Stefano Tomasin

Esercizi di Fondamenti di Telecomunicazioni

AA 2022-23

Indice

Nota: I riferimenti a figure, equazioni, tabelle, teoremi ecc. sono tutti relativi al libro *Principles of Communications Networks and Systems*, ed. Benvenuto e Zorzi, Wiley.

Parte I

Esercizi

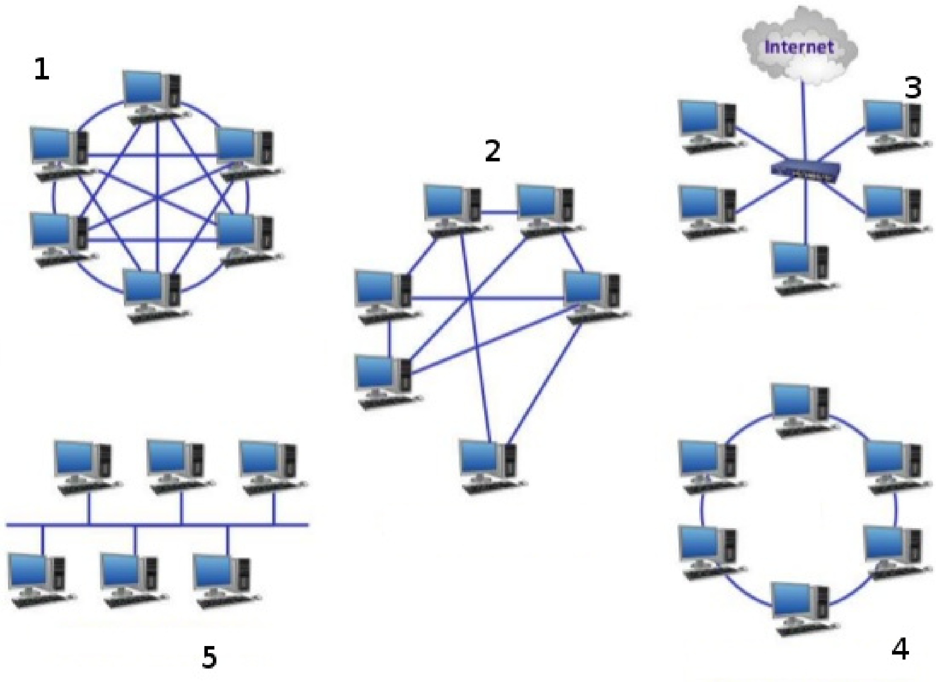
Capitolo 1

Sistemi di Telecomunicazioni

Esercizio 1 [Soluzione]
Per ciascuno dei seguenti sistemi di trasmissione si dica se è a) unicast b) broadcast c) multicast d) anycast e) multipoint:

1. Televisione via satellite
2. Coppia di walkie-talkie tradizionali
3. You tube
4. Streaming TV via Internet
5. Compact disc
6. Bit torrent

Esercizio 2 [Soluzione]
Si classifichino le seguenti topologie di rete



Esercizio 3 [Soluzione]
Dire quale strato della pila OSI si occupa di

1. determinare la durata in microsecondi del segnale che identifica un bit;
2. gestire la posta elettronica
3. valutare la necessità di frammentare i pacchetti dati se la nuova rete ha una diversa Maximum Transmission Unit (MTU);
4. determinare le tensioni scelte per rappresentare i valori logici dei bit trasmessi;
5. svolgere funzioni di controllo d'errore
6. stabilire, mantenere e terminare una connessione, garantendo il corretto e ottimale funzionamento della sottorete di comunicazione;
7. trasferire file con il protocollo FTP
8. controllare la congestione: evitare che troppi pacchetti dati arrivino allo stesso router contemporaneamente con effetto di perdita di pacchetti stessi.
9. effettuare le funzioni di terminale virtuale
10. determinare la modulazione e la codifica utilizzata;
11. tradurre gli indirizzi di rete;

12. controllare il flusso di dati (controllo di flusso);

13. valutare la necessità di gestire diversi protocolli attraverso l'impiego di gateway.

Esercizio 4 [Soluzione]
In una rete LAN su cui scorre un traffico Internet di web-browsing indicare per ciascun protocollo usato lo strato OSI corrispondente:

1. TCP
2. IP
3. HTTP
4. Ethernet IEEE 802.3

Capitolo 2

Teoria dei Segnali e Probabilità

Esercizio 5 [Soluzione]
Sia $y = x + w$ con x variabile aleatoria di Bernoulli di parametro $p = 0.2$ e w variabile aleatoria gaussiana con media nulla e deviazione standard $\sigma = 1.4$. Calcolare

1. $\mathbb{P}(y > 0|x = 1)$
2. $\mathbb{P}(y > 0)$
3. $\mathbb{P}(y < 0)$

Esercizio 6 [Soluzione]
Sia $y = \text{sgn}(x + w)$ con x variabile aleatoria di Bernoulli di parametro $p = 0.2$ e w variabile aleatoria gaussiana con media nulla e varianza $\sigma = 1$ e $\text{sgn}(a) = 1$ per $a \geq 0$ e $\text{sgn}(a) = -1$ per $a < 0$. Calcolare

1. $\mathbb{P}(y = x)$
2. $\mathbb{P}(y > 0|x = 1)$
3. $\mathbb{P}(y = 2x - 1)$

Esercizio 7 [Soluzione]
Si consideri la seguente densità di probabilità discreta congiunta delle variabili aleatorie x e y

x \y	-1	0	1
2	0.1	0.3	0.2
3	0.1	0.1	0.2

1. Scrivere la densità $p(y|x)$
2. Scrivere le densità $p(x)$ e $p(y)$.
3. Calcolare $\mathbb{E}(x)$, $\mathbb{E}(x^2)$, $\mathbb{E}(-\log_2 p(x))$,

Esercizio 8 [Soluzione]
Siano x e y due variabili aleatorie gaussiane con medie μ_x e μ_y e varianze σ_x^2 e σ_y^2. Trovare la statistica delle seguenti variabili aleatorie, specificandone tutti i parametri

1. $x + y$
2. $x - y$
3. $2x - 3y$

4. $3x + 4$

Esercizio 9 [Soluzione]
Sia y una variabile esponenziale di parametro $\lambda = 2$ e x una variabile aleatoria (indipendente da x) che assume valore 1 con probabilità $p = 0.4$ e valore 2 con probabilità $1 - p = 0.6$. Sia $z = x + y$.

1. Scrivere l'espressione di $\mathbb{P}(z > A|x = 2)$ e calcolarne il valore per $A = 1$ e $A = 3$

2. Scrivere l'espressione di $\mathbb{P}(z > A|x = 2)p_x(2)+\mathbb{P}(z < A|x = 1)p_x(1)$ e calcolarne il valore per $A = -2$

Esercizio 10 [Soluzione]
Siano x_k, $k = 0, \ldots$, variabili aleatorie gaussiane indipendenti e identicamente distribuite con media nulla e varianza $\sigma^2 = 0.1$. Sia $\alpha_k = 0.25^k$. Trovare la statistica di

$$y = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \alpha_k \,,$$

con $N = 1$ e 10.

Esercizio 11 [Soluzione]
Sia x variabile aleatoria di Bernoulli di parametro $p = 0.5$ e w gaussiana standard. Sia $y = x + w$ e

$$z = \begin{cases} -1 & y < -A \\ 0 & |y| < A \\ 1 & y > A \,. \end{cases}$$

Trovare

1. $\mathbb{P}(z = 0)$ e calcolarne il valore per $A = 2$

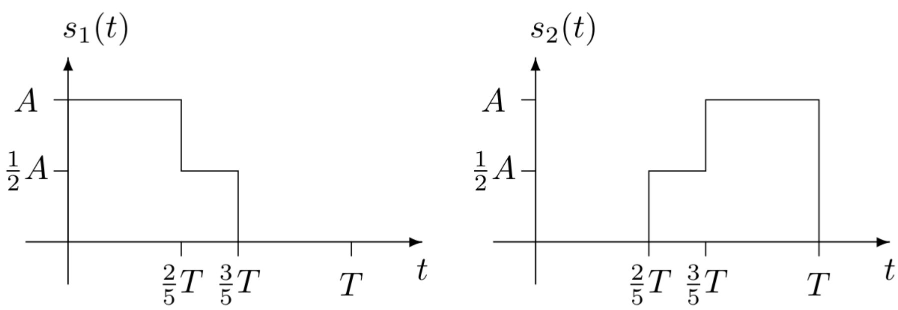
2. 1-$\mathbb{P}(z \neq x|x \neq 0)$ e calcolarne il valore per $A = 2$

Esercizio 12 [Soluzione]
Disegnare e scrivere l'espressione di segnali di onda quadra con valori 1 e 0 e

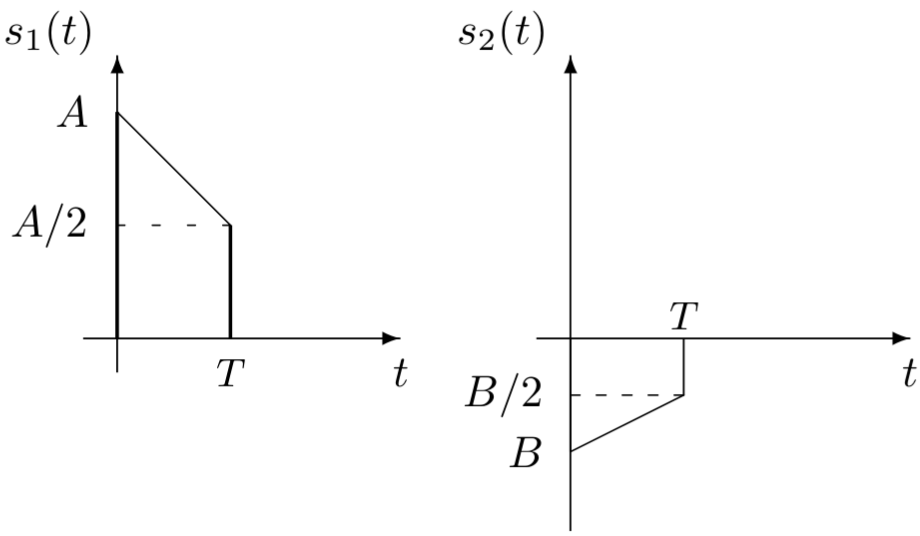
1. durata dei due tratti costanti uguale a $T = 1$ s e un fronte di salita in $t = 0$;

2. durata T per il tratto con valore 1 e $T/2$ per il tratto di valore 0

Esercizio 13 [Soluzione]
Si scriva l'espressione dei seguenti segnali



1)



3)

Esercizio 14 [Soluzione]
Calcolare l'energia dei segnali degli esercizi 12 e 13.

Esercizio 15 [Soluzione]
Calcolare l'energia dei segnali

1. $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}(t/T)$
2. $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-2.5}{2T}\right)$
3. $x(t) = \mathrm{triangle}\left(\frac{t+1}{2T}\right)$
4. $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-5}{4}\right) + \mathrm{triangle}\left(\frac{3t+1}{2}\right)$

Esercizio 16 [Soluzione]
Sia

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) = 2\ \mathrm{rect}(t-0.25) & y = 1 \\ x_2(t) = \mathrm{triangle}\left(\frac{t-1}{2}\right) & y = -1 \end{cases}$$

Sia y aleatoria con $\mathbb{P}(y=1) = p$ calcolare l'energia media di $x(t)$.

Esercizio 17 [Soluzione]
Sia $x(t) = A\ \mathrm{triangle}(t+0.5)$ e A una variabile aleatoria in $\{-3,-1,1,3\}$ uniforme. Calcolare l'energia media di $x(t)$.

Esercizio 18 [Soluzione]
Calcolare la convoluzione di $x(t) = e^{-at}\mathbb{1}(t)$ e $y(t) = e^{-b(t-2)}\mathbb{1}(t-2)$.

Esercizio 19 [Soluzione]
Calcolare la convoluzione di $x(t) = \mathrm{triangle}(t-2)$ e $y(t) = \mathrm{rect}(t/4)$.

Esercizio 20 [Soluzione]
Scrivere i segnali campionati a tempo T dei segnali

- $x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{3T}\right)$
- $x(t) = \frac{3}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-5/2}{3T}\right)$

- $x(t) = \exp(-t)\mathbb{1}(t)$
- $x(t) = 3\,\text{triangle}\left(\frac{t}{6T}\right) + 1$

Esercizio 21 [Soluzione]
Interpolare (con $T = 0.5$)

1. $x(nT) = \frac{3}{4}\,\text{rect}\left(\frac{nT-5/3}{7T}\right)$ con $h(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$
2. $$x(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ -5 & n = 3 \end{cases}$$
   con $h(t) = \text{triangle}\left(\frac{t}{2T}\right)$
3. $$x(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ -5 & n = 3 \end{cases}$$
   con $h(t) = \text{triangle}\,(t)$

Esercizio 22 [Soluzione]
Calcolare energia e potenza dei seguenti segnali, dove f_0, φ_0, t_0 e T_0 sono parametri legati dalle relazioni,

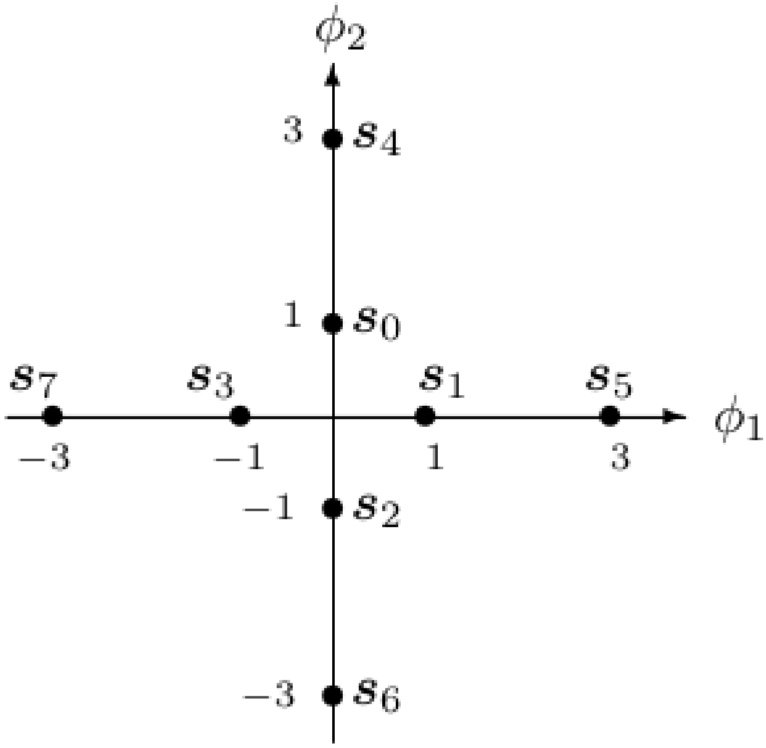
$$T_0 = 2/3, \quad f_0 = 3\text{MHz}, \quad t_0 = T_0/2.$$

1. (2p) $x(t) = 5\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) + 2\text{rect}(\frac{t-t_0}{T_0})$.
2. (2p) $x(t) = 10\sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)\text{rect}(\frac{t-t_0}{T_0})$.
3. (2p) $x(t) = 10\cos(2\pi f_0 t)\text{rect}(\frac{t-t_0}{T_0/4})$.
4. (2p) $x(t) = 10\cos(2\pi f_0 t)\text{rect}(\frac{t-t_0}{T_0/8})$.

Capitolo 3

Modulazione Digitale

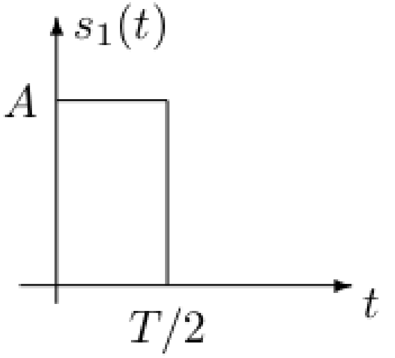
Esercizio 23 [Soluzione]
Sia dato un sistema 8-QAM con una costellazione nel punto di decisione del tipo riportato in figura. Assumere il canale AWGN con potenza del rumore per dimensione $\sigma_I^2 = 2.5 \cdot 10^{-3}$.



1. (3p) Riportare in figura le regioni di decisione ottime assumendo che tutti i segnali abbiano la stessa probabilità a priori. Riportare le coordinate dei vari segmenti componenti la frontiera delle regioni di decisione.
2. (2p) Quale delle seguenti probabilità di errore condizionate è MINORE: $\mathbb{P}[\mathrm{E}|s_0]$ o $\mathbb{P}[\mathrm{E}|s_4]$? Perché?
3. (2p) Assumere che sia stato trasmesso s_0. Nel caso il ricevitore commetta un errore, quale è il segnale più probabile ad essere scelto dall'elemento di decisione? Perché?
4. (3p) Determinare un lower bound alla probabilità di errore del sistema.

5. (3p) Assumere che s_0, s_1, s_2 e s_3 siano fissati, mentre si possano scegliere vettori differenti per s_4, s_5, s_6 e s_7. Si disegni una nuova costellazione che, senza alterare l'energia media del sistema, ne diminuisca la probabilità di errore.

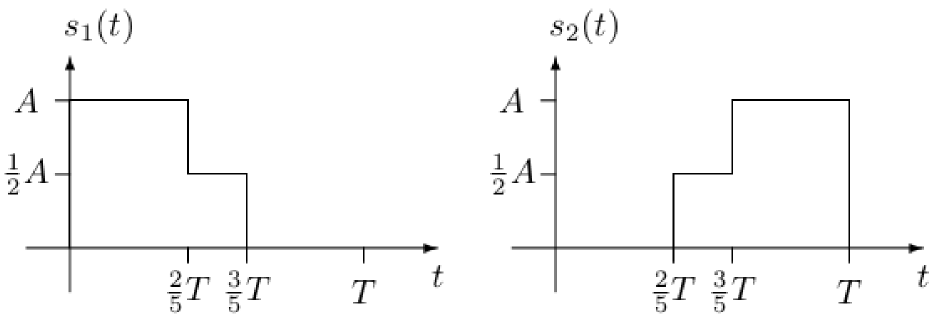
Esercizio 24 [Soluzione]
Si consideri la segnalazione binaria che utilizza i segnali illustrati in figura, che vengono trasmessi con la stessa probabilità su canale AWGN.



Sia $B = A/2$, con $A = 0.7$ V e $T = 1\,\mu$s.

1. (3p) Rappresentare la costellazione della segnalazione.
2. (2p) Rappresentare lo schema a blocchi del ricevitore a minima distanza.
3. (3p) Calcolare la probabilità d'errore assumendo il rumore gaussiano bianco con $N_0/2 = 10^{-8}$ V^2/Hz.
4. (3p) Considerando ora B variabile e imponendo che $s_2(t)$ abbia la stessa energia di $s_1(t)$, determinare il valore di B che minimizza la probabilità d'errore.

Esercizio 25 [Soluzione]
Si consideri un sistema di trasmissione binario (a simboli equiprobabili) con forme d'onda illustrate in figura aventi uguale energia $E_s = 10^{-6}$ V^{2}s e $T = 10\,\mu$s, trasmesso su canale AWGN.

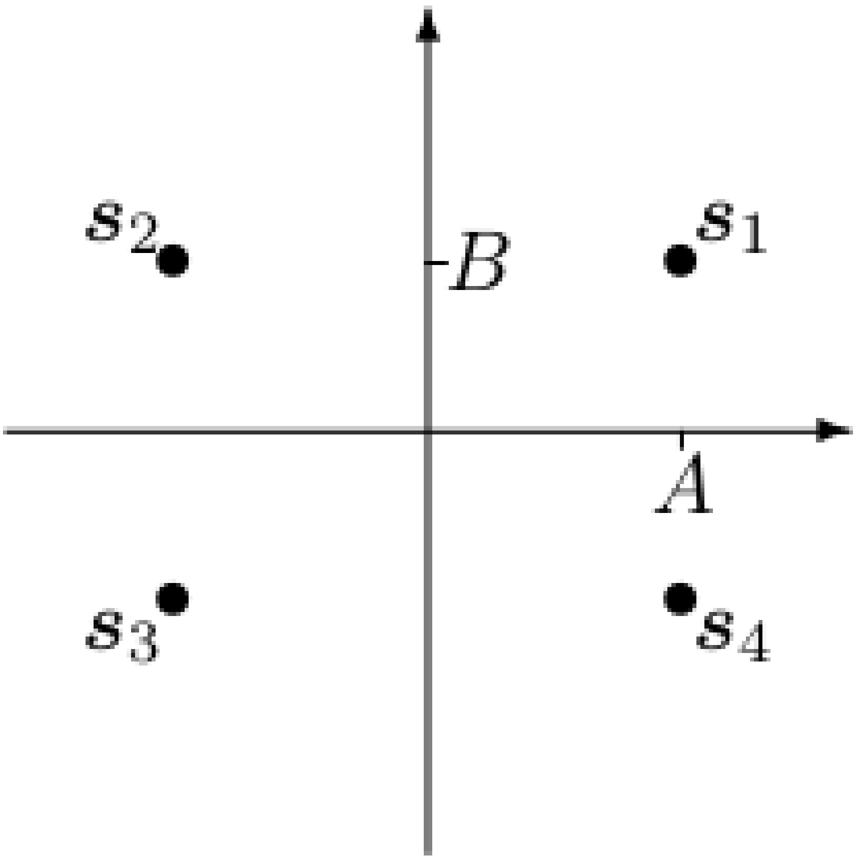


1. (4p) Si determini il valore di A e, con il metodo di Gram-Schmidt partendo da $\phi_1(t) \propto s_1(t) - s_2(t)$, si determini una base ortonormale e la relativa costellazione.
2. (2p) Usando i risultati del punto 1), si rappresenti lo schema a blocchi del ricevitore ottimo specificandone le regioni di decisione.

3. (2p) Dal risultato del punto 2), si disegni una implementazione del ricevitore ottimo che richieda il solo correlatore $\phi_1(t)$, specificandone la regola di decisione.

4. (3p) Per che varianza del rumore σ_I^2 si ottiene una probabilità d'errore di 10^{-3}?

Esercizio 26 [Soluzione]
Si consideri un sistema di trasmissione numerica caratterizzato dalla costellazione in figura con $A^2 = (2.3)^2$ V^2/Hz e $B^2 = 25$ V^2/Hz. Il segnale viene trasmesso su canale AWGN e i simboli sono equiprobabili.



1. (3p) Si rappresenti lo schema a blocchi del ricevitore ottimo più efficiente per il sistema considerato, specificando in forma grafica ed analitica le regioni di decisione.

2. (4p) Si determini in forma analitica la probabilità di decisione corretta $\mathbb{P}[\mathrm{C} \,|\, \boldsymbol{s}_1]$ condizionata dal simbolo 1. Determinare inoltre la probabilità di decisione corretta $\mathbb{P}[\mathrm{C}]$.

3. (3p) Se la varianza del rumore (per dimensione) vale $\sigma_I^2 = 1$ V^2, quanto vale la P_{bit}?

Esercizio 27 [Soluzione]
Un modulatore digitale utilizza le forme d'onda

$$s_1(t) = \begin{cases} -A\,, & 0 < t < \frac{1}{2}T_p \\ +A\,, & \frac{1}{2}T_p < t < T_p \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases} \qquad , \qquad s_2(t) = -s_1(t - \frac{1}{2}T_p)$$

con $T_p = 2\,\mu$s.

1. (5p) Si disegnino i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$. Si determini una base ortonormale, quindi si disegnino i segnali della base e la costellazione (specificando con esattezza le coordinate dei segnali).

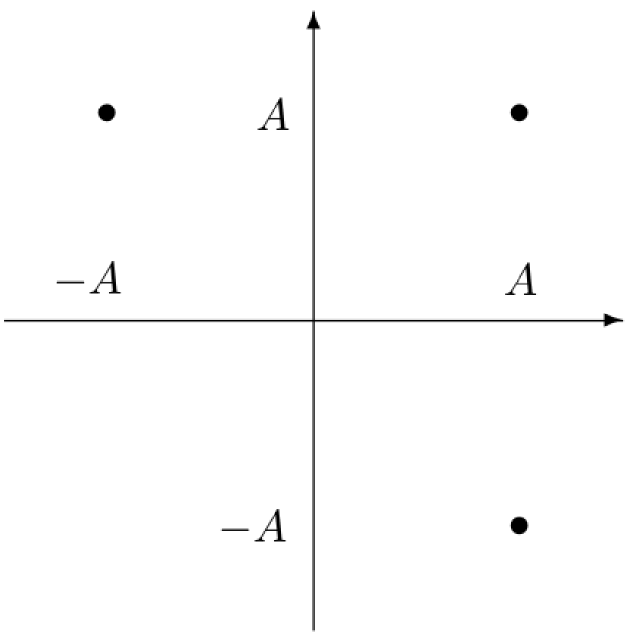
2. (4p) Si determini un valore opportuno per il periodo di simbolo T, quindi si determini il rapporto segnale-rumore E_s/N_0 tale da garantire una probabilità di errore sul bit $P_{bit} = 10^{-4}$.

3. (2p) Se in alternativa si usano i segnali

$$s_1(t) = \begin{cases} -A\,, & 0 < t < \frac{1}{2}T_p \\ +A\,, & \frac{1}{2}T_p < t < T_p \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases} \qquad , \qquad s_2(t) = s_1(t - T_p)$$

migliorano le prestazioni del sistema? Illustrarne i motivi.

Esercizio 28 [Soluzione]
Si consideri un sistema di trasmissione numerica con tre segnali al ricevitore caratterizzati dalla costellazione in figura dove $A = 50$. Si assuma inoltre che i segnali siano equiprobabili e che il canale introduca rumore AWGN con varianza per componente $\sigma_I^2 = 100$.



1. (4p) Si rappresenti lo schema a blocchi del ricevitore ottimo più efficiente per il sistema considerato, specificando in forma sia grafica che analitica le regioni di decisione.

2. (2p) Si calcoli la più stretta maggiorazione ("upper bound") o la miglior approssimazione (tra quelle studiate) alla probabilità di errore sul simbolo, P_e, del sistema.

3. (4p) Se ai segnali associati alla costellazione di figura si toglie il segnale associato al vettore (A, A), si determinino le nuove regioni di decisione e la nuova P_{bit} assumendo i segnali equiprobabili.

