

Fondamenti di Elettronica

07

Risposta in frequenza degli amplificatori



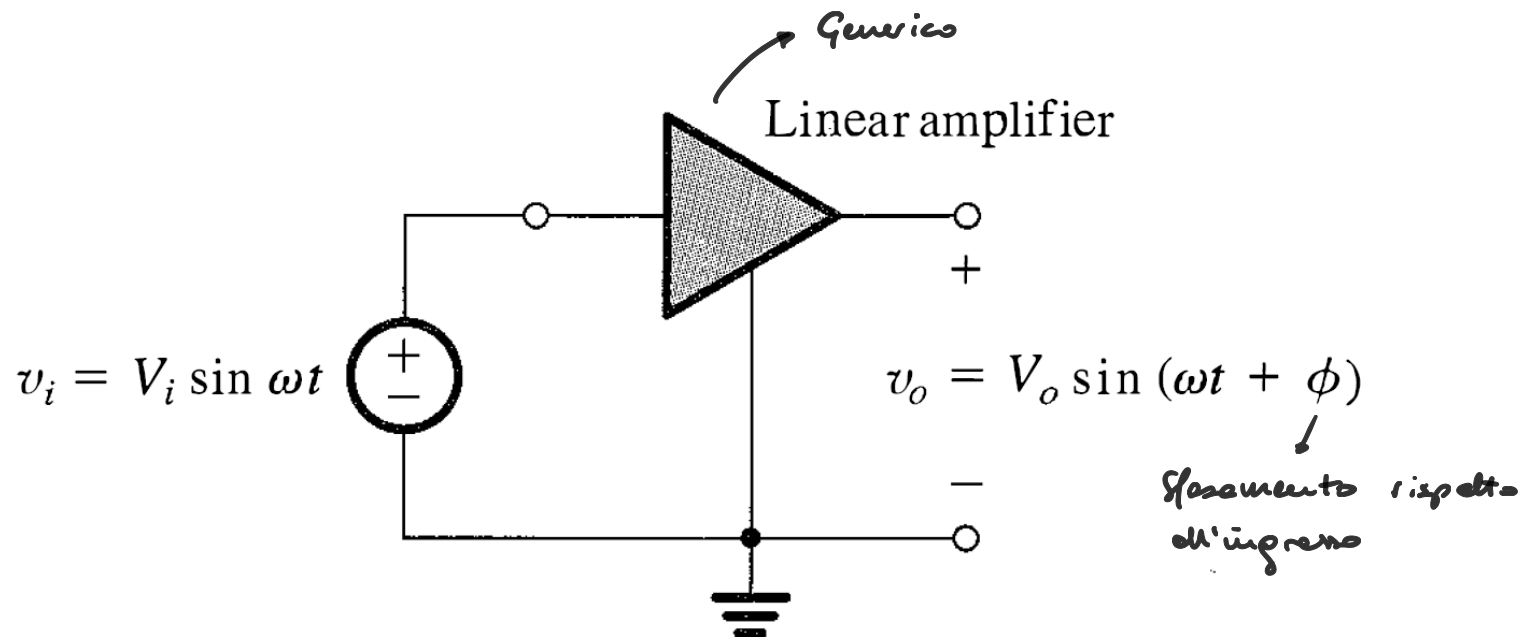
Enrico Zanoni

enrico.zanoni@unipd.it



584153

Risposta in frequenza degli amplificatori lineari

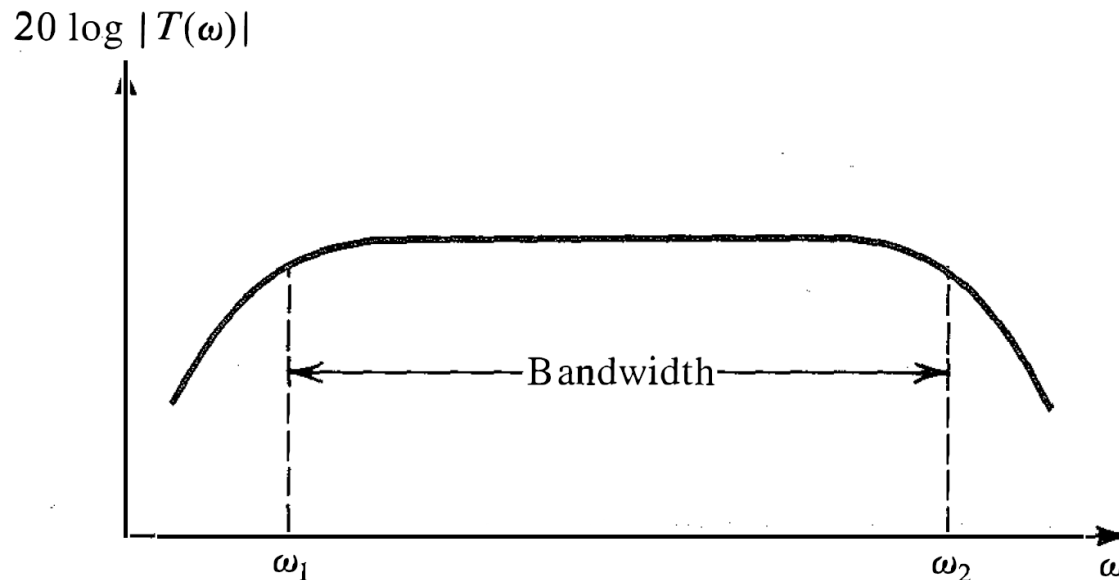


immaginiamo di utilizzare un segnale sinusoidale per «provare» il nostro amplificatore e di esplorare diversi valori di pulsazione ω [rad/s]:
in generale, il guadagno dell'amplificatore dipenderà dalla frequenza, e il segnale di uscita non sarà in fase con il segnale di ingresso

Il guadagno sarà caratterizzato da ampiezza $\frac{V_o}{V_i}$ e fase Φ

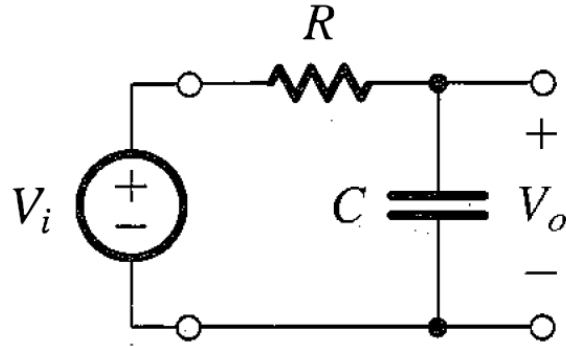
Risposta in frequenza dell'amplificatore e distorsione

Se l'amplificatore è lineare, ad un segnale sinusoidale applicato all'ingresso corrisponde un segnale sinusoidale con la stessa pulsazione in uscita



- al variare della pulsazione misuro la «larghezza di banda» dell'amplificatore = come varia il guadagno (e la sua fase)
- se il segnale non è sinusoidale ma ha più «componenti» in frequenza, una larghezza di banda limitata introduce **distorsione** (le diverse componenti vengono amplificate in modo diverso e il segnale di uscita cambia e non rappresenta più fedelmente il segnale di ingresso)

Circuito RC passa-basso



(a)

Rete passa-basso

*lascia passare frequenze
basse ma attenua
frequenze alte*

$V_o = v_C(t)$ = tensione ai capi del condensatore

$$V_o = V_i - iR;$$

$$Q = CV \rightarrow i = dQ/dt = C \cdot dV_o/dt$$

supponiamo $V_i(t) = V_i \sin(\omega t)$; quindi

$$V_i \sin(\omega t) = RC(dv_C(t)/dt) + v_C(t);$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_C(t) = \frac{V_i \sin(\omega t)}{\tau} \text{ con } \tau = RC, \text{ costante di tempo}$$

$$v_C(t) = v_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + K \sin(\omega t + \theta)$$

soluzione generale

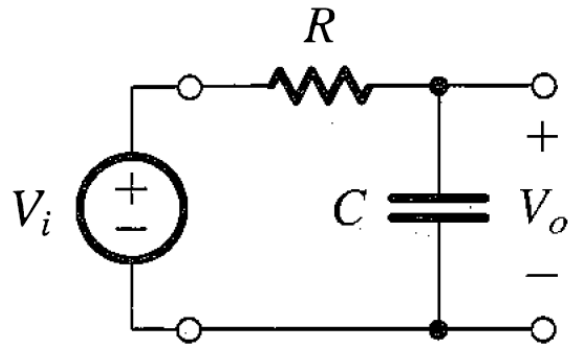
Circuito RC con la funzione di trasferimento (trasformata di Laplace)

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} v_c(t) = \frac{V_I \sin(\omega t)}{\tau} \text{ con } \tau=RC, \text{ costante di tempo}$$

se si applica la **trasformata di Laplace** a questa equazione differenziale, si ottiene un'equazione algebrica.

Più direttamente si può trasformare $R \rightarrow R$ e $C \rightarrow 1/sC$

Rete passa-basso



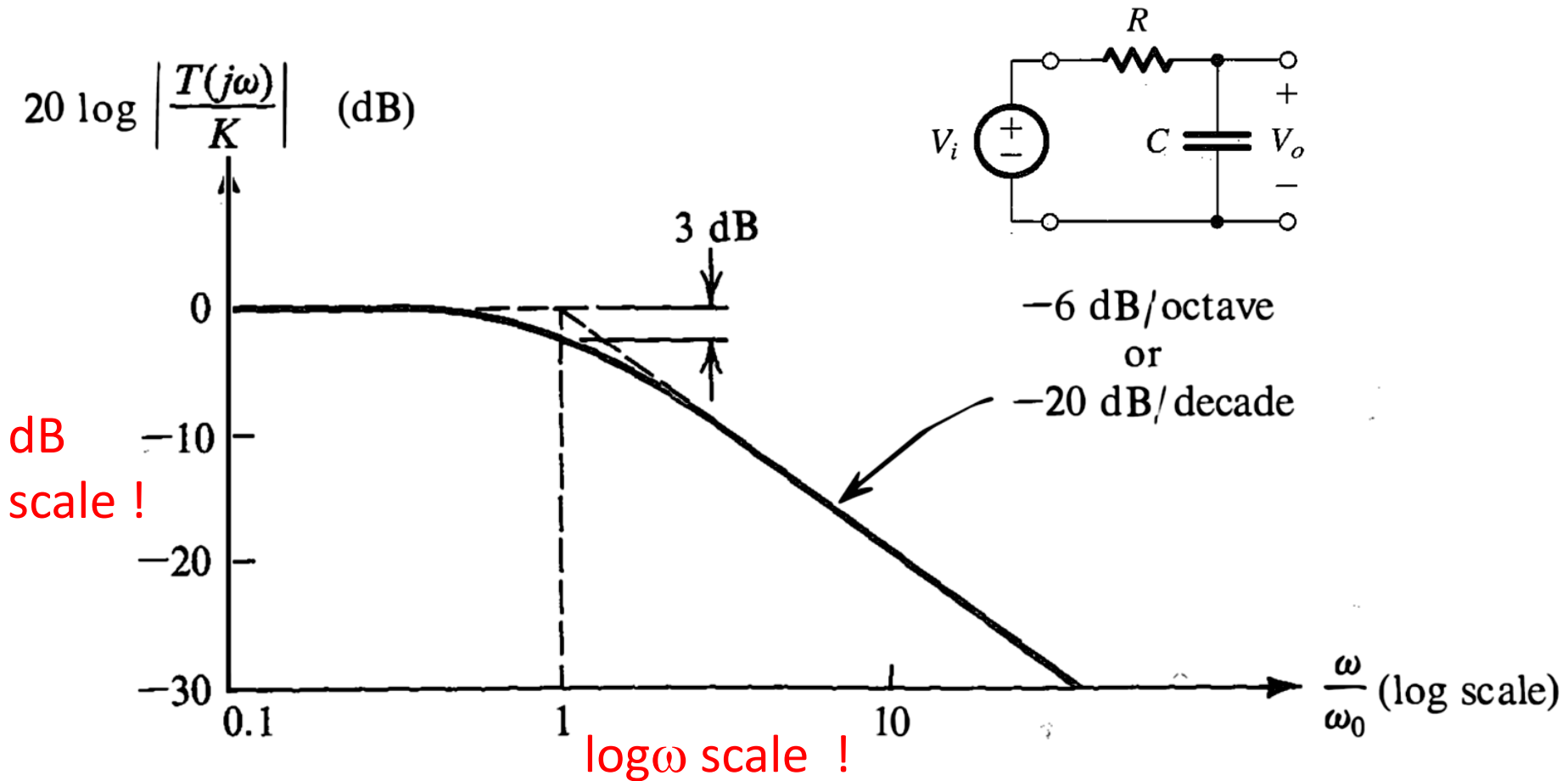
Si risolve il circuito come un partitore di tensione:

$$V_o(t) = v_c(t) = V_i(t) \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = V_i(t) \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

La funzione di trasferimento $H(s) = V_o(s)/v_i(s)$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{v_i(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{\omega_o}{s + \omega_o} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_o}}$$

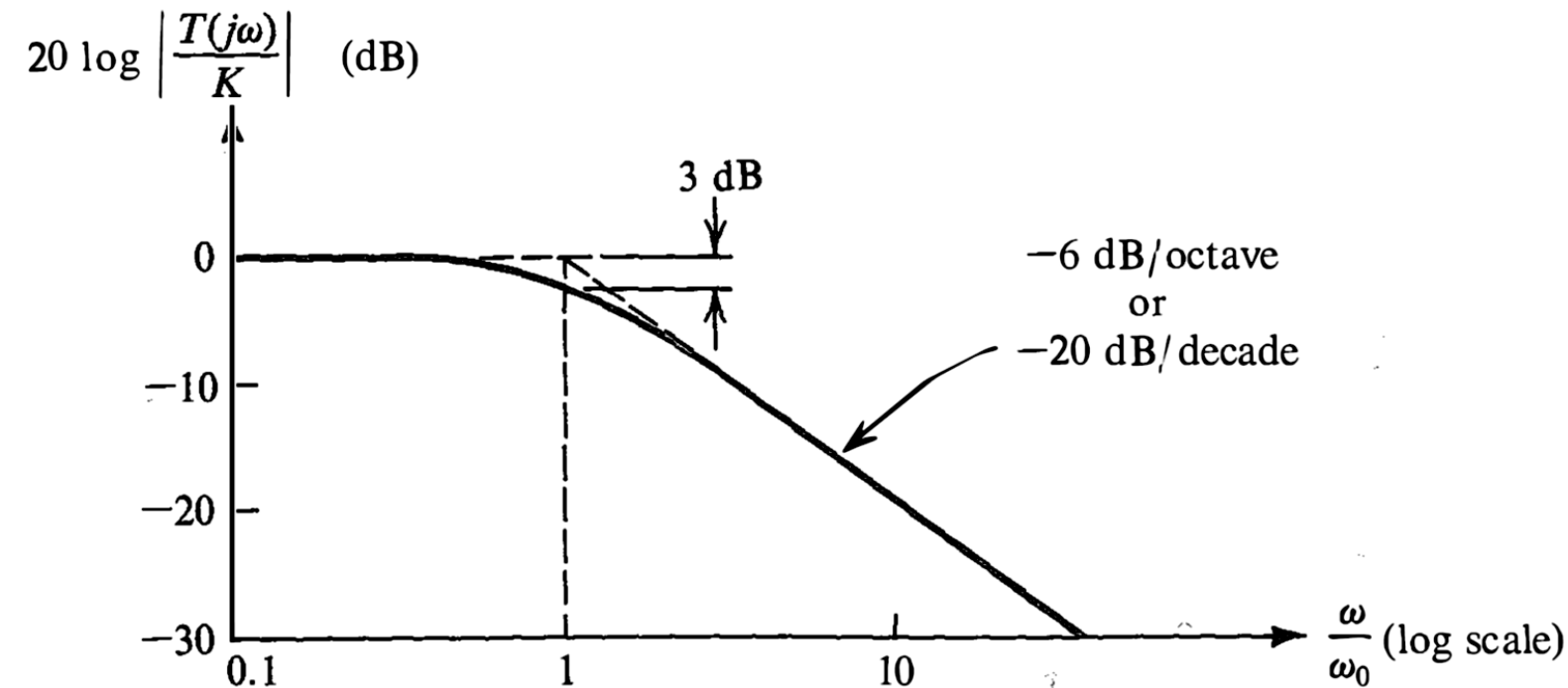
Diagramma di Bode del circuito passa-basso del 1mo ordine



$$\frac{V_2}{V_1} = 2 \Rightarrow 6 \text{ dB ogni } 6 \text{ dB la tensione raddoppia}; \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{2} \Rightarrow 3 \text{ dB}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 10 \Rightarrow 20 \text{ dB ogni } 20 \text{ dB la tensione decuplica}$$

perchè 20 dB/decade ?



