# 2022-11-14

# QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION (QAM)

Partiamo da due segnali ortogonali e andiamo a modificare le ampiezze di questi segnali ortogonali.

$$s_m(t) = lpha_{m,I} \; h_{TX}(t) \; \cos(2\pi f_0 t + arphi_0) - lpha_{m,Q} \; h_{TX}(t) \; \sin(2\pi f_0 t + arphi_0)$$

Con I: IN-PHASE e Q: QUADRATURE

$$\{lpha_{m,I},lpha_{m,Q}\in\set{2l-L-1}$$

con  $L=\sqrt{M}$  radice della cardinalità della costellazione  $f_0$  è la frequenza portante mentre  $arphi_0$  è la fase iniziale

Per

$$egin{aligned} h_{TX}(t) &= A\ rectigg(rac{t-rac{T}{2}}{T}igg) \ s_m(t) &= Alpha_{m,I}cos(2\pi f_0t+arphi_0) - Alpha_{m,Q}sin(2\pi f_0t+arphi_0) \ per & m=1,\ldots,M \qquad t\in[0,T] \ s_m(t) &= 0 \qquad altrove \end{aligned}$$

Se  $f_0 >> rac{1}{T}$ 

$$egin{align} ext{Energia}igg[ Asin(2\pi f_0 t + arphi_0)rectigg(rac{t-rac{T}{2}}{T}igg)igg] &=rac{T}{2}A^2 \ arphi_1(t) &= egin{cases} \sqrt{rac{2}{T\mathcal{A}^2}}\cos(2\pi f_0 t + arphi_0)\mathcal{A} & t \in [0,T] \ 0 & altrove \end{cases}$$

$$arphi_2(t) = egin{cases} \sqrt{rac{2}{T \mathscr{N}^2}} \sin(2\pi f_0 t + arphi_0) \mathscr{A} & t \in [0,T] \ 0 & altrove \end{cases}$$

Sotto opportune ipotesi:

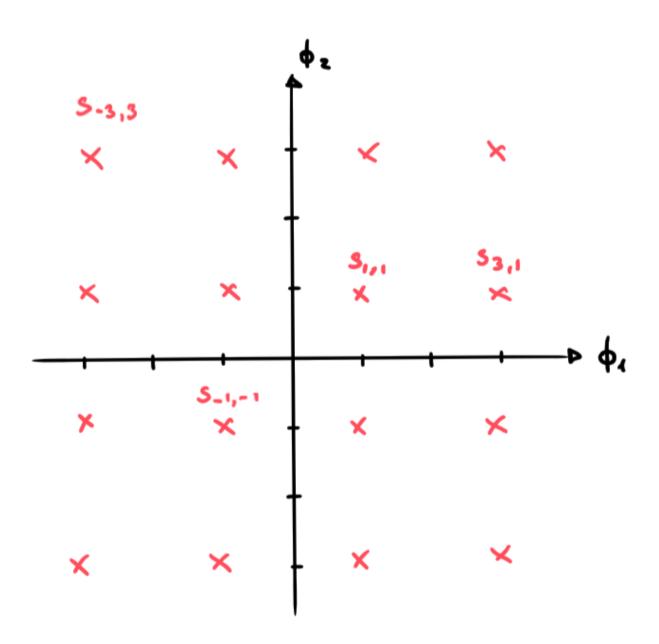
Energia di  $h_{TX} cos(2\pi f_0 t + arphi_0)$  è  $rac{^E h_{TX}}{^2}$ 

## **BASE PER UNA QAM**

$$egin{aligned} \phi_1(t) &= \sqrt{rac{2}{E_{h_{TX}}}}\cos(2\pi f_0 t + arphi_0)h_{TX}(t) \ \phi_1(t) &= -\sqrt{rac{2}{E_{h_{TX}}}}\sin(2\pi f_0 t + arphi_0)h_{TX}(t) \ E_h &= E_{h_{TX}} \ lpha_{m.I}, lpha_{m,Q} \in \left\{-1,1
ight\} \ s_m(t) &= \sqrt{rac{E_h}{2}}lpha_{m,I}\phi_1(t) + \sqrt{rac{E_h}{2}}lpha_{m,Q}\phi_2(t) \ rac{s_m}{2} &= \left[\sqrt{rac{E_h}{2}}lpha_{m,I};\;\sqrt{rac{E_h}{2}}lpha_{m,Q}
ight] \end{aligned}$$