Esercizio 29 [Soluzione]
Un sistema di trasmissione numerica utilizza i tre segnali

$$\begin{aligned} s_1(t) &= 2\cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \\ s_2(t) &= -2\cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \\ s_3(t) &= \sin(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \end{aligned}$$

con $f_0 = 100/T$ e $T = 1\,\mu$s. Il rumore equivalente del sistema (canale AWGN) ha densità spettrale di potenza $N_0/2 = \frac{1}{2}\,10^{-7}$ V^2/Hz.

1. (3p) Determinare una base per lo spazio dei segnali.
2. (2p) Disegnare la costellazione e valutare la distanza minima della segnalazione.
3. (3p) Determinare l'upper bound alla probabilità d'errore basato sulla distanza minima.
4. (2p) Determinare la struttura del ricevitore ottimo (fare lo schema completo: filtri, istanti di campionamento, elemento di decisione in termini di regioni di decisione).

Esercizio 30 [Soluzione]
Si consideri la seguente segnalazione con $M = 4$:

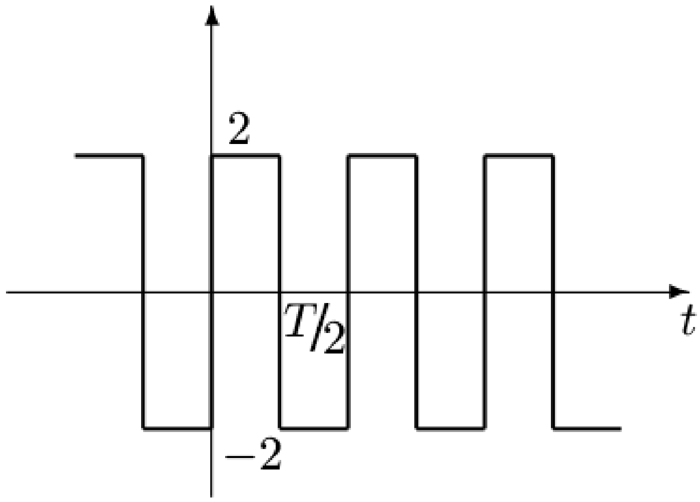
$$s_1(t) = -4h_{\mathrm{Tx}}(t)\,, \quad s_2(t) = -h_{\mathrm{Tx}}(t)\,, \quad s_3(t) = h_{\mathrm{Tx}}(t)\,, \quad s_4(t) = 4h_{\mathrm{Tx}}(t)$$

dove

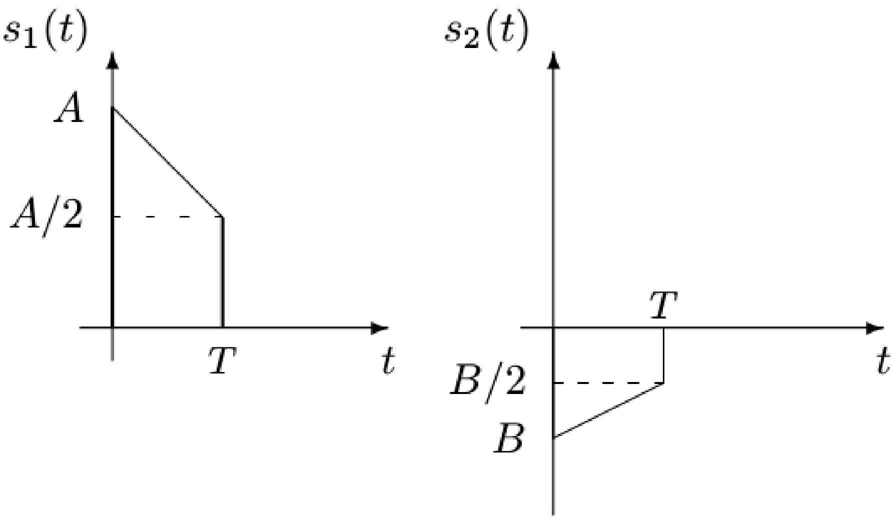
$$h_{\mathrm{Tx}}(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\,,$$

e T il è il periodo di simbolo (assumere $T = 1$). Il canale introduce un'attenuazione di 20 dB ed un rumore AWGN con PSD $N_0/2 = 10^{-3}$ V^2/Hz.

1. (2p) Determinare una base per la segnalazione. Rappresentare la costellazione e le soglie di decisione nel punto di decisione.
2. (2p) Rappresentare uno schema a blocchi del ricevitore ottimo: filtro di ricezione, fase di campionamento e regola di decisione utilizzando le soglie di decisione.
3. (3p) Determinare la probabilità di errore del sistema.
4. (3p) Se ora oltre al rumore è presente in ingresso al ricevitore un disturbo del tipo di figura quanto diventa la probabilità di errore?



Esercizio 31 [Soluzione]
Si consideri la segnalazione binaria del tipo illustrato in figura.



con simboli equiprobabili e trasmissione su canale AWGN.

1. (3p) Rappresentare la costellazione della segnalazione.
2. (2p) Rappresentare lo schema a blocchi del ricevitore ottimo specificando le regioni di decisione.
3. (3p) Calcolare la probabilità d'errore assumendo il rumore gaussiano con densità spettrale di potenza $N_0/2 = 10^{-8}$ V^2/Hz.
4. (2p) Considerando ora il fattore di scala B variabile e imponendo che $s_2(t)$ abbia la stessa energia di $s_1(t)$, determinare il valore di B che minimizza la probabilità d'errore.

Esercizio 32 [Soluzione]
Si considerino le due forme d'onda

$$s_1(t) = 90\,\text{triang}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right), \quad s_2(t) = -s_1(t),$$

con $T = 2\,\mu$s, utilizzate per una trasmissione binaria su un cavo con attenuazione di 5 dB/km, e rapporto segnale/rumore a 1 km di 131.31 dB.

1. Si dica se $s_1(t)$, $s_2(t)$ costituisce una base ortonormale completa per la segnalazione, motivando la risposta.

Esercizio 33 [Soluzione]
Un sistema di trasmissione numerica 16-QAM utilizza come impulso di trasmissione $h_{\rm Tx}(t) = V_0 \,\mathrm{rect}\left(\frac{2t}{T}\right)$ con $V_0 = 1$ V e periodo di simbolo $T = 1\,\mu$s.

1. (2p) Calcolare la potenza statistica del segnale trasmesso.
2. (2p) Determinare il filtro di ricezione *causale* ottimo e la relativa fase di campionamento, sapendo che il canale attenua di 50 dB.
3. (3p) In presenza di rumore additivo bianco all'ingresso del ricevitore, con densità spettrale di potenza $\frac{N_0}{2} = 2 \cdot 10^{-12}$ V^2/Hz, calcolare la varianza del campione di rumore per ciascuna dimensione nel punto di decisione.
4. (3p) Calcolare la probabilità d'errore (di simbolo) del sistema.

Esercizio 34 [Soluzione]

Si consideri un sistema di trasmissione che utilizzi la seguente segnalazione ternaria (a simboli equiprobabili) su canale AWGN:

$$s_1(t) = 2A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.75T}{0.5T}\right), \qquad s_2(t) = 2A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.25T}{0.5T}\right), \qquad s_3(t) = -s_1(t)\,,$$

con $A = 5$ V e periodo di simbolo $T = 1$ s. Si assuma una varianza del rumore per dimensione nel punto di decisione di $\sigma_I^2 = 1$ V^2.

1. (2p) Si rappresenti lo schema a blocchi del ricevitore ottimo più efficiente per il sistema considerato.
2. (2p) Si determinino le regioni di decisione sia in forma sia grafica che analitica.
3. (2p) Si indichi la più stretta maggiorazione ("upper bound") alla $P_{\rm bit}$ del sistema.
4. (2p) Si consideri un sistema di trasmissione che utilizza quattro segnali di cui tre definiti come nella domanda a) ed il quarto
$$s_4(t) = -s_2(t).$$
Si disegni la nuova costellazione.
5. (2p) Si determini la $P_{\rm bit}$ del sistema al punto 4).

Esercizio 35 [Soluzione]

Si consideri un sistema di trasmissione con segnalazione binaria data da

$$\begin{aligned} s_1(t) = &\quad A\sin(2\pi f_0 t) + A\cos(2\pi f_0 t)\,, \qquad t \in (0, 1/f_0]\,, \\ s_2(t) = &\quad B\sin(2\pi f_0 t) + B\cos(2\pi f_0 t)\,, \qquad t \in (0, 1/f_0]\,, \end{aligned}$$

con $f_0 = 1$ Hz, A parametro da definire e $B = 2$ V. Si assuma un canale AWGN con $N_0/2 = 0.25$ V^2/Hz.

1. (3p) Rappresentare la costellazione della segnalazione.
2. (2p) Rappresentare lo schema a blocchi del ricevitore a minima complessità specificando le regioni di decisione in modo analitico.

3. (3p) Determinare il valore di A che restituisce una probabilità d'errore di $3.5 \cdot 10^{-3}$.

4. (2p) Determinare il valore di A che garantisce la minima probabilità d'errore, imponendo la stessa energia per i due segnali.

Esercizio 36 [Soluzione]

Sia data una segnalazione PAM a tre livelli. L'alfabeto dei simboli sia $\{-3, 0, 2\}$ con probabilità $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$. L'impulso sia, in Volt,

$$h(t) = 10 \text{ triangle}\left(\frac{t-\tau_0}{5}\right).$$

1. (2p) Determinare il periodo di simbolo T minimo per non avere interferenza tra i vari impulsi trasmessi. Determinare inoltre il valore minimo di τ_0 in modo da rendere l'impulso di trasmissione causale. Disegnare l'impulso di trasmissione.

2. (2p) Scrivere l'espressione del segnale modulato (cioè la formula di $s_{\text{Tx}}(t)$) per la seguente sequenza di cinque simboli:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = -3, \quad a_4 = 2\,.$$

3. (2p) Disegnare il segnale modulato del punto 2).

4. (3p) Per un canale che introduce un'attenuazione di 40 dB ed un rumore AWGN tale che $(\Gamma)_{\text{dB}} = 10$ dB, determinare la varianza del rumore in dBm nel punto di decisione.

5. (3p) Disegnare la costellazione nel punto di decisione, specificando i valori dei vari punti.

6. (3p) Determinare la probabilità di errore del sistema assumendo le due soglie di decisione *uguali in valore assoluto* (pari a metà del segnale che mappa il simbolo di valore 2) e *segno opposto*.

Esercizio 37 [Soluzione]

Si consideri un sistema di trasmissione con segnalazione binaria (in Volt)

$$s_{\text{Tx},1}(t) = 0.5\,\text{rect}\,(t-0.5)\ , \qquad s_{\text{Tx},2}(t) = -\text{rect}\,(t-0.5)\ ,$$

e canale avente risposta impulsiva

$$g_{\text{Ch}}(t) = \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2}\delta(t-1.2)$$

e rumore AWGN con PSD $N_0/2 = 1.4 \cdot 10^{-1}$ V^2/Hz.

1. (2p) Determinare le forme d'onda della segnalazione binaria <u>all'uscita del canale</u>. Riportare i grafici e le espressioni analitiche.

2. (2p) Determinare il periodo di simbolo minimo del sistema di trasmissione per non avere interferenza tra impulsi successivi in ricezione.

3. 3) (3p) Determinare uno schema a blocchi del ricevitore ottimo: filtro di ricezione (disegnare la risposta impulsiva); fase ottima di campionamento (riportare il valore); elemento di decisione (fornire le regole di decisione).

4. 4) (3p) Determinare la probabilità di errore del sistema.

Esercizio 38 [Soluzione]

Un sistema di trasmissione 16QAM utilizza come impulso di trasmissione

$$h_{\mathrm{Tx}}(t) = g_0 \text{ rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

con $T = 1\,\mu$s, $g_0 = 1$ V. La portante ha frequenza $f_0 = 40$ MHz. Il segnale così generato è trasmesso attraverso un cavo che attenua 10 dB/km. Al ricevitore il rumore additivo gaussiano ha densità spettrale $N_0/2 = 2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}$.

1. (2p) Calcolare la potenza statistica del segnale trasmesso (in V^2).
2. (2p) Disegnare lo schema del ricevitore ottimo specificandone i parametri.
3. (2p) Il rapporto segnale/rumore di riferimento in ricezione per ottenere $P_e = 10^{-5}$.
4. (4p) La lunghezza massima del cavo per ottenere la probabilità di errore del punto 3).

Esercizio 39 [Soluzione]
Un sistema di trasmissione ternario utilizza le seguenti forme d'onda:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= S_0 \,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\ s_2(t) &= S_0 \,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \mathrm{sign}(t) \\ s_3(t) &= -S_0 \,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \end{aligned}$$

con ampiezza $S_0 = 1$ V e periodo di simbolo $T = 0.1$ ms.
Determinare:

1. (2p) Una base ortonormale per i segnali della trasmissione.
2. (2p) Uno schema del ricevitore ottimo più semplice.
3. (3p) Le regioni di decisione ottime per un canale con rumore additivo gaussiano.
4. (3p) Il rapporto segnale/rumore di riferimento in dB al ricevitore per ottenere una $P_e \leq 10^{-7}$. Utilizzare un bound adeguato per la probabilità di errore.

Esercizio 40 [Soluzione]

Un sistema di modulazione digitale utilizza le sei forma d'onda

$$s_n(t) = A \,\mathrm{rect}\left(\frac{t - t_n}{T_0}\right), \quad n = 1, \ldots, 6$$

con $A = 2$ e $t_n = T_0/2 + (n-1)2T_0$. Assumere $T_0 = \frac{T}{12}$, con $T = 1$ s periodo di simbolo. Il canale sia AWGN con PSD $\frac{N_0}{2} = 0.01$ V^2/Hz.

1. (2p) Disegnare le sei forme d'onda della segnalazione.
2. (3p) Determinare il ricevitore ottimo con tutti i suoi parametri.

3. (3p) Semplificare lo schema precedente utilizzando un solo filtro in ricezione.
4. (3p) Determinare la probabilità d'errore del sistema.

Esercizio 41 [Soluzione]

Un segnale $a_1(t)$, modellato con distribuzione gaussiana a media nulla e varianza $9\,\text{V}^2$, viene opportunamente quantizzato in modo uniforme.

1. (2p) Per una probabilità di saturazione di $6.3 \cdot 10^{-5}$ e un rapporto segnale/rumore di quantizzazione di almeno 45 dB, determinare i parametri del quantizzatore.
2. (3p) Utilizzando il quantizzatore del punto precedente, e per un segnale di ingresso $a_2(t)$ di tipo sinusoidale avente la stessa potenza statistica di $a_1(t)$, valutare il rapporto segnale/rumore di quantizzazione. *Sugg.: valutare le condizioni di assenza di saturazione.*
3. (3p) Scegliere ora un quantizzatore avente un numero di bit $\mathtt{b} = 4$ e codifica segno-ampiezza. I bit prodotti dal quantizzatore vengono inviati a un sistema di modulazione digitale 16-QAM. Riportare una legge di codifica (BMAP) sulla costellazione 16-QAM in modo che i campioni quantizzati aventi ampiezza maggiore siano affetti da una minore probabilità d'errore quando trasmessi su un canale AWGN.

Esercizio 42 [Soluzione]

Un sistema di modulazione digitale con simboli equiprobabili utilizza la segnalazione $s_{1,3}(t) = \pm A\,\mathrm{rect}\left(\frac{2(t-T/4)}{T}\right)$, $s_{2,4}(t) = \pm A\sqrt{2}\,\mathrm{rect}\left(\frac{2(t-3T/4)}{T}\right)$), dove $T = 100$ ns è il periodo di simbolo.
Determinare:

1. (3p) La costellazione della segnalazione, le regioni di decisione e una possibile codifica di Gray.
2. (2p) Si confronti (senza scriverne l'espressione) la probabilità d'errore sul bit di questa segnalazione con quella di una modulazione QPSK caratterizzata da una potenza statistica media $\mathtt{M}_s = A^2/2$. In particolare, specificare quale delle due segnalazioni ha una probabilità d'errore maggiore, giustificando la risposta.
3. (3p) Un'espressione della probabilità d'errore sul simbolo per la segnalazione originale del punto 1 (se necessario utilizzare un bound).
4. (3p) Il valore di A per avere una probabilità d'errore sul bit (della segnalazione del punto 1.) pari a 10^{-4} sapendo che la densità spettrale del rumore all'ingresso del ricevitore è pari a $1.5 \cdot 10^{-7}\,\text{V}^2$/Hz.

Capitolo 4

Codifica di Canale e ARQ

Esercizio 43 [Soluzione]
Sia x una variabile aleatoria con alfabeto l'insieme dei numeri interi e densità discreta di probabilità come segue. Scrivere l'espressione generale dell'entropia di x e calcolarla per il valore del parametro indicato tra parentesi

1. $$p_x(n) = (1 - 2^{-\mu})2^{-\mu n}1(n) \quad \text{(caso } \mu = 0.1\text{)}$$

2. $$p_x(n) = \frac{1}{A}\text{triang}(n/Q) \quad \text{(caso } Q = 3\text{).}$$

Esercizio 44 [Soluzione]
Sia $p_x(1) = 0.1$, $p_x(2) = 0.2$, $p_x(3) = 0.3$ e $p_x(4) = 0.4$. Si calcoli

1. $i(\{1, 2\})$

2. $i(\{1, 4\})$

Esercizio 45 [Soluzione]
Sia x una variabile aleatoria con alfabeto discreto a valori equiprobabili con $\mathbb{H}(x) = 4$ b. Trovare la numerosità dell'alfabeto di x.

Esercizio 46 [Soluzione]
Siano x e y variabili aleatorie con $p_x(1) = p_y(2) = 0.1$, $p_x(2) = p_y(3) = 0.6$, $p_x(3) = p_y(1) = 0.3$ e sia 1) $\mathbb{H}(x, y) = 1.2955$ b, 1) $\mathbb{H}(x, y) = 2.2562$ b, 3) $\mathbb{H}(x, y) = 2.5909$ b. Dire se x è a) indipendente da y, b) dipendente ma non funzione deterministica di y, oppure c) funzione deterministica di y.

Esercizio 47 [Soluzione]
Sia $x \in \{1, 2, 3\}$ con $i_x(1) = 2.6439$ b, $i_x(2) = 1.2863$ b, e $\mathbb{H}(x) = 1.474$ b. Trovare $p_x(3)i_x(3)$.

Esercizio 48 [Soluzione]
Calcolare la capacità dei seguenti canali con ingresso x e uscita y, tempo di simbolo $T = 0.2$ s, specificando la statistica di x che raggiunge la capacità:

1. $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[x^2] = 1$, $y = 3x + w$ con w gaussiano a media nulla e con varianza 4;

2. $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[x^2] = 1$, $y = 3x + w$ con w gaussiano a media 4 e con varianza 1;

3. $x \in \{-1, 1\}$, $y = D(3x + w)$ con $D(\cdot)$ demodulazione MD, w gaussiano a media nulla e varianza unitaria;

4. $x \in \{-2, 2\}$, $P(y = x|x) = 0.9$ e $P(y = 0|x) = 0.1$;

Esercizio 49 [Soluzione]
Calcolare il throughput per SW-ARQ, GBN-ARQ e SR-ARQ per una trasmissione con $\tau_p = 525$ ms, $t_{\mathrm{P}} = 200$ ms, $t_{\mathrm{A}} = 10$ ms e probabilità di errore sulla PDF $p = 10^{-2}$

Capitolo 5

Codifica di Sorgente

Esercizio 50 [Soluzione]
Si considerino due quantizzatori uniformi, ottimizzati per due diversi ingressi: i) segnale gaussiano a media nulla e potenza statistica unitaria con probabilità di saturazione del quantizzatore di $1.9 \cdot 10^{-1}$, ii) segnale sinusoidale a media nulla e potenza statistica unitaria con probabilità di saturazione del quantizzatore uguale a zero.

1. (2p) Utilizzando 8 bit per la rappresentazione, determinare il rapporto (in dB) tra il passo di quantizzazione (step size) dei due quantizzatori.
2. (2p) Determinare la relazione tra il rapporto segnale rumore (in dB) dei due quantizzatori per uno stesso numero di bit $\mathtt{b}$ generico. Tralasciare il rumore di saturazione.
3. (3p) Imponendo lo stesso rapporto segnale rumore di quantizzazione di 42 dB, determinare la differenza tra il numero di bit (numero intero) richiesti dai due quantizzatori.
4. (3p) Supponendo che il segnale Gaussiano sia ottenuto campionando un alla frequenza di 8 kHz, qual è il bit rate all'uscita del quantizzatore desiderando un rapporto segnale rumore di 42 dB?

Esercizio 51 [Soluzione]

Si vuole trasmettere un segnale televisivo per via numerica. Le caratteristiche sono: 1) **segnale video**: frequenza di campionamento di 2 MHz, distribuzione delle ampiezze uniforme a media nulla, potenza statistica 1 V^2; 2) **segnale audio**: frequenza di campionamento di 20 kHz, distribuzione delle ampiezze uniforme a media nulla, potenza statistica $10^{-2}/3$ V^2. Calcolare:

1. (2p) I valori massimi delle ampiezze dei segnali audio e video.
2. (2p) Il numero di livelli di un quantizzatore uniforme per il segnale video che garantisca un SNR di quantizzazione di almeno 45 dB, assumendo un quantizzatore uniforme.

Esercizio 52 [Soluzione]
Si consideri un segnale $s_1(t)$ gaussiano a media nulla e potenza statistica 2 V^2. Questo segnale viene quantizzato in modo uniforme tramite un quantizzatore a 6 bit. Sia $2.7 \cdot 10^{-3}$ la probabilità di saturazione e $\Lambda_{q,1}$ l'SNR di quantizzazione (rumore granulare). Si consideri anche un segnale $s_2(t)$ di tipo sinusoidale avente media nulla e potenza statistica unitaria. Sia $\Lambda_{q,2}$ l'SNR del corrispondente quantizzatore uniforme ottimo, sempre a 6 bit.

1. (2p) Determinare il rapporto tra i passi di quantizzazione dei due quantizzatori.
2. (2p) Determinare il legame tra $\Lambda_{q,1}$ e $\Lambda_{q,2}$. In definitiva, quale dei due quantizzatori fornisce un SNR più grande?

Esercizio 53 [Soluzione]
Un segnale musicale stereofonico è così caratterizzato:

- frequenza di campionamento di 40 kHz;
- distribuzione delle ampiezze dei segnali gaussiana a media nulla e deviazione standard 0.2 V.

Il segnale viene convertito in forma numerica, utilizzando un quantizzatore uniforme. Si vuole garantire una probabilità di saturazione inferiore a 10^{-6}.
Calcolare:

1. (2p) il range di ampiezze del quantizzatore $[-v_{\text{sat}}, v_{\text{sat}}]$;
2. (2p) il numero (potenza di 2) di livelli di quantizzazione per garantire un rapporto segnale/rumore di quantizzazione di almeno 100 dB;
3. (2p) il passo di quantizzazione e il valore del rapporto segnale/rumore di quantizzazione;
4. (2p) il bit rate complessivo generato dal sistema di conversione.

Esercizio 54 [Soluzione]
Un sistema di distribuzione digitale di segnale per sale cinematografiche trasporta

- un segnale video a tre colori, ciascuno con frequenza di campionamento 20 MHz e
- quattro segnali audio, ciascuno con frequenza di campionamento $B_a = 30$ kHz.

I due tipi di segnale sono prima quantizzati e poi inviati insieme su unico canale binario. Per la riproduzione dei segnali si richiede di garantire un rapporto segnale rumore di almeno 50 dB per i segnali video e di almeno 92 dB per i segnali audio. Calcolare:

1. (3p) il numero di bit di quantizzazione minimi richiesti per ciascun segnale video e audio (modellati con distribuzione uniforme);
2. (3p) il bit rate (in bit/s) richiesto in trasmissione per ciascun segnale;
3. (4p) la massima probabilità di errore nel canale binario per garantire in ricezione i rapporti segnale/rumore richiesti (suggerimento: determinare la condizione più restrittiva tra i due segnali binari trasmessi).

Esercizio 55 [Soluzione]
Si consideri un segnale audio composto da spezzoni, ciascuno di durata 10 ms. Uno spezzone può avere statistica delle ampiezze 1) gaussiana a media nulla con deviazione standard $\sigma_1 = 1$ V, 2) gaussiana a media nulla con deviazione standard $\sigma_2 = 2$ V, c) uniforme nell'intervallo $[-5, 5]$ V e d) uniforme nell'intervallo [-12, 12] V. Il segnale audio è campionato con frequenza 64 kHz utilizzando un banco di quattro quantizzatori uniformi dei quali uno solo è attivo in ogni istante, in corrispondenza dello spezzone che viene quantizzato. I bit ottenuti per ogni spezzone vengono raccolti in un pacchetto di dimensione variabile. Si desidera minimizzare il bit rate medio garantendo sempre un rapporto segnale rumore di quantizzazione di almeno 25 dB e una probabilità di saturazione massima del 6.3 10^{-5} per gli spezzoni di tipo 1) e 2), e nulla per gli spezzoni di tipo 3) e 4).

1. (3p) Si progetti il banco di quantizzatori, specificando i valori di saturazione e il numero di bit per campione.
2. (3p) Assumendo che per 60 s di registrazione, in media si abbiano 15 s di spezzoni del tipo 1), 5 s di spezzoni del tipo 2), 20 s di spezzoni del tipo 3) e 20 s di spezzoni del tipo 4), si calcoli il bit rate medio del segnale quantizzato.

3. (2p) Assumendo che i quattro tipi di spezzone si presentino con la stessa probabilità, si specifichi il formato del pacchetto di bit del segnale quantizzato di uno spezzone, specificando il numero di bit e il formato dei campi riservati all'identificazione del quantizzatore utilizzato.

4. (2p) Supponendo ora di utilizzare un solo quantizzatore uniforme per tutti i tipi di spezzone, si calcoli il valore di saturazione e il numero di bit per campione, assicurandosi che le specifiche di SNR e probabilità di saturazione siano soddisfatte per ogni spezzone. Si ricavi il bit rate del segnale quantizzato.