$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}};$$

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \approx \frac{\omega_0}{\omega}$$

quindi ogni volta
che ω cresce di una
decade, $|H(s)|$ cala
di $20 \log_{10} 10 = 20$ dB

Per $\omega = \omega_0$ $|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -3\text{dB}$

Circuiti passa basso (LP, sinistra) e passa alto (HP, destra)

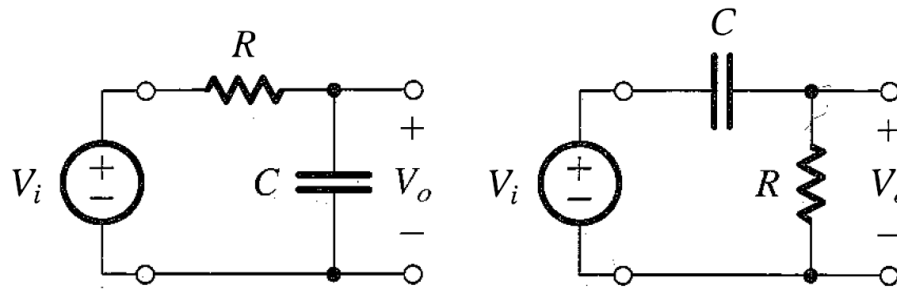


TABLE 1.2 Frequency Response of STC Networks

	Low-Pass (LP)	High-Pass (HP)
Transfer Function $T(s)$	$\frac{K}{1 + (s/\omega_0)}$	$\frac{Ks}{s + \omega_0}$
Transfer Function (for physical frequencies) $T(j\omega)$	$\frac{K}{1 + j(\omega/\omega_0)}$	$\frac{K}{1 - j(\omega_0/\omega)}$
Magnitude Response $ T(j\omega) $	$\frac{ K }{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$	$\frac{ K }{\sqrt{1 + (\omega_0/\omega)^2}}$
Phase Response $\angle T(j\omega)$	$-\tan^{-1}(\omega/\omega_0)$	$\tan^{-1}(\omega_0/\omega)$
Transmission at $\omega = 0$ (dc)	K	0
Transmission at $\omega = \infty$	0	K
3-dB Frequency	$\omega_0 = 1/\tau$; $\tau \equiv$ time constant $\tau = CR$ or L/R	

Diagramma di Bode ampiezza e fase – circuito passa basso

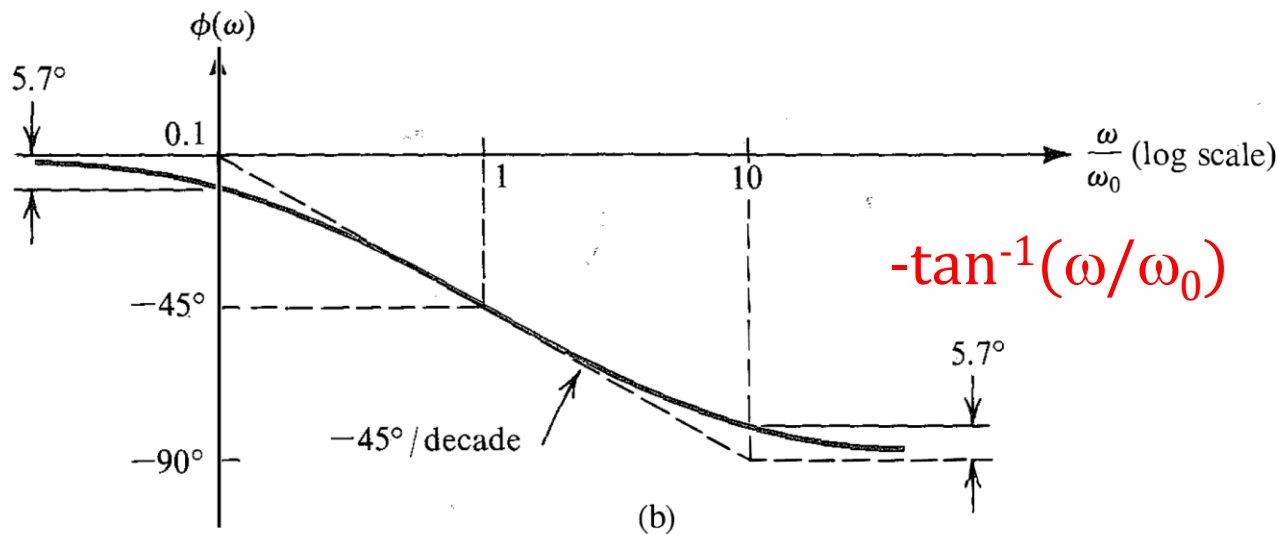
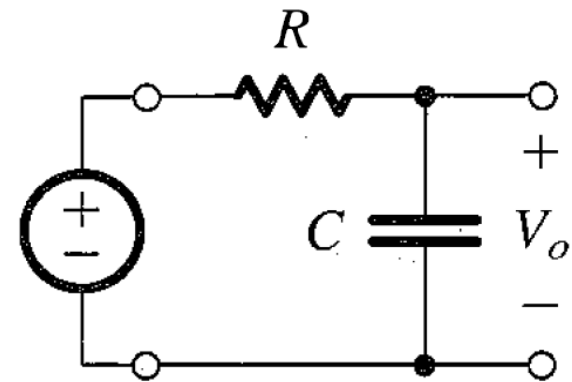
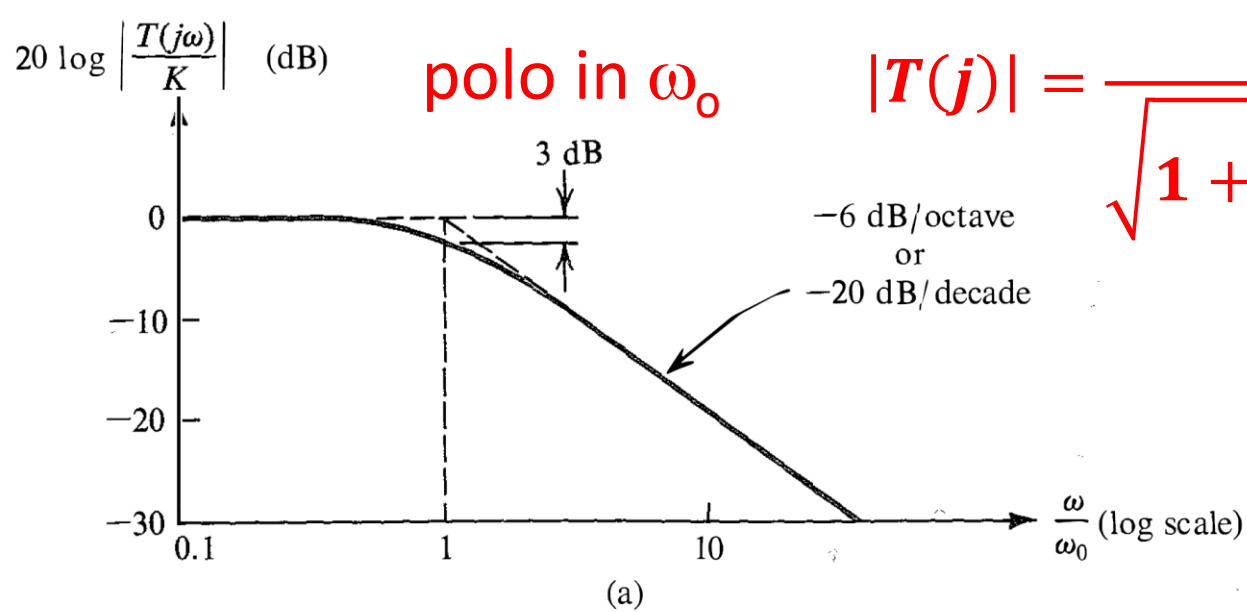


FIGURE D.6 (a) Magnitude and (b) phase response of STC circuits of the low-pass type.

Diagramma di Bode ampiezza e fase – circuito passa alto

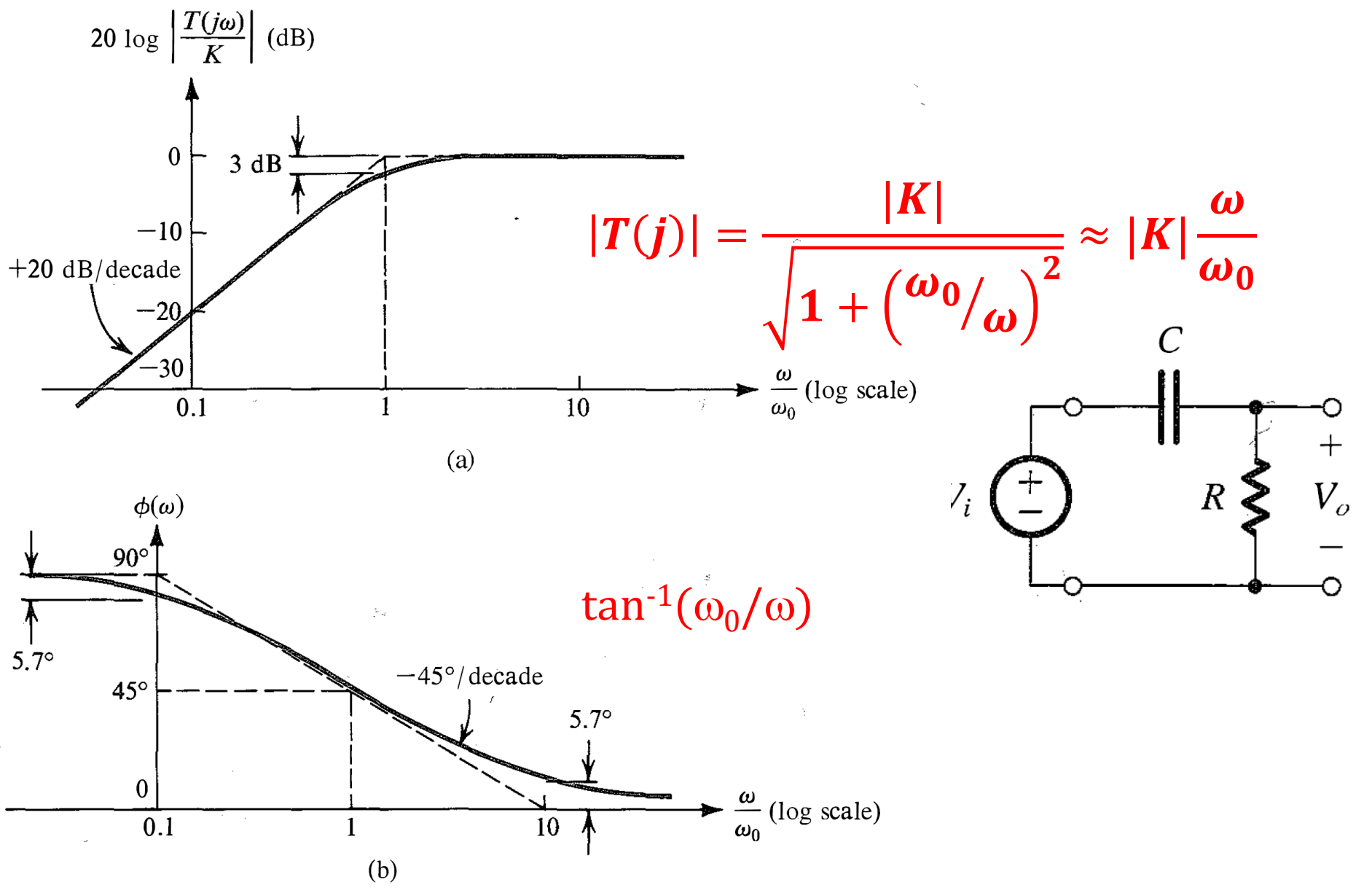


FIGURE D.8 (a) Magnitude and (b) phase response of STC circuits of the high-pass type.