#### ర్థి Coordinate simboli di una QAM

$$\underline{s_m} = \left[ \sqrt{rac{E_h}{2}} lpha_{m,I}; \; \sqrt{rac{E_h}{2}} lpha_{m,Q} 
ight]$$



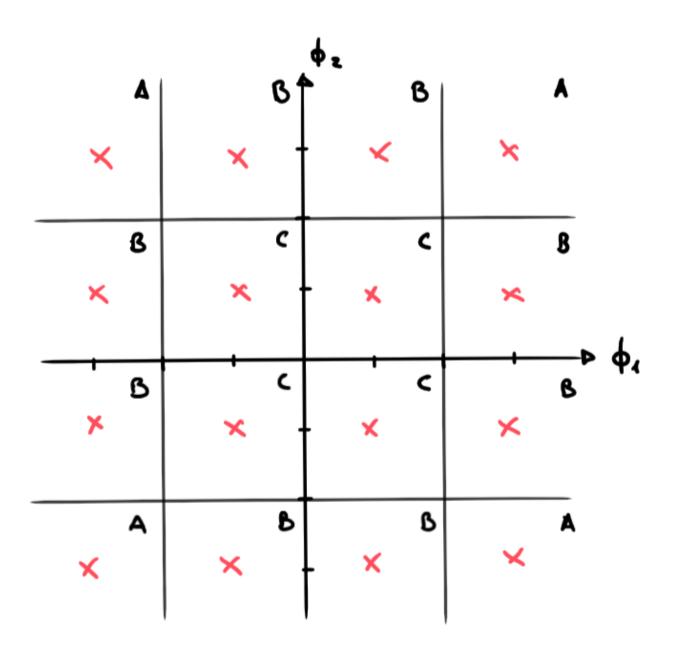
# **ENERGIA MEDIA**

$$egin{align} E_s &= rac{1}{M} \sum_{m=1}^M igg[ igg( \sqrt{rac{E_h}{2}} lpha_{m,I} igg)^2 + igg( \sqrt{rac{E_h}{2}} lpha_{m,Q} igg)^2 igg] \ &= rac{E_h}{2M} \sum_{m=1}^M igg( lpha_{m,I}^2 + lpha_{m,Q}^2 igg) \ &= rac{M-1}{3} E_h \end{split}$$