Esercizio 56 [Soluzione]

Una macchina industriale è dotata di N sensori che misurano la temperatura che può assumere quattro valori T_1, T_2, T_3 e T_4. I valori si presentano con probabilità 0.08, 0.25, 0.27 e 0.4, rispettivamente. La temperatura viene misurata da ciascun sensore ogni 1 ms. Ciascun valore in uscita da ogni sensore viene codificato con un codice di sorgente con parole di uscita con alfabeto binario. I bit codificati dagli N codificatori vengono aggregati e inviati attraverso una porta seriale RS-232 con velocità massima di trasmissione di 4200 b/s.

1. (3p) Trovare il codice di sorgente ottimo e la lunghezza di ciascuna parola di codice.

2. (3p) Calcolare il massimo numero di sensori N che garantisce un che un tasso nominale aggregato medio del segnale binario non superiore alla velocità di trasmissione della RS-232.

3. (3p) Si consideri ora la codifica di valori forniti da coppie di sensori. Dire come varia l'entropia della coppia di valori nel caso in cui le misure abbiamo la densità di probabilità indicata sopra e siano a) indipendenti (come assunto sopra) o b) dipendenti,

4. (2p) Calcolare il limite inferiore più grande possibile alla lunghezza media delle parole del codice binario codificando i valori forniti da coppie di sensori, dove, indicato con X_1 e X_2 il valore misurato dai due sensori, $P(X_1 = T_1, X_2 = T_1) = 0.1$, $P(X_1 = T_1, X_2 = T_2) = 0.2$, $P(X_1 = T_3, X_2 = T_3) = 0.3$, $P(X_1 = T_3, X_2 = T_4) = 0.4$, e tutte le altre coppie di valori non vengono mai misurate.

5. (2p) Con riferimento al punto 4, calcolare l'informazione mutua tra la temperatura misurata da due sensori.

Capitolo 6

Temi d'Esame

6.1 Primo compitino del 11/11/2016

Esercizio 57 [Soluzione]

Si consideri una sorgente di simboli statisticamente indipendenti e identicamente distribuiti X_n con alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. Trovare la densità discreta di probabilità della variabile aleatoria X_n con alfabeto $\mathcal{A}$ che ha massima entropia. Calcolare anche il valore dell'entropia.

2. Sapendo che $P[X_n = 1] = 0.2$, $P[X_n = 2] = 0.3$ e che l'informazione dell'evento $X_n = 3$ è 1.4 bit, calcolare l'entropia di X_n.

3. Se $H(X_n) = 0.8$ bit, determinare la lunghezza media al di sopra della quale certamente esiste un codice binario di sorgente a prefisso per la sorgente X_n. Giustificare la risposta.

4. Si consideri ora $P[X_n = 1] = 0.12$, $P[X_n = 2] = 0.17$, $P[X_n = 3] = 0.09$ e $P[X_n = 4] = 0.62$. Si ottenga il codice binario a prefisso ottimo per la sorgente così definita.

6.2 Secondo compitino del 15/1/2017

Esercizio 58 [Soluzione]
Si consideri un codice a blocco lineare sistematico binario con $k = 3$ e $n = 4$. Date le parole di codice $X_1 = (1001)$, $X_2 = (0101)$ e $X_3 = (1010)$:

1. Determinare la matrice generatrice e la matrice di parità del codice in forma sistematica.

2. Si dica quanti errori può rilevare il codice e quanti ne può correggere.

3. Si aggiunga un bit alle parole di codice ottenuto come $c_5 = c_1 \oplus c_2$ (con c_i, $i = 1, \ldots, 5$, bit di posizione i-esima delle parole di codice). Si scrivano le matrici generatrici e di parità del nuovo codice.

4. Data la sequenza ricevuta (11010) si controlli la presenza di errori mediante il calcolo della sindrome e si scriva la parola di codice decodificata.

Esercizio 59 [Soluzione]

Sia data una segnalazione PAM a tre livelli. L'alfabeto dei simboli sia $\{-3, 0, 2\}$ con probabilità $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$. L'impulso sia, in volt,

$$h(t) = 10\mathrm{triang}\left(\frac{t-\tau_0}{5}\right).$$

1. Determinare il periodo di simbolo T minimo per non avere interferenza inter-simbolo. Determinare inoltre il valore minimo di τ_0 in modo da rendere l'impulso di trasmissione causale. Disegnare l'impulso di trasmissione.
2. Per un canale che divide il segnale trasmesso per 10^2 e introduce un rumore additivo gaussiano bianco tale che $E_\mathrm{s}/\sigma_\mathrm{I}^2 = 10$ (con σ_I^2 varianza del rumore per dimensione nel punto di decisione), determinare la varianza del rumore nel punto di decisione.
3. Disegnare la costellazione nel punto di decisione, specificando i valori dei vari punti.
4. Determinare la probabilità di errore del sistema assumendo le due soglie di decisione *uguali in valore assoluto* (pari a metà del segnale che mappa il simbolo di valore 2) e segno opposto.

Esercizio 60 [Soluzione]

Si consideri una trasmissione digitale BPSK con periodo di simbolo $T = 1$ ms, energia media della segnalazione (al ricevitore) $E_\mathrm{s} = 4$ V^{2}s e rumore AWGN con varianza del rumore nel punto di decisione $\sigma_\mathrm{I}^2 = 0.5$ V^{2}s. Al ricevitore si usano **tre** regioni di decisione: due esterne contenenti i due punti della costellazione e una interna del tipo $[-S, S]$, simmetrica rispetto allo zero e di ampiezza $2S$, che riflette una forte incertezza sul simbolo trasmesso, e viene trattata come una cancellazione (erasure).

1. Considerando $S = \frac{1}{3}s_1$, con s_1 punto della costellazione associato al simbolo trasmesso +1, disegnare le regioni di decisione e la costellazione, specificando i valori di tutti i punti e soglie.
2. Calcolare le probabilità condizionate di ricevere un punto nella regione di erasure, condizionate rispetto a ciascun simbolo trasmesso.
3. Calcolare la capacità del canale di trasmissione che ha come ingresso i bit trasmessi e come uscita i tre simboli associati alle tre regioni di decisione, specificando la distribuzione del segnale binario di ingresso che permette di raggiungere la capacità.

6.3 Esame del 26/6/2017

Esercizio 61 [Soluzione]

Sia x_n una sequenza di variabili aleatorie gaussiane con media nulla e varianza 1, $x_n \in \mathcal{N}(0, 1)$ indipendenti e sia

$$y_n = x_n + z_n$$

con z_n sequenza di variabili aleatorie indipendenti tra loro e da dalla sequenza x_n, con $z_n \in \mathcal{N}(0, 5/4)$. Le due variabili aleatorie x_n e y_n vengono quantizzate con due quantizzatori uniformi con N_x e N_y livelli, rispettivamente, nelle due variabili aleatorie discrete $x^{(\mathrm{q})}$ e $y^{(\mathrm{q})}$.
1) (3p) Per $N_\mathrm{x} = 6$ e $N_\mathrm{y} = 4$ progettare i quantizzatori (indicando passo di quantizzazione Δ_x, Δ_y e valore di saturazione $\tau_{\mathrm{sat,x}}$, $\tau_{\mathrm{sat,y}}$) in modo da avere una probabilità di saturazione inferiore a 10^{-2}. Calcolare il rapporto segnale rumore di quantizzazione in dB per il quantizzatore di y_n.
2) (2p) Calcolare l'informazione mutua tra x e y (non quantizzate).
3) (3p) Scrivere l'espressione dell'entropia di $y^{(\mathrm{q})}$ quantizzato e calcolare (con quanto ottenuto al punto 1) il numero di bit minimo necessario per codificare in maniera efficiente $x^{(\mathrm{q})}$.

Esercizio 62 [Soluzione]

Si consideri una modulazione PAM a $M = 8$ livelli. Sia T_b il periodo di dei bit in ingresso, assunti indipendenti e con valori equiprobabili. Il canale sia di tipo AWGN.
1) (3p) Disegnare lo schema a blocchi completo che porta dalla sequenza di bit b_i trasmessi alla sequenza dei bit decisi al ricevitore, indicando sotto ogni linea congiunge i blocchi il periodo del segnale che viene passato (es. T_b per i bit, $\mathbb{R}$ per i segnali a tempo continuo).
2) (3p) Disegnare costellazione e regioni di decisione al ricevitore motivando il criterio di decisione scelto. Specificare una mappatura adeguate dei bit ai simboli.
3) (2p) In una nuova statistica dei bit in ingresso, i due simboli più vicini allo zero non vengono mai trasmessi, mentre gli altri simboli sono equiprobabili. Disegnare le regioni di decisione ottenute per questa nuova condizione, motivando la risposta.
4) (3p) Scrivere l'espressione della probabilità di errore media sul simbolo della modulazione ottenuta al punto 3) indicando con σ_I^2 la potenza del rumore per dimensione.

Esercizio 63 [Soluzione]
Si consideri il codice a protezione d'errore con mappatura

$$00 \to 0000,\ 01 \to 0111,\ 10 \to 1011,\ 11 \to 1110$$

1) (3p) Si dica se il codice è a) a blocco, b) lineare e c) in forma sistematica.
2) (3p) Trovare il massimo numero di errori che può essere rilevato da una qualsiasi parola ricevuta.
3) (2p) Trovare l'efficienza di informazione del codice, assumendo che i simboli di informazione siano l'uscita di una sorgente senza memoria con densità discreta di probabilità $p_b(0) = 1/4$, $p_b(1) = 3/4$.
4) (3p) Calcolare la probabilità di errore di decodifica sulla parola, condizionata alla parola trasmessa $\boldsymbol{b} = [00]$, per una canale binario simmetrico senza memoria con probabilità di errore $P_\mathrm{bit} = 0.1$ e decodifica a minima distanza.

6.4 Esame del 6/7/2017

Esercizio 64 [Soluzione]
Si consideri un codice a blocco lineare sistematico binario con $k = 3$ e $n = 4$. Date le parole di codice $X_1 = (1001)$, $X_2 = (0101)$ e $X_3 = (1010)$:

1. (3p) Determinare la matrice generatrice e la matrice di parità del codice.
2. (3p) Si dica quanti errori può rilevare il codice e quanti ne può correggere.
3. (3p) Si aggiunga un bit alle parole di codice ottenuto come $c_5 = c_1 \oplus c_2$ (con c_i, $i = 1, \ldots, 5$, bit di posizione i-esima delle parole di codice). Si scrivano le matrici generatrici e di parità del nuovo codice.
4. (3p) Data la sequenza ricevuta (11010) si controlli la presenza di errori mediante il calcolo della sindrome e si scriva la parola di codice decodificata.

Esercizio 65 [Soluzione]

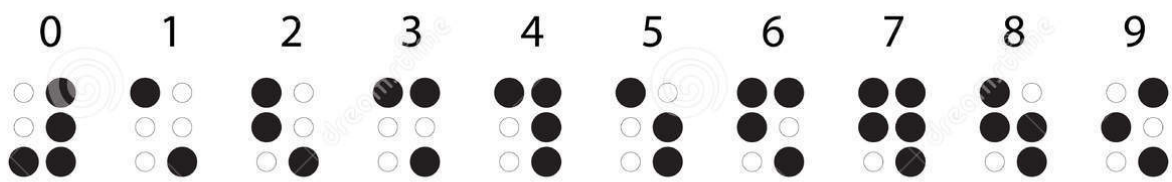
Si consideri una trasmissione digitale BPSK con periodo di simbolo $T = 1$ ms, energia media della segnalazione (al ricevitore) $E_\mathrm{s} = 4$ V^{2}s e rumore AWGN con varianza del rumore nel punto di decisione $\sigma_\mathrm{I}^2 = 0.5$ V^{2}s. Al ricevitore si usano **tre** regioni di decisione: due esterne contenenti i due punti della costellazione e una interna del tipo $[-S, S]$, simmetrica rispetto allo zero e di ampiezza $2S$, che riflette una forte incertezza sul simbolo trasmesso, e viene trattata come una cancellazione (erasure).

1. (3p) Usando **due** regioni di decisione (ricevitore BPSK standard) calcolare le probabilità di errore sul simbolo e sul bit.
2. (3p) Usando ora le tre regioni, considerando $S = \frac{1}{3}s_1$, con s_1 punto della costellazione associato al simbolo trasmesso +1, disegnare le regioni di decisione e la costellazione, specificando i valori di tutti i punti e soglie.
3. (3p) Calcolare le probabilità condizionate di ricevere un punto nella regione di erasure, condizionate rispetto a ciascun simbolo trasmesso.
4. (3p) Calcolare la capacità del canale di trasmissione che ha come ingresso i bit trasmessi e come uscita i tre simboli associati alle tre regioni di decisione, specificando la distribuzione del segnale binario di ingresso che permette di raggiungere la capacità.

6.5 Esame del 1/9/2017

Esercizio 66 [Soluzione]

.



Si consideri la codifica Braille dei numeri sopra riportata come un codice a correzione d'errore binario a blocco, leggendo i bit dall'alto a sinistra in basso a destra a zig-zag e interpretando un pallino pieno come un uno (es 0 $\rightarrow$ 010111)

1. (3p) Determinare i valori di n e k per il codice, e dire se il codice è lineare, motivando la risposta.
2. (2p) Trovare il numero massimo di errori che può rilevare e correggere il codice a prescindere dalla parola di codice trasmessa e dalla posizione dell'errore, motivando la risposta.
3. (3p) Trovare un codice a blocco lineare in forma sistematica per le 10 cifre con la lunghezza delle parole di codice di 5 bit e riportare la corrispondente codifica a pallini.
4. (3p) Trovare il numero minimo di errori sicuramente rilevabili e correggibili con il codice del punto 3)

Esercizio 67 [Soluzione]

Si consideri la forma d'onda base $q(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-T/6}{T/3}\right)$ e una modulazione digitale con le quattro forme d'onda

$$s_1(t) = q(t)\,, \quad s_2(t) = q(t-T/3)\,, \quad s_3(t) = q(t-2T/3)\,, s_4(t) = -q(t)$$

con T periodo di simbolo.

1. (3p) Si trovi una base per la segnalazione. Si dica se i simboli associati a $s(1)$ e $s_2(t)$ sono a) antipodali, b) ortogonali c) nessuna opzione delle due.
2. (2p) In una nuova statistica dei bit in ingresso, i simboli $s_3(t)$ e $s_4(t)$ non vengono mai trasmessi, mentre gli altri simboli sono equiprobabili. Disegnare le regioni di decisione ottenute per questa nuova condizione, motivando la risposta.

3. (3p) Scrivere l'espressione della probabilità di errore media sul simbolo della modulazione ottenuta al punto 2) indicando con σ_{I}^2 la potenza del rumore per dimensione.

Esercizio 68 [Soluzione]

Si consideri una sorgente che emette simboli x_n indipendenti e identicamente distribuiti e alfabeto $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$ con distribuzione di probabilità

$$p_x(A) = 0.5, \quad p_x(B) = 1/3.$$

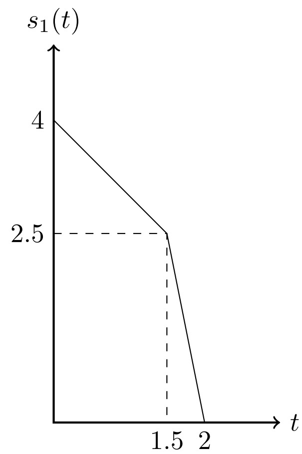
1. (3p) Costruire il codice a prefisso binario (con alfabeto $\{0, 1\}$) che sia ottimo per la codifica del vettore $[x_{2n}, x_{2n+1}]$.
2. (2p) Calcolare l'efficienza del codice ottenuto al punto 1).
3. (3p) Si dica se il codice ottenuto al punto 1) raggiunge il limite inferiore della lunghezza media delle parole di codice del teorema di Shannon sulla codifica di sorgente. In caso negativo si proponga un approccio per codificare la sorgente x_k che raggiunga il limite di Shannon.
4. (3p) Sia ora $y_n = x_{2n}$ con probabilità 0.5 e $y_n = x_{2n+1}$ con probabilità 0.5 e la scelta tra le due opzioni è indipendente sia dal tempo n che dai valori di x_k. Senza costruire il codice, si dica se esiste un codice a prefisso binario per il vettore $[x_{2n}, x_{2n+1}, y_n]$ con lunghezza media di un bit in più rispetto a quella del codice al punto 1), motivando la risposta. Si dica se il codice così ottenuto è ottimo, motivando la risposta.

6.6 Primo compitino del 24/11/2017

Esercizio 69 [Soluzione]

Si considerino i segnali $s_1(t)$ (riportato in figura) e

$$s_2(t) = A - At^2 \text{ per } t \in [0, 1] \text{ e } s_2(t) = 0 \text{ altrove.}$$



1. Calcolare il valore di $A > 0$ tale che i due segnali abbiano la stessa energia.
2. Scrivere una base per la segnalazione considerando come primo segnale una versione normalizzata di $s_1(t) - s_2(t)$; trovare i punti della costellazione e disegnarla.

3. Estendere la costellazione $\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2\}$ aggiungendo due punti ottenuti proiettando sull'asse ϕ_1 (corrispondente al primo segnale della base) i due punti $\boldsymbol{s}_1$ e $\boldsymbol{s}_2$. Disegnare la costellazione risultante e le regioni di decisione, in ipotesi di canale AWGN e simboli equiprobabili.

4. Calcolare la probabilità di errore sul simbolo per la costellazione del punto 3), assumendo la potenza del rumore per dimensione $\sigma_I^2 = 0.5$.

Esercizio 70 [Soluzione]

1. Si consideri il codice lineare a blocco con $n = 7$ e $k = 3$ sistematico con parole di codice $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$ e $c_4 = c_1 + c_2$, $c_5 = c_1 + c_3$ e $c_6 = c_2 + c_3$, $c_7 = c_1 + c_2 + c_3$ (somme nel campo binario). Costruire la matrice generatrice e trovare la capacità correttiva e rilevativa d'errore del codice.

2. Sia $\boldsymbol{G}$ una matrice generatrice le cui colonne hanno peso di Hamming 3, 4 e 5. Si dica se il codice è sempre in grado di rilevare a) 3 errori, b) 5 errori.

3. Dire se i seguenti codici sono lineari:

$$\mathcal{C}_1 = \{001, 101, 111, 100\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{000, 011, 101, 110\},$$

$$\mathcal{C}_3 = \{0000, 0101, 0100, 0111\}$$

4. Data la matrice generatrice

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare coset leader delle sindromi $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ giustificando la risposta.

5. Considerare le parole di un codice $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ dove i primi tre bit rappresentano il messaggio, $c_4 = c_1 + c_2$, $c_5 = c_1 + c_2 + c_3 + 1$ (somme nel campo binario). Dimostrare che il codice non è lineare. Indicare un'operazione da fare al ricevitore che rende il codice lineare e scriverne la matrice generatrice (suggerimento: l'operazione al ricevitore agisce su un solo bit della sequenza ricevuta).

Esercizio 71 [Soluzione]

Si consideri la variabile aleatoria x con alfabeto $\mathcal{A} = \{-1, 0, 1\}$ e densità discreta di probabilità $p_x(-1) = 0.1$, $p_x(0) = 0.2$, $p_x(1) = 0.7$.

1. Calcolare la differenza tra la massima entropia di una variabile aleatoria con alfabeto $\mathcal{A}$ e l'entropia di x.

2. Considerare la variabile aleatoria $y = x^2$. Trovare tutti i valori della funzione informazione di y e calcolare l'entropia congiunta di x e y.

6.7 Secondo compitino del 12/1/2018

Esercizio 72 [Soluzione]

Si consideri una sorgente di quattro parole con densità discreta di probabilità 0.32, 0.15, 0.34 e 0.19. La sorgente viene codificata con codici di sorgente binari.

1. Si calcoli la lunghezza media del codice di Huffman per la sorgente.

2. Senza fare conti si dica se il codice di Shannon-Fano per la sorgente raggiunge il limite inferiore della lunghezza media del codice dato dal teorema di Shannon e successivamente si calcoli il valore del limite.

3. Si calcoli la lunghezza media del codice di Elias per la sorgente in esame.

Esercizio 73 [Soluzione]

Si consideri un canale che accetta in ingresso simboli presi da un alfabeto quaternario $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3\}$ e fornisce in uscita o uno dei simboli dell'alfabeto o un valore di cancellazione (erasure). In particolare, gli ingressi 1 e 2 vengono riprodotti senza errore all'uscita del canale, mentre gli ingressi 0 e 3 generano in uscita una cancellazione con probabilità 0.15. In assenza di cancellazione, gli ingressi 0 e 3 vengono riprodotti senza errore all'uscita del canale. I simboli 1 e 2 sono trasmessi con probabilità $q/2$ ciascuno, mentre i simboli 0 e 3 sono trasmessi con probabilità $(1 - q)/2$ ciascuno.

1. Assumendo PDU di 1 simbolo, si calcoli il throughput normalizzato di un sistema SW-ARQ con ritardo di propagazione nullo e durata del pacchetto di ACK/NACK pari a metà della durata della PDU quando $q = 0.6$.

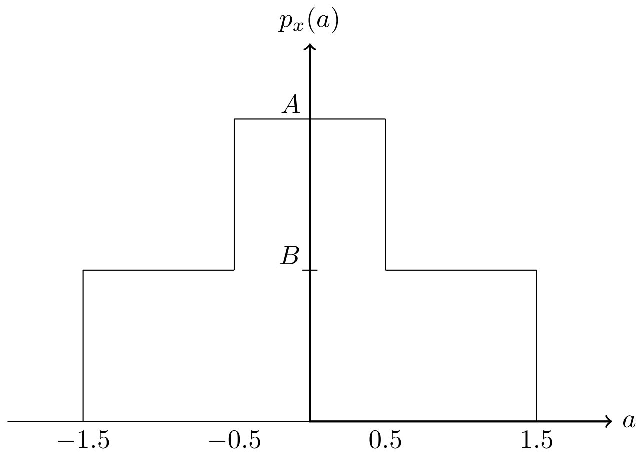
2. Si consideri una modifica del sistema SW-ARQ in cui il pacchetto ACK/NACK viene spedito solo in caso di ricezione di 0/3/cancellazione, mentre per i pacchetti con simboli 1 e 2 l'ACK/NACK non viene trasmesso e il trasmettitore procede direttamente (senza la fase di stop) con la trasmissione del pacchetto successivo. Sempre per $q = 0.6$ si scriva il tempo medio di occupazione esclusiva di canale per ciascuno dei quattro pacchetti (in funzione della durata della PDU) e quindi si calcoli il valore del throughput normalizzato per il nuovo sistema.

3. Calcolare l'informazione mutua tra l'ingresso e l'uscita del canale in funzione di q, (suggerimento: si noti che diversi conti per il simbolo 1 sono gli stessi per il simbolo 2, e così dicasi per i simboli 0 e 4)

4. Si dica (scrivendo le formule ma senza risolvere equazioni) come trovare la capacità del canale in esame.

Esercizio 74 [Soluzione]

Si consideri la variabile aleatoria x con densità di probabilità riportata in figura.



1. Per $A = B$ ($p_x(a)$ è un rettangolo), si calcoli **senza approssimazioni** il rapporto segnale/rumore di quantizzazione in decibel per un quantizzatore uniforme che utilizza $b = 20$ bit per rappresentare i valori quantizzati, giustificando la risposta.

2. Per $A = 0.5$ e $B = 0.25$, considerando un quantizzatore uniforme con valore di saturazione 1.5 e 6 valori quantizzati, disegnare la funzione caratteristica compatta del quantizzatore e calcolare la potenza dell'errore di quantizzazione **senza approssimazioni**.

3. Calcolare il rapporto segnale/rumore di quantizzazione in decibel per le condizioni del punto 2.

4. Assumendo ora che si voglia quantizzare il segnale $2x$, con x variabile aleatoria descritta nei punti precedenti, si dica come modificare il valore di saturazione del punto 2 e si calcoli in valore del rapporto segnale/rumore di quantizzazione, motivando la risposta.

6.8 Esame del 23/1/2018

Esercizio 75 [Soluzione]

Si consideri un sistema di trasmissione che utilizzi la seguente segnalazione ternaria su canale AWGN:

$$s_1(t) = 6\,\text{triang}\left(\frac{t-1.5}{0.5}\right), \qquad s_2(t) = -s_1(t), \qquad s_3(t) = 6\,\text{triang}\left(\frac{t-0.5}{0.5}\right)$$

a simboli equiprobabili. Si assuma una varianza del rumore per dimensione nel punto di decisione $\sigma_I^2 = 1$.

1. (3p) Determinare i punti della costellazione e le regioni di decisione ottime, assumendo che i tre simboli siano trasmessi con la stessa probabilità.

2. (2p) Rappresentare lo schema a blocchi del ricevitore ottimo più efficiente per il sistema considerato descrivendo i parametri o filtri presenti nei vari blocchi.

3. (2p) Indicare la più stretta maggiorazione ("upper bound") alla probabilità di errore di simbolo della modulazione.

4. (2p) Considerare ora un sistema di trasmissione che utilizza quattro segnali di cui tre definiti sopra ed il quarto

$$s_4(t) = -s_3(t).$$

Disegnare la nuova costellazione e le regioni di decisione.

5. (2p) Determinare la probabilità di errore sul simbolo del sistema al punto 4).

Esercizio 76 [Soluzione]

Si consideri il codice

$$001 \to 0011, 010 \to 1000, 011 \to 1011, 100 \to 0100, 101 \to 0111,$$

$$110 \to 1100, 111 \to 1111, 000 \to 0110.$$

1. (3p) Dimostrare che il codice non è lineare e cambiare una sola parola di codice in modo da renderlo lineare.
2. (3p) Si consideri un'unica permutazione dei bit delle parole di codice che renda il codice trovato al punto 1. in forma sistematica. Indicare la permutazione (es. usare notazione 1-3 per indicare la permutazione del primo e terzo bit) e scrivere la matrice generatrice del codice trovato.
3. (3p) Calcolare quanti errori è in grado di a) rilevare e b) correggere il codice ottenuto al punto 1.
4. (2p) Proporre una modifica della matrice generatrice del punto 2. che permetta di rilevare sempre un errore.

Esercizio 77 [Soluzione]

Si consideri una variabile aleatoria laplaciana con densità di probabilità $p_x(a) = \frac{1}{10}e^{-\frac{|a|}{5}}$.