Funzioni di trasferimento notevoli

$$T(s) = s$$

$$s = j\omega$$

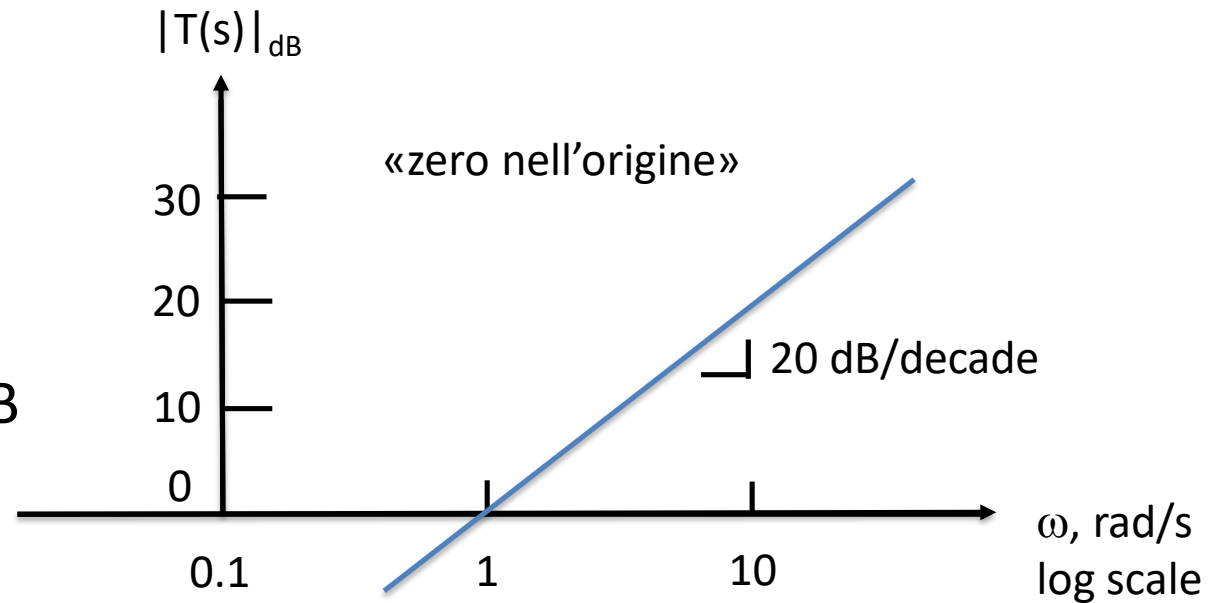
quando $\omega = 1$

$$20\log_{10}(1) = 0\text{dB}$$

per $\omega = 10$

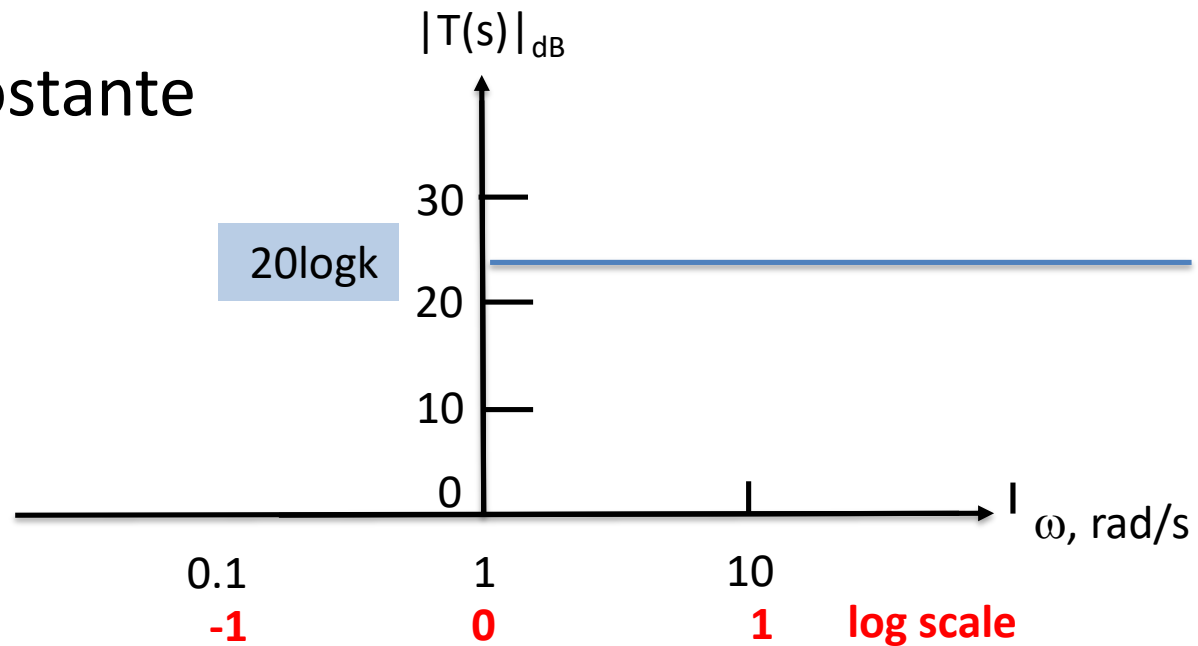
$$20\log_{10}(10) = 20\text{dB}$$

La pendenza è
20 dB/decade



Funzioni di trasferimento notevoli

$T(s) = k$, costante



Funzioni di trasferimento notevoli

$$T(s) = s$$

$$s = j\omega$$

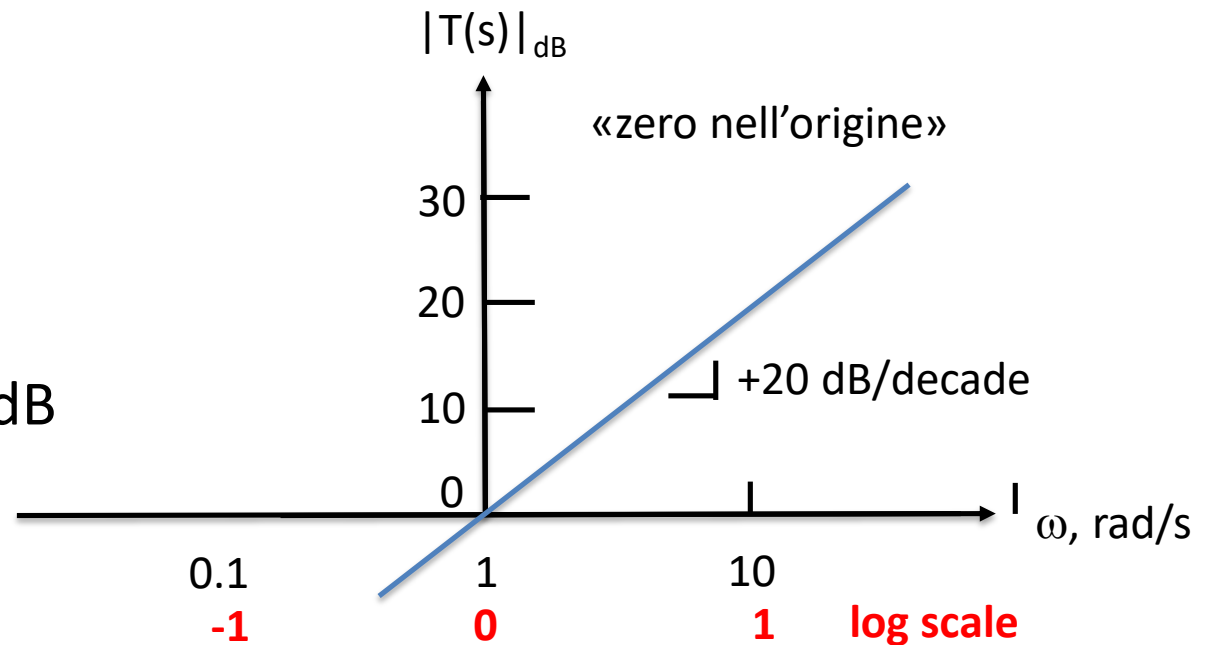
quando $\omega = 1$

$$20\log_{10}(1) = 0\text{dB}$$

per $\omega = 10$

$$20\log_{10}(10) = 20\text{dB}$$

La pendenza è
20 dB/decade



Funzioni di trasferimento notevoli

$$T(s) = 1/s$$
$$s = j\omega$$

per $\omega = 0.1$

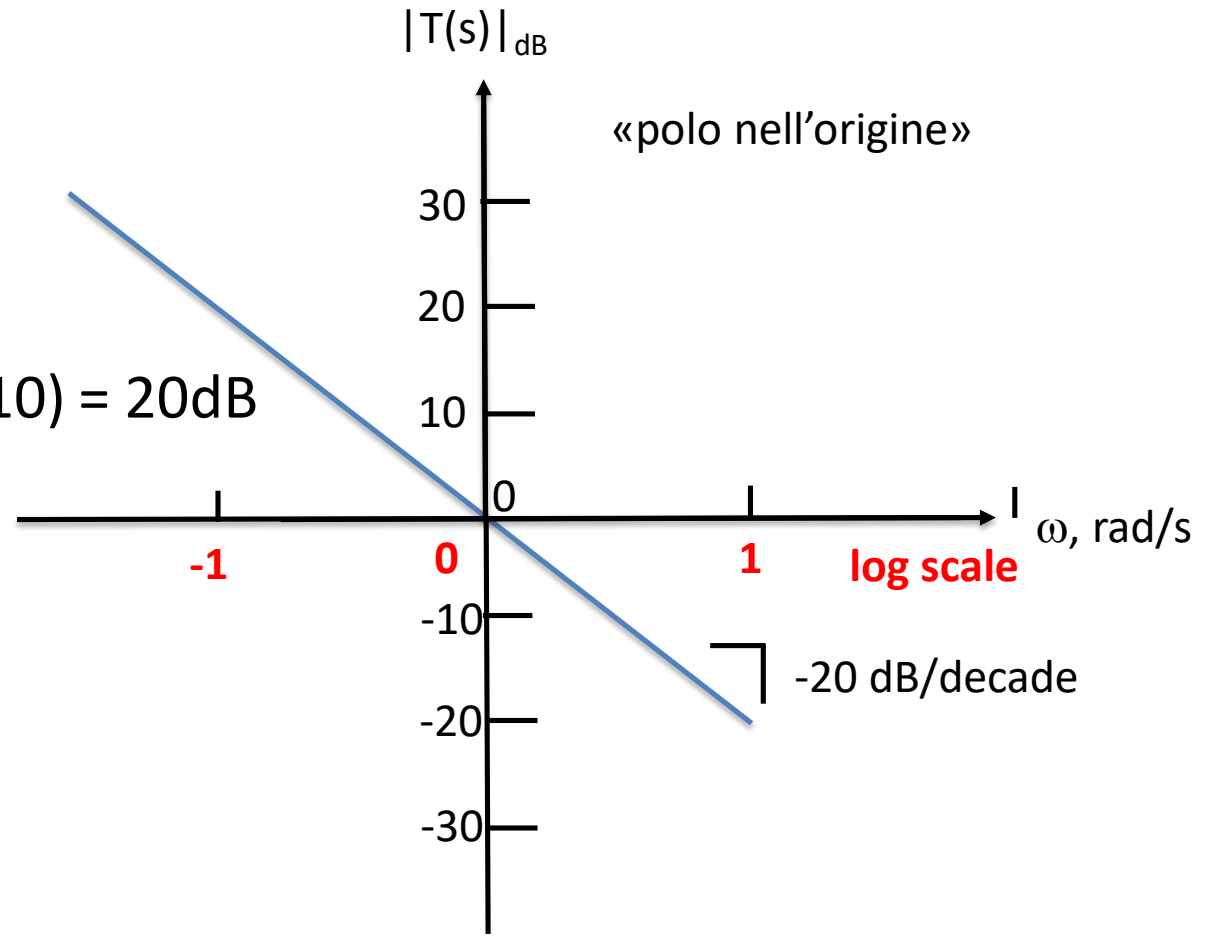
$$20\log_{10}(1/0.1) = 20\log_{10}(10) = 20\text{dB}$$

quando $\omega = 1$

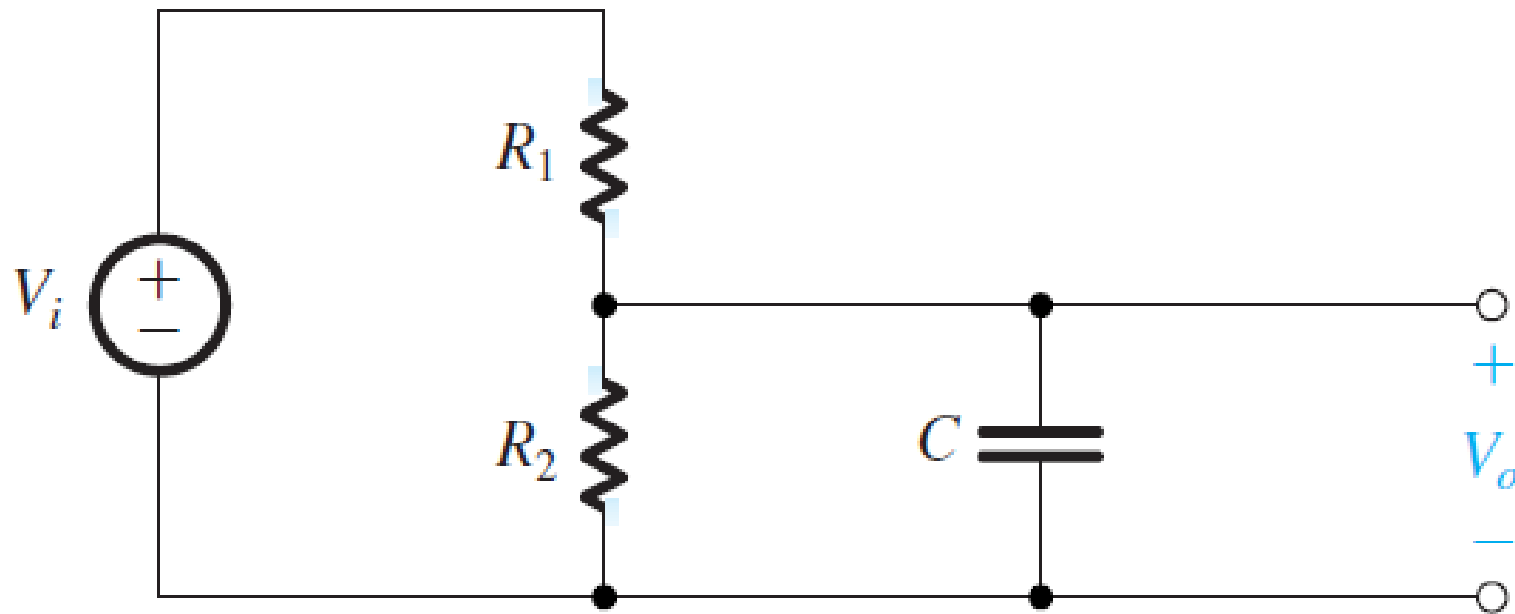
$$20\log_{10}(1/1) = 0\text{dB}$$

La pendenza è

-20 dB/decade



Esercizio



Dimostrare che la funzione di trasferimento $T(s)$ di questo circuito è data da:

$$T(s) = \frac{\frac{1}{CR_1}}{s + \frac{1}{C(R_1 || R_2)}}$$

Funzione di trasferimento: poli e zeri

Descrivere la risposta in frequenza di un amplificatore → scrivere il guadagno dell'amplificatore come funzione della frequenza complessa s

Nel dominio s , la capacità C → diventa l'impedenza $1/sC$;
L'induttanza L → si trasforma nell'impedenza sL

Si scrive la funzione di trasferimento $T(s) = V_o(s) / V_i(s)$

Per recuperare il significato fisico di $T(s)$ si sostituisce a s → $j\omega$
(ω = frequenza angolare, rad/s)

In generale

$$T(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}$$

a, b numeri reali; ordine m del numeratore minore dell'ordine n del denominatore;
 n è l'ordine della rete; per un circuito stabile il denominatore deve avere solo radici a parte reale negativa.

