb):          0.01           voltage
V(vo):          0.0300002      voltage
V(n002):        0              voltage
I(R4):          -3.33333e-007  device_current
I(R3):          1.33334e-007   device_current
I(R1+):         -3.33333e-007  device_current
I(R1-):         1.33333e-007   device_current
I(Vcm):         -2e-007        device_current
I(Vd-/2):       -1.33333e-007  device_current
I(Vd+/2):       -3.33333e-007  device_current
Ix(u1:3):       -9.75077e-008  subckt_current
```

Quando agli ingressi è applicata la tensione comune V_{cm} e V_d = 0, il principio di sovrapposizione degli effetti fornisce

$$V_o = V_{cm}\left(-\frac{R_3}{R_{1-}}\right) + V_{cm}\left(\frac{R_4}{R_{1+}+R_4}\right)\left(1+\frac{R_3}{R_{1-}}\right) = V_{cm}\left(\left(-\frac{200}{100}\right)+\left(\frac{10}{20+10}\right)\left(1+\frac{200}{100}\right)\right)$$
$$= V_{cm}\left(-2+\left(\frac{1}{3}\right)(1+2)\right) = -V_{cm}$$

quindi A_{cm} = -1; 20 log(-1) = 0 dB (5.2) ; CMRR = 3.52 – 0 = 3.52 dB (5.3)

CMRR= 3.52 dB	A_d=3/2	A_{CM} = -1

Simulazione SPICE (per Vcm = 20 V, Vd = 0 V)

```
      --- Operating Point ---

V(n001):        6.66667        voltage
V(va):          20             voltage
V(n003):        6.66667        voltage
V(vb):          20             voltage
V(vo):          -20            voltage
V(n002):        20             voltage
I(R4):          -0.000666667   device_current
I(R3):          -0.000133333   device_current
I(R1+):         -0.000666667   device_current
I(R1-):         -0.000133333   device_current
I(Vcm):         -0.0008        device_current
I(Vd-/2):       0.000133333    device_current
I(Vd+/2):       -0.000666667   device_current
Ix(u1:3):       1.3365e-006    subckt_current
```

Perchè l'amplificatore sia bilanciato (A_{cm} = 0, V_o unicamente dipendente da v_d = vb-va) deve essere:

$$\left(\frac{R_3}{R_{1-}}\right) = \left(\frac{R_4}{R_{1+} + R_4}\right)\left(1 + \frac{R_3}{R_{1-}}\right)$$