1. (3p) Calcolare il valore di saturazione e il numero minimo di bit di un quantizzatore uniforme con probabilità di saturazione $P_{\text{sat}} = 10^{-2}$ e rapporto segnale-rumore di quantizzazione $(\Lambda_{\text{q}})_{\text{dB}} \geq 15$ dB.
2. (2p) Calcolare l'entropia (in bit) dei simboli quantizzati, assumendo $v_{\text{sat}} = 2.4$ e numero di bit $b = 2$.
3. (3p) Trovare l'efficienza di un codice di sorgente a simboli binari con lunghezza media minima per codificare il segnale quantizzato al punto 2.
4. (3p) Si consideri un quantizzatore **non uniforme** con quattro livelli con funzione caratteristica simmetrica rispetto all'origine con una soglia nell'origine e probabilità di saturazione sempre di $P_{\text{sat}} = 10^{-2}$. Imponendo che il segnale quantizzato abbia entropia massima, trovare i valori di saturazione e le soglie di quantizzazione.

6.9 Esame del 13/2/2018

Esercizio 78 [Soluzione]

Si consideri un sistema di trasmissione che utilizza la seguente segnalazione ternaria a simboli equiprobabili su canale AWGN:

$$s_1(t) = \sqrt{18}\,\text{triang}\left(\frac{t-0.5}{0.5}\right) - \sqrt{18}\,\text{triang}\left(\frac{t-1.5}{0.5}\right), \qquad s_2(t) = -s_1(t),$$

$$s_3(t) = \sqrt{6}\,\text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right).$$

Si assuma una varianza del rumore per dimensione nel punto di decisione $\sigma_I^2 = 1$.

1. (3p) Determinare i punti della costellazione e le regioni di decisione ottime, assumendo che i tre simboli siano trasmessi con la stessa probabilità.

2. (2p) Rappresentare lo schema a blocchi del ricevitore ottimo più efficiente per il sistema considerato descrivendo i parametri o filtri presenti nei vari blocchi.

3. (2p) Indicare la più stretta minorazione ("lower bound") alla probabilità di errore di simbolo della modulazione.

4. (2p) Considerare ora un sistema di trasmissione in cui il secondo segnale è sostituito dal seguente

$$s_2(t) = \begin{cases} \sqrt{6} & t \in [0, 0.5] \\ \sqrt{6} & t \in [1, 1.5] \\ -\sqrt{6} & t \in [0.5, 1] \\ -\sqrt{6} & t \in [1.5, 2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   Disegnare la nuova costellazione e specificare che tipo di segnalazione si ottiene.

5. (2p) Calcolare una maggiorazione e una minorazione (upper e lower bounds) strette della probabilità di errore sul simbolo della costellazione ottenuta al punto 4.

Esercizio 79 [Soluzione]

Si consideri un canale con ingresso costituito dal vettore $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$, con $x_1 \in \{0, 1\}$, $x_2 \in \{0, 1\}$ e uscita il vettore $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2]$. Si consideri

$$y_1 = x_1 + e_1 , \quad y_2 = x_2 + e_2 ,$$

dove le operazioni di somma sono modulo 2 e gli errori e_1, e_2 sono variabili aleatorie di Bernoulli indipendenti (tra loro e rispetto agli ingressi).

1. Fissata le distribuzioni di probabilità (qualsiasi) di x_1 e x_2, dimostrare che l'entropia di $\boldsymbol{y}$ è massima quando x_1 e x_2 sono indipendenti.

2. Calcolare la capacità del canale per $\mathbb{P}[e_1 = 0] = 0.7$ e $\mathbb{P}[e_2 = 0] = 0.8$ e con x_1 e x_2 con tasso di informazione nominale 0.1 b/s.

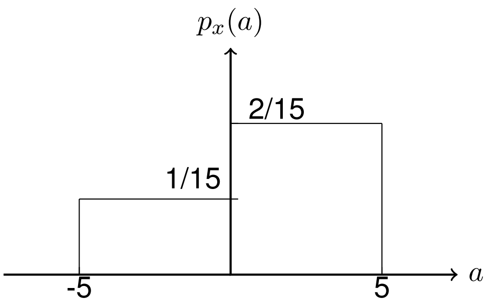
3. Considerare un codice di correzione d'errore in cui si trasmette lo stesso bit x in entrambi gli ingressi $x_1 = x_2 = x$. Dire quanti errori è in grado di rilevare e correggere il codice.

4. Per $e_1 = 1$ costante e $e_2 = 0$ costante, trovare la capacità del canale e indicare un meccanismo di codifica e decodifica che la raggiunga.

5. (2p) Supponendo ora che e_1 e e_2 siano aleatori ma che $\mathbb{P}[e_1 = e_2 = 1] = 0$, trovare un codice che mappi un bit nel vettore $\boldsymbol{x}$ e sia in grado di rilevare tutti gli errori. Dire quanti errori è in grado di correggere.

Esercizio 80 [Soluzione]

Si consideri una variabile aleatoria x con densità di probabilità mostrata in figura



1. (3p) Si progetti un quantizzatore uniforme per x con valori quantizzati rappresentati con un bit, assenza di rumore di saturazione e rumore granulare **con densità uniforme** (senza approssimazioni). Specificare il valore di saturazione e le probabilità assunte dai vari valori quantizzati.

2. (3p) Considerare la variabile aleatoria $y = x + w$ con w variabile aleatoria e $P[w = -5] = 0.4$ e $P[w = 5] = 0.6$. Progettare un quantizzatore uniforme per y con quattro livelli di quantizzazione, in modo da garantire assenza di rumore di saturazione e garantire rumore granulare **con densità uniforme** (senza approssimazioni). Calcolare il valore di saturazione e le probabilità assunte dai valori quantizzati.

3. (3p) Calcolare l'entropia di y^q, uscita del quantizzatore del punto 2), e senza fare conti dimostrare che è uguale a quella congiunta di y^q e x^q, uscita del quantizzatore del punto 1).

4. (2p) Trovare la lunghezza media di un codice di sorgente a prefisso ottimo (da riportare nella soluzione) con parole di ingresso date dalle coppie $[x^q, y^q]$.

6.10 Esame del 10/7/2018

Esercizio 81 [Soluzione]

Si consideri un sistema di comunicazione che comprende pacchetti dati e pacchetti di controllo. I pacchetti dati sono modulati con modulazione 16-QAM mentre i pacchetti di controllo sono modulati con modulazione BPSK. La potenza del rumore AWGN con media nulla è $\sigma^2 = 10^{-2}$ per dimensione e il canale introduce un'attenuazione di 12 dB. Ciascun pacchetto dati e di controllo ha la stessa durata e si trasmette un pacchetto di controllo ogni 9 pacchetti di dati.

1. (2p) Imponendo una probabilità di errore sul bit (BER) di 0.1642 per i pacchetti di controllo, calcolare l'energia per simbolo minima $E_{s,c}$ richiesta in trasmissione per questi pacchetti.

2. (3p) Calcolare la BER che si ottiene per i pacchetti dati imponendo un'energia per simbolo trasmessa media complessiva (mediata tra controllo e dati) unitaria.

3. (2p) Si consideri ora una modifica della modulazione 16-QAM in cui i quattro punti più esterni di angolo della costellazione vengono spostati lungo le bisettrici degli assi (su cui si trovano originariamente) aumentando la loro distanza dall'origine. Dire (argomentando la risposta) come varia l'energia media e la BER

4. (2p) Si supponga ora che il rumore del canale sia sempre AWGN a media nulla con componenti indipendenti ma con potenze diverse lungo i due assi (reale e immaginario) del campione ricevuto. In particolare, la potenza del rumore lungo l'asse reale è ancora $\sigma_{\mathrm{R}}^2 = 10^{-2}$ mentre lungo l'asse immaginario è $\sigma_{\mathrm{I}}^2 = 2 \cdot 10^{-2}$. Calcolare la BER per i pacchetti di controllo assumendo che la modulazione BPSK abbia costellazione $\pm\sqrt{E_{s,c}}$.

5. (2p) Nelle ipotesi del punto precedente, calcolare la probabilità di errore relativa alla trasmissione di un simbolo interno della costellazione 16-QAM standard.

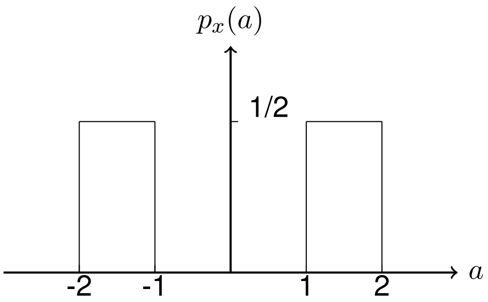
Esercizio 82 [Soluzione]

Si consideri una sorgente binaria x a simboli indipendenti e con alfabeto {0, 1} e $\mathbb{P}[x = 0] = 0.3$. La sorgente è collegata a una cascata (in serie) di due canali binari simmetrici con probabilità di errore $P_1 = 0.1$ e $P_2 = 0.2$, in cui l'uscita del primo canale è ingresso del secondo. Si indichi con z l'uscita del secondo canale.

1. (2p) Considerando che coppie di simboli della sorgente vengano codificate con codice a prefisso, trovare un codice di lunghezza minima e calcolarne la lunghezza media.
2. (2p) Calcolare la distribuzione di probabilità dei bit 0 e 1 in uscita del codificatore del punto precedente.
3. (3p) Trovare un modello di canale equivalente binario con ingresso x e uscita z più compatto, specificandone tutti i parametri.
4. (2p) Calcolare l'informazione mutua tra la sorgente x e uscita della cascata dei canali.
5. (3p) Si consideri ora un singolo canale binario **non simmetrico**. Progettare il canale, ovvero calcolare le probabilità di errore condizionate a ciascuno dei due ingressi per minimizzare la probabilità di errore media, sotto il vincolo che la somma delle due probabilità di errore condizionate valga 0.2.

Esercizio 83 [Soluzione]

Si consideri una variabile aleatoria x con densità di probabilità mostrata in figura.



1. (3p) Si progetti un quantizzatore uniforme con il minimo numero di livelli di quantizzazione (potenza di 2) per x con intervallo di quantizzazione $[-v_{\text{sat}}, v_{\text{sat}}]$ simmetrico rispetto all'origine che garantisca un errore quadratico medio di $5 \cdot 10^{-2}$. Rappresentare la funzione caratteristica in forma compatta indicando una rappresentazione binaria dei valori quantizzati in modulo e segno.
2. (2p) Sia 2^b il numero di intervalli di quantizzazioni ottenuti al punto precedente. Si proponga una rappresentazione binaria dei valori quantizzati con un numero di bit strettamente inferiore a b, pur permettendo una perfetta ricostruzione del segnale quantizzato.
3. (2p) Il segnale quantizzato al punto 2) viene quantizzato con codice lineare a blocco con lunghezza del blocco uguale alla parola quantizzata e un bit parità. Per una trasmissione su canale binario simmetrico con probabilità di errore $P_e = 0.2$, trovare il numero di massimo errori sempre rilevati e il numero massimo di errori che vengono sempre corretti e calcolare la probabilità che ci siano errori non rilevati all'uscita del decodificatore.

4. (2p) Si supponga ora di trasmettere le parole quantizzate ottenute al punto 1) senza codifica di canale. Supponendo di conoscere al ricevitore la distribuzione di x (ovvero che alcuni valori quantizzati non sono mai trasmesse) calcolare il numero di errori che sono **sempre** (a prescindere dal valore quantizzato trasmesso) rilevabili al ricevitore.

6.11 Esame del 5/9/2018

Esercizio 84 [Soluzione]

Si considerino due sistemi di comunicazione operanti su due canali AWGN indipendenti con lo stesso rapporto segnale rumore $\frac{E_s}{N_0} = 10$ dB. Il primo sistema utilizza una modulazione QPSK con periodo di simbolo $T = 1$ ms e una codifica di Reed-Muller (vedi Tabella 6.2) con parole di codice lunghe 8 bit (quindi ogni parola di codice utilizza 4 simboli) e tasso di codifica (rate) 1/2. Il secondo sistema utilizza una modulazione 16-PSK con ugual periodo di simbolo.

1. (3p) Calcolare la probabilità di errore sul bit (bit error rate) dei due sistemi *in assenza di codifica di canale*.

2. (3p) Calcolare la capacità dei canali dei due sistemi in assenza di interferenza di intersimbolo.

3. (3p) Per il primo sistema, calcolare la probabilità che in 4 simboli ricevuti ci siano almeno due bit errati assumendo che gli errori sui bit siano indipendenti ed identicamente distribuiti per tutti i bit.

4. (3p) Calcolare la codeword error rate (CER), ovvero la probabilità che il codice non riesca a correggere in una parola di codice errata per il sistema 1.

5. (2p) Scegliere dalla Tabella 6.2 un codice della famiglia dei Reed-Muller per il sistema 2 con parole di codice che occupano lo stesso numero di simboli del sistema 1, permette di trasmettere almeno lo stesso numero di bit di informazione e garantisce la minima bit error rate.

Esercizio 85 [Soluzione]

Un dispositivo trasmette pacchetti di 40 bit, dove i primi 4 sono indipendenti e a valori -1 e 1, equiprobabili, mentre i successivi 36 possono essere raggruppati in gruppi di 4 bit consecutivi e ciascun gruppo è uguale al precedente a meno di un bit che è cambiato di segno. La posizione del bit cambiato di segno in ogni gruppo è indipendente per ciascun gruppo e a valori (da 1 a 4) equiprobabili.

1. (3p) Trovare una codifica di canale binaria a efficienza unitaria a lunghezza fissa per il primo gruppo, e un'altra codifica (a lunghezza fissa e efficienza unitaria) per ciascuno dei gruppi successivi, che utilizzi quanto codificato nel gruppo precedente. Calcolare la lunghezza del pacchetto codificato.

2. (3p) Considerare ora una trasmissione (con la codifica di sorgente trovata) su un canale che modifica un solo bit del pacchetto, scelto uniformemente. Dire se è possibile correggere l'errore al ricevitore, e in caso affermativo si fornisca un esempio.

3. (3p) Considerare il caso in cui la posizione del bit cambiato di segno nella generazione di ogni gruppo è ancora indipendente per ciascun gruppo ma descritto da una variabile aleatoria con densità discreta di probabilità $p_a(1) = 0.2$, $p_a(2) = 0.3$, $p_a(3) = 0.1$, $p_a(4) = 0.4$. Considerando una codifica di sorgente binaria a lunghezza variabile per i gruppi successivi al primo, indicare il codice ottimo e calcolare la lunghezza media di un pacchetto codificato.

4. (3p) Considerare ora un codice di canale lineare a blocco che codifica le parole all'uscita del codificatore di sorgente ottenuto al punto 1 aggiungendo 3 bit di parità. Dire se il codice è in grado di correggere sempre 2 errori per pacchetto, motivando la risposta.

Esercizio 86 [Soluzione]

Si consideri una sorgente di variabili aleatorie gaussiane indipendenti con media nulla e deviazione standard $\sigma = 0.1$ che vengono quantizzate con un quantizzatore uniforme.

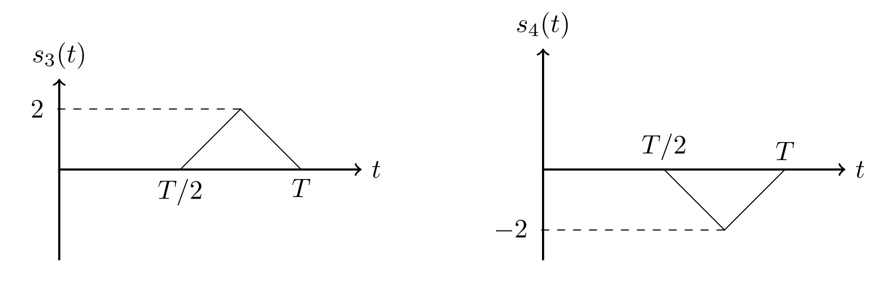
1. (2p) Calcolare l'intervallo di quantizzazione più piccolo che garantisce una probabilità di saturazione inferiore a 0.1.
2. (2p) Calcolare il numero di bit di quantizzazione e il passo di quantizzazione che garantiscono un rapporto segnale/rumore di quantizzazione (ignorando l'errore di saturazione) di almeno 12 dB per l'intervallo trovato al punto precedente. Utilizzare le usuali approssimazioni per la statistica dell'errore granulare.
3. (3p) Calcolare l'entropia dei simboli quantizzati.
4. (3p) Dalla sorgente vengono generati 14 simboli al secondo, e i bit generati vengono mappati in simboli 8-PSK. Calcolare quanti simboli 8-PSK vengono generati in 60 secondi.
5. (3p) Considerare una seconda sorgente che genera variabili aleatorie uguali in modulo a quelle della prima sorgente ma con segno cambiato casualmente, con probabilità 0.5. Anche le variabili aleatorie generate dalla seconda sorgente vengono quantizzate con lo stesso quantizzatore dei punti precedenti. Calcolare l'entropia di simboli quantizzati ottenuti dalla seconda sorgente condizionati rispetto a quelli della prima sorgente.

6.12 Primo compitino del 23/11/2018

Esercizio 87 [Soluzione]

Si consideri una modulazione digitale con periodo di simbolo $T = 1$ ms che utilizza i seguenti segnali:

$$s_1(t) = e^{-2t/T}\mathrm{rect}\left(\frac{2(t-T/4)}{T}\right) \qquad s_2(t) = -e^{-2t/T}\mathrm{rect}\left(\frac{2(t-T/4)}{T}\right)$$

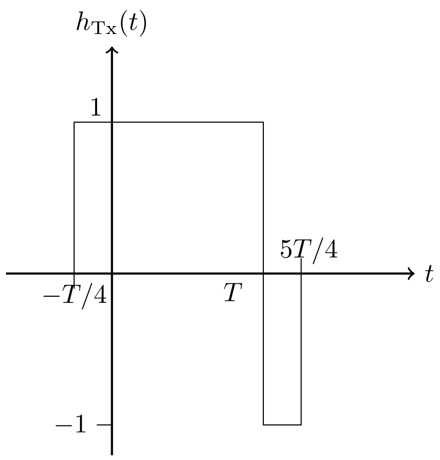


I quattro segnali sono trasmessi con la stessa probabilità. La trasmissione avviene su un canale AWGN con varianza del rumore per dimensione $\sigma_I^2 = 25 \cdot 10^{-6}$.

1. Disegnare $s_1(t)$ e $s_2(t)$ e scrivere le espressioni matematiche di $s_3(t)$ e $s_4(t)$.
2. Dire se la modulazione è di tipo ortogonale, biortogonale o di nessuno dei due tipi, motivando la risposta.

3. Trovare una base ortonormale per la modulazione.
4. Disegnare la costellazione, trovando i valori numerici delle coordinate di ogni punto.
5. Sul grafico del punto precedente disegnare le regioni di decisione ottime e calcolare un limite (bound) superiore della probabilità di errore sul simbolo, funzione di un solo parametro (distanza) della costellazione.

Esercizio 88 [Soluzione]
Si consideri una modulazione con forma d'onda elementare rappresentata in figura, con periodo di simbolo $T = 1$ ms.



La modulazione è composta da quattro segnali, versioni scalate di $h_{\mathrm{Tx}}(t)$, con costellazione (nello spazio euclideo monodimensionale definito da una base opportuna)

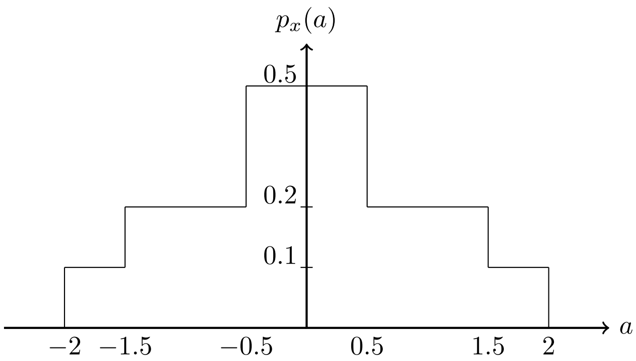
$$\boldsymbol{s}_1 = -0.2\,, \quad \boldsymbol{s}_2 = -0.1\,, \quad \boldsymbol{s}_3 = 0.1\,, \quad \boldsymbol{s}_4 = 0.2.$$

1. Calcolare la probabilità d'errore di simbolo, supponendo i quattro segnali equiprobabili, per la trasmissione su canale AWGN con varianza del rumore per dimensione $\sigma_{\mathrm{I}}^2 = 9 \cdot 10^{-4}$.
2. Verificare se la segnalazione usata su canale AWGN soddisfa le condizioni di assenza di interferenza inter-simbolo, motivando la risposta.
3. Il segnale modulato passa ora attraverso un canale che esegue un campionamento per tempi multipli interi del periodo di campionamento $T_0 = 3T/4$ e successivamente un'interpolazione di tipo *holder* sul periodo di campionamento T_0. Scrivere l'espressione del segnale all'uscita del canale con ingresso $h_{\mathrm{Tx}}(t)$.
4. Assumendo sempre il periodo di simbolo T, verificare se la segnalazione usata sul canale descritto al punto precedente soddisfa le condizioni di assenza di interferenza inter-simbolo.

6.13 Secondo compitino del 11/1/2019

Esercizio 89 [Soluzione]

Si consideri la variabile aleatoria x con densità di probabilità riportata in figura.



La variabile x è quantizzata con un quantizzatore uniforme con valore di saturazione minimo per garantire assenza di errore di saturazione e 8 valori quantizzati. La rappresentazione binaria $[b_1, b_2, b_3]$, $b_i \in \{0, 1\}$ degli otto valori viene poi codificata con un codice di canale a blocco binario con parole di codice di 5 bit $[c_1, c_2, c_3, c_4, c_5]$ definiti come segue

$$c_1 = b_2, \quad c_2 = b_1, \quad c_3 = b_3, \quad c_4 = b_1 + b_3\,, \quad c_5 = b_2 + b_1 + b_3\,,$$

dove le somme sono nel campo binario (modulo 2).

1. Disegnare la funzione caratteristica del quantizzatore (specificandone tutti i parametri) e calcolare la potenza dell'errore di quantizzazione **senza approssimazioni**.
2. Calcolare il rapporto segnale/rumore di quantizzazione in decibel per le condizioni del punto 1.
3. Dire se il codice a blocco è in forma sistematica, e in caso negativo proporre una permutazione dei bit di $\boldsymbol{c}$ che lo rende in forma sistematica.
4. Scrivere la matrice di parità del codice trovato al punto 3 e trovare un coset leader del coset associato alla sindrome $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

Esercizio 90 [Soluzione]

Si consideri un canale con ingresso binario $X \in \{0, 1\}$, uscita binaria $Y \in \{0, 1\}$ dove l'uscita dipende sia dall'ingresso che dal valore assunto da una terza variabile aleatoria binaria $W \in \{0, 1\}$ indipendente da X, con densità discreta di probabilità $p_W(0) = 0.3$ e

$$P(Y = 0|W = 0, X = 0) = P(Y = 1|W = 0, X = 1) = 0.8$$

$$P(Y = 0|W = 1, X = 0) = P(Y = 1|W = 1, X = 1) = 0.6\,.$$

Il periodo dei simboli in ingresso è $T = 0.2$ ms.

1. Calcolare $P(Y = i|X = j)$ per tutti i valori di i e j e dire se il canale in esame è binario simmetrico e senza memoria, giustificando la risposta.
2. Calcolare la capacità del canale, specificando la statistica dell'ingresso che raggiunge la capacità.
3. Considerare la sorgente che genera come simboli le otto triplette $[X, Y, W]$, con X avente la statistica trovata al punto precedente. Trovarne un codice di sorgente a prefisso binario ottimo e calcolare la lunghezza media delle parole di codice.
4. Dire se il codice trovato al punto 3 raggiunge il limite inferiore sulla lunghezza media stabilito dal teorema di Shannon, giustificando la risposta.
5. Senza calcolare nessuna nuova entropia dire se $\mathbb{H}(Y|X)$ è maggiore, strettamente maggiore, minore, strettamente minore o uguale a $\mathbb{H}(Y)$ e $\mathbb{H}(X, Y)$, giustificando le risposte.

6.14 Esame del 22/1/2019

Esercizio 91 [Soluzione]
Si considerino le seguenti forme d'onda, con $T = 10^{-4}$ s, trasmesse con uguale probabilità:

$$s_1(t) = 4\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right), \quad s_2(t) = -s_1(t),$$

$$s_3(t) = 4\,\mathrm{triangle}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right), \quad s_4(t) = -s_3(t).$$

Un segnale digitale che utilizza le quattro forme d'onda viene inviato su un canale che "taglia" le forme d'onda, ovvero detto $s(t)$ l'ingresso del canale, la sua uscita è

$$y(t) = \begin{cases} s(t) & \text{se } |s(t)| \leq 2, \\ \mathrm{sign}(s(t))2 & \text{se } |s(t)| > 2. \end{cases}$$

Inoltre, dopo il canale al ricevitore risulta sommato rumore AWGN con media nulla e varianza 10^{-4}.

1. (3p) Trovare una base ortonormale per la segnalazione al ricevitore.
2. (2p) Trovare la costellazione al punto di decisione, disegnarla specificando le coordinate di tutti i punti.
3. (2p) Disegnare le regioni di decisione ottime per la modulazione in esame.
4. (2p) Calcolare un bound inferiore alla probabilità di errore sul simbolo, usando una sola distanza tra i punti della costellazione.
5. (2p) Si consideri ora solo la trasmissione di $As_1(t)$ e $As_2(t)$, con $A \in (0, 1)$, parametro da determinare, mentre gli altri due segnali non vengono mai utilizzati, ottenendo così una modulazione binaria. Trovare il **minimo** valore di $0 < A < 1$ che minimizza la probabilità di errore, considerando sempre il canale descritto sopra.

Esercizio 92 [Soluzione]

Si consideri una sorgente $X(n)$ che genera simboli identicamente distribuiti con alfabeto $\mathcal{A}_X = \{0, 1, 2\}$ e densità di probabilità discreta $p_X(0) = 1/2$, $p_X(1) = 1/4$, $p_X(2) = 1/4$. Si consideri anche una seconda sorgente $Y(n)$ definita a partire da $\{X(n)\}$. In particolare, $Y(n)$ o è uguale a $X(n)$, o è uguale a $(X(n) + 1)_{\mathrm{mod}3}$. Per ogni n i due valori sono assunti in maniera aleatoria (e indipendente per i vari valori di n), per cui $\mathbb{P}[Y(n) = X(n)] = 0.3$, $\mathbb{P}[Y(n) = (X(n) + 1)_{\mathrm{mod}3}] = 0.7$. $(a)_{\mathrm{mod}3}$ indica il resto della divisione per 3 di a.