Funzione di trasferimento : poli e zeri

$$T(s) = a_m \frac{(s - Z_1)(s - Z_2) \dots (s - Z_m)}{(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_n)}$$

$Z_1 \dots Z_n$ «zeri della funzione di trasferimento»; $Z_i = -\frac{1}{T_i}$

$P_1 \dots P_n$ «poli della funzione di trasferimento»; $P_i = -\frac{1}{\tau_i}$

$$T(s) = \frac{k}{s^g} \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_m)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \dots (1 + s\tau_n)}$$

s^g rappresenta l'effetto complessivo dei poli e degli zeri all'origine con g positivo o negativo

Funzione di trasferimento e guadagno

$$T(s) = \frac{k}{s^g} \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_m)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \dots (1 + s\tau_n)}$$

$$|T(s)|_{dB} = 20 \log|k| \pm g20\log\omega$$

$$+20 \log|1 + sT_1| + 20 \log|1 + sT_2| + \dots + 20 \log|1 + sT_m|$$

$$-20\log|1 + s\tau_1| - 20\log|1 + s\tau_2| - \dots - 20\log|1 + s\tau_n|$$

$s = j\omega \rightarrow |1 + sT_i| = \sqrt{1 + (\omega T_i)^2}$ cresce con ω e fa aumentare il guadagno

$s = j\omega \rightarrow |1 + s\tau_i| = \sqrt{1 + (\omega \tau_i)^2}$ cresce con ω e fa diminuire il guadagno

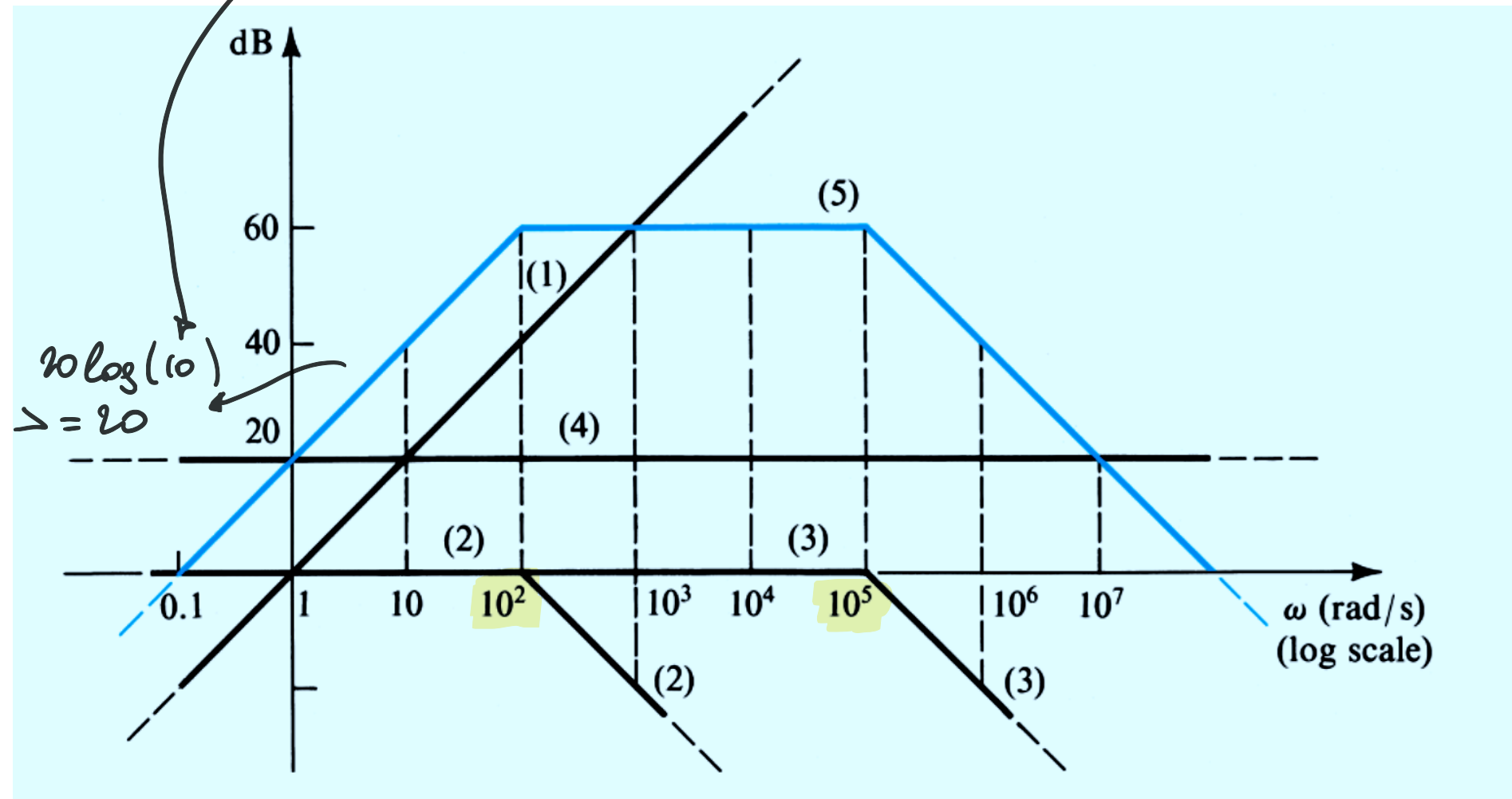
Come tracciare il diagramma di Bode

1. Per ogni zero e polo della funzione, tracciare il «diagramma asintotico» corrispondente ad uno dei quattro diagrammi precedentemente identificati = $+20 \text{ dB/decade}$ per uno zero, -20 dB/decade per un polo.
2. Si sommano i vari contributi in dB
3. Si sposta la curva in alto di $20\log k$, dove k è la costante moltiplicativa della funzione

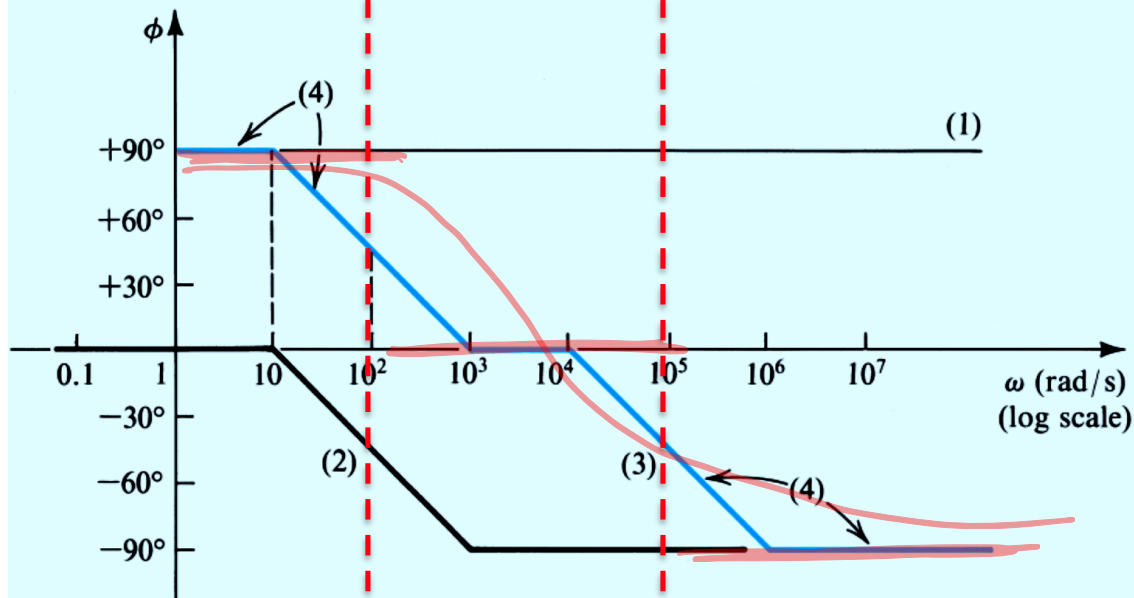
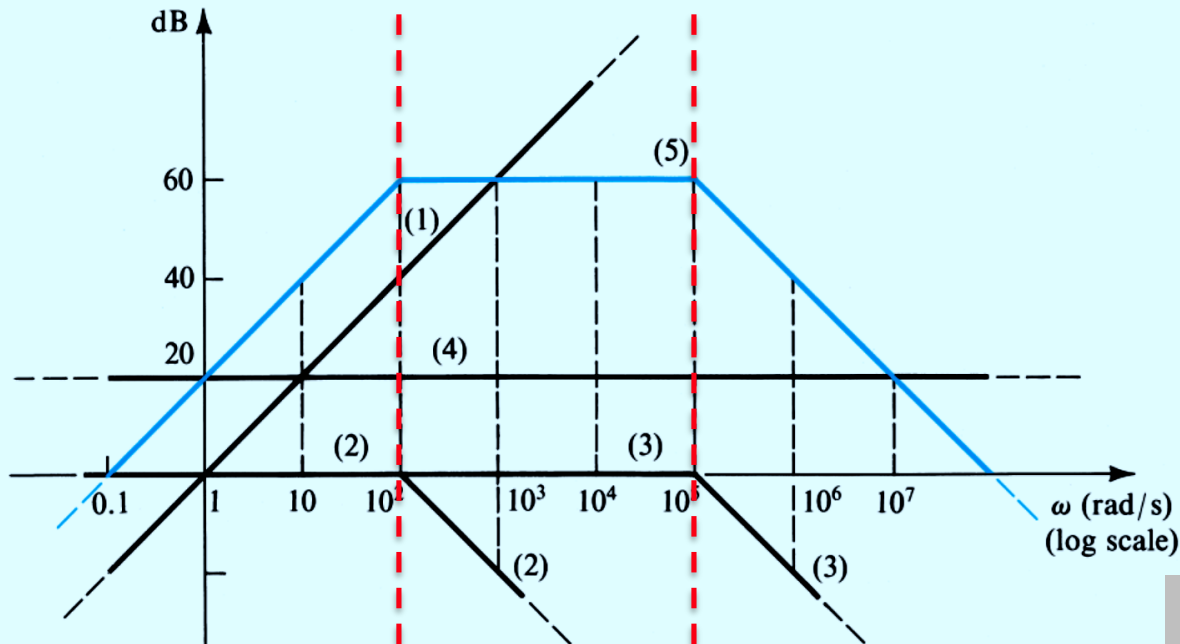
Esempio

$$T(s) = \frac{10s}{\left(1 + s/10^2\right)\left(1 + s/10^5\right)}$$

zero nell'origine
poli per 10^2 rad/s e 10^5 rad/s



Esempio

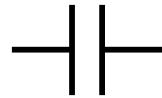


una decade prima di ogni polo, la fase inizia a diminuire di $-45^\circ/\text{decade}$
La diminuzione si interrompe alla decade successiva al polo

Amplificatori operazionali con elementi reattivi (L, C)



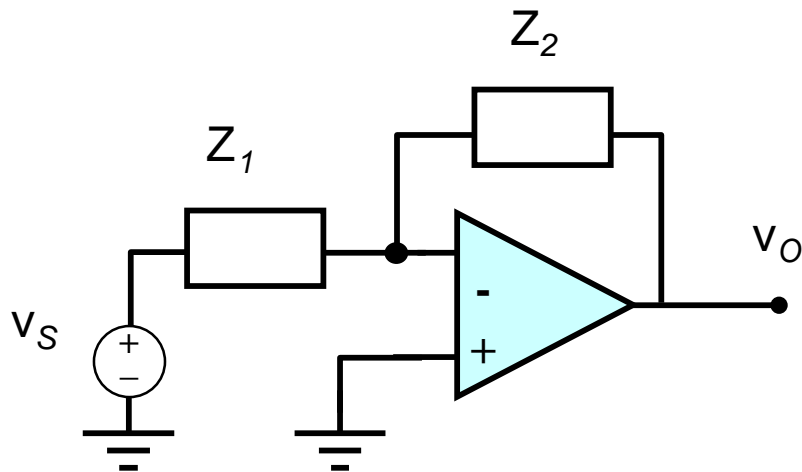
$$Z_R = R$$



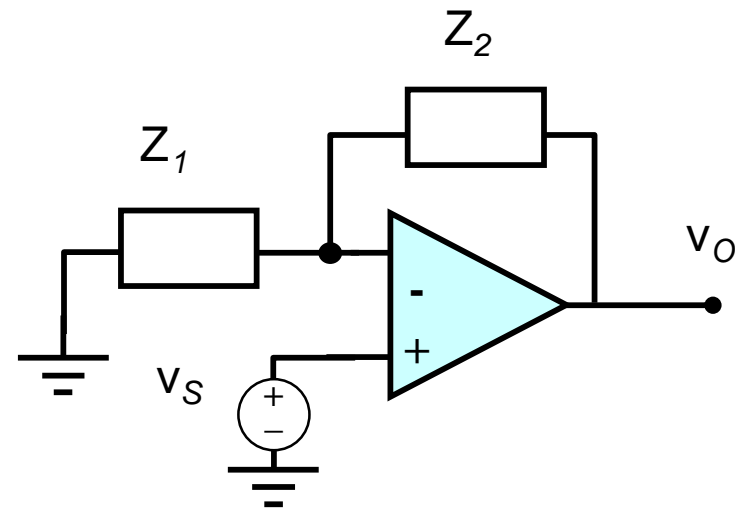
$$Z_C = \frac{1}{sC} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{j\omega C}$$



$$Z_L = sL \xrightarrow{s=j\omega} j\omega L$$

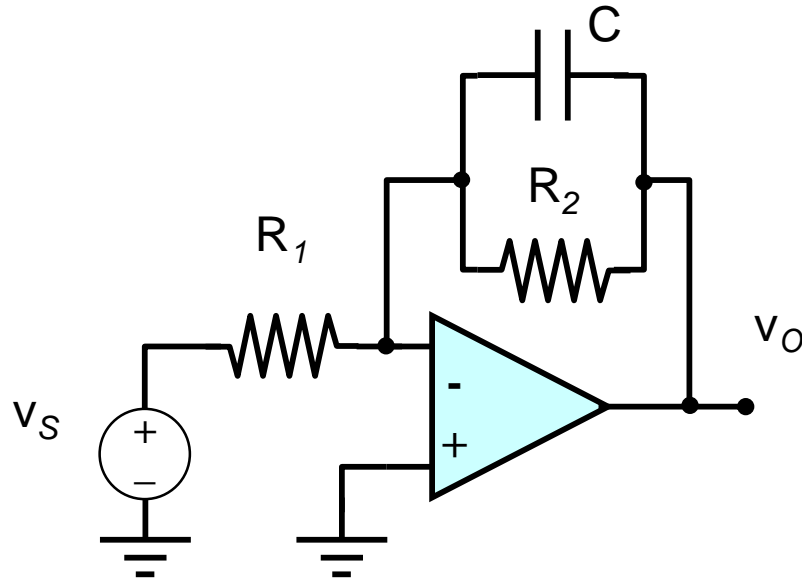


$$W(s) = \frac{v_O}{v_S} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$



$$W(s) = \frac{v_O}{v_S} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

Amplificatore (filtro) passa-basso



$$\begin{matrix} C // R_2 \\ \downarrow \\ Z_2 \end{matrix} = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{sC}}{R_2 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_2}{1 + sCR_2}$$

$$W(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + sCR_2}$$

$$W_{PB}(s) = \frac{A_0 \omega_H}{s + \omega_H} = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_H}}$$

Funzione di trasferimento generica di un filtro passa basso.

A_0 =Guadagno a bassa frequenza;
 ω_H =Frequenza di taglio

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$
$$\omega_H = \frac{1}{R_2 C}$$

Filtro passa-basso

$$W_{PB}(s) = \frac{A_0 \omega_H}{s + \omega_H} = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_H}}$$

Obiettivo: tracciare il
diagramma di Bode del
Modulo

Sostituiamo s con $j\omega$ e calcoliamo il
modulo:

$$|W_{PB}(j\omega)| = \left| \frac{A_0 \omega_H}{j\omega + \omega_H} \right| = \frac{|A_0 \omega_H|}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}}$$

Il modulo della funzione di trasferimento va espresso in dB:

$$|W_{PB}(j\omega)|_{dB} = 20 \log |A_0 \omega_H| - 20 \log \sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}$$

Filtro passa-basso

Usando un qualsiasi foglio elettronico o foglio matematico è possibile graficare le funzioni appena ottenute.