ovvero

$$\left(\frac{R_3}{R_{1-}}\right)\left(1 + \frac{R_{1+}}{R_4}\right) = \left(1 + \frac{R_3}{R_{1-}}\right)$$

$$\left(\frac{R_3}{R_{1-}} + \frac{R_{1+}}{R_4}\frac{R_3}{R_{1-}}\right) = \left(1 + \frac{R_3}{R_{1-}}\right)$$

$$\left(1 + \frac{R_{1+}}{R_4}\right)\frac{R_3}{R_{1-}} = \left(1 + \frac{R_3}{R_{1-}}\right)$$

$$\left(1 + \frac{R_{1+}}{R_4} - 1\right)\frac{R_3}{R_{1-}} = 1$$

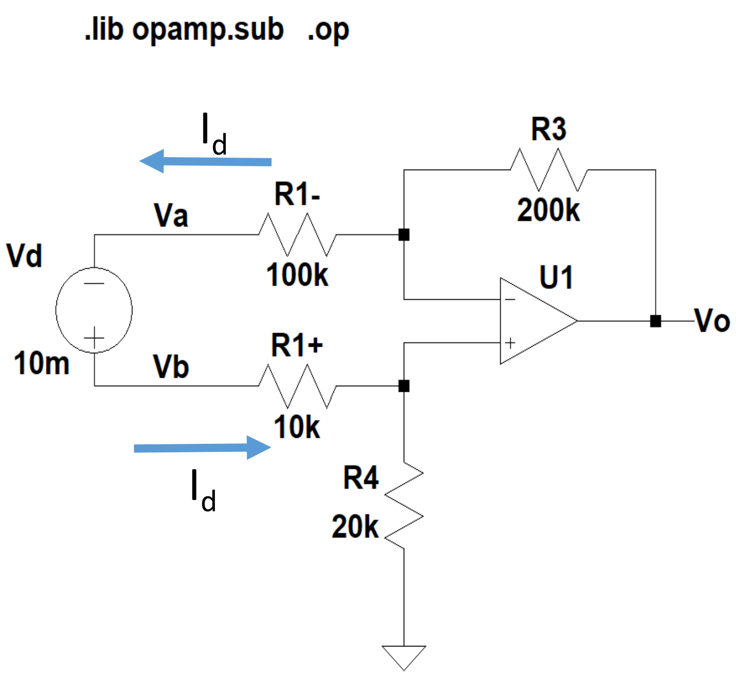
$$\frac{R_{1+}}{R_4}\frac{R_3}{R_{1-}} = 1$$

quindi:

$$\frac{R_{1+}}{R_4} = \frac{R_{1-}}{R_3}$$

La scelta più semplice diventa $R_4 = R_3$ e $R_{1+} = R_{1-} = R_1$

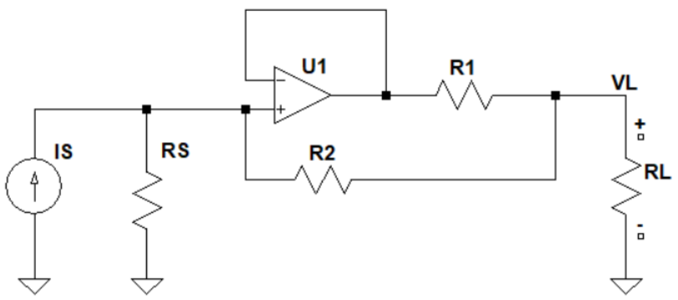
(5.4). La resistenza differenziale vista da un generatore collegato tra i due ingressi Va e Vb è data dalla somma delle resistenze R_{1+} e R_{1-} (5.5): infatti, con riferimento alla figura



$V_- - V_a = I_d R_{1-}$; $V_a = V_- - I_d R_{1-}$
$V_b - V_+ = I_d R_{1+}$; $V_b = V_+ + I_d R_{1+}$
quindi $V_d = V_b – V_a = V_+ + I_d R_{1+} - V_- + I_d R_{1-} = I_d (R_{1+} + R_{1-})$ perchè per il principio di massa virtuale $V_+ = V_-$.

Si noti che se si applica un generatore differenziale come mostrato in figura, il segnale differenziale è dato da $V_d = V_b – V_a$, ma il segnale di modo comune NON E' NULLO.

Esercizio 6



6. Dato il circuito in figura,

6.1 Calcolare la corrente I_o che scorre nella resistenza R_L e il guadagno in corrente I_o/I_S partendo dalla sovrapposizione degli effetti di I_S e di V_L.
6.2 Calcolare la resistenza di uscita del circuito

Soluzione.

In questo circuito l'uscita dell'opamp è connessa all'ingresso invertente, realizzando un feedback negativo; quindi $V_o = V_- = V_+$

6.1 Applichiamo il principio della sovrapposizione degli effetti di I_s e V_L al calcolo di V_+.

Per calcolare l'effetto di I_s , poniamo $V_L = 0$ V. R_s e R_2 risultano in parallelo tra I_s e massa. Quindi il contributo a V_+ dato da I_s sarà I_s x (R_s || R_2).