1. (3p) Trovare un codice di sorgente di Elias **per la sorgente** $X(n)$, considerando parole di ingresso di un solo simbolo. Specificare la rappresentazione binaria dei punti medi di ciascun segmento usato per la costruzione del codice, il numero di bit per ciascuna parola di codice e la lunghezza media delle parole di codice.
2. (2p) Senza fare ulteriori calcoli, dire se il codice trovato al punto 1) è il codice di Shannon-Fano per la sorgente $X(n)$ e se raggiunge il limite inferiore del teorema di Shannon per la codifica di sorgente.
3. (2p) Trovare un codice di sorgente binario ottimo per le parole $[X(n), Y(n)]$ e calcolare la lunghezza media delle parole di codice.
4. (2p) Calcolare l'entropia di $X(n)$ e l'entropia di $Y(n)$, e dire se l'entropia media per simbolo delle parole $[X(n), Y(n)]$ è uguale, maggiore, strettamente maggiore, minore o strettamente minore all'entropia di $X(n)$. Giustificare la risposta.

5. (2p) Calcolare l'informazione mutua tra $X(n)$ e $Y(n)$.

Esercizio 93 [Soluzione]

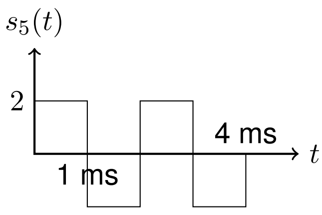
Si consideri un codice di canale binario a blocco, con $k = 4$ e $n = 5$.

1. (2p) Per una trasmissione su canale binario simmetrico senza memoria, progettare il codice con le migliori prestazioni di rilevazione (e, se possibile, correzione) d'errore, giustificando la risposta.
2. (3p) Per il codice trovato al punto 1), assumendo che la probabilità di errore sul bit sia 10^{-3}, calcolare la probabilità che, dato che il canale introduce tre errori, questi non vengano rilevati dal decodificatore.
3. (2p) Trovare un valore di $n > 4$ al di sotto del quale certamente non esiste un codice lineare che corregge almeno 3 errori per $k = 4$.
4. (2p) Si consideri ora la trasmissione su un canale che fa due possibili operazioni sulla parola di codice: a) o non introduce nessun errore oppure b) scambia il secondo e terzo bit della parola di codice. Progettare un nuovo codice con $k = 4$ e $n = 5$ e con le migliori prestazioni di rilevazione (e, se possibile, correzione) d'errore, giustificando la risposta.
5. (2p) Dire se il codice progettato al punto 4) è lineare, e in caso affermativo scriverne la matrice generatrice.

6.15 Esame del 12/2/2019

Esercizio 94 [Soluzione]
Si consideri una modulazione 4-PAM con impulso fondamentale rettangolare di durata pari al periodo di simbolo $T = 4$ ms e ampiezza 2 V. I quattro segnali sono equiprobabili. Il canale alterna *periodicamente* due fasi, una nelle quali è di tipo AWGN, l'altra in cui è *spento*, ovvero l'uscita è sempre nulla a prescindere dall'ingresso. La fase AWGN dura 1 ms, mentre quella di canale spento dura 3 ms. Si noti che il periodo di canale e il periodo di simbolo sono in generale sfasati, ovvero il periodo del canale comincia ad un tempo aleatorio $t_0 \in [0, 4)$ ms (uguale per tutti i periodi) dopo quello del simbolo.

1. (3p) Disegnare la costellazione *al punto di decisione*, specificando tutti i parametri della segnalazione e indicando le regioni di decisione ottime.
2. (2p) Calcolare la varianza del rumore AWGN al punto di decisione per assicurare una probabilità di errore sul simbolo di $3.5 \cdot 10^{-3}$.
3. (3p) Si decide di sostituire ai due segnali PAM a più alta energia il segnale $s_5(t)$, rappresentato in figura, e il segnale $s_6(t) = -s_5(t)$.



Dire se i due nuovi segnali, dopo essere passati attraverso il canale, sono ortogonali ai segnali PAM ricevuti.

4. (2p) Il canale ora è di tipo AWGN per metà periodo e spento per l'altra metà. Usando la segnalazione del punto 3, dire se in questo caso i segnali ricevuti in corrispondenza di $s_5(t)$ e $s_6(t)$ sono ortogonali ai segnali PAM e disegnare la nuova costellazione.

5. (2p) Calcolare il limite superiore più stretto della probabilità di errore sul simbolo per la segnalazione del punto 4.

Esercizio 95 [Soluzione]

Un sistema di segnalazione di emergenza tra imbarcazioni prevede l'uso di tre luci: le luci verde e rossa poste ai lati della barca e la luce bianca centrale. In particolare, si prevede di accendere la luce verde o quella rossa, intervallando ad ogni accensione l'accensione della luce bianca. Questo permette di distinguere meglio ad esempio due accensioni di luce rossa consecutive, perché separate dall'accensione della luce bianca. La segnalazione usa solo quattro lettere dell'alfabeto X, Y, W e Z, che vengono trasmesse come

$$X- > RbRbVbVb, \quad Y \to RbVbVbRb, \quad W \to VbVbVbVb \quad Z \to RbRbRbRb,$$

dove R e V indicano l'accensione della luce rossa e verde, rispettivamente, e b indica l'accensione della luce bianca. Si supponga che la luce bianca (più forte) venga sempre percepita da chi osserva, mentre è possibile scambiare le luci verde e rossa (e viceversa), con la stessa probabilità 0.1.

1. (3p) Considerando la segnalazione come un sistema di trasmissione con codifica di canale, dire se il codice può essere mappato in un codice a blocco, binario e lineare.

2. (2p) Trovare le proprietà canale di trasmissione (cardinalità dell'alfabeto ingresso/uscita, presenza di memoria, etc...), giustificando la risposta.

3. (2p) Trovare il numero massimo di errori che il codice è in grado di rilevare e correggere.

4. (2p) Dire se il tasso del codice è maggiore, minore o uguale all'efficienza spettrale del canale.

5. (2p) Considerare ora il codice lineare, in forma sistematica e con due bit di parità uguali con le migliori capacità di rilevazione/correzione di errori. Trovare la matrice generatrice e la matrice di parità del nuovo codice. Scrivere la mappa ingresso/uscita del nuovo codice usando la notazione R, b e V, del vecchio codice.

6.16 Esame del 19/6/2019

Esercizio 96 [Soluzione]

Si consideri una sorgente che genera campioni indipendenti di una variabile aleatoria x esponenziale unilatera con densità di probabilità

$$p_x(a) = \begin{cases} 3e^{-3a}, & a \geq 0 \\ 0 & a < 0. \end{cases}$$

Si vogliono quantizzare i campioni forniti dalla sorgente con quantizzatore uniforme con intervallo di quantizzazione $[-v_{\text{sat}}, v_{\text{sat}}]$.

1. (3p) Trovare il valore di v_{sat} che garantisce una probabilità di saturazione del quantizzatore $P_{\text{sat}} = 10^{-2}$.

2. (3p) Progettare il quantizzatore uniforme, con il valore di v_{sat} calcolato al punto precedente, in modo da garantire un rapporto segnale/rumore di quantizzatore di almeno 20 dB, usando le consuete approssimazioni sul rumore di quantizzazione e utilizzando la potenza di x al posto della varianza (non è a media nulla). Indicare il passo di quantizzazione, il numero di livelli di quantizzazione e il numero di bit per campione.

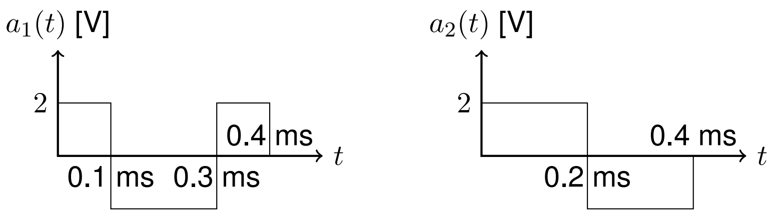
3. (3p) Disegnare la funzione caratteristica del quantizzatore progettato al punto precedente, specificando i valori quantizzati e fornendo una rappresentazione dei valori quantizzati in modulo e segno.

4. (2p) Osservando che metà dei valori quantizzati non vengono mai utilizzati (poiché x non assume mai valori negativi), utilizzando lo stesso quantizzatore progettato prima dire se è possibile ridurre il numero dei bit per campione. In caso affermativo disegnare nuovamente la funzione caratteristica e scrivere la nuova mappatura.

6.17 Esame del 3/9/2019

Esercizio 97 [Soluzione]

Si considerino i due segnali riportati in figura (a valori in Volt)



e la segnalazione con quattro segnali

$$s_1(t) = Aa_1(t)+Ba_2(t), \quad s_2(t) = -Aa_1(t)+Ba_2(t), \quad s_3(t) = -Aa_1(t)-Ba_2(t), \quad s_4(t) = Aa_1(t)-Ba_2(t),$$

con $A = 1$ e $B = 1.5$. La trasmissione avviene su canale AWGN con potenza del rumore per dimensione $\sigma_I^2 = 2 \cdot 10^{-4}$ e i simboli trasmessi sono equiprobabili.

1. (2p) Trovare una base ortonormale per la segnalazione.

2. (3p) Disegnare la costellazione, specificando le coordinate di ogni punto della costellazione. Disegnare anche le regioni di decisione ottime, e giustificare la risposta.

3. (2p) Calcolare l'energia media di trasmissione E_s.

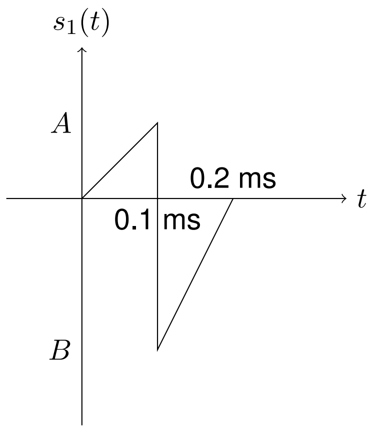
4. (3p) Calcolare la probabilità di errore sul simbolo.

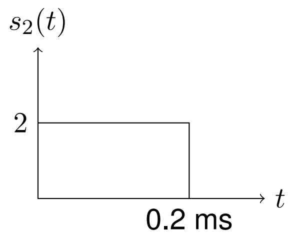
5. (2p) Dire se esistono altri valori di A e B che riducono la probabilità di errore, per lo stesso valore di energia media di trasmissione, giustificando la risposta.

6.18 Esame del 25/10/2019

Esercizio 98 [Soluzione]

Si consideri la segnalazione al punto di decisione riportata in figura





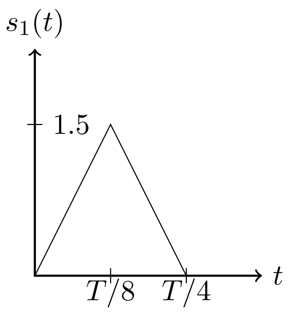
La trasmissione avviene su canale AWGN con potenza del rumore per dimensione $\sigma_I^2 = 2 \cdot 10^{-4}$ e i simboli trasmessi sono equiprobabili.

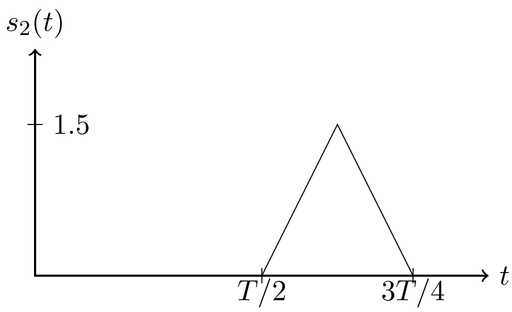
1. (2p) Per $A = 2$ e $B = -2$ trovare una base ortonormale per la segnalazione.
2. (3p) Per $A = 2$ e $B = -2$ disegnare la costellazione, specificando le coordinate di ogni punto della costellazione. Disegnare anche le regioni di decisione ottime, e giustificare la risposta.
3. (2p) Per $A = 2$ e $B = -2$ calcolare l'energia media di trasmissione E_s.
4. (3p) Per $A = 2$ e $B = -2$ calcolare la probabilità di errore sul simbolo.

6.19 Primo compitino del 22/11/2019

Esercizio 99 [Soluzione]

Si consideri una modulazione digitale in cui vengono trasmessi con la stessa probabilità i quattro segnali digitali





$$s_3(t) = -s_1(t) \quad s_4(t) = -s_2(t),$$

con $T = 1$ ms periodo di simbolo. I segnali vengono trasmessi su un canale in cui il segnale di uscita $r(t)$ è, in corrispondenza del segnale di ingresso $s_{\text{Tx}}(t)$,

$$r(t) = s_{\text{Tx}}(t) + s_{\text{Tx}}\left(t - \frac{T}{4}\right) + w(t)$$

con $w(t)$ AWGN a media nulla.

1. (3p) Trovare una base per la segnalazione **al punto di decisione** e disegnare la costellazione. Dire a quale classe appartiene la modulazione in esame.
2. (3p) Scegliere il criterio di decisione ottimo (motivando la risposta) e tracciare le regioni di decisione.
3. (3p) Scegliere la mappatura simboli-bit adeguata, motivando la risposta.
4. (3p) Calcolare la probabilità di errore di simbolo, per una varianza del rumore per dimensione $\sigma_I^2 = 10^{-4}$.
5. (3p) Dire se aumenta, diminuisce o rimane uguale la probabilità di errore di simbolo se $s_1(t)$ e $s_3(t)$ vengono attenuati di 5 dB prima della trasmissione, lasciando $s_2(t)$ e $s_4(t)$ invariati, motivando la risposta.
6. (3p) Con riferimento ai segnali del punto 1), se i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ vengono trasmessi con probabilità p_0 e i segnali $s_3(t)$ e $s_4(t)$ vengono trasmessi con probabilità $p_1 > p_0$, dire quale criterio si usa per la decisione e come cambiano le regioni di decisione (senza tracciarle).

Esercizio 100 [Soluzione]

Si consideri un segnale a tempo discreto $x(kT_c)$, dove per ogni k, $x(kT_c)$ è la realizzazione di una variabile aleatoria (indipendente per diversi valori dell'indice temporale) con densità di probabilità

$$p_x(a) = \begin{cases} Aa^2 & -2 \leq a \leq 2 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il segnale viene quantizzato con un quantizzatore uniforme, da progettare.

1. (3p) Trovare il valore di A, e calcolare media e varianza di $x(kT_c)$.
2. (3p) Progettare il quantizzatore uniforme, specificandone il valore di saturazione, il passo di quantizzazione e il numero di bit usati per rappresentare ciascun valore quantizzato, in modo da avere un rapporto segnale-rumore di quantizzazione di almeno 20 dB.
3. (4p) Disegnare la funzione caratteristica del quantizzatore progettato, quotando gli assi e indicando la mappatura binaria secondo la regola modulo/segno.
4. (2p) Supponendo che $T_c = 1.5$ ms, calcolare la velocità (in bit/s) dei bit in uscita dal quantizzatore.
5. (3p) Per un nuovo tempo di campionamento T_c, si supponga che la velocità in uscita ora sia 2 kbit/s. Trovare la dimensione della M-QAM con periodo di simbolo di 2 ms per trasmettere il flusso di bit, e calcolare la probabilità di errore di bit per $E_s/N_0 = 10$ dB assumendo i simboli equiprobabili e canale AWGN.

6.20 Secondo compitino del 10/1/2020

Esercizio 101 [Soluzione]

Sia $\mathcal{C}$ un canale senza memoria con simboli di ingresso X e uscita Y ternari e matrice di transizione $\boldsymbol{Q}$ con elementi $Q_{i,j} = P(Y = i|X = j)$ e

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Il canale ha periodo di simbolo $T_s = 1$ ms.

1. (3p) Calcolare la capacità del canale.

Esercizio 102 [Soluzione]

Si consideri il codice lineare binario $\mathcal{C}$ (9,4) in forma sistematica che ha tra le parole di codice

$$(100101110), (011010101), (001110010), (101101110).$$

1. (3p) Trovare la matrice generatrice del codice.
2. (3p) Dire quanti errori sono corretti e rilevati dal codice.
3. (3p) Decodificare con criterio a minima distanza le sequenze

$$(111111111) \text{ e } (101010101).$$

4. (3p) Dire se esiste il codice di Hamming (9,4), giustificando la risposta.
5. (3p) Si vuole ora modificare il codice $\mathcal{C}$ aggiungendo un bit a ciascuna parola di codice così calcolato

$$b_1 + b_2 + 1,$$

dove le somme sono fatte nel campo binario (modulo 2) e b_i indica l'i-esimo bit della parola ingresso al codificatore. Si dica se il codice risultante è a) a blocco, b) lineare e c) come viene codificata la sequenza 0001.

Esercizio 103 [Soluzione]

Si consideri una sorgente $s(n) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, con probabilità dei simboli $p(1) = 0.14$, $p(2) = 0.12$, $p(3) = 0.06$, $p(4) = 0.05$, $p(5) = 0.16$, $p(6) = 0.20$, $p(7) = 0.17$ e $p(8) = 0.1$.

1. (3p) Utilizzando il teorema di Shannon si dica se esiste un codice binario a prefisso per la sorgente $s(n)$ con lunghezza media delle parole di codice 1.9, giustificando la risposta.
2. (3p) Progettare il codice di Huffman per la sorgente e calcolare la lunghezza media delle parole di codice.
3. (3p) Calcolare il valore del limite superiore dato dal teorema di Shannon per la lunghezza media delle parole del codice binario ottimo.
4. (3p) Si consideri

$$s'(n) = (s(n) - 4)^2.$$

Trovare la lunghezza media delle parole del codice ottimo per la sorgente con simboli costituiti dalla coppia $[s(n), s'(n)]$, giustificando la risposta.

5. (3p) I simboli generati della sorgente $s(n)$ at tempo n vengono elaborati dalla seguente funzione

$$y(n) = \begin{cases} 1 & s(n) \in [1, B], \\ 2 & s(n) \in (B, 8], \end{cases}$$

con B parametro. Si consideri la codifica della nuova sorgente $y(n)$. Senza trovare il codice, si dica se la lunghezza media delle parole di codice è inferiore, uguale, o superiore a quella ottenuta per la sorgente $s(n)$ con il codice di Huffman, per qualsiasi valore di $B \in [1, 8]$, giustificando la risposta.

6.21 Esame del 21/1/2020

Esercizio 104 [Soluzione]
Si consideri la seguente segnalazione al ricevitore con due simboli equiprobabili:

$$s_1(t) = \sqrt{T}[2+\cos(\alpha)]\text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) + \sqrt{T}\sin(\alpha)\left[\text{rect}\left(\frac{2(t-T/4)}{T}\right) - \text{rect}\left(\frac{2(t-3T/4)}{T}\right)\right]$$

$$s_2(t) = \sqrt{T}[\cos(\beta)-0.5]\text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) + \sqrt{T}\sin(\beta)\left[\text{rect}\left(\frac{2(t-T/4)}{T}\right) - \text{rect}\left(\frac{2(t-3T/4)}{T}\right)\right]$$

con $T = 1$ ms e $\alpha \in [0, 2\pi)$ e $\beta \in [0, 2\pi)$ parametri da scegliere. I segnali vengono trasmessi su canale AWGN con potenza di rumore per dimensione $\sigma_I^2 = 0.5$.

1. (3p) Trovare una base ortonormale per la segnalazione.
2. (3p) Scrivere le coordinate dei punti della costellazione e disegnare i punti della costellazione per tutti i valori di α e β.
3. (3p) Trovare i valori di α e β per cui l'energia media della segnalazione è minima, e calcolare l'energia media risultante.
4. (3p) Trovare i valori di α e β che minimizzano la probabilità di errore, e calcolare la probabilità di errore risultante.

Esercizio 105 [Soluzione]

Si consideri una sorgente $s(n) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, con probabilità dei simboli $p(1) = 0.14$, $p(2) = 0.12$, $p(3) = 0.06$, $p(4) = 0.16$, $p(5) = 0.25$, $p(6) = 0.17$ e $p(7) = 0.1$.

1. (3p) Calcolare la lunghezza media del codice di Elias per la sorgente, e trovare la codifica del simbolo 5.
2. (3p) Utilizzando il teorema di Shannon dire se esiste un codice binario a prefisso per la sorgente $s(n)$ con lunghezza media delle parole di codice strettamente inferiore a 3.9, giustificando la risposta.
3. (3p) Sia $z(n) = q(n)s(n)$, con $q(n)$ indipendente da $s(n)$ e $q(n) \in \{-1, 1\}$ a valori equiprobabili. Dire se l'entropia di $z(n)$ è uguale, maggiore o inferiore a quella di $s(n)$ (senza fare conti) e poi calcolare la differenza delle due entropie, motivando la risposta.

Esercizio 106 [Soluzione]

1. (3p) Si consideri il codice lineare a blocco con $n = 7$ e $k = 3$ sistematico con parole di codice $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)$, dove $c_4 = c_2 + c_3$, $c_5 = c_1 + c_3$, $c_6 = c_1 + c_2$ e $c_7 = c_1 + c_2 + c_3$ (somme nel campo binario). Costruire la matrice generatrice e trovare la capacità correttiva e rilevativa d'errore del codice.
2. (3p) Per il codice del punto 1, si sopprima il primo bit di tutte le parole di codice (c_1). Trovare la matrice generatrice del nuovo codice, dire se è in forma sistematica, e, qualora non lo fosse, trovare una matrice generatrice del codice in forma sistematica, eventualmente usando una permutazione fissa per i bit di tutte le parole di codice.

3. (3p) Dire se i seguenti codici sono lineari, motivando la risposta:

$$\mathcal{C}_1 = \{001, 101, 111, 100\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{000, 011, 101, 110\},$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ (c_1, c_2, c_3) : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

4. (3p) Data la matrice generatrice

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare coset leader delle sindromi $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, giustificando la risposta.

6.22 Esame dell'11/2/2020

Esercizio 107 [Soluzione]
Si consideri un sistema di trasmissione che utilizza una modulazione QPSK con simboli equiprobabili su un canale AWGN con varianza del rumore al punto di decisione 0.1, probabilità di errore sul simbolo 10^{-2} e periodo di simbolo 1 ms.

1. (3p) Calcolare l'energia media della costellazione e disegnare la costellazione, specificando le coordinate dei vari punti e indicando le regioni di decisione ottime.

2. (3p) Ruotare la costellazione attorno all'origine di 30 gradi in senso orario, e dire come variano la probabilità di errore e l'energia media nella nuova segnalazione rispetto a quella del punto precedente, giustificando la risposta.

3. (3p) Traslare la costellazione del punto 1) (non ruotata) verso destra, così da portare un punto della costellazione sull'asse delle ordinate e dire come variano la probabilità di errore e l'energia media nella nuova segnalazione, rispetto a quella del punto 1), giustificando la risposta.

4. (3p) Aggiungere un punto nell'origine alla costellazione, assumendo che tutti e cinque i segnali della nuova modulazione vengano trasmessi con la sessa probabilità. Allontanare gli altri punti dall'origine mantenendo per essi la forma della costellazione QPSK, in modo che l'energia media della nuova costellazione sia la stessa del punto 1). Usando un bound inferiore della probabilità di errore, dire se la probabilità di errore esatta della nuova modulazione è maggiore, uguale o inferiore rispetto a quella della modulazione al punto 1).

Esercizio 108 [Soluzione]
Si consideri la seguente matrice di parità di un codice di correzione d'errore

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. (3p) Scrivere la matrice generatrice del codice e codificare la sequenza di ingresso $[1, 1, 0]^T$.

2. (3p) Decodificare $[0, 1, 0, 1, 0, 1]^T$ e scrivere la sequenza di ingresso di tre bit corrispondente.

3. (3p) Aggiungere un bit a tutte le parole di codice così calcolato

$$c_7 = b_1 + b_2 + b_3$$

con $[b_1, b_2, b_3]$ la sequenza da codificare. Scrivere la matrice di parità del codice risultante e, usando il bound di Singleton, trovare un bound superiore al numero di errori che vengono corretti dal codice.

Esercizio 109 [Soluzione]

Si consideri il codice di sorgente

$$\mathcal{C} = \{0, 111, 100, 10\}.$$

1. (3p) Dire se il codice è a) a prefisso, b) ottimo, c) di Elias.

2. (3p) Siano ora le probabilità dei quattro simboli $i = 1, 2, 3, 4$ della sorgente $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.2$, $p_3 = 0.3$ e $p_4 = 0.4$. Associare a ciascun simbolo una parola del codice $\mathcal{C}$ in modo da minimizzare la lunghezza media delle sequenze codificate, e trovare il rate (in b/s) all'uscita del codificatore, con periodo di simbolo $T = 3$ ms.

3. (3p) Per la sorgente del punto precedente, usando il teorema di Shannon dire se esiste un codice binario a prefisso con lunghezza media delle parole di codice strettamente inferiore a 1.2, giustificando la risposta.

4. (3p) Trovare il codice ottimo per una nuova sorgente di quattro simboli con probabilità dei primi tre $p_1 = 0.12$, $p_2 = 0.31$, $p_3 = 0.23$.

6.23 Esame del 16/6/2020

Esercizio 110 [Soluzione]

Si consideri la seguente segnalazione (in Volt) al ricevitore con 8 simboli equiprobabili:

$$s_i(t) = \alpha_i A \cos(2\pi f_c t)\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) + \beta_i A \sin(2\pi f_c t)\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

con $i = 1, \ldots, 8$, $A = 10^{-2}$, $f_c = 2$ GHz, $T = 1$ ms e

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -3,\ \alpha_3 = \alpha_4 = -1,\ \alpha_5 = \alpha_6 = 1,\ \alpha_7 = \alpha_8 = 3$$

$$\beta_i = (-1)^i.$$

Variante 2

$$\alpha_i = (-1)^i$$

$$\beta_1 = \beta_2 = -3,\ \beta_3 = \beta_4 = -1,\ \beta_5 = \beta_6 = 1,\ \beta_7 = \beta_8 = 3$$

Variante 3

$$\alpha_i = 6 + (-1)^i$$

$$\beta_1 = \beta_2 = -2.5,\ \beta_3 = \beta_4 = -0.5,\ \beta_5 = \beta_6 = 1.5,\ \beta_7 = \beta_8 = 3.5$$

I segnali vengono trasmessi su canale AWGN con deviazione standard del rumore per dimensione $\sigma_I = 10^{-5}(10 + \#)$, con # la terza cifra del numero di matricola.