E' comunque molto utile (e immediato) disegnare il diagramma asintotico alle basse e alte frequenze):

$$\omega \ll \omega_H \quad \left. \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}} \right|_{\omega \ll \omega_H} \cong \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega_H^2}} = A_0 \quad (20 \log A_0) \text{dB}$$

$$\omega \gg \omega_H \quad \left. \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}} \right|_{\omega \gg \omega_H} \cong \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{A_0 \omega_H}{\omega} \quad \text{decresce come } 1/\omega$$
$$(20 \log A_0 + 20 \log \omega_H - 20 \log \omega) \text{dB}$$

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}, \omega_H = \frac{1}{R_2 C} \Rightarrow A_0 \omega_H = -\frac{1}{R_1 C}$$

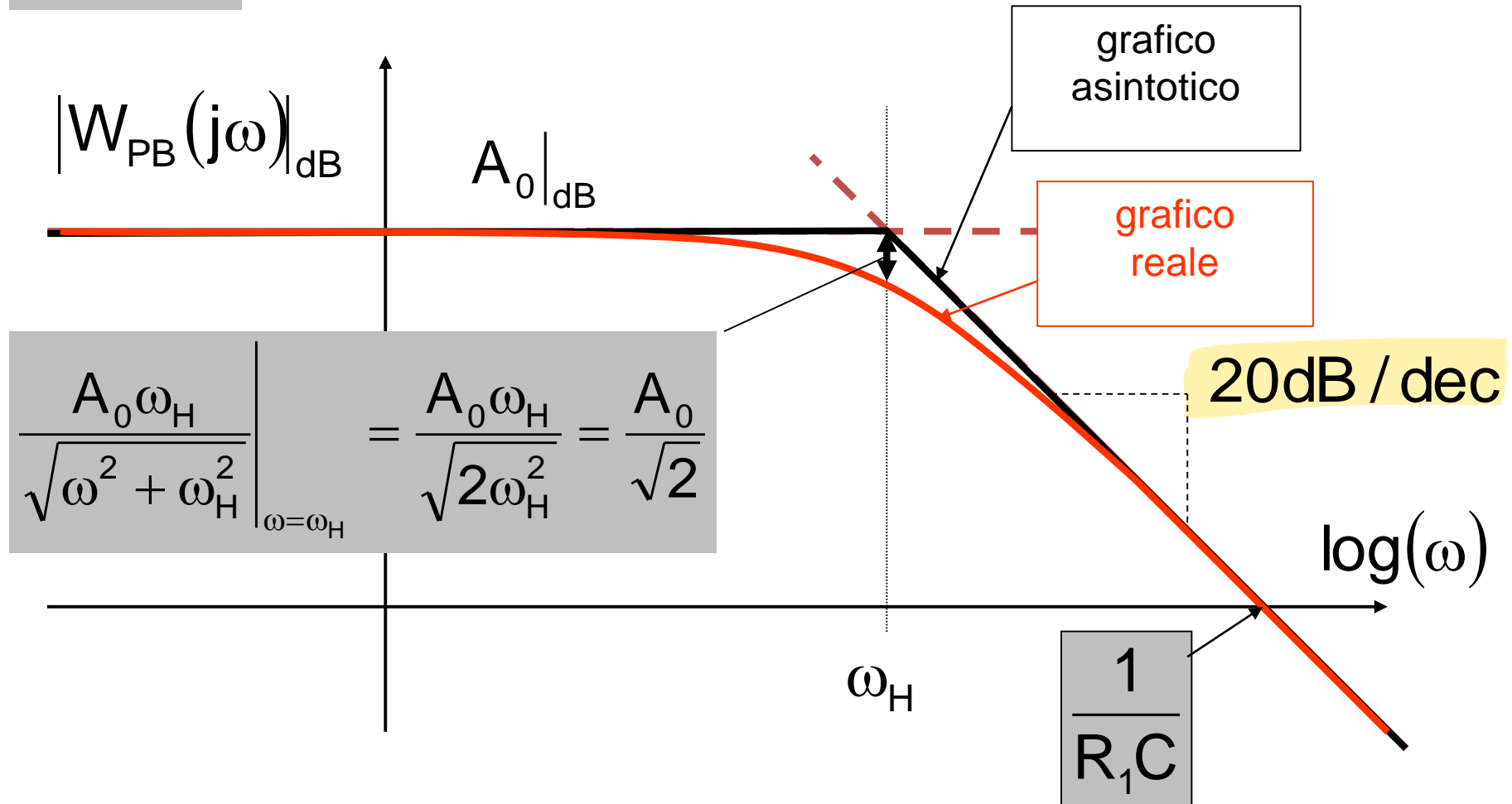
quindi

$$\text{quando } \omega = A_0 \omega_H = \frac{1}{R_1 C} \Rightarrow |W(j\omega)| = 1$$

Filtro passa-basso

$$\omega \ll \omega_H \quad (20 \log A_0) \text{dB} = A_0|_{\text{dB}}$$

$$\omega \gg \omega_H \quad (20 \log A_0 + 20 \log \omega_H - 20 \log \omega) \text{dB}$$



Filtro passa-basso

$$W_{PB}(s) = \frac{A_0 \omega_H}{s + \omega_H} = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_H}}$$

Diagramma di Bode della fase

Sostituiamo s con $j\omega$

$$\angle W_{PB}(j\omega) = \angle \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_H}} = \angle A_0 - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_H} \right)$$

$$\omega \ll \omega_H \quad \angle W_{PB}(j\omega) = \angle A_0$$

$$\omega \gg \omega_H \quad \angle W_{PB}(j\omega) = \angle A_0 - \frac{\pi}{2}$$

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$
$$\omega_H = \frac{1}{R_2 C}$$

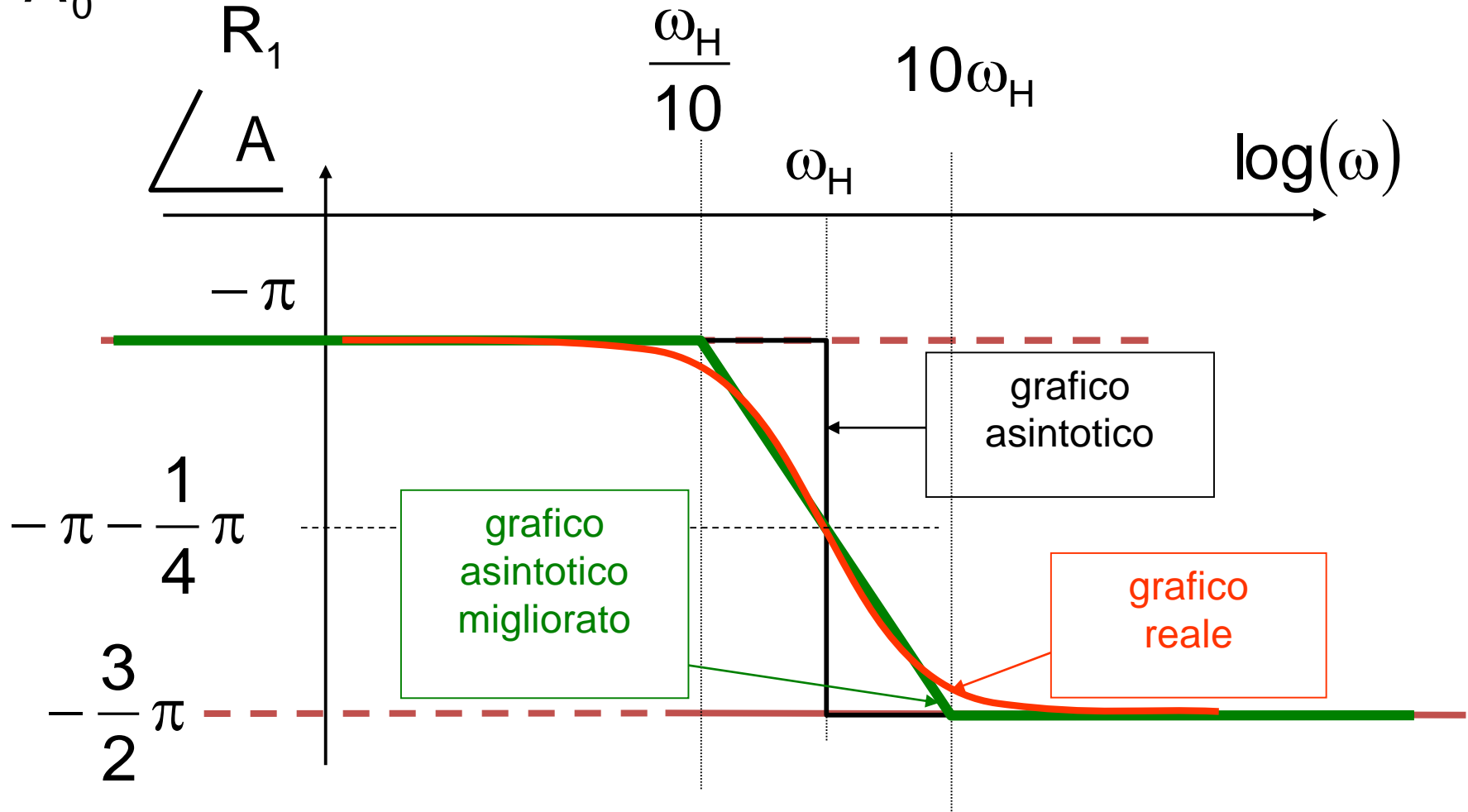
Filtro passa-basso

$$\omega \ll \omega_H \quad \angle A_0$$

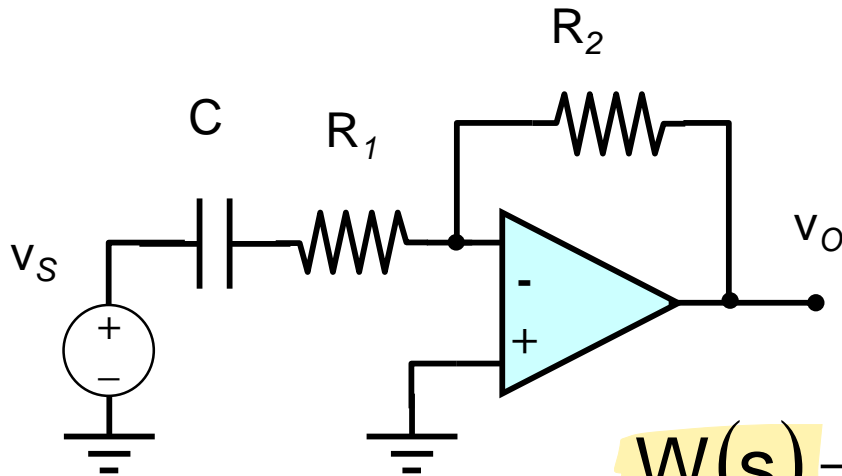
$$\omega \gg \omega_H \quad \angle A_0 - \frac{\pi}{2}$$

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\angle A$$



Amplificatore (filtro) passa-alto



$$Z_1 = \frac{1}{sC} + R_1 = \frac{1 + sCR_1}{sC}$$

$$W(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{sR_2C}{1 + sR_1C} = \frac{-\frac{R_2}{R_1}s}{s + \frac{1}{R_1C}}$$

$$W_{PA}(s) = \frac{A_\infty s}{s + \omega_L}$$

Funzione di trasferimento generica di un filtro passa alto.

**A_∞ =Guadagno ad alta frequenza;
 ω_L =Frequenza di taglio**

$$A_\infty = -\frac{R_2}{R_1}$$
$$\omega_L = \frac{1}{R_1C}$$

Filtro passa-alto

$$W_{PA}(s) = \frac{A_{\infty} s}{s + \omega_L}$$

Diagramma di Bode del Modulo

$$|W_{PA}(j\omega)| = \left| \frac{A_{\infty} j\omega}{j\omega + \omega_L} \right| = \frac{A_{\infty} \omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}}$$

$\xrightarrow{\omega \text{ molto maggiore di } \omega_L}$

$$\omega \ll \omega_L$$

$$\left. \frac{A_{\infty} \omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}} \right|_{\omega \ll \omega_L} \approx \frac{A_{\infty} \omega}{\omega_L} \rightarrow \text{segmento di } 20 \text{ dB/dec}$$

$$20 \log A_{\infty} - 20 \log \omega_L + 20 \log \omega$$

$$\omega \gg \omega_L$$

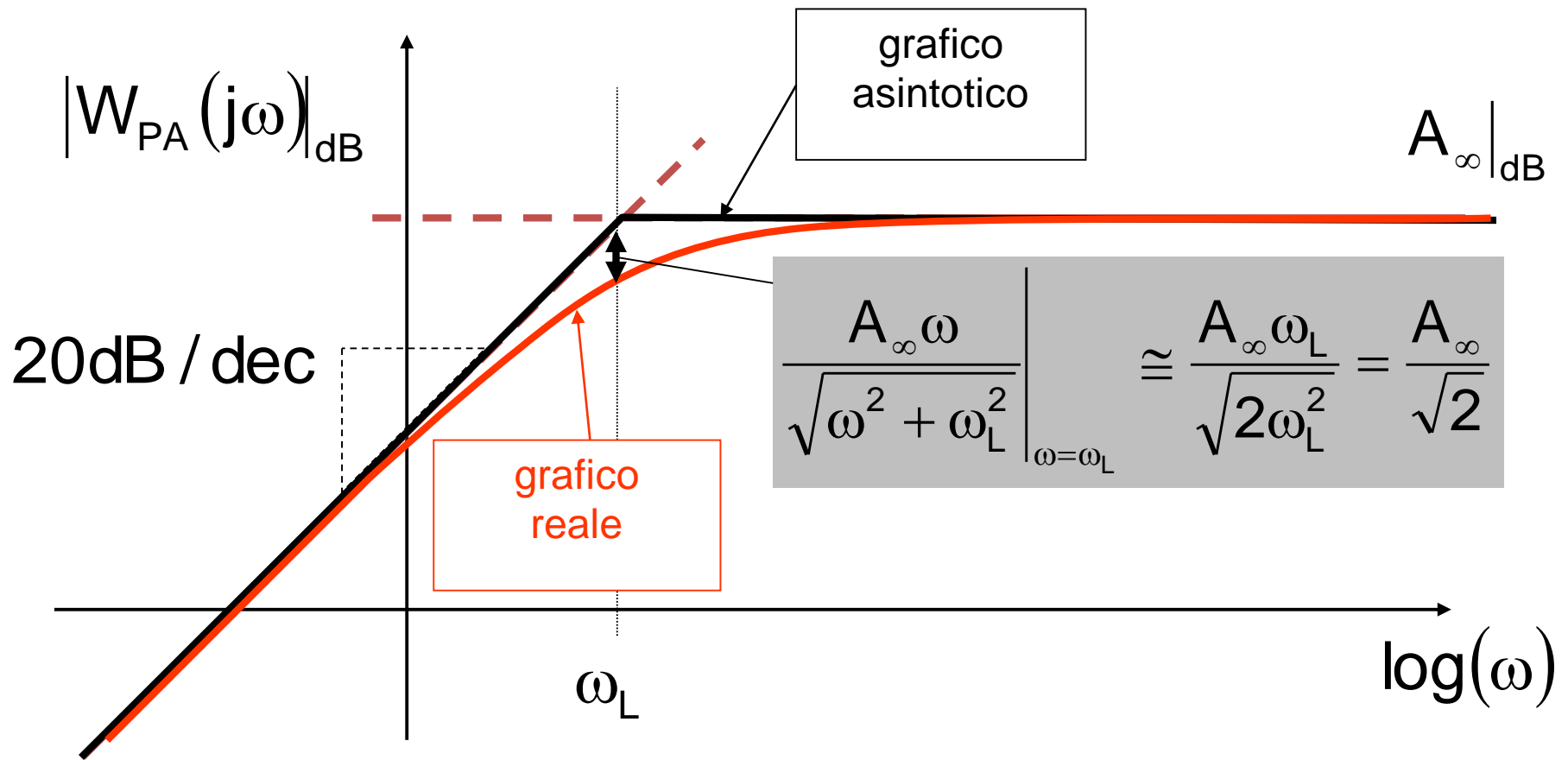
$$\left. \frac{A_{\infty} \omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}} \right|_{\omega \gg \omega_L} \approx \frac{A_{\infty} \omega}{\sqrt{\omega^2}} = A_{\infty} \rightarrow \text{costante}$$

$$20 \log A_{\infty}$$

Filtro passa alto

$$\omega \gg \omega_L \quad (20 \log A_\infty) \text{dB} = A_\infty|_{\text{dB}}$$

$$\omega \ll \omega_L \quad (20 \log A_\infty - 20 \log \omega_L + 20 \log \omega) \text{dB}$$