Per calcolare l'effetto di V_L si apre I_s in modo da annullarla; R2 e R_s sono attraversate dalla stessa corrente e formano un partitore resistivo tra VL e V_+, che contribuisce a V_+ come V_L x $R_s/(R_s + R_L)$. In totale abbiamo:

$$V_+ = I_s \frac{R_s R_2}{R_s + R_2} + V_L \frac{R_s}{R_s + R_2}$$

Dato che $V_- = V_+$, le resistenze R1 e R2 sono sottoposte alla stessa differenza di potenziale (V_+ - V_L). Quindi la corrente totale I_o è la somma delle correnti che scorrono nelle due resistenze, che sono equivalenti a due resistenze in parallelo:

$$I_o = \frac{V_+}{R_1||R_2} - \frac{V_L}{R_1||R_2}$$

sostituisco V_+ :

$$I_o = I_s \frac{R_s||R_2}{R_1||R_2} + V_L\left(\frac{R_s}{R_s+R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2} - \frac{V_L}{R_1||R_2}$$
$$I_o = I_s \frac{R_s||R_2}{R_1||R_2} + V_L\left(\frac{R_s}{R_s+R_2} - 1\right)\frac{1}{R_1||R_2}$$

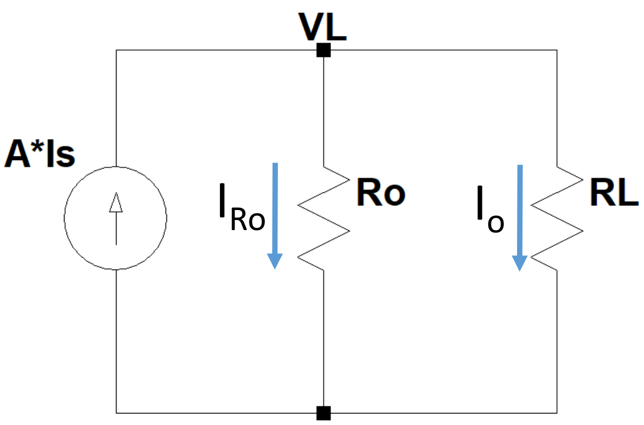
$$I_o = I_s \frac{R_s||R_2}{R_1||R_2} + V_L\left(\frac{R_s - R_s - R_2}{R_s+R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2}$$

$$I_o = I_s \frac{R_s||R_2}{R_1||R_2} - V_L\left(\frac{R_2}{R_s+R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2} \; (*)$$

Come si vede, la corrente in uscita I_o dipende dal carico R_L. Questo significa che il nostro amplificatore di corrente non è ideale, e che dobbiamo schematizzare il bipolo di uscita con un generatore di corrente di Norton con resistenza di Norton in parallelo; questa sarà la resistenza di uscita R_o dell'amplificatore, come mostrato in figura.
La corrente dell'amplificatore, A_I*I_s, si ripartisce tra la resistenza di uscita dell'amplificatore, R_o, e il carico, R_L.
Possiamo quindi scrivere l'espressione della corrente di uscita nella forma $I_o = A_I I_s – V_L/R_o$,

La formula (*) quindi significa quanto segue: la corrente di uscita I_o è pari alla corrente erogata dal generatore di corrente in uscita $A_I I_s = I_s \frac{R_s||R_2}{R_1||R_2}$ diminuita della parte di corrente che scorre nella resistenza di uscita R_o , pari a $\frac{V_L}{R_o} = \left(\frac{R_2}{R_s+R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2}$.

Confrontando l'espressione $I_o = A_I I_s – V_L/R_o$ con la soluzione (*) trovata, possiamo identificare $A_I = \frac{R_s||R_2}{R_1||R_2}$ con il guadagno in corrente in corto circuito (quello corrispondente al caso $R_L = 0$), mentre R_o è la resistenza di uscita, data da $R_o = (1+R_s/R_2)*R_1||R_2$ (la resistenza che divide V_L nella formula (*).



$$R_o = \left(\left(\frac{R_2}{R_s + R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2}\right)^{-1}$$

cioè

$$R_o = \left(\frac{R_s + R_2}{R_2}\right)\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1R_s + R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

In alternativa, si può scrivere il guadagno in funzione del valore del carico R_L, sostituendo a $V_L = I_o R_L$ nella formula (*)