1. (3p) Trovare una base ortonormale per la segnalazione (si osservi che $T >> 1/f_c$), usando come primo segnale una versione scalata di $\cos(2\pi f_c t)$, $t \in [0, T)$.

2. (3p) Scrivere le coordinate dei punti della costellazione, disegnare i punti della costellazione, e indicare le regioni di decisione ottime.

3. (3p) Calcolare la probabilità di errore sul simbolo.

4. (3p) Indicare sulla costellazione una rappresentazione binaria dei simboli (mappatura) che minimizzi la probabilità di errore sul bit, giustificando la risposta.

Esercizio 111 [Soluzione]

Si consideri la seguente matrice di parità di un codice a blocco

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Variante 2

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Variante 3

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sia $c_1, \dots c_n$ la generica parola di codice.

1. (3p) Trovare i parametri n e k del codice e dire se è un codice di Hamming, giustificando entrambe le risposte.

2. (3p) Indicare con $c'_1, \dots, c'_n$ la generica parola del codice ottenuto permutando i bit delle parole di codice del punto precedente (la stessa permutazione per tutte le parole), in modo che il nuovo codice con parole $\boldsymbol{c}'$ sia sistematico. Scrivere la permutazione (es. $c'_1 = c_3$ ...) e la matrice di parità $\boldsymbol{H}'$ così trovata.

3. (3p) Trovare le matrici generatrici $\boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{G}'$ per i due codici con matrici di parità $\boldsymbol{H}$ (originale) e $\boldsymbol{H}'$ (trovata al punto 2).

4. (2p) Si consideri la sequenza $\boldsymbol{r} = [1, 0, 1, 1, P, U]^T$, con $U = 1$ se l'ultima cifra del numero di matricola è dispari, e zero altrimenti, e $P = 1$ se la penultima cifra del numero di matricola è dispari, e zero altrimenti. Scrivere la sequenza $\boldsymbol{r}$ e decodificarla usando la matrice di parità $\boldsymbol{H}$ **originale**.

Esercizio 112 [Soluzione]

Si consideri il segnale a tempo discreto $x(n)$, con campioni indipendenti e ugualmente distribuiti secondo la seguente densità di probabilità

$$p_x(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} & a \in [-3.5, -3), \\ \frac{1}{6} & a \in [-3, -1.5), \\ \frac{1}{10} & a \in [-1.5, 1), \\ \frac{1}{12} & a \in [1, 4). \end{cases}$$

Variante 2

$$p_x(a) = \begin{cases} \frac{1}{4} & a \in [-7, -6), \\ \frac{1}{12} & a \in [-6, -3), \\ \frac{1}{20} & a \in [-3, 2), \\ \frac{1}{24} & a \in [2, 8). \end{cases}$$

Variante 3

$$p_x(a) = \begin{cases} \frac{1}{6} & a \in [-10.5, -9), \\ \frac{1}{18} & a \in [-9, -4.5), \\ \frac{1}{30} & a \in [-4.5, 3), \\ \frac{1}{36} & a \in [3, 12). \end{cases}$$

1. (2p) Trovare l'intervallo di quantizzazione e il passo di quantizzazione del quantizzatore uniforme con $b = 2$ bit per campione per il segnale e disegnare la funzione caratteristica del quantizzatore.

2. (3p) Considerando ora il nuovo segnale $y(n)$, con $y(n) \in \{1, 2, 3, 4\}$ valore quantizzato di $x(n)$, trovare il codice di sorgente a prefisso binario ottimo per $y(n)$ e calcolarne la lunghezza media.

3. (2p) Dire se esiste un codice di sorgente a prefisso binario per $y(n)$ avente la stessa lunghezza media di quello trovato al punto 2, ma con tutte le parole di codice diverse. In caso affermativo, scrivere le parole del nuovo codice.

   Variante 2

   (2p) Dire se esiste un codice di sorgente a prefisso binario per $y(n)$ con lunghezza media strettamente maggiore di quello trovato al punto 2. In caso affermativo, scrivere le parole del nuovo codice.

   Variante 3

   (2p) Dire se il codice ottenuto da quello del punto 2 cambiando solo la prima cifra di ogni parola di codice è ancora a) a prefisso e b) ottimo. Scrivere le parole del nuovo codice.

4. (3p) Per un canale con ingresso $y(n)$ e uscita $z(n)$ che effettua la seguente trasformazione

$$z(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } y(n) \text{ è pari}, \\ 0 & \text{se } y(n) \text{ è dispari}, \end{cases}$$

   calcolare l'informazione mutua tra $y(n)$ e $z(n)$.

   Variante 2

$$z(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } y(n) = 1 \text{ o } 4, \\ 0 & \text{se } y(n) = 2 \text{ o } 3. \end{cases}$$

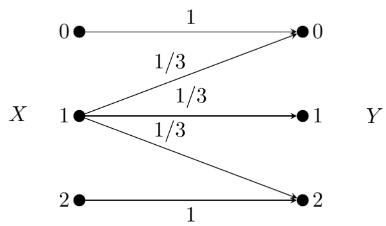
Variante 3

$$z(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } y(n) = 1 \text{ o } 2, \\ 0 & \text{se } y(n) = 3 \text{ o } 4. \end{cases}$$

6.24 Esame dell'8/9/2020

Esercizio 113 [Soluzione]

Si consideri il canale in figura, con ingresso $X \in \{0, 1, 2\}$ e uscita $Y \in \{0, 1, 2\}$ e periodo di simbolo $T = 1$ s.



Si consideri una probabilità dell'ingresso

$$p_X(0) = p_X(2) = \frac{26}{55}, \quad p_X(1) = \frac{3}{55}.$$

1. (2pt) Dire se il canale è un canale "binario simmetrico senza memoria", giustificando la risposta.
2. (2pt) Calcolare l'entropia di Y.
3. (2pt) Calcolare la probabilità di errore media $P(Y \neq X)$.
4. (3pt) Assumendo che la distribuzione dell'ingresso fornita sia quella che permette di raggiungere la capacità, calcolare la capacità del canale.
5. (2pt) Dato un codice per il canale considerato, con tasso di informazione nominale $R = 2$ bit/s che ottiene una probabilità di errore sulle parole di codice di 10^{-3}, dire se certamente esiste un altro codice con lo stesso tasso di informazione nominale e probabilità di errore più piccola. Giustificare la risposta.

Esercizio 114 [Soluzione]

Si consideri la seguente segnalazione al ricevitore, per $T = 0.1$ ms,

$$s_1(t) = \begin{cases} e^{-5t} & t \in [0, T] \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases} \qquad s_2(t) = \begin{cases} Ae^{5t} & t \in [0, T/2] \\ -Ae^{5t} & t \in [T/2, T] \\ 0 & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

utilizzata su canale AWGN. I due simboli equiprobabili.

1. (2p) Calcolare il valore di $A > 0$ che rende uguale l'energia dei due segnali.
2. (3p) Trovare una base ortonormale per la segnalazione, e disegnare la costellazione.
3. (2p) Disegnare le regioni di decisione ottime.

4. (2p) Per una potenza del rumore per dimensione σ_I^2 tale che $E_s/\sigma_I^2 = 10$ (con E_s energia media della segnalazione), calcolare la probabilità di errore media sul simbolo e sul bit.

5. (2p) Estendere la segnalazione con i due segnali $s_3(t) = -s_1(t)$ e $s_4(t) = -s_2(t)$, assunti ancora equiprobabili, e calcolare la potenza del rumore per dimensione che fornisce una probabilità di errore sul bit di 10^{-2}.

6.25 Primo compitino del 20/11/2020

Sia A l'ultima cifra del suo numero di matricola e

$$\mathtt{N} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathtt{A} = 1 \text{ oppure } 2 \\ 2 & \text{se } \mathtt{A} = 3 \text{ oppure } 4 \\ 3 & \text{se } \mathtt{A} = 5 \text{ oppure } 6 \\ 4 & \text{se } \mathtt{A} = 7 \text{ oppure } 8 \\ 5 & \text{se } \mathtt{A} = 9 \text{ oppure } 0 \end{cases}$$

Esercizio 115 [Soluzione]
Si consideri un segnale a tempo discreto $x(nT)$, $T = 1$ ms, i cui campioni sono realizzazioni indipendenti di una variabile gaussiana a media nulla con varianza $\sigma_x^2 = \mathtt{N}/4$.

1. Progettare un quantizzatore uniforme con 3 bit per campione e rapporto segnale-rumore di quantizzazione $(\Lambda_q)_{\text{dB}} = (12 + 2 \cdot \mathtt{N})$ dB, ignorando l'errore di saturazione: specificare la lunghezza del passo di quantizzazione e il numero di livelli di quantizzazione; indicare la mappatura dei bit, secondo la regola modulo e segno.

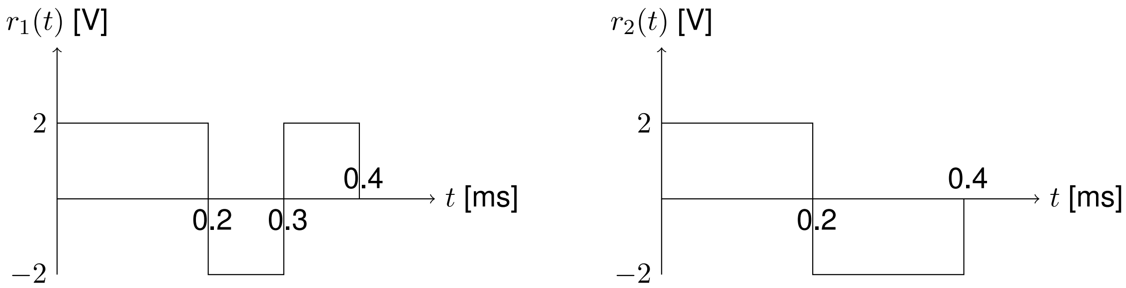
2. Considerare ora un quantizzatore **non uniforme** a 4 livelli, con una soglia di quantizzazione a zero, una a valore positivo, e la terza a valore negativo. Trovare i valori delle soglie, in modo che i quattro valori quantizzati si presentino all'uscita del quantizzatore tutti con la stessa probabilità.

3. Assumere che la sequenza di bit associata ad ogni ogni campione quantizzato $x^{(q)}(nT)$, usando il quantizzatore al punto 2), venga trasmessa con un solo simbolo preso da una modulazione PAM con impulso
$$h_{\text{Tx}}(t) = (1 - e^{-\mathtt{N}})\text{triangle}\left(\frac{t - 0.5T}{0.5T}\right)$$
su un canale che introduce solo rumore AWGN. Calcolare le coordinate di tutti i punti della costellazione al ricevitore e disegnare la costellazione, indicando le regioni di decisione ottime, motivando la risposta.

4. Calcolare la probabilità di errore sul simbolo per la trasmissione PAM del punto 3) per una potenza del rumore $\sigma_I^2 = 10^{-4}$.

5. Calcolare la probabilità (approssimata) di errore sul bit per il sistema del punto 4), motivando l'approssimazione.

Esercizio 116 [Soluzione]
La figura rappresenta due segnali all'ingresso di un demodulatore digitale.



1. Trovare una segnalazione ortogonale binaria $s_1(t)$ e $s_2(t)$, tale per cui i segnali $r_1(t)$ e $r_2(t)$ siano perfettamente rappresentabili nello spazio della costellazione. Per l'energia dei segnali della segnalazione, imporre $E_{s_1} = E_{s_2} = 0.02$. (attenzione: i tempi nella figura sono in ms).

2. Disegnare la costellazione di $s_1(t)$ e $s_2(t)$ trovata al punto 1) e individuare nello spazio della costellazione i due punti relativi ai segnali $r_1(t)$ e $r_2(t)$.

3. Disegnare le regioni di decisione ottime, assumendo che i simboli trasmessi siano equiprobabili e che il canale introduca solo rumore AWGN, motivando la risposta. Dire quali sono i simboli $\hat{a}_0$ demodulati per i due segnali $r_1(t)$ e $r_2(t)$.

4. Trovare la potenza del rumore AWGN che porta ad una probabilità di errore sul bit di $\mathtt{N}^2 \cdot 10^{-3}$.

5. Aggiungere alla segnalazione due segnali, antipodali a $s_1(t)$ e $s_2(t)$ del punto 1). Calcolare l'**esatta** probabilità di errore sul simbolo, sempre in ipotesi di segnali equiprobabili e canale AWGN con potenza del rumore di $3 \cdot \mathtt{N} \cdot 10^{-5}$.

6.26 Secondo compitino dell'8/1/2021

Esercizio 117 [Soluzione]

Si consideri un codice a correzione d'errore lineare a blocco con alfabeto binario e due (tra le 2^k) parole di codice

$$100110, \quad 010011,$$

utilizzato su un canale binario simmetrico senza memoria. Tutte le 2^k parole di codice sono trasmesse con la stessa probabilità.

1. Dire se il codice può avere distanza minima

$$d_{\min} = 4, \text{se il suo numero di matricola è pari}$$

$$d_{\min} = 3, \text{se il suo numero di matricola è dispari}$$

motivando la risposta.

2. Dire che criterio di decodifica si utilizza, motivando la risposta. Assumendo che il codice abbia distanza minima $d_{\min} = 3$, decodificare le sequenze 000100 e 010101.

3. Considerando ora $k = 3$ (e nessuna assunzione sulla distanza minima), sapendo che il codice è in forma sistematica e la sequenza 111111 ha sindrome 110 se il suo numero di matricola è pari e 011 se è dispari, trovare la matrice di parità del codice.

4. Usando il codice del punto 3), decodificare la sequenza 111111. Nel caso in cui la decodifica non sia univoca, indicare tutte le parole di codice che hanno la massima probabilità di essere state trasmesse in corrispondenza della sequenza ricevuta.

5. Considerando ora $k = 2$, trovare tutte le parole di questo nuovo codice.

Esercizio 118 [Soluzione]

Sia A l'ultima cifra del suo numero di matricola e

$$\mathtt{N} = \begin{cases} 0.05 & \text{se A = 1 oppure 2} \\ 0.10 & \text{se A = 3 oppure 4} \\ 0.15 & \text{se A = 5 oppure 6} \\ 0.20 & \text{se A = 7 oppure 8} \\ 0.25 & \text{se A = 9 oppure 0} \end{cases}$$

Si consideri una sorgente X che genera simboli indipendenti e identicamente distribuiti. Ciascun simbolo viene codificato con un codice di sorgente con alfabeto di uscita binario. L'alfabeto di X è $\{1, 2, 3, 4\}$ e la sua densità di probabilità è $p(1) = p(2) = \mathtt{N}$, $p(3) = 0.2$.

1. Calcolare la lunghezza media delle parole di codice per una codifica a prefisso ottima.

2. Dire se il codice trovato al punto 1 è un codice di Shannon-Fano per la sorgente, giustificando la risposta.

3. Trovare la parola del codice di Elias relativa al simbolo 1, con le lettere dell'alfabeto di ingresso ordinate come numeri naturali (1, 2, 3, 4).

4. Si consideri ora una diversa densità di probabilità della sorgente, con $p(1) = p(3)$ e $p(2) = p(4)$. Sia anche Z una variabile aleatoria con entropie condizionate

$$\mathbb{H}(Z|X) = \mathtt{N} + \frac{3}{2}\mathtt{N}^2$$

$$\mathbb{H}(Z|X = 1) = \mathbb{H}(Z|X = 3) = 2\mathtt{N}, \quad \mathbb{H}(Z|X = 2) = \mathbb{H}(Z|X = 4) = \mathtt{N}.$$

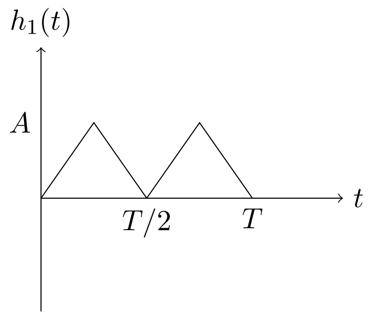
Calcolare l'entropia di X.

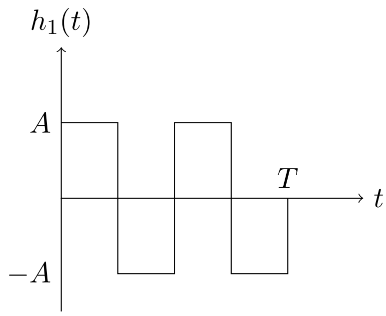
5. Si assuma di non sapere né la cardinalità dell'alfabeto di X né la sua densità di probabilità. Si sa però che $\mathbb{H}(X) = 0.1$ bit. I bit in uscita del codificatore di sorgente vengono salvati in una memoria da cui vengono prelevati con velocità costante $R = L_y/2$ bit/s, con L_y la lunghezza media delle parole del codice di sorgente (si ignorino i casi di memoria vuota o completamente piena). I bit prelevati dal buffer vengono codificati con un codice di canale prima essere trasmessi su un canale con capacità 0.6 bit/s. Dire se esistono codici di sorgente e di canale che garantiscono una probabilità di errore al ricevitore piccola a piacere.

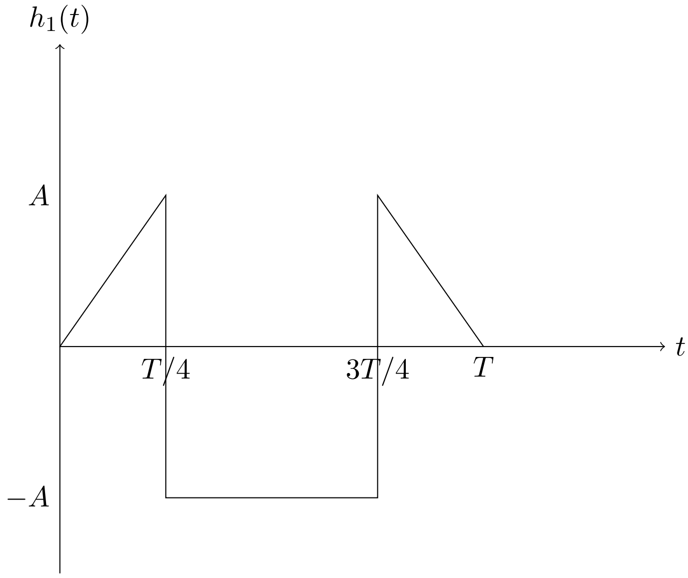
6.27 Esame del 19/1/2021

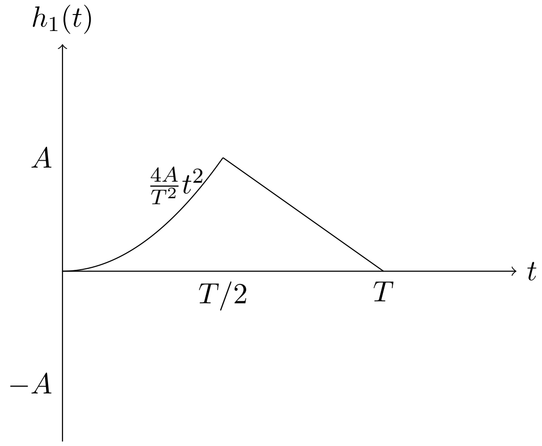
Esercizio 119 [Soluzione]

Si consideri il seguente impulso, utilizzato per la modulazione digitale di simboli equiprobabili su canale AWGN con potenza del rumore per dimensione σ_I^2 e periodo di simbolo $T = 2.1$, 3.2, 4.3, 5.4 ms.









1. Se la modulazione usata è una 16-QAM con impulso $h_1(t)$ e $\sigma_I^2 = 10^{-2}$, calcolare il valore di $A > 0$ che porta a una probabilità di errore sul bit di 10^{-4} / $2 \cdot 10^{-3}$ / $3 \cdot 10^{-4}$ / $4 \cdot 10^{-4}$.

2. Se A triplica/dimezza, lasciando inalterati gli altri parametri, si dica se aumenta, diminuisce o rimane constante la probabilità di errore al punto 1). Se la probabilità varia, calcolare il valore di σ_I^2 che la mantiene costante.

3. Si consideri ora la modulazione binaria con segnalazione
$$s_1(t) = h_1(t), \quad s_2(t) = B\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right),$$
$A = 20, 6, 5$ e 11, e $B > 0$ tale che $s_1(t)$ e $s_2(t)$ abbiano la stessa energia. Calcolare il coefficiente di correlazione tra i due segnali e la probabilità di errore di simbolo con $\sigma_I^2 = 10^{-2}$.

4. Disegnare la costellazione e le regioni di decisione della segnalazione del punto 3), specificando le coordinate di tutti i punti. Dire se la modulazione è ortogonale o antipodale o nessuna delle due, giustificando la risposta.

5. Aggiungere due segnali alla segnalazione del punto 3), così che i punti della costellazione siano i vertici di un quadrato, e i due punti già presenti siano gli estremi di un lato del quadrato. Disegnare la costellazione e le regioni di decisione. Calcolare la probabilità di errore di simbolo della nuova segnalazione ottenuta assumendo $\sigma_I^2 = 0.05$.

Esercizio 120 [Soluzione]

Si consideri una sorgente di simboli statisticamente indipendenti e identicamente distribuiti $X(n)$ con densità di probabilità

$$p_X(a) = \frac{e^{-|a|}}{2(1-e^{-2.4})}, \quad a \in [-2.4, 2.4]$$

$$p_X(a) = \frac{2e^{-2|a|/3}}{6(1-e^{-2.6})}, \quad a \in [-3.9, 3.9]$$

$$p_X(a) = \frac{3e^{-3|a|/4}}{8(1-e^{-3.3})}, \quad a \in [-4.4, 4.4]$$

$$p_X(a) = \frac{4e^{-4|a|/5}}{10(1-e^{-2.8})}, \quad a \in [-3.5, 3.5]$$

e $p_X(a) = 0$ altrove. $X(n)$ viene quantizzato con un quantizzatore uniforme a L livelli e $X_\mathrm{q}(n)$ è l'uscita del quantizzatore in corrispondenza di $X(n)$. Il segnale quantizzato viene codificato con un codice di sorgente a prefisso ottimo con parole di codice ad alfabeto binario.

1. Calcolare il minimo valore di v_sat che garantisce assenza di saturazione. Per $L = 4$, calcolare il passo di quantizzazione e disegnare la funzione caratteristica del quantizzatore, specificando tutti i parametri.

2. Calcolare il rapporto segnale-rumore di quantizzazione in dB per $L = 10$/13/16/20 usando un'approssimazione per il rumore granulare del quantizzatore, motivando la risposta.

3. Sia $L = 4$ e siano Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 i quattro valori quantizzati. Calcolare la probabilità che $X_q(n) = Q_k$, per $k = 1, 2, 3, 4$.

4. Per $L = 4$, trovare il codice di sorgente e calcolare la lunghezza media delle parole di codice.

5. Per $L = 4$, calcolare l'entropia del vettore aleatorio $[X_\mathrm{q}(n-1), X_\mathrm{q}(n), X_\mathrm{q}(n+1)]$ e l'entropia condizionata $\mathbb{H}(X_\mathrm{q}(n)|X_\mathrm{q}(n-1)$. Senza fare conti, dire se l'entropia di $X_\mathrm{q}(n) + X_\mathrm{q}(n-1)$ / $X_\mathrm{q}(n)/X_\mathrm{q}(n+1)$ / $X_\mathrm{q}(n)X_\mathrm{q}(n+1)$ / $X_\mathrm{q}(n) - X_\mathrm{q}(n+1)$ può essere strettamente maggiore di 4, motivando la risposta.

6. Senza usare la codifica di sorgente, il segnale $X_\mathrm{q}(n)$ (con $L = 4$) viene ora trasmesso direttamente su un canale che in uscita fornisce $Z(n) = X_\mathrm{q}(n)$ se $X_\mathrm{q}(n) = Q_1$ o Q_2, e $Z(n) = 0$ se $X_\mathrm{q}(n) = Q_3$ o Q_4. Calcolare l'informazione mutua tra $X_\mathrm{q}(n)$ e $Z(n)$.

Esercizio 121 [Soluzione]

Definiamo

$$\boldsymbol{x} = (10101011), \quad \boldsymbol{y} = (00101111), \quad \boldsymbol{z} = (11000100).$$

$$\boldsymbol{x} = (01001001), \quad \boldsymbol{y} = (10001111), \quad \boldsymbol{z} = (01100110).$$

1. Si consideri un codice di correzione d'errore a blocco lineare che ha tra le parole di codice $\boldsymbol{x}$. Dire se il codice può avere 128/64 parole e correggere 2/4 errori.

   OPPURE

   Si consideri un codice di canale a blocco che ha tra le parole di codice $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$. Dire se il codice può avere 32 parole e correggere/rilevare 2/3 errori.

2. Si consideri ora un codice di canale a blocco lineare in forma sistematica per cui la sindrome 01100 ha coset leader 01000000, la sequenza ricevuta $\boldsymbol{y}$ ha sindrome 11001, e $\boldsymbol{z}$ ha sindrome 00101. Calcolare una matrice di parità del codice.

3. Si consideri ora un codice di canale che ha come parole solamente $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{0} = (00000000)$. Dire se questo codice è lineare, motivando la risposta. Calcolare il numero massimo di errori che possono essere corretti, indipendentemente dalla loro posizione, se viene trasmessa la parola $\boldsymbol{x}$.

4. Per il codice al punto 3), considerare la trasmissione sul seguente canale

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{w}$$

   dove $\boldsymbol{c}$ è la parola di codice trasmessa e $\boldsymbol{w}$ è una sequenza aleatoria, con $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ con probabilità 0.7 / 0.6e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ con probabilità 0.3 / 0.4 e tutte le operazioni di somme binarie sono senza riporto (XOR dei singoli bit). Scrivere l'insieme delle sequenze ricevute come operazioni su $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, e $\boldsymbol{z}$ (esempio $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$), e calcolare la loro probabilità, assumendo che le parole trasmesse siano equiprobabili.

5. Per il canale del punto 4), trovare la parola decodificata in corrispondenza di ogni sequenza ricevuta e calcolare la probabilità di errore media.