Filtro passa-alto

$$W_{PA}(s) = \frac{A_{\infty} s}{s + \omega_L}$$

Diagramma di Bode della fase

$$\angle W_{PA}(j\omega) = \angle \frac{j\omega A_{\infty}}{j\omega + \omega_L} = \angle A_{\infty} + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_L}\right)$$

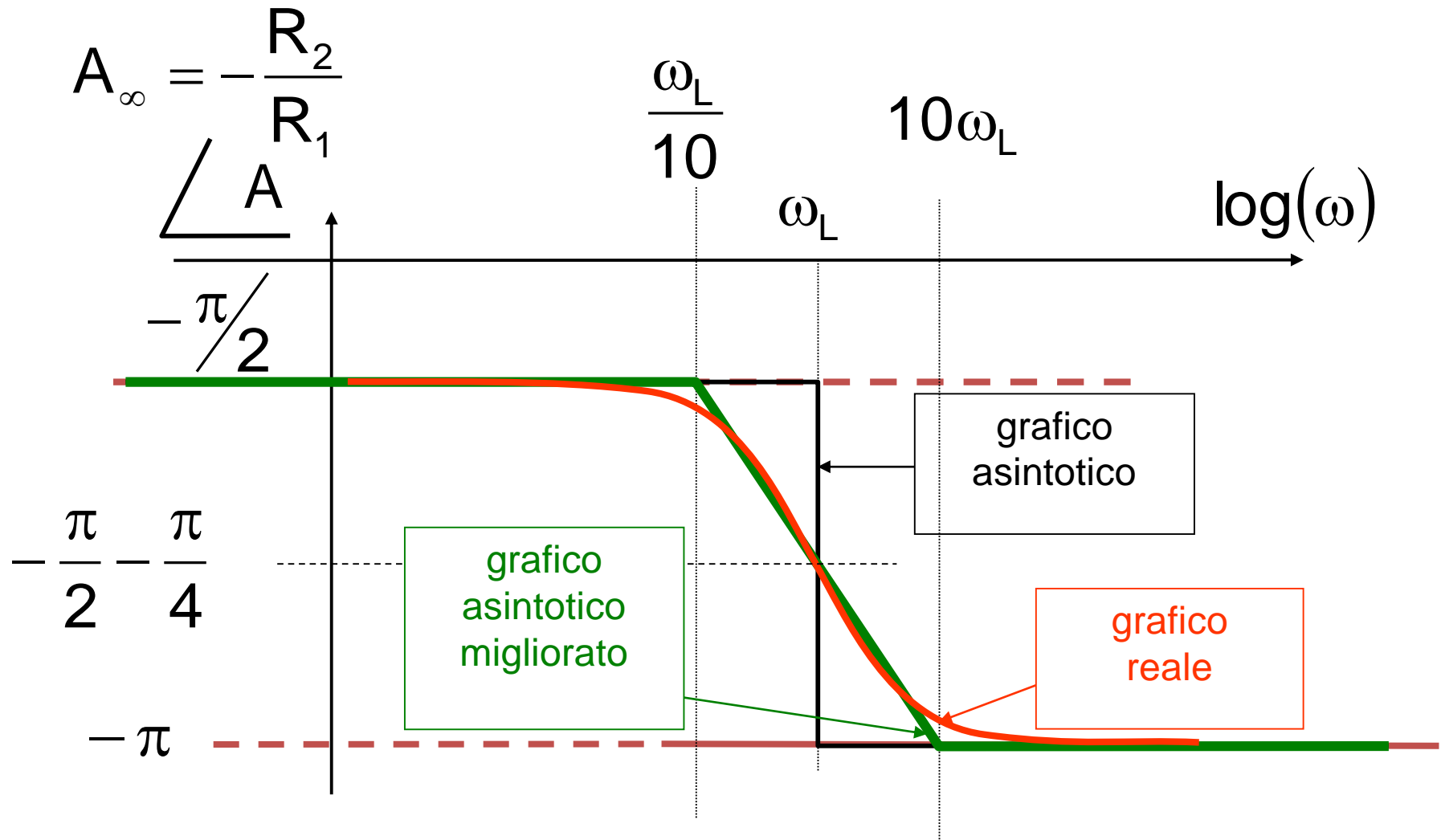
$$\omega \ll \omega_L \quad \angle W_{PA}(j\omega) = \angle A_{\infty} + \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \gg \omega_L \quad \angle W_{PA}(j\omega) = \angle A_{\infty} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

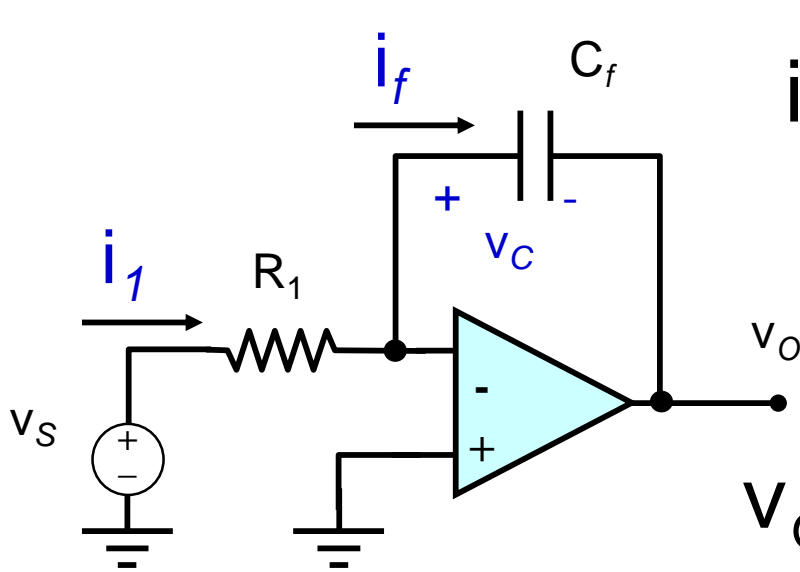
$$A_{\infty} = -\frac{R_2}{R_1}$$
$$\omega_L = \frac{1}{R_1 C}$$

$$\omega \ll \omega_L \quad \angle A_\infty + \frac{\pi}{2}$$

$$\omega \gg \omega_L \quad \angle A_\infty - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$



Integratore



$$i_1 = i_f = \frac{v_S}{R_1} \quad i_f = \frac{v_S}{R_1} = C_f \frac{dv_C}{dt}$$

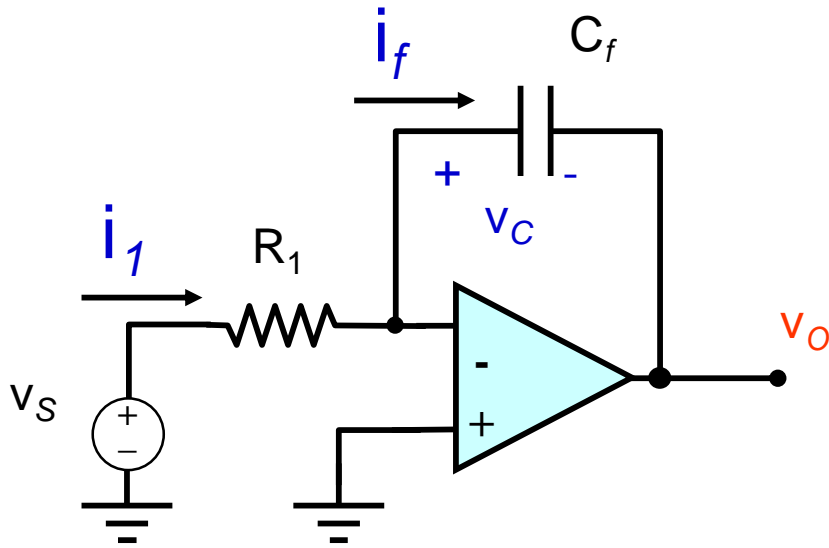
$$v_O(t) = -\frac{1}{C_f} \int_0^t \frac{v_S(\tau)}{R_1} d\tau - v_C(0)$$

Se $v_C(0)=0$ otteniamo:

$$v_O(t) = -\frac{1}{R_1 C_f} \int_0^t v_S(\tau) d\tau$$

$$W(s) = -\frac{Z_f}{Z_{in}} = -\frac{\frac{1}{sC_f}}{R_1} = -\frac{1}{sR_1 C_f}$$

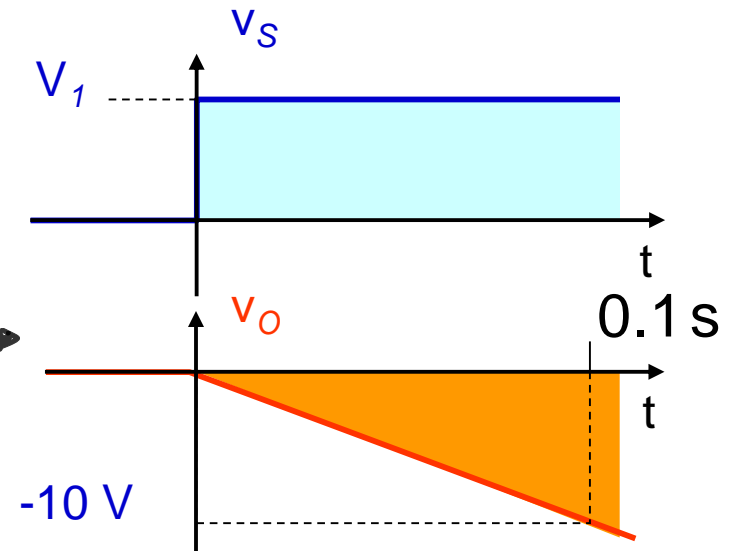
Integratore



$$v_S(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$v_O(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\frac{V_1}{R_1 C_f} t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$v_O(t) = -\frac{1}{R_1 C_f} \int_0^t v_S(\tau) d\tau$$

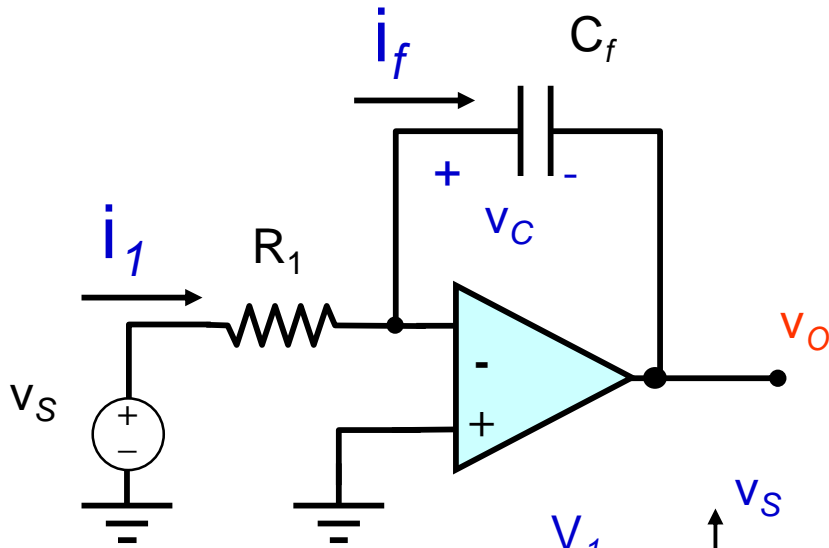


se:

$$R_1 = 10k\Omega, C_f = 1\mu F, V_1 = 1V$$

$$v_O(0.1s) = -\frac{1V}{10^4 \Omega 10^{-6} F} 0.1s = -10V$$

Integratore

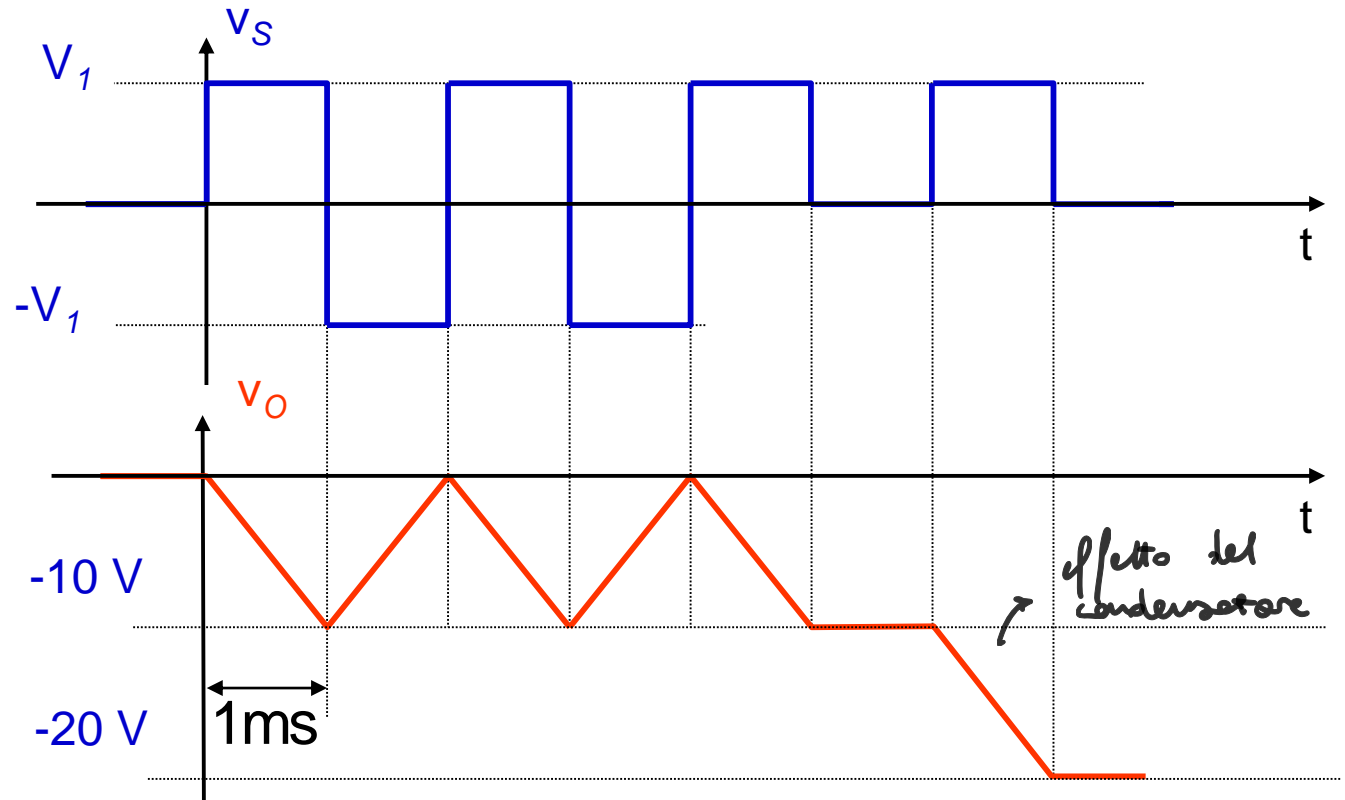


$$v_O(t) = -\frac{1}{R_1 C_f} \int_0^t v_S(\tau) d\tau$$

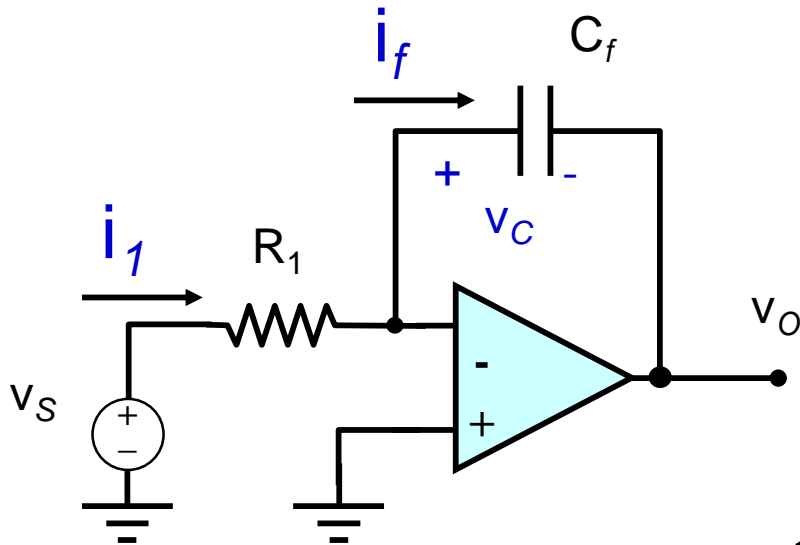
se: $R_1 = 10\text{k}\Omega, C_f = 10\text{nF}, V_1 = 1\text{V}$