$$I_o = I_s\frac{R_s||R_2}{R_1||R_2} - I_oR_L\left(\frac{R_2}{R_s + R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2}$$

$$I_o + I_oR_L\left(\frac{R_2}{R_s + R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2} = I_s\frac{R_s||R_2}{R_1||R_2}$$

$$I_o\left(1 + R_L\left(\frac{R_2}{R_s + R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2}\right) = I_s\frac{R_s||R_2}{R_1||R_2}$$

$$I_o/I_s = \frac{\frac{R_s||R_2}{R_1||R_2}}{\left(1 + R_L\left(\frac{R_2}{R_s + R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2}\right)}$$

6.2 Per calcolare la resistenza di uscita, applichiamo un generatore di corrente all'uscita, eliminiamo il carico R_L e azzeriamo la corrente di ingresso I_s. La corrente di test si ripartisce tra R1 e R2, sottoposte alla stessa differenza di tensione:

$$I_2 = I_{test}\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$I_1 = I_{test}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

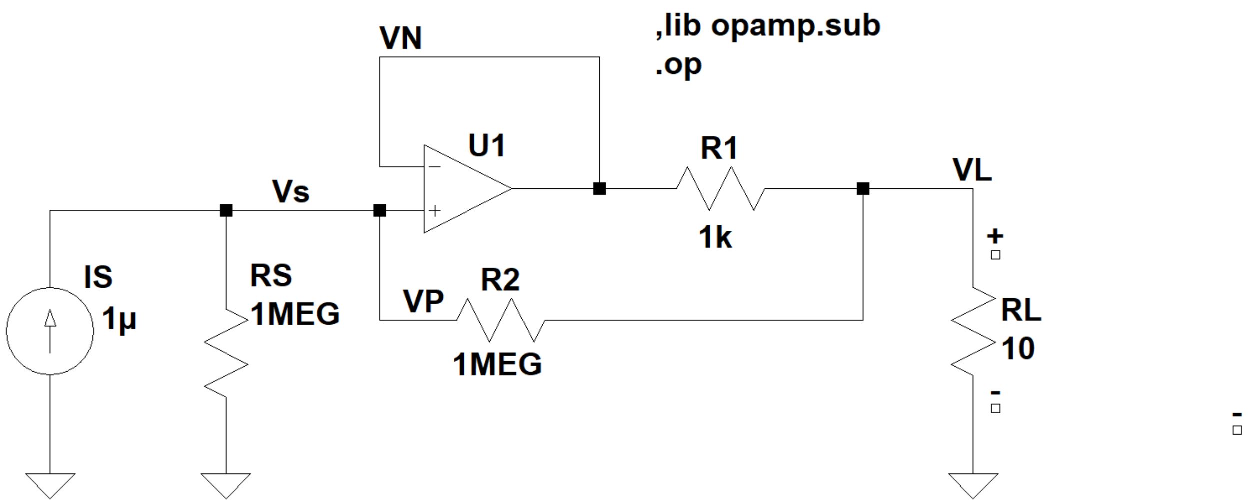
La tensione V_{test} può essere calcolata considerando che la maglia R_s – R_2 è attraversata dalla corrente I_2, quindi

$$V_{test} = I_{test}\frac{R_1}{R_1 + R_2}R_s + I_{test}\frac{R_1}{R_1 + R_2}R_2 = I_{test}\frac{R_1R_s + R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_o = \frac{R_1R_s + R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_s + R_2}{1 + R_2/R_1}$$

che è lo stesso risultato trovato precedentemente. L'amplificatore diventa un amplificatore di corrente ideale se la sorgente che lo pilota è a sua volta ideale, cioè $R_S = \infty$.

Listato SPICE (per effettuare la simulazione sono stati inseriti dei valori esemplificativi per le resistenze e per la corrente di ingresso)




```
* 20190412 primo compitino FDE 6.asc
XU1 VN VP VN opamp Aol=1000K GBW=10Meg
R2 VL VP 1MEG
R1 VL VN 1k
RS VP 0 1MEG
IS 0 VP 1µ
RL VL 0 10
,lib opamp.sub
.op
.backanno
.end
```

Simulazione SPICE

```
       --- Operating Point ---

V(vn):          0.50249        voltage
V(vp):          0.50249        voltage
V(vl):          0.00498007     voltage
I(Is):          1e-006         device_current
I(Rl):          0.000498007    device_current
I(Rs):          5.0249e-007    device_current
I(R1):          -0.000497509   device_current
I(R2):          -4.9751e-007   device_current
Ix(u1:3):    -0.00049751        subckt_
```

$$\frac{I_o}{I_s} = \frac{\frac{R_s||R_2}{R_1||R_2}}{\left(1 + R_L\left(\frac{R_2}{R_s + R_2}\right)\frac{1}{R_1||R_2}\right)} = \frac{\left(\frac{R_sR_2}{R_s + R_2}\right)\left(\frac{R_{1+}R_2}{R_1R_2}\right)}{\left(1 + R_L\left(\frac{R_2}{R_s + R_2}\right)\left(\frac{R_{1+}R_2}{R_1R_2}\right)\right)} = \frac{(500k)\left(\frac{1001000}{10^9}\right)}{\left(1 + 10(0.5)\left(\frac{1001000}{10^9}\right)\right)}$$

$$= \frac{(500)(1.001)}{\left(1 + 10(0.5)(0.001001)\right)} = \frac{(500.5)}{1.005} = 498$$

Il guadagno in corrente simulato da SPICE è I(Rl)/I_s = 498 μA.