6.28 Esame del 10/2/2021

Esercizio 122 [Soluzione]

Si consideri la seguente segnalazione al ricevitore di una modulazione digitale con simboli equiprobabili e periodo di simbolo $T = 1$ ms:

$$s_1(t) = -h(t)\cos(2\pi f_0 t) - h(t)\sin(2\pi f_0 t),$$

$$s_2(t) = -h(t)\cos(2\pi f_0 t) + h(t)\sin(2\pi f_0 t),$$

[variante: $s_2(t) = 0,$]

$$s_3(t) = h(t)\cos(2\pi f_0 t) + h(t)\sin(2\pi f_0 t),$$

$$s_4(t) = 3h(t)\cos(2\pi f_0 t) - 3h(t)\sin(2\pi f_0 t),$$

per $t \in [0, T]$, e $s_n(t) = 0$ per $t \notin [0, T]$. Sia $f_0 = 2$ GHz e

$$h(t) = \sqrt{2 \cdot 10^{-3}}\text{triangle}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right).$$

Al ricevitore è presente rumore AWGN con varianza per dimensione $\sigma_I^2 = 10^{-7}$.

1. (2p) Trovare una base ortonormale per la segnalazione, giustificando la risposta.
2. (3p) Calcolare le coordinate dei punti della costellazione, scegliere un criterio di decisione opportuno. Disegnare la costellazione e le regioni di decisione.
3. (3p) Calcolare la probabilità di decisione corretta, condizionata alla trasmissione del simbolo 2, ovvero $\mathrm{P}[\mathrm{C}|a_n = 2]$.
4. (3p) Se la probabilità di trasmissione di $s_2(t)$ diminuisce, e per gli altri segnali la probabilità aumenta dello stesso valore per tutti, dire, **senza fare conti** e motivando la risposta, il criterio di decisione da usare, come si spostano le regioni di decisione e come varia l'energia media della segnalazione.

Esercizio 123 [Soluzione]

Si consideri una sorgente di simboli indipendenti e identicamente distribuiti $x(nT) \in \{4, 9\}$, con $T = 1$ ms. I simboli $x(nT)$ vengono trasmessi su un canale senza memoria che, in corrispondenza di $x(nT)$, presenta in uscita il simbolo $y(nT) \in \{0, 1\}$. La matrice di transizione del canale sia

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix},$$

dove la prima e la seconda riga corrispondono a $x(nT) = 4$ e $x(nT) = 9$, rispettivamente, mentre la prima e la seconda colonna corrispondono a $y(nT) = 0$ e $y(nT) = 1$, rispettivamente, e l'elemento generico della matrice contiene $\mathrm{P}[y(nT)|x(nT)]$ per i corrispondenti valori di ingresso e uscita.

1. (2p) Dire se il canale è a) binario e/o b) simmetrico, motivando la risposta.
2. (2p) Calcolare l'informazione mutua tra $x(nT)$ e $y(nT)$, assumendo $\mathrm{P}[x(nT) = 4] = 0.7$.
3. (2p) Trovare la densità di probabilità di $x(nT)$ che massimizza l'entropia di $y(nT)$.
4. (3p) I simboli in uscita $y(nT)$ vengono raggruppati a coppie nel vettore $\boldsymbol{y}(2kT) = [y(2kT), y(2kT+T)]$, che viene codificato con un codice di sorgente che ha parole di codice con alfabeto binario. Assumendo $\mathrm{P}[x(nT) = 4] = 0.7$, trovare un codice di sorgente ottimo. [variante: Assumendo $\mathrm{P}[x(nT) = 4] = 0.7$, trovare il codice di Elias.] Calcolare la lunghezza media delle parole di codice.

5. (2p) Trovare la capacità del canale senza memoria con ingresso $x(nT)$, uscita $z(nT) \in \{0,1,2\}$, e matrice di transizione
$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.8 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 124 [Soluzione]

Si consideri il codice di Hamming con $n = 255$ utilizzato su un canale binario simmetrico senza memoria.

1. (2p) Calcolare la lunghezza delle parole in ingresso al codificatore.
2. (2p) Decodificare la sequenza $\tilde{\boldsymbol{c}}$, con $\tilde{c}_{45} = 1$ e $\tilde{c}_\ell = 0$ per $\ell \neq 45$, motivando la risposta.
3. (2p) Nella matrice di parità del codice, si sostituisca ora la colonna con tutti 1 con la colonna $[1, 0, \ldots, 0]^T$. Calcolare la distanza minima del nuovo codice, motivando la risposta.
4. (3p) Si progetti ora un nuovo codice (non di Hamming) con $k = 254$ e $n = 255$ e matrice generatrice in forma sistematica, che rilevi il maggior numero possibile di errori. Scrivere l'espressione dei bit parità in funzione dei bit del messaggio da codificare.
5. (2p) Calcolare il numero massimo di parole di codice che può avere un codice lineare (non di quelli dei punti predenti) con $n = 255$, che corregge almeno 122 errori.

6.29 Esame del 16/6/2021

Esercizio 125 [Soluzione]

Si consideri la seguente segnalazione al ricevitore di una modulazione digitale con simboli equiprobabili e periodo di simbolo $T = 0.1$ s:
$$s_1(t) = \frac{T+1}{(t+1)T},$$
$$s_2(t) = \frac{t+1}{3(T+1)} - \frac{T}{3(T+1)\log(T+1)},$$
$$s_3(t) = 2.5s_1(t) + s_2(t),$$
$$s_4(t) = -s_3(t),$$
per $t \in [0, T]$, e $s_n(t) = 0$ per $t \notin [0, T]$. Al ricevitore è presente rumore AWGN con varianza per dimensione $\sigma_I^2 = 2.25$.

1. (3p) Trovare una base ortonormale per la segnalazione, giustificando la risposta.
2. (3p) Calcolare le coordinate dei punti della costellazione, scegliere un criterio di decisione opportuno. Disegnare la costellazione e le regioni di decisione.
3. (2p) Calcolare un limite inferiore alla probabilità di errore di simbolo basato su una sola distanza tra i punti della costellazione.
4. (3p) Se la probabilità di trasmissione di $s_2(t)$ diminuisce, e per gli altri segnali la probabilità aumenta dello stesso valore per tutti, dire, **senza fare conti** e motivando la risposta, il criterio di decisione da usare, come si spostano le regioni di decisione e come varia l'energia media della segnalazione.

Esercizio 126 [Soluzione]

Si consideri un quantizzatore uniforme con valore di saturazione 4 e numero di livelli minimo ma tale da garantire un rapporto segnale-rumore di quantizzazione di almeno 10 dB per un ingresso con deviazione standard 2.

1. (3p) Calcolare il numero di bit per campione e il passo di quantizzazione.

2. (3p) Calcolare la probabilità di saturazione quando si quantizza una sorgente con densità di probabilità
$$p(a) = \frac{1+\cos a}{10+2\sin 5}, \text{per } a \in [-5,5], \text{ e } p(a) = 0 \text{ altrove,}$$
utilizzando il quantizzatore progettato al punto precedente.

3. (3p) Calcolare l'entropia del segnale quantizzato al punto precedente.

4. (2p) Si considerino ora 6 livelli di quantizzazione e il nuovo valore di saturazione 6. Applicando il quantizzatore alla sorgente del punto 2), il segnale quantizzato è codificato con un codificatore di sorgente che utilizza un codice binario ottimo. Progettare il codice e calcolarne la lunghezza media delle parole.

Esercizio 127 [Soluzione]

Siano $X(n)$, $Y(n)$ e $S(n)$ tre sorgenti indipendenti (ovvero $X(n_1)$, $S(n_2)$ e $Y(n_3)$ sono indipendenti per ogni n_1, n_2 e n_3), ciascuna a simboli binari (0,1) indipendenti (es. $X(n)$ e $X(m)$ sono indipendenti per $m \neq n$). Sia inoltre
$$Z(n) = \begin{cases} X(n) & \text{se } S(n) = 1 \\ Y(n) & \text{se } S(n) = 0. \end{cases}$$
Sia $P(X(n) = 1) = P(Y(n) = 1) = 0.5$ e $P(S(n) = 1) = 0.9$.

1. (3p) Calcolare l'informazione mutua tra $X(n)$ e $Z(n)$.

2. (3p) Calcolare l'efficienza spettrale del canale che ha come ingresso $X(n)$ e come uscita $Z(n)$, con densità di probabilità di $X(n)$ da scegliere opportunamente. Specificare la densità di $X(n)$ (con alfabeto binario) scelta.

3. (3p) Si consideri ora $X(2n)$ con alfabeto binario e $P(X(2n)) = 0.5)$, mentre $X(2n+1) = X(2n)$ per ogni n. Si dica quanti errori è in grado di rilevare e correggere questa codifica, giustificando la risposta.

4. (2p) Sia ora $Y(n) = 2$ costante per ogni valore di n. Calcolare l'efficienza spettrale del canale che ha come ingresso $X(n)$ (con alfabeto binario) e come uscita $Z(n)$. Specificare la densità di $X(n)$ scelta.

6.30 Esame del 29/8/2021

Esercizio 128 [Soluzione]

Sia $\mathcal{C}$ un codice lineare con matrice generatrice

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. (3p) Scrivere una matrice di parità $\boldsymbol{H}$ di $\mathcal{C}$. Calcolare la minima distanza del codice $\mathcal{C}$, usando le proprietà di $\boldsymbol{H}$, motivando la risposta.
2. (3p) Calcolare il numero di coset di $\mathcal{C}$.
3. (2p) Calcolare il numero di coset che hanno coset leader di peso di Hamming 1.
4. (3p) Bucare (puncture in inglese) un codice significa eliminare alcuni bit (in posizioni fisse) da tutte le parole di codice (es. togliere il primo bit di tutte le parole di codice). Dire se bucare un codice aumenta, diminuisce o lascia invariata la distanza minima e il rate del codice.

Esercizio 129 [Soluzione]

Si consideri la segnalazione in trasmissione

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{1}{2T}} \cos\left(2\pi \frac{8t}{T}\right), \quad s_2(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \cos\left(2\pi \frac{8t}{T}\right),$$

per $t \in [0, T]$, e $s_1(t) = s_2(t) = 0$ altrove, con $T = 1$ ms. I segnali vengono trasmessi su un canale che introduce un guadagno di 6 dB.

1. (3p) Trovare una base per la segnalazione **al ricevitore** e calcolare l'energia media della segnalazione **trasmessa** assumendo i due simboli eqiprobabili.
2. (3p) Calcolare la probabilità di errore nell'ipotesi che i due simboli siano equiprobabili e il canale oltre al guadagno introduca rumore Gaussiano bianco con media nulla e varianza 10^{-2}.
3. (3p) Si consideri ora che $s_1(t)$ viene trasmesso con probabilità 0.45 e che il canale introduce, anziché rumore Gaussiano, un rumore che nello spazio euclideo della costellazione è rappresentato dalla variabile aleatoria w con densità di probabilità

$$p_w(a) = \frac{1}{10} e^{-\frac{|a|}{5}}.$$

   Trovare le regioni di decisione ottime, giustificando la risposta. Trovare le decisioni ottime anche per la probabilità del primo simbolo 0.3.
4. (2p) Calcolare la probabilità di errore per il canale descritto al punto precedente.

6.31 Primo compitino del 12/11/2021

Esercizio 130 [Soluzione]
Si consideri la segnalazione in trasmissione

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{1}{4T}} \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right), \quad s_2(t) = \sqrt{\frac{1}{T}} \mathrm{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

con $T = 1$ ms. I segnali vengono trasmessi su un canale che introduce un guadagno di 6 dB.

1. (3p) Calcolare l'energia media della segnalazione **trasmessa** assumendo i due simboli equiprobabili e trovare una base per la segnalazione **al ricevitore**.

2. (3p) Calcolare la probabilità di errore nell'ipotesi che i due simboli siano equiprobabili e il canale dopo aver amplificato il segnale introduca anche rumore gaussiano bianco con media nulla e varianza $4 \cdot 10^{-2}$.

3. (3p) Si consideri ora che $s_1(t)$ viene trasmesso con probabilità 0.45 e che il canale introduce, anziché rumore gaussiano, un rumore che nello spazio euclideo della costellazione è rappresentato dal vettore $\boldsymbol{w} = [w_1, \ldots, w_I]$ contenente variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite, ciascuna con densità di probabilità
$$p_w(a) = \frac{1}{1.4}\mathrm{rect}\left(\frac{a}{1.4}\right).$$
Trovare le regioni di decisione ottime, giustificando la risposta.

4. (2p) Calcolare la probabilità di errore per il canale descritto al punto precedente.

5. (2p) Si consideri ora un canale che opera come filtro, ovvero l'uscita è la convoluzione del segnale trasmesso con il segnale
$$h(t) = \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right).$$
Inoltre, in uscita dalla convoluzione il canale introduce rumore gaussiano bianco con media nulla e varianza $4 \cdot 10^{-2}$. Il ricevitore viene modificato per tenere conto dell'effetto del canale e minimizzare la probabilità di errore. Dire se la probabilità di errore aumenta, diminuisce o rimane invariata rispetto al caso del punto 2), giustificando la risposta.

Esercizio 131 [Soluzione]

Sia data la seguente segnalazione in trasmissione, a simboli equiprobabili,
$$s_m(t) = A(2m-9)\mathrm{triangle}\left(\frac{t-T/2}{T/2}\right)$$
per $m = 1, \ldots, 10$, con $T = 0.5$ ms periodo di simbolo. Il segnale viene inviato su un canale che introduce rumore additivo gaussiano bianco con media nulla e varianza $\sigma_I^2 = 10^{-3}$ per dimensione.

1. Calcolare il valore di $A > 0$ per avere una probabilità di errore sul simbolo $P(E) = 10^{-3}$.

2. Disegnare il ricevitore con il minor numero di filtri, specificando tutti i parametri (come risposta impulsiva dei filtri e ritardi).

3. Calcolare l'energia media della segnalazione in trasmissione per $A = \frac{1}{\sqrt{2T}}$.

4. Nello spazio euclideo definito dalla base della segnalazione, calcolare le coordinate del segnale ricevuto
$$r(t) = 0.8\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/4}{T/2}\right).$$

5. Rimuovere dalla segnalazione in trasmissione due segnali in modo da ridurre il più possibile l'energia media, assumendo che gli altri siano equiprobabili. Dire quali segnali vengono rimossi, motivando la risposta e dire se la probabilità di errore media aumenta, diminuisce o rimane invariata dopo la rimozione dei segnali.

6.32 Secondo compitino del 11/1/2022

Esercizio 132 [Soluzione]
Considerare un codice di correzione d'errore a blocco binario con lunghezza dei blocchi di ingresso al codificatore di 57 bit e lunghezza delle parole di codice di 63 bit.

1. Dimostrare che esiste un codice di Hamming con le caratteristiche indicate.

2. Calcolare il numero massimo di errori corretti e rilevati sempre da questo codice di Hamming.

3. Scegliendo una matrice di parità in forma sistematica con colonne aventi peso di Hamming decrescente da sinistra a destra, a) descrivere la matrice (quali righe o colonne si trovano, senza scrivere la matrice) e b) decodificare la sequenza con il primo bit uguale a 1, gli ultimi 6 bit uguali a 1 e tutti gli altri bit sono zeri.

4. Allungare tutte le parole di codice con un bit così calcolato

$$c_{64} = \sum_{i=1}^{57} b_i$$

dove b_i sono i bit della sequenza in ingresso al codificatore. Dimostrare che questo nuovo codice ha distanza minima strettamente minore di 5 (suggerimento: utilizzare un opportuno bound).

Esercizio 133 [Soluzione]
Si consideri una sorgente che genera variabili aleatorie X_n al tempo n, indipendenti e con densità di probabilità

$$p_X(a) = \frac{\pi}{24} \cos\left(\frac{\pi a}{12}\right), \quad a \in [-6, 6],$$

e $p_X(a) = 0$ altrove. Si noti che la potenza di X_n è 6.82.

1. Si quantizzi X_n con un quantizzatore uniforme imponendo una probabilità di saturazione 10^{-3} e un rapporto segnale-rumore di quantizzazione granulare di almeno 12 dB. Trovare il valore di saturazione e il numero minimo di livelli del quantizzatore (potenza di 2).

2. Si consideri ora un quantizzatore uniforme per X_n con 6 livelli di quantizzazione e valore di saturazione 6. Il segnale quantizzato è codificato con un codificatore di sorgente che utilizza un codice binario ottimo. Progettare il codice e calcolarne la lunghezza media delle parole.

3. Calcolare la lunghezza media delle parole del codice di Shannon-Fano per il segnale quantizzato al punto 2.

4. Considerare ora due quantizzatori uniformi (A e B) entrambi con $v_{\text{sat}} = 6$: il quantizzatore A ha 2 livelli
di quantizzazione, mentre il quantizzatore B ne ha 3. Utilizzando X_n come ingresso di entrambi i quantizzatori, siano Y_n e Z_n i valori quantizzati da A e B, rispettivamente. Calcolare la densità di probabilità di Y_n e la probabilità condizionata $P(Z_n = a|Y_n = b)$ per tutti i valori quantizzati a e b.

5. Calcolare l'informazione mutua tra Y_n e Z_n del punto precedente [suggerimento: considerando Y_n e Z_n ingresso e uscita di un canale numerico con probabilità di transizione dato dalla probabilità condizionata del punto precedente, riportarsi al calcolo dell'informazione mutua per un tipo di canale noto].

6.33 Esame del 19/1/2022

Esercizio 134 [Soluzione]
Si consideri una modulazione digitale con la quale vengono trasmesse le due forme d'onda equiprobabili

$$s_1(t) = \frac{B}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.3T}{0.6T}\right), \quad s_2(t) = \frac{B}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.7T}{0.6T}\right),$$

con periodo di simbolo $T = 3$ ms. Il canale introduce un guadagno di 3 dB e rumore additivo Gaussiano bianco con potenza 10^{-1} per dimensione.

1. Calcolare il valore di B che porta a una probabilità di errore sul bit di 10^{-3}.

2. Calcolare una base ortonormale per la segnalazione e le coordinate dei punti della costellazione al ricevitore. Disegnare la costellazione nello spazio euclideo.

3. Calcolare il numero di bit al secondo trasmessi e disegnare lo schema di un ricevitore con il numero minimo di filtri, specificando tutti i parametri.

4. Considerare ora la modulazione con i due segnali trasmessi $s_1'(t) = s_1(t)$ e $s_2'(t) = -s_1(t)$. Dire se l'energia media aumenta/diminuisce e se la probabilità di errore aumenta/diminuisce rispetto alla trasmissione dei punti precedenti, giustificando le risposte.

5. Si consideri la segnalazione in trasmissione

$$s_1''(t) = \frac{3}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t-AT/2}{AT}\right), \quad s_2''(t) = \frac{3}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t-(1-A/2)T}{AT}\right).$$

   Si osservi che la modulazione coincide con quella originale con $A = 0.6$ e $B = 3$. Facendo variare ora $A \in [0.5, 1]$, dire se la probabilità di errore aumenta o diminuisce all'aumentare di A, giustificando la risposta.

Esercizio 135 [Soluzione]
Si consideri un segnale a tempo discreto $X(nT)$ con $T = 1$ s i cui campioni sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con densità di probabilità

$$p_X(a) = \frac{\pi}{24}\left|\sin\left(\frac{\pi a}{12}\right)\right|, \quad a \in [-6, 6]$$

e $p_X(a) = 0$ altrove. Si noti che la potenza di $X(nT)$ è 6.82. Il segnale viene quantizzato con un quantizzatore uniforme con 16 livelli.

1. Calcolare il valore di saturazione del quantizzatore che porta ad un rapporto segnale-rumore di quantizzazione granulare di 23.2 dB.

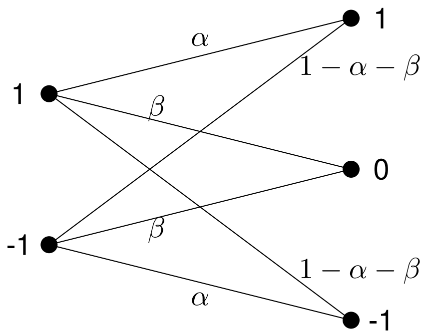
2. I bit in uscita dal quantizzatore (che rappresentano i valori quantizzati in modulo e segno) vengono codificati con un codice a correzione d'errore e trasmessi su un canale binario simmetrico senza memoria con probabilità di errore sul bit 10^{-2} e periodo di bit $T_{\mathrm{bit}} = 0.2$ s. Dire se esiste un codice a correzione d'errore che permette di avere probabilità di errore piccola a piacere sulle parole di codice.

3. Si consideri ora un quantizzatore uniforme con $v_{\mathrm{sat}} = 6$ e 8 livelli che fornisce in uscita il segnale quantizzato $Y(nT)$. Ogni campione $Y(nT)$ viene codificato con un codice di sorgente binario a prefisso. Si dica se il codice di sorgente può avere lunghezza media delle parole di 2.3 bit.

4. Un altro quantizzatore applicato a $X(nT)$ con $v_{\mathrm{sat}} = 6$ e 4 livelli fornisce in uscita il segnale quantizzato $Z(nT)$. Calcolare le entropie $H(Y(nT), Z(nT))$ e $H(Z(nT)|Y(nT))$. Senza fare conti, dire se $H(Z(nT))$ è maggiore/minore/uguale a $H(Y(nT))$, giustificando la risposta.

5. Si consideri il codice [_,_,1,1], [_,_,0], [1,0], [0,1], [1,1], [0,0,1,_]: inserire il valore dei bit al posto delle posizioni _ per rendere il codice un codice a prefisso ottimo, giustificando la risposta.

Esercizio 136 [Soluzione]
Si consideri il canale numerico con ingresso binario e uscita ternaria, con il seguente diagramma delle probabilità di transizione



Il periodo di simbolo è $T = 0.5$ s.

1. Calcolare la mutua informazione tra ingresso e uscita del canale per $\alpha = 0.7$ e $\beta = 0.2$ e simboli in ingresso -1 e 1 con uguale probabilità.
2. Si dica per quali valori di $\alpha > 0$ e β il canale è a) binario simmetrico senza memoria e b) binario con cancellazione.
3. Si consideri il codice di correzione d'errore lineare con matrice di controllo parità
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Mediante permutazioni delle colonne di $\boldsymbol{H}$, mettere la matrice di parità in forma sistematica. Calcolare la parola di codice associata alla sequenza di ingresso al **codificatore** [1,1]^T con il codice in forma sistematica trovato.
4. Dire se il codice al punto 3. è di Hamming. Se non lo è, aggiungere colonne a $\boldsymbol{H}$ per renderla matrice di controllo di parità di un codice di Hamming. Specificare i parametri n e k del codice di Hamming e scrivere la matrice di parità ottenuta.
5. Dimostrare che il codice del punto 3. ha distanza minima 3.

6.34 Esame del 16/2/2022

Esercizio 137 [Soluzione]
I seguenti segnali sono utilizzati in trasmissione per una modulazione digitale quaternaria a simboli equiprobabili
$$s_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.3T}{0.6T}\right), \quad s_2(t) = \sqrt{\frac{3}{T}}\mathrm{triangle}\left(\frac{t-0.7T}{0.3T}\right), \quad s_3(t) = -s_1(t), \quad s_4(t) = -s_2(t),$$
Versione 2
$$s_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.4T}{0.8T}\right), \quad s_2(t) = \sqrt{\frac{3}{T}}\mathrm{triangle}\left(\frac{t-0.6T}{0.4T}\right), \quad s_3(t) = -s_1(t), \quad s_4(t) = -s_2(t),$$
con periodo di simbolo T. Il canale introduce solo rumore additivo Gaussiano bianco senza attenuazione.

1. Calcolare l'energia media della segnalazione E_s al ricevitore.
2. Assumendo che il coefficiente di correlazione tra $s_1(t)$ e $s_2(t)$ valga $\rho = 0.56$, calcolare le coordinate dei punti della costellazione al ricevitore. [Suggerimento: non serve calcolare esplicitamente la base ortonormale].
3. Disegnare la costellazione nello spazio euclideo e le regioni di decisione ottime motivando la risposta.
4. Usando un bound superiore alla probabilità d'errore sul simbolo con una sola funzione Q, trovare la massima potenza del rumore per dimensione che garantisce una probabilità di errore inferiore a 10^{-2}. [**Versione 2:** 10^{-5}]
5. Si considerino ora i seguenti quattro diversi segnali trasmessi con **periodo di simbolo $\mathbf{1.3T}$** [**Versione 2: $\mathbf{1.6T}$**]

$$s_2''(t) = \sqrt{\frac{3}{T}}\text{triangle}\left(\frac{t-0.9T}{0.3T}\right), \quad s_4''(t) = -s_2''(t), \quad s_1''(t) = s_1(t), \quad s_3''(t) = -s_1(t).$$

Versione 2:

$$s_2''(t) = \sqrt{\frac{3}{T}}\text{triangle}\left(\frac{t-1.2T}{0.4T}\right), \quad s_4''(t) = -s_2''(t), \quad s_1''(t) = s_1(t), \quad s_3''(t) = -s_1(t).$$

Rispetto alla modulazione del punto 1, dire se la probabilità di errore della nuova modulazione $s_1''(t)$, $s_2''(t)$, $s_3''(t)$ e $s_4''(t)$ aumenta o diminuisce e se il numero di bit al secondo trasmessi aumenta o diminuisce, giustificando le risposte.

Esercizio 138 [Soluzione]
Si consideri un canale numerico con ingresso binario $X \in \{0,1\}$ e uscita binaria $Y \in \{0,1\}$. Il canale si comporta in tre modi diversi, a seconda di eventi esterni indipendenti dai bit in ingresso. In particolare, con probabilità 0.2 [**Versione 2:** 0.3] il canale fornisce $Y = 1$ indipendentemente dal valore di X (modo 1); con probabilità 0.1 [**Versione 2**: 0.2] il canale fornisce $Y = 0$ indipendentemente dal valore di X (modo 0). Quando non è né in modo 0 né in modo 1, il canale fornisce in uscita $Y = X$ (modo =).

1. Calcolare le probabilità di transizione del canale $P(Y = a|X = b)$ per $a, b \in \{0,1\}$.
2. Dire se il canale è binario simmetrico senza memoria, giustificando la risposta.
3. Calcolare l'entropia condizionata dell'uscita del canale rispetto all'ingresso, assumendo $P(X = 0) = 0.55$. [**Versione 2:** 0.6]
4. Considerare un codice lineare binario con matrice generatrice

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & d \\ a & 1 \\ 0 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}.$$

Versione 2

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ a & 1 \\ 1 & d \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcolare i valori di a, b, c, e d che permettono di rilevare e correggere il maggior numero di errori e scrivere la matrice generatrice in forma sistematica.