$$\begin{aligned} R_1 C_f &= \\ &= 10\text{k}\Omega \cdot 10\text{nF} \\ &= 0.1\text{ms} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_O(1\text{ms}) &= \\ &= -\frac{1\text{V}}{0.1\text{ms}} 1\text{ms} \\ &= -10\text{V} \end{aligned}$$



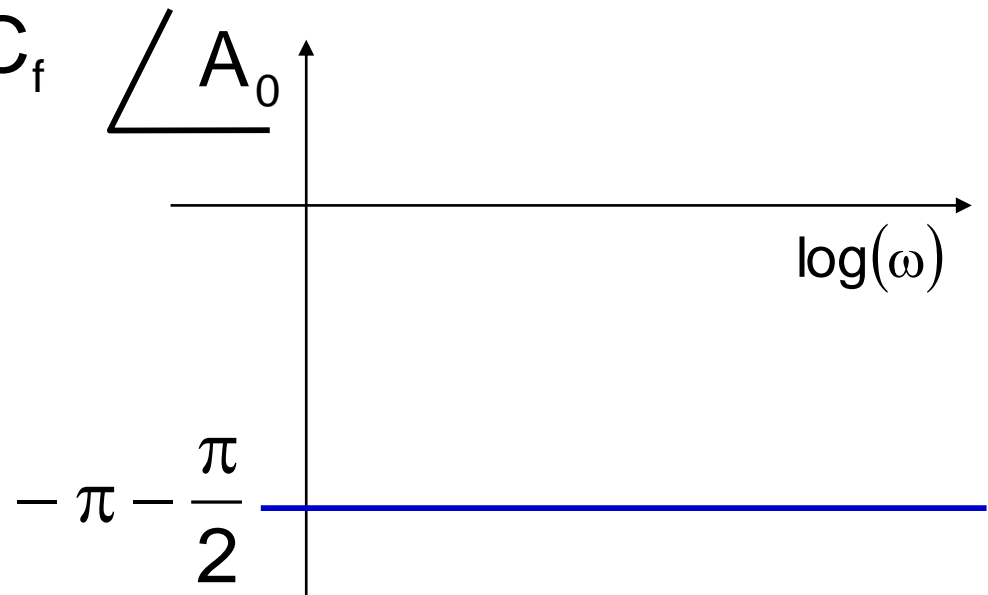
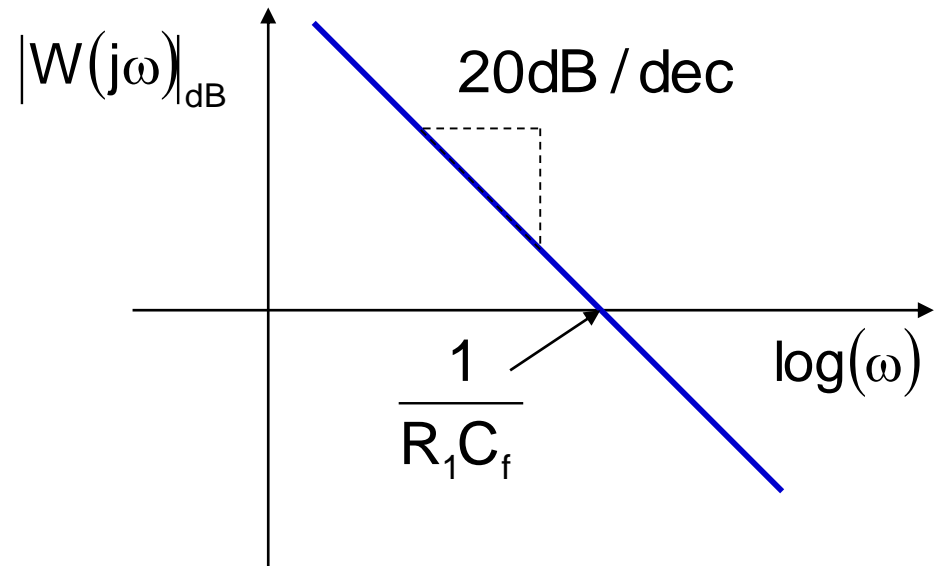
Integratore



$$W(s) = -\frac{1}{sR_1C_f}$$

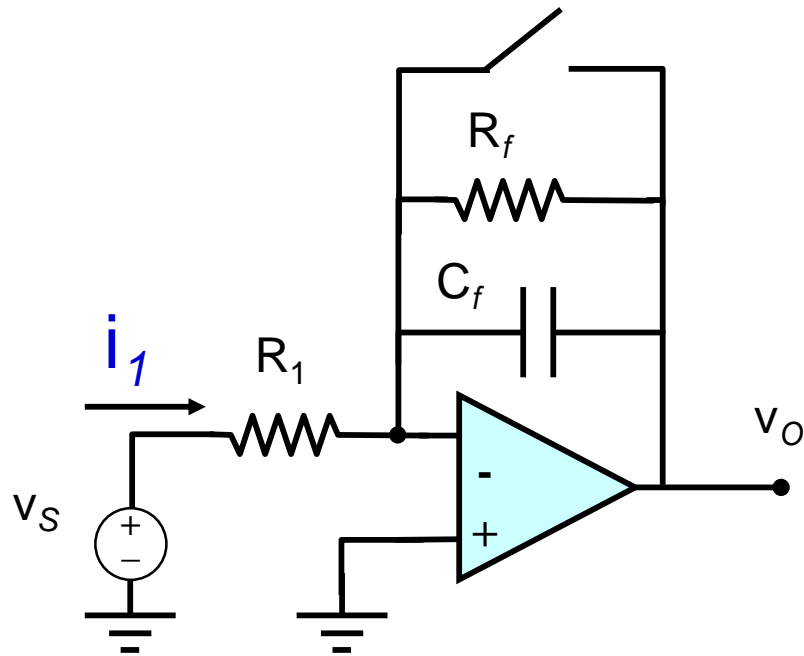
$$|W(j\omega)| = \left| \frac{1}{j\omega R_1 C_f} \right| = \frac{\omega_f}{\omega}$$

$$\angle W(j\omega) = -\pi - \frac{\pi}{2}$$

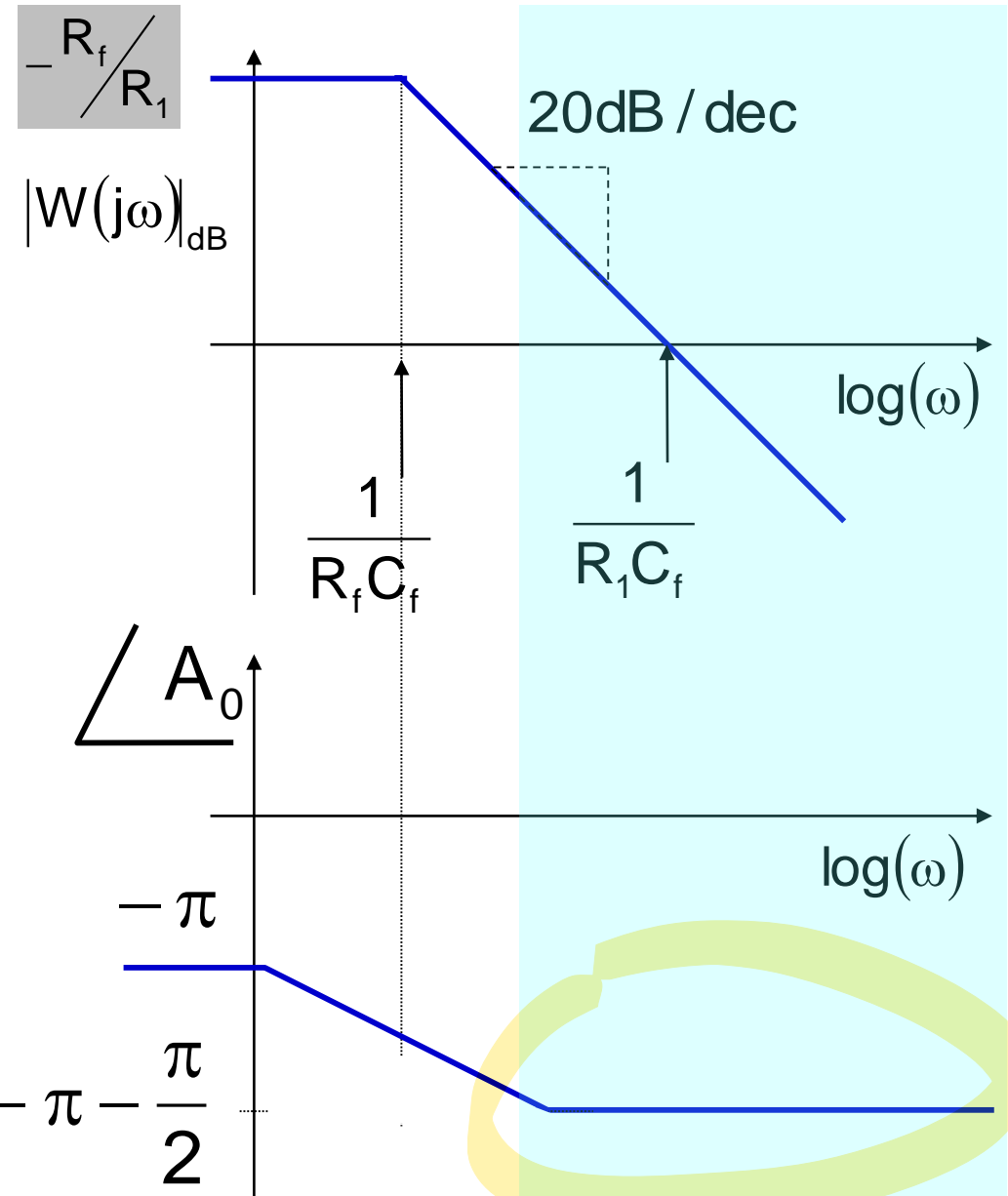


Integratore reale

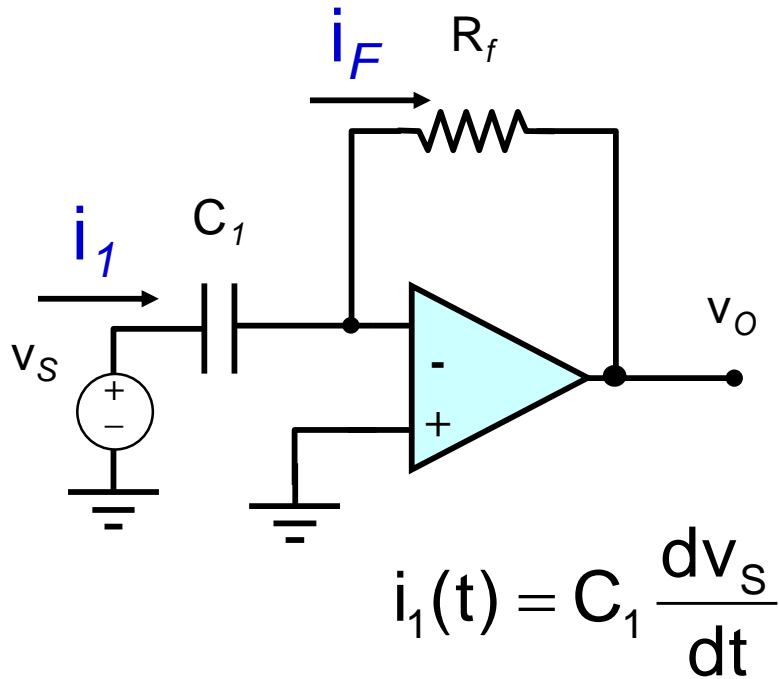
- Problema della DC
- Problema delle correnti di perdita e della tensione di offset



$$W(s) = -\frac{R_f}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + sC_f R_f}$$
$$-\pi - \frac{\pi}{2}$$