$$E_s = rac{M-1}{3} E_h$$

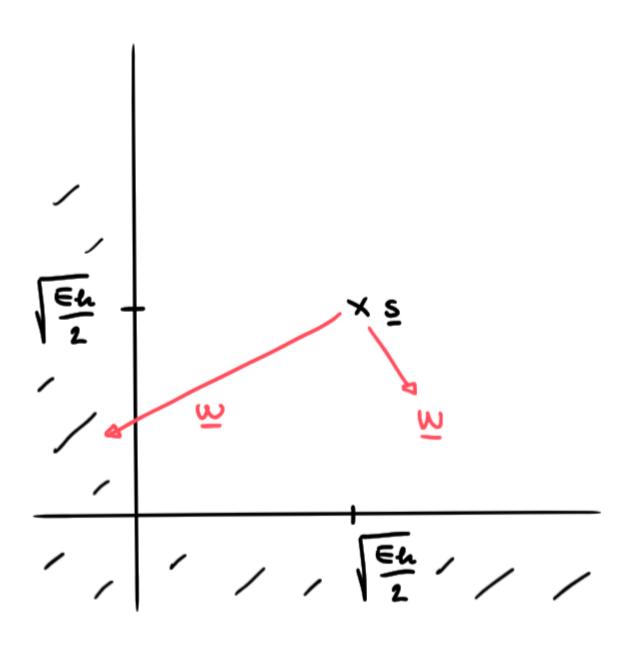
# PROBABILITA D'ERRORE

Simboli equiprobabili con canale AWGN



Abbiamo 4 regioni di tipo A, 8 regioni di tipo B e 4 regioni di tipo C

Regioni di tipo A

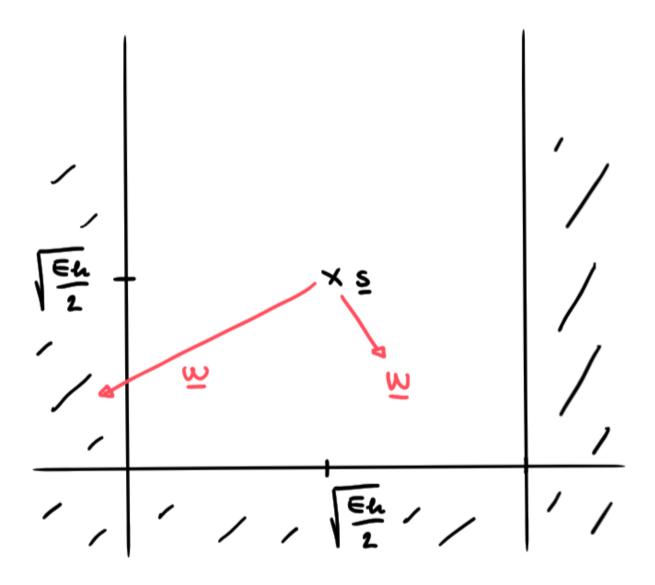


$$egin{split} P(C|a_0 = A) &= Pigg(w_1 > -\sqrt{rac{E_h}{2}} \ \land \ w_2 > -\sqrt{rac{E_h}{2}}igg) \ &= igg[Qigg(-rac{\sqrt{rac{E_h}{2}}}{\sigma_I}igg)igg]^2 \ &= igg[1 - Qigg(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}igg)igg]^2 \end{split}$$

### **O Probabilità di decisione corretta regione A**

$$P(C|a_0=A) = \left[1 - Q\left(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}
ight)
ight]^2$$

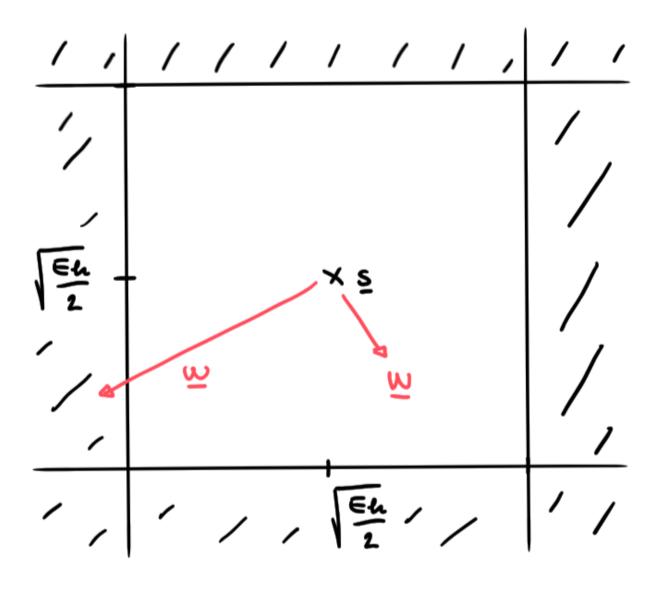
## Regioni di tipo B



$$egin{aligned} P(C|a_0 = B) &= P(w_1 > -\sqrt{rac{E_h}{2}} \wedge |w_2| < \sqrt{rac{E_h}{2}}) \ &= Qigg(-\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}igg)igg(1 - 2Qigg(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}igg)igg) \ &= igg[1 - Qigg(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}igg)igg]igg[1 - 2Qigg(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}igg)igg] \end{aligned}$$

$$P(C|a_0=B) = iggl[ 1 - Qiggl(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}iggr) iggr] iggl[ 1 - 2Qiggl(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}iggr) iggr]$$

# Regioni di tipo C



$$egin{aligned} P(C|a_0=C) &= P(|w_1| < \sqrt{rac{E_h}{2}} \wedge |w_2| < \sqrt{rac{E_h}{2}}) \ &= \left[1 - 2Qigg(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}igg)
ight]^2 \end{aligned}$$

$$egin{align} P(E) &= rac{1}{M} \sum_{m=1}^M Pigg(E|a_0=migg) \ &= rac{1}{M} \sum_{m=1}^M igg[1-Pigg(C|a_0=migg)igg] \ &= 4rac{L-1}{L} Qigg(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}igg) - igg[2rac{L-1}{L} Qigg(\sqrt{rac{E_h}{2\sigma_I^2}}igg)igg]^2 \ \end{split}$$

Se Q è piccola,  $Q^2$  è ancora più piccola, si può quindi ignorare.

$$P(E) \leq 4igg(1-rac{1}{\sqrt{M}}igg)Qigg(\sqrt{rac{3E_s}{(M-1)2\sigma_I^2}}igg)$$

# 🕹 Probabilità di decisione corretta regione C

$$P(E) \leq 4igg(1-rac{1}{\sqrt{M}}igg)Qigg(\sqrt{rac{3E_s}{(M-1)2\sigma_I^2}}igg)$$