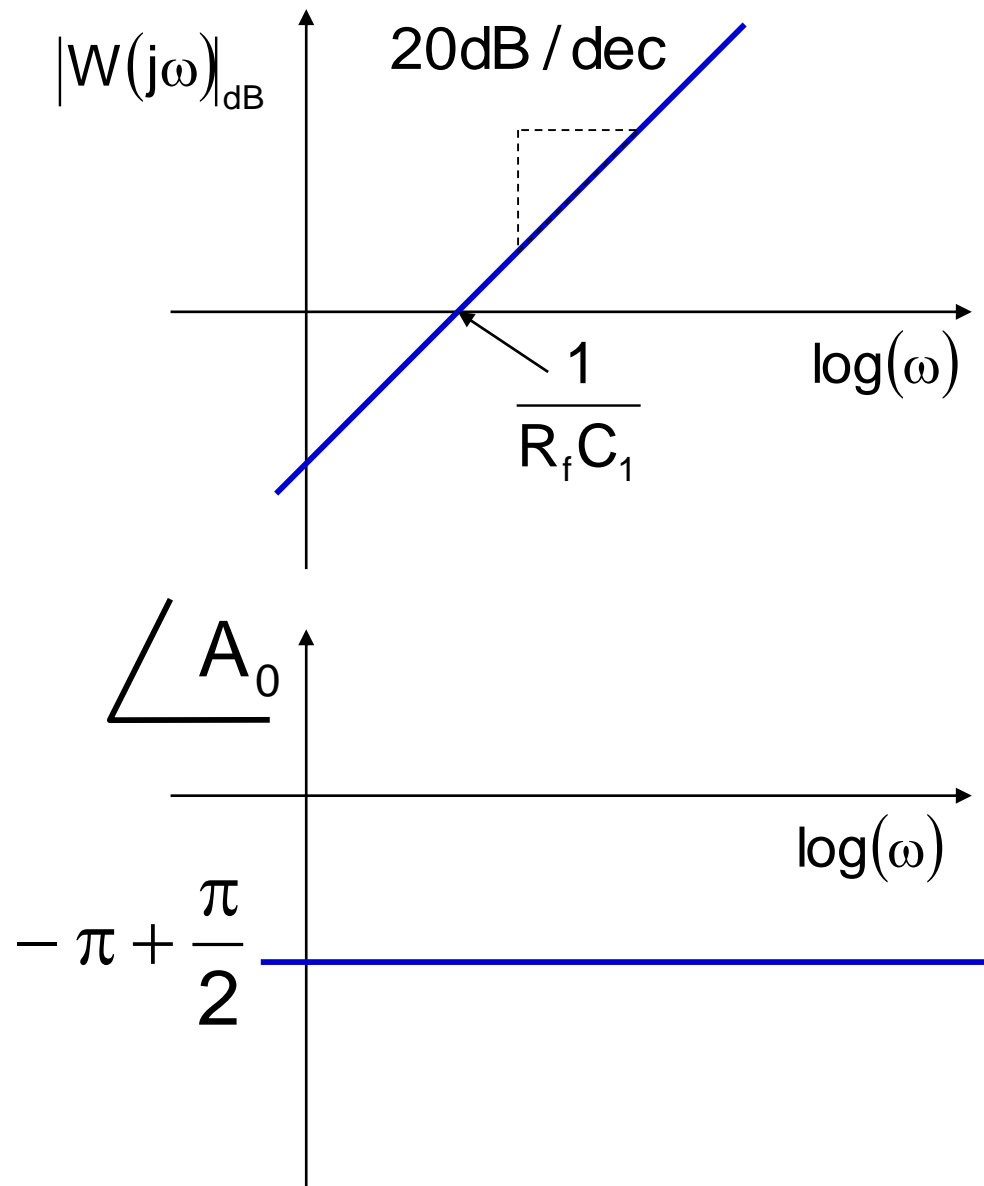
Derivatore (ideale)



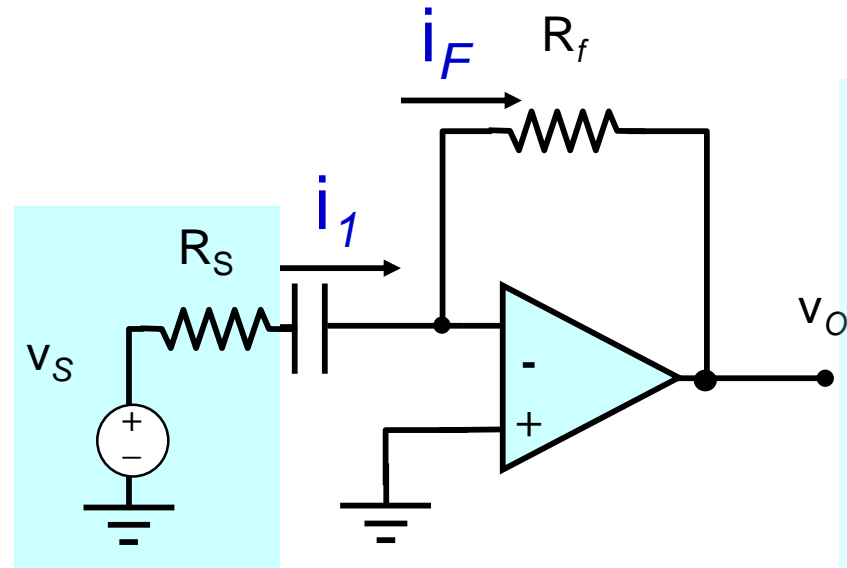
$$v_O(t) = -i_C(t) \cdot R_f$$

$$= -R_f C_1 \cdot \frac{dv_S}{dt}$$

$$W(s) = -sR_f C_1$$

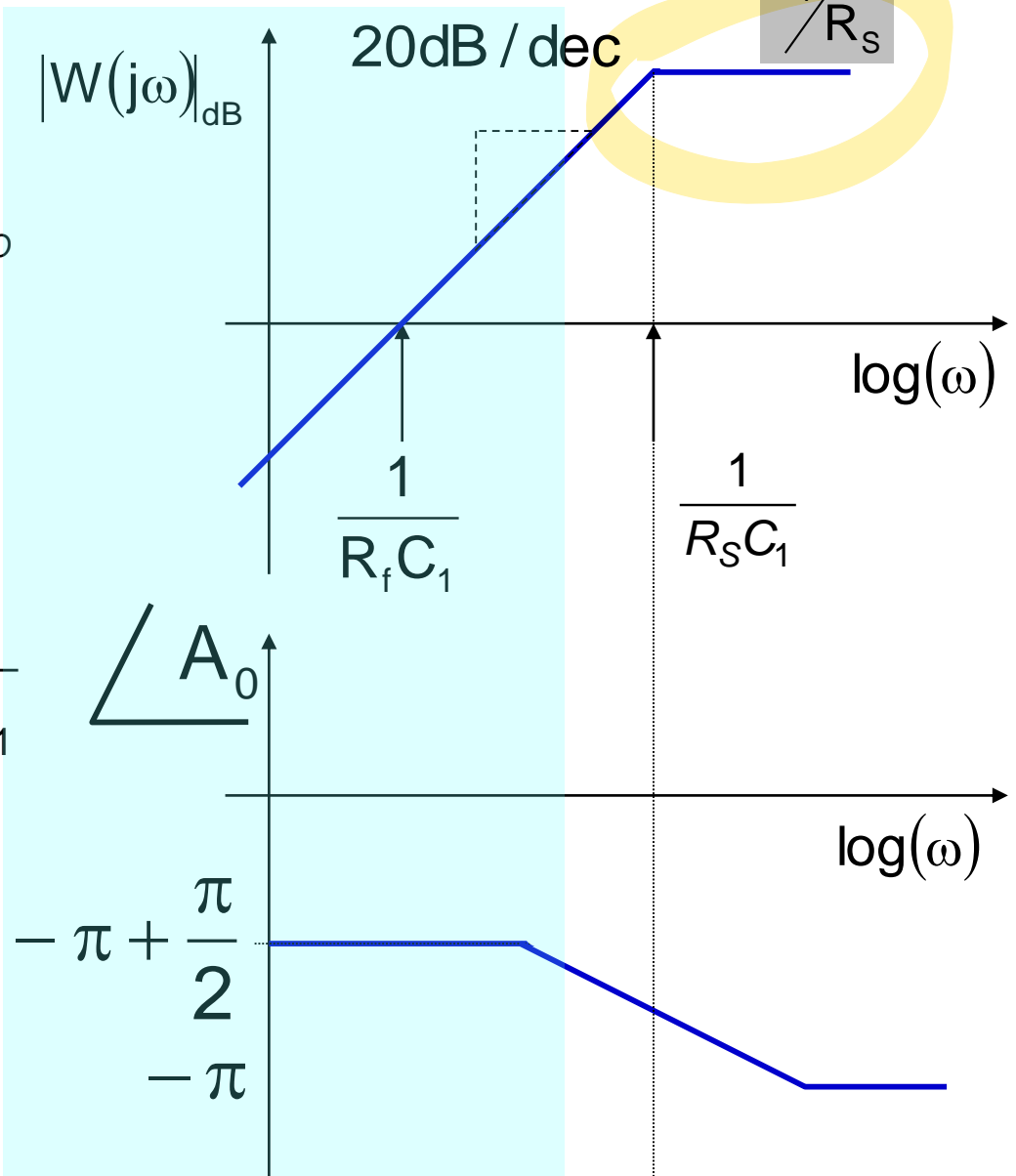


Derivatore (reale)

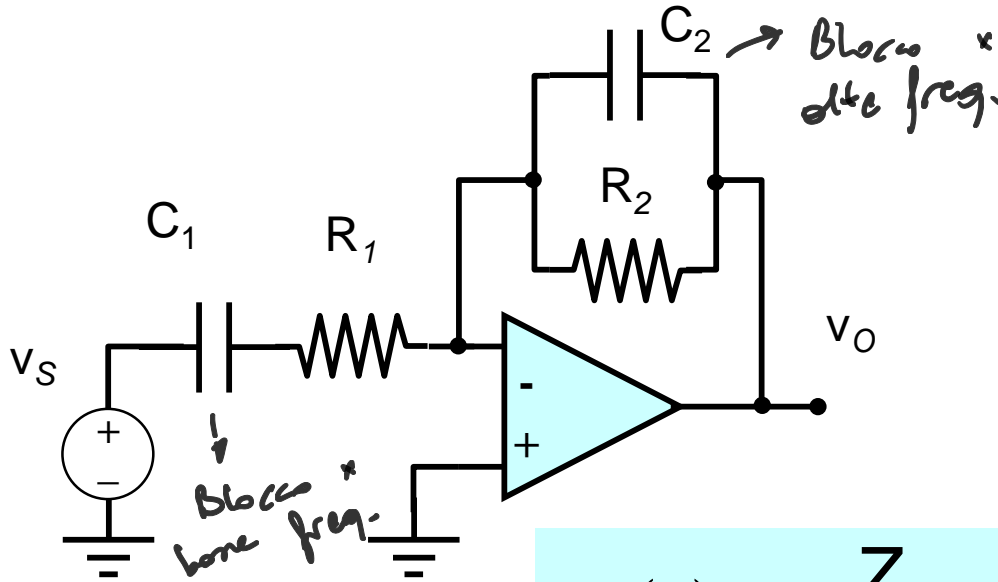


$$W(s) = -\frac{R_f}{R_S + \frac{1}{sC_1}} = -\frac{sR_fC_1}{1 + sR_SC_1}$$

$$W(s) = -\frac{R_f}{R_S} \frac{s}{\frac{1}{R_SC_1} + s}$$



Filtro passa-banda



$$Z_1 = \frac{1 + sC_1R_1}{sC_1}$$

$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + sC_2R_2}$$

$$W(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{sR_2C_1}{(1 + sC_1R_1)(1 + sC_2R_2)}$$

$$R_1 = 1\text{k}\Omega$$

$$R_2 = 10\text{k}\Omega$$

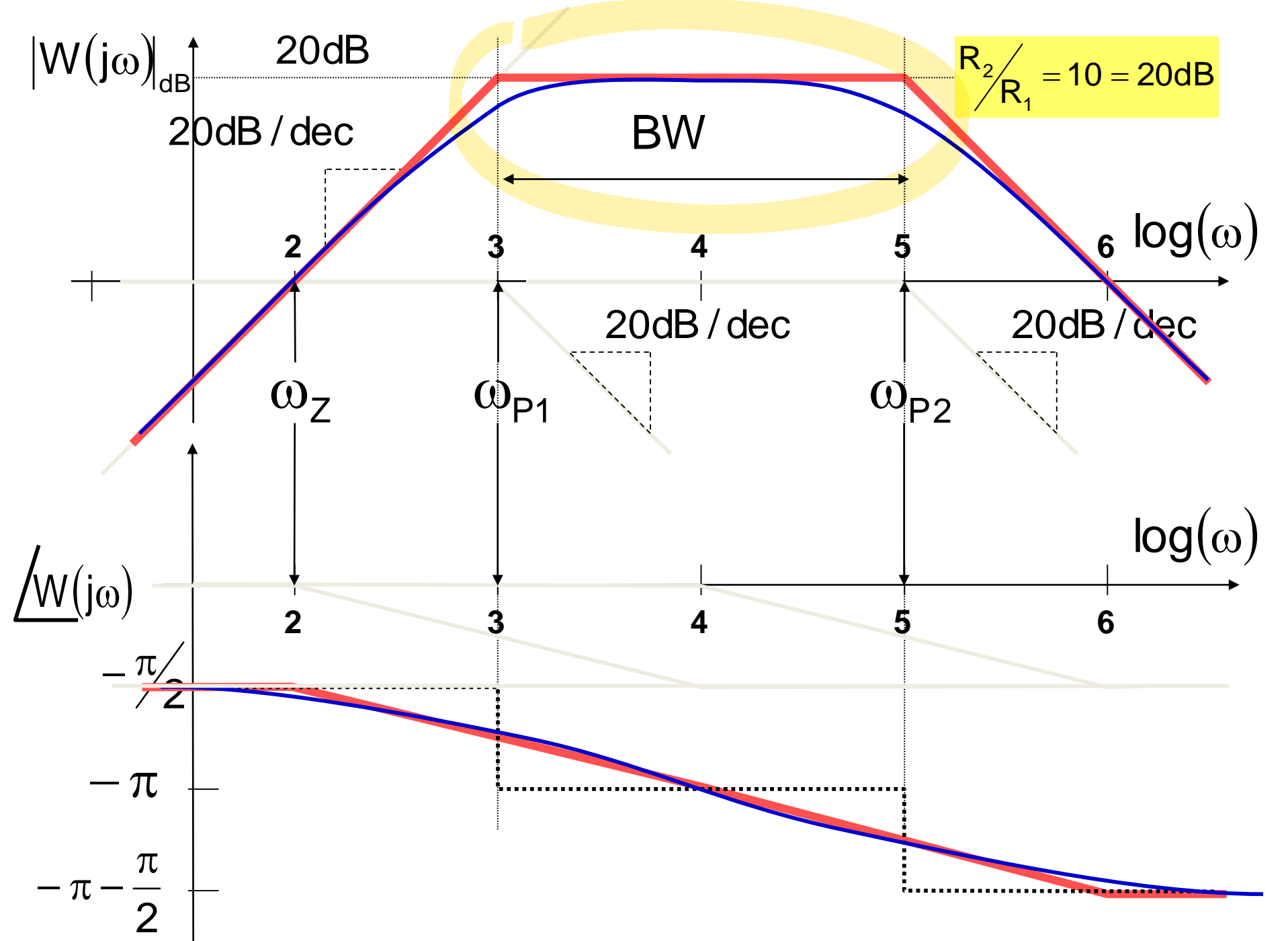
$$C_1 = 1\mu\text{F}$$

$$C_2 = 1\text{nF}$$

$$\omega_Z = \frac{1}{R_2C_1} = 100 \quad [\text{rad/sec}]$$

$$\omega_{P1} = \frac{1}{C_1R_1} = 1000 \quad [\text{rad/sec}]$$

$$\omega_{P2} = \frac{1}{C_2R_2} = 100000 \quad [\text{rad/sec}]$$



Filtro passa banda

$$W(s) = -\frac{sR_2C_1}{(1+sC_1R_1)(1+sC_2R_2)}$$

$$W(s) = -\frac{s/\omega_z}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{P1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{P2}}\right)}$$

Posso riscrivere come:

$$W(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{s}{\left(s + \frac{1}{C_1R_1}\right)} \frac{1}{(sC_2R_2 + 1)}$$

$$W(s) = A_0 \frac{s}{(s + \omega_{P1})} \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_{P2}} + 1\right)}$$

Metto in evidenza il guadagno a centro banda.

Regola Generale:

Se individuo poli e zeri a bassa frequenza (prima del centro banda) e li scrivo nella forma $(s+\omega)$, avrò una formula che ha come coefficiente (non dipendente da s) il guadagno a centro banda.