5. Con il codice ottenuto al punto precedente, scrivere la matrice di controllo di parità e decodificare la sequenza $[01111]$ [**Versione 2**: $[110111]$]

6.35 Esame del 14/6/2022

Esercizio 139 [Soluzione]

Variante 1
Si consideri la seguente segnalazione per modulazione digitale con $M = 4$ simboli equiprobabili

$$s_1(t) = \begin{cases} A_1 e^{-t/T}, & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad s_2(t) = \begin{cases} A_2 e^{t/(4T)}, & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad s_3(t) = -s_1(t), \quad s_4(t) = -s_2(t),$$

con periodo di simbolo $T = 10$ ms; A_1 e A_2 sono tali che le energie di $s_1(t)$ e $s_2(t)$ siano 10^{-4} e $1.5 \cdot 10^{-4}$, rispettivamente. Il canale introduce solo rumore AWGN.

1. Trovare una base ortonormale per la segnalazione.
2. Calcolare A_1 e A_2 e disegnare la costellazione al ricevitore, specificando le coordinate di tutti i punti della costellazione.
3. Specificare il criterio di decisione (motivando la risposta) e disegnare le regioni di decisione ottime.
4. Usando un limite inferiore alla probabilità di errore basato solo sulla distanza minima tra tutti i punti della costellazione, calcolare la varianza del rumore per dimensione (σ_I^2) che porta ad una probabilità di errore di simbolo di 10^{-3}.
5. Traslare i due punti della costellazione $\boldsymbol{s}_2$ e $\boldsymbol{s}_4$ in modo che le probabilità di errore condizionate al simbolo trasmesso siano uguali per tutti i simboli. Scrivere le coordinate dei nuovi punti.

Variante 2
Si consideri la seguente segnalazione per modulazione digitale con $M = 4$ simboli equiprobabili trasmessi su un canale che introduce solo rumore AWGN:

$$s_1(t) = \begin{cases} A_1 e^{-t/T}, & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}, \quad s_2(t) = \begin{cases} A_2 e^{-2t/T}, & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases},$$

e i segnali $s_3(t)$ e $s_4(t)$ sono scelti in modo che i punti della costellazione formano un quadrato e l'origine degli assi è all'interno del quadrato (non necessariamente al centro). Sia $T = 10$ ms il periodo di simbolo e A_1 e A_2 tali che le energie dei segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ siano 10^{-4} e $2 \cdot 10^{-4}$, rispettivamente.

1. Trovare una base ortonormale per la segnalazione.
2. Calcolare A_1 e A_2 e disegnare la costellazione al ricevitore, specificando le coordinate solo dei punti $\boldsymbol{s}_1$ e $\boldsymbol{s}_2$ della costellazione.
3. Specificare il criterio di decisione (motivando la risposta) e disegnare le regioni di decisione ottime.
4. Calcolare la varianza del rumore per dimensione (σ_I^2) che porta ad una probabilità di errore di simbolo di 10^{-3}, ignorando termini in $\mathrm{Q}(\cdot)^2$.

5. Traslare rigidamente la costellazione in modo da minimizzare l'energia media della costellazione e calcolare la nuova energia media.

Esercizio 140 [Soluzione]

Variante 1

Si consideri una sorgente che emette simboli $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$, con x_1 e x_2 variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta data dalla seguente tabella (es. $\mathbb{P}[x_1 = 2, x_2 = 3] = 3/36$)

x_2 \ x_1	1	2	3	4
1	2/36	4/36	1/36	2/36
2	4/36	1/36	1/36	3/36
3	1/36	3/36	3/36	2/36
4	1/36	1/36	4/36	3/36

1. Trovare il codice di sorgente binario ottimo per $\boldsymbol{x}$ e calcolarne la lunghezza media.

2. Senza trovare i codici di sorgente per x_1 e x_2, dire se il codice trovato al punto 1 ha lunghezza media minore/uguale/maggiore della somma delle lunghezze medie dei due codici per x_1 e x_2, motivando la riposta.

3. Considerare ora i simboli $\boldsymbol{y} = [x_1^2, x_2^2]$ e calcolare la lunghezza media del codice di sorgente binario ottimo per questi simboli.

4. Definendo $\boldsymbol{z} = [x_1 + x_2, x_1 - x_2]$, dire se l'entropia di $\boldsymbol{z}$ è maggiore/minore/uguale dell'entropia di $\boldsymbol{x}$, motivando la risposta.

5. Definendo $w = \mathrm{sgn}[\arctan(\pi x_1/4) + Q(x_2)]$, con $\mathrm{sgn}(x) = 1$ per $x \geq 0$ e $\mathrm{sgn}(x) = -1$ per $x < 0$, dire se l'entropia di w è maggiore/minore/uguale dell'entropia di $\boldsymbol{x}$, motivando la riposta.

Variante 2

Si consideri una sorgente che emette simboli $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$, con x_1 e x_2 variabili aleatorie con densità di probabilità congiunta data dalla seguente tabella (es. $\mathbb{P}[x_1 = 2, x_2 = 3] = 1/36$)

x_2 \ x_1	1	2	3	4
1	4/36	1/36	2/36	3/36
2	2/36	1/36	1/36	3/36
3	2/36	1/36	1/36	1/36
4	4/36	4/36	3/36	3/36

1. Trovare i codici di sorgente binari ottimi per x_1 e x_2 (separatamente) e calcolare la lunghezza media di ciascun codice.

2. Senza trovare il codice di sorgente binario ottimo per $\boldsymbol{x}$, dire se può esistere un codice per $\boldsymbol{x}$ con lunghezza media minore della somma delle lunghezze medie dei due codici per x_1 e x_2, motivando la riposta.

3. Considerare ora i simboli $y_2 = \sqrt{x_2}$ e calcolare la lunghezza media del codice di sorgente binario ottimo per questi simboli.

4. Definendo $z = 10x_1 + x_2$, dire se l'entropia di z è maggiore/minore/uguale dell'entropia di $\boldsymbol{x}$, motivando la risposta.

5. Definendo $\boldsymbol{w} = [x_1, x_2, x_3]$, con x_3 variabile aleatoria con alfabeto $\{0, 1\}$, dire se esiste una densità di probabilità di x_3 per cui l'entropia di $\boldsymbol{w}$ è strettamente maggiore di quella di $\boldsymbol{x}$, motivando la risposta.

Esercizio 141 [Soluzione]
Si consideri un canale numerico con ingresso binario $X \in \{-1, 1\}$ e uscita binaria $Y \in \{-1, 1\}$. Il canale si comporta in tre modi diversi, a seconda di eventi esterni indipendenti dai bit in ingresso. In particolare, con probabilità 0.2 [**Versione 2:** 0.3] il canale fornisce $Y = -X$ (modo -); con probabilità 0.1 [**Versione 2**: 0.2] il canale fornisce $Y = -1$ indipendentemente dal valore di X (modo 0). Quando non è né in modo - né in modo 0, il canale fornisce in uscita $Y = X$ (modo =).

1. Calcolare le probabilità di transizione del canale $P(Y = a|X = b)$ per $a, b \in \{-1, 1\}$.
2. Dire se il canale è un canale con cancellazione, giustificando la risposta.
3. Calcolare l'entropia condizionata dell'uscita del canale rispetto all'ingresso, assumendo $P(X = 1) = 0.55$. [**Versione 2:** 0.6]
4. Considerare un codice lineare binario con matrice di controllo di parità

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Versione 2

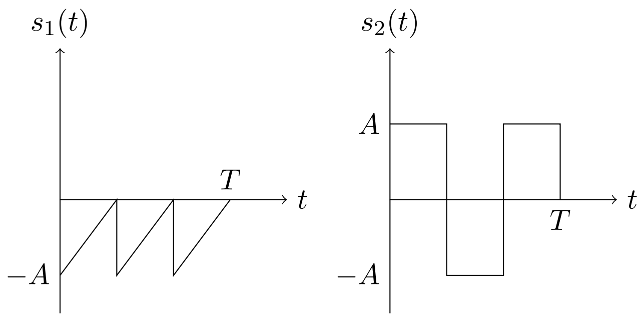
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Calcolare i valori di a e b, che portano a un solo possibile coset leader per ogni coset.

5. Con il codice ottenuto al punto precedente, scrivere la matrice generatrice e codificare la sequenza $[0, 1]$ [**Versione 2**: $[1, 1]$]

6.36 Esame del 25/8/2022

Esercizio 142 [Soluzione]



Si considerino i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ con $T = 10$ ms che vengono trasmessi come forme d'onda equiprobabili di una modulazione su un canale che introduce solo rumore AWGN con varianza del rumore per dimensione $\sigma^2 = 6 \cdot 10^{-3}$.

1. Calcolare il valore A che porta $s_1(t)$ ad avere energia $E_{s_1} = 5 \cdot 10^{-2}$. Calcolare anche l'energia di $s_2(t)$.

2. Calcolare i punti della costellazione al ricevitore (non è necessario calcolare la base esplicitamente). Disegnare la costellazione. Sia $d_{\min}$ la distanza tra i due punti della costellazione.

3. Scegliere il criterio di decisione ottima, motivando la risposta e disegnare le regioni di decisione.

4. Calcolare la probabilità di errore.

5. Estendere la modulazione con due nuovi segnali $s_3(t)$ e $s_4(t)$ che hanno come punti della costellazione $\boldsymbol{s}_3$ e $\boldsymbol{s}_4$. I due nuovi punti stanno sulla retta che passa per $\boldsymbol{s}_1$ e $\boldsymbol{s}_2$, uno a destra e l'altro a sinistra del segmento tra $\boldsymbol{s}_1$ e $\boldsymbol{s}_2$ a distanza $d_{\min}$ dal loro punto più vicino ($\boldsymbol{s}_1$ o $\boldsymbol{s}_2$). Disegnare la nuova costellazione e trovare la mappatura simboli-bit per minimizzare la probabilità di errore sul bit.

Esercizio 143 [Soluzione]
Sia $X_n \in \{0, 1\}$ una sorgente di simboli binari indipendenti con $P(X_n = 1) = 0.8$. Definiamo il vettore di simboli $\boldsymbol{Y}_n = [X_{2n}, X_{2n+1}]$.

1. Calcolare $P(\boldsymbol{Y}_n = [0, 0])$, $P(\boldsymbol{Y}_n = [0, 1])$, $P(\boldsymbol{Y}_n = [1, 0])$ e $P(\boldsymbol{Y}_n = [1, 1])$.

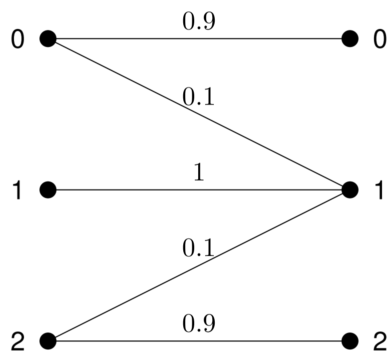
2. Scrivere il codice di sorgente binario ottimo per $\boldsymbol{Y}_n$ e calcolare la lunghezza media delle parole di codice.

3. Calcolare $\mathbb{H}(\boldsymbol{Y}_n|X_{2n})$ e $\mathbb{H}(\boldsymbol{Y}_n, X_{2n})$.

4. Definito il vettore aleatorio $\boldsymbol{Z}_n = [X_{nP}, X_{nP+1}, \ldots, X_{nP+P-1}]$, con $P > 2$ intero, calcolare l'entropia per simbolo di $\boldsymbol{Z}_n$.

Esercizio 144 [Soluzione]

Si consideri il canale in figura, con ingresso $X \in \{0, 1, 2\}$ e uscita $Y \in \{0, 1, 2\}$ e periodo di simbolo $T = 1$ s.



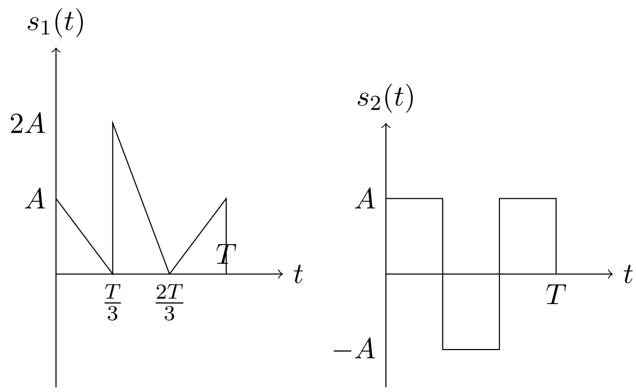
Si consideri una probabilità dell'ingresso

$$p_X(0) = p_X(2) = \frac{1}{5}, \quad p_X(1) = \frac{3}{5}.$$

1. Dire se il canale è un canale "binario con cancellazione", giustificando la risposta.
2. Calcolare l'entropia di Y.
3. Calcolare la probabilità di errore media $P(Y \neq X)$.
4. Assumendo che la distribuzione dell'ingresso fornita sia quella che permette di raggiungere la capacità, calcolare la capacità del canale.
5. Dato un codice per il canale considerato, con tasso di informazione nominale $R = 2$ bit/s che ottiene una probabilità di errore sulle parole di codice di 10^{-3}, dire se certamente esiste un altro codice con lo stesso tasso di informazione nominale e probabilità di errore più piccola. Giustificare la risposta.

6.37 Esame del 6/9/2022

Esercizio 145 [Soluzione]



Si considerino i segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ con $T = 5$ ms che vengono trasmessi come forme d'onda equiprobabili di una modulazione su un canale che **attenua di 10 dB** e introduce rumore AWGN con varianza del rumore per dimensione $\sigma^2 = 9 \cdot 10^{-2}$.

1. Calcolare il valore A che porta $s_2(t)$ ad avere energia **al ricevitore** della seconda forma d'onda $E_{s_2} = 5 \cdot 10^{-2}$. Calcolare anche l'energia della prima forma d'onda sempre al ricevitore.

2. Trovare una base ortonormale per la segnalazione e calcolare i punti della costellazione al ricevitore. Disegnare la costellazione al ricevitore.
3. Scegliere il criterio di decisione ottima, motivando la risposta e disegnare le regioni di decisione.
4. Calcolare la probabilità di errore.
5. Nello spazio della costellazione disegnare la linea su cui è possibile spostare s_2 mantenendo inalterata la probabilità di errore. Su questa linea individuare anche i punti per i quali l'energia media della modulazione non cambia.

Esercizio 146 [Soluzione]

Si consideri la seguente matrice di parità di un codice a correzione d'errore binario

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Scrivere la matrice generatrice del codice.
2. Dire se il codice è di Hamming, motivando la risposta.
3. Calcolare la sindrome della sequenza $[1\,0\,0\,1\,0\,1]^T$ e dire se la sequenza è una parola di codice.
4. Dimostrare che il peso minimo del codice è uguale a 3 e trovare una parola di codice di peso 3.
5. Il codice è utilizzato su canale binario simmetrico senza memoria con probabilità di errore sul bit di 0.1. Calcolare la probabilità che, trasmettendo la sequenza identicamente nulla, si riceva la parola di codice trovata al punto precedente.

Esercizio 147 [Soluzione]

Si consideri una sorgente di simboli x_n, $n = 1, \ldots$, dove i simboli sono indipendenti ed egualmente distribuiti, con densità di probabilità

$$p_x(a) = \begin{cases} \frac{1}{4} & a \in [-2, 0) \\ e^{-2a} & a \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

I simboli vengono quantizzati con un quantizzatore uniforme a 4 livelli nell'intervallo di quantizzazione $[-v_{\text{sat}}, v_{\text{sat}}]$ e con probabilità di saturazione $1.225 \cdot 10^{-3}$.

1. Calcolare il valore di saturazione del quantizzatore e disegnare la funzione caratteristica del quantizzatore, specificando la mappatura dei valori quantizzati in sequenze di bit.
2. Calcolare la probabilità di ciascuna coppia di bit generata dal quantizzatore per ogni simbolo.
3. Calcolare l'entropia dei simboli quantizzati.
4. Trovare il codice di sorgente ottimo per le coppie di bit in uscita dal quantizzatore e calcolare la lunghezza media del codice.
5. I bit che rappresentano i livelli vengono trasmessi su un canale binario simmetrico senza memoria con probabilità di errore 0.5. Trovare il codice di sorgente ottimo per le coppie di bit ricevute (non è necessario fare conti).

6.38 Primo compitino del 25/11/2022

Esercizio 148 [Soluzione]

Si consideri la modulazione con segnalazione al trasmettitore

$$s_1(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{T}\right)^{1/3}, & t \in [0,T], \\ 0 & \text{altrove}, \end{cases} \qquad s_2(t) = -3s_1(t),$$

con $T = 1$ ms. Il segnale modulato $s_{\text{Tx}}(t)$ viene trasmesso su un canale che fornisce in uscita

$$r(t) = s_{\text{Tx}}(t) + w(t).$$

I due segnali vengono trasmessi con la stessa probabilità e $w(t)$ è un rumore AWGN a media nulla.

1. Dire se la modulazione è ortogonale o antipodale, motivando la risposta.

   [Variante: Dire se la modulazione è biortogonale o ha simboli con la stessa energia, motivando la risposta.]

2. Calcolare le coordinate dei punti della costellazione al ricevitore.

3. Calcolare la varianza del rumore per avere $P_{\text{bit}} = 2 \cdot 10^{-3}$.

   [Variante: Calcolare la probabilità di errore con $\sigma_I^2 = 5 \cdot 10^{-4}$].

4. Nello stesso spazio euclideo dei punti precedenti, trovare le coordinate dei due punti di una costellazione che ha la stessa probabilità di errore ma energia media minima. Disegnare la costellazione risultante.

   [Variante: Nello stesso spazio euclideo dei punti precedenti, trovare le coordinate dei due punti di una costellazione che ha la stessa probabilità di errore ma uno dei due punti è nell'origine. Disegnare la costellazione risultante.]

5. Dire se è possibile aggiungere due segnali $s_3(t)$ e $s_4(t)$ alla segnalazione originale ($s_1(t)$ e $s_2(t)$) per ottenere una 4-PAM (a meno di una permutazione dell'indice dei simboli). In caso affermativo, scrivere le espressioni di $s_3(t)$ e $s_4(t)$.

6. Ora $w(t)$ non è AWGN, ma nello spazio euclideo della costellazione (usando una base ortonormale di dimensione 1) ha densità di probabilità

   $$p_w(a) = \frac{1}{10} e^{-\frac{|a|}{5}};$$

   inoltre, il segnale $s_1(t)$ viene trasmesso con probabilità 0.49.

   [Variante:

   $$p_w(a) = \frac{1}{8} e^{-\frac{|a|}{4}};$$

   inoltre, il segnale $s_2(t)$ viene trasmesso con probabilità 0.49.]

   Calcolare la soglia tra le regioni di decisione ottime in questo scenario.

Esercizio 149 [Soluzione]

Si consideri la variabile aleatoria x con densità di probabilità

$$p_x(a) = \begin{cases} \frac{1}{3} & a \in [-1,1] \\ \frac{1}{3}[a+2] & a \in [-2,-1] \\ \frac{1}{3}[2-a] & a \in [1,2]. \end{cases}$$

1. x viene quantizzata con un quantizzatore uniforme con probabilità di saturazione $\frac{2}{3} \cdot 10^{-2}$. Calcolare il valore di $v_{\rm sat}$.

   [Variante: x viene quantizzata con un quantizzatore uniforme con $v_{\rm sat} = 1.8$. Calcolare la probabilità di saturazione.]

2. Calcolare il numero minimo di bit per campione $\mathtt{b}$ del quantizzatore uniforme al punto 1) per avere un rapporto segnale-rumore di quantizzazione $(\Lambda_q)_{\rm dB} \geq 14$ dB.

3. Disegnare la funzione caratteristica del quantizzatore uniforme trovato ai punti 1) e 2), specificando il valore degli estremi degli intervalli di quantizzazione e la mappatura binaria in modulo e segno dei valori quantizzati.

4. Sia ora x uniforme in $[-1, 1]$ e il quantizzatore uniforme con $v_{\rm sat} = 1$ e 4 livelli. Ogni valore quantizzato viene trasmesso con un simbolo di una modulazione 4-QAM. Dire se i valori quantizzati sono equiprobabili e calcolare la $P_{\rm bit}$ per una trasmissione su canale AWGN con $E_s = 0.1$ e $\sigma_I^2 = 4 \cdot 10^{-3}$, motivando la formula utilizzata.

   [Variante: Sia ora x uniforme in $[-2, 2]$ e il quantizzatore uniforme con $v_{\rm sat} = 2$ e 4 livelli. Ogni valore quantizzato viene trasmesso con un simbolo di una modulazione 4-QAM. Dire se i valori quantizzati sono equiprobabili e calcolare la $P_{\rm bit}$ per una trasmissione su canale AWGN con $E_s = 0.2$ e $\sigma_I^2 = 5 \cdot 10^{-3}$, motivando la formula utilizzata.]

5. Per il quantizzatore al punto 4), usando sempre una rappresentazione modulo e segno per i valori quantizzati e una mappatura di Gray per la QAM, calcolare la probabilità di commettere un errore di demodulazione che porta a ricostruire un valore quantizzato al ricevitore che differisce per 2Δ (con Δ passo di quantizzazione) da quello trasmesso.

   [Variante: Per il quantizzatore al punto 4), usando sempre una rappresentazione modulo e segno per i valori quantizzati e una mappatura di Gray per la QAM, calcolare la probabilità di commettere un errore di demodulazione che porta a ricostruire un valore quantizzato al ricevitore che differisce per 3Δ (con Δ passo di quantizzazione) da quello trasmesso.]

Parte II

Soluzioni

Capitolo 7

Sistemi di Telecomunicazioni

Soluzione es. 1 [Testo]
1.c 2.a 3.a 4.a 5.b 6.e

Soluzione es. 2 [Testo]
1. Mesh – 2. Mesh – 3. Star – 4. Ring – 5. Bus

Soluzione es. 3 [Testo]
1. fisico 2. applicazione 3. collegamento 4. fisico 5. collegamento 6. trasporto 7. applicazione 8. trasporto 9. applicazione 10. fisico 11. rete 12. collegamento 13. rete

Soluzione es. 4 [Testo]
1. trasporto 2. rete 3. applicazione/sessione 4. fisico/collegamento

Capitolo 8

Segnali e probabilità

Soluzione es. 5 [Testo]

1. $P(y > 0|x = 1) = Q\left(-\frac{1}{1.4}\right) = 0.76$
2. $P(y > 0) = P(y > 0|x = 0)(1 - p) + P(y > 0|x = 1)p = 0.5(1 - 0.2) + Q(-\frac{1}{1.4})0.2 = 0.55$
3. $P(y < 0) = 1 - P(y > 0) = 0.45$

Soluzione es. 6 [Testo]

1. $P(y = x) = P(\mathrm{sgn}(x + w) = 1|x = 1)p = P(x + w > 0|x = 1)p = Q(-1)0.2 = 0.84 \cdot 0.2 = 0.17$
2. $Q(-1) = 0.84$
3. $\mathbb{P}(y = 2x - 1) = P(y = -1|x = 0)(1 - p) + P(y = 1|x = 1)p = P(w < 0|x = 0)0.8 + P(1 + w < 0|x = 1)0.2 = 0.5 * 0.8 + Q(-1)0.2 = 0.57.$

Soluzione es. 7 [Testo]

1. $p_x(2) = 0.1 + 0.3 + 0.2 = 0.6$, $p_x(3) = 0.4$.

$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p(x)} = \begin{cases} 1/6 & x = 2, y = -1 \\ 1/2 & x = 2, y = 0 \\ 1/3 & x = 2, y = 1 \\ 1/4 & x = 3, y = -1 \\ 1/4 & x = 3, y = 0 \\ 1/2 & x = 3, y = 1 \end{cases}$$

2. $p_y(-1) = 0.2$, $p_y(0) = 0.4$, $p_y(1) = 0.4$.
3. $\mathbb{E}(x) = 2\cdot0.6+3\cdot0.4 = 2.4$, $\mathbb{E}(x^2) = 4\cdot0.6+9\cdot0.4 = 6$, $\mathbb{E}(-\log_2 x) = -\log_2(0.6)0.6-\log_2(0.4)0.4 = 0.97$.

Soluzione es. 8 [Testo]
Sono tutte variabili aleatorie gaussiane, in quanto combinazioni lineari di gaussiane, con media e varianza come di seguito

1. $\mu_x + \mu_y$, $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$

2. $\mu_x - \mu_y$, $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$
3. $2\mu_x - 3\mu_y$, $4\sigma_x^2 + 9\sigma_y^2$
4. $3\mu_x + 4$, $9\sigma_x^2$

Soluzione es. 9 [Testo]

1. $P(z > A|x = 2) = P(2 + y > A) = e^{-\lambda \max\{A-2,0\}}$. Per $A = 1$ si ha 1, per $A = 3$ si ha $e^{-2} = 0.14$.
2. $P(z > A|x = 2)p_x(2) + P(z < A|x = 1)p_x(1) = 0.6e^{-\lambda \max\{A-2,0\}} + 0.4(1 - e^{-\lambda \max\{A-1,0\}})$. Per $A = -2$ si ha 0.6.

Soluzione es. 10 [Testo]
y è combinazione di variabili aleatorie gaussiane indipendenti, quindi è gaussiana con media $\mathbb{E}(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{E}(x_k)\alpha_k = 0$ e varianza

$$\mathbb{E}(y^2) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k^2 \mathbb{E}(x_k^2) = 0.1 \sum_{k=0}^{N-1} 0.0625^k = 0.1 \frac{1 - 0.0625^N}{1 - 0.0625}$$

Per $N = 1$ e 10 si hanno varianze 0.1 e 0.106.

Soluzione es. 11 [Testo]

1. $P(z = 0) = P(|y| < A) = P(|x + w| < A) = 0.5P(|w| < A|x = 0) + 0.5P(|1 + w| < A|x = 1) = 0.5 - Q(A) + 0.5[1 - Q(A + 1) - Q(A - 1)]$. Per $A = 2$ si ha 0.897.
2. $1 - P(z \neq x|x \neq 0) = 1 - P(z \neq 1|x = 1) = 1 - P(y < A|x = 1) = 1 - P(1 + w < A) = Q(A - 1) = Q(1) = 0.16$.

Soluzione es. 12 [Testo]

1. $s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-(\frac{T}{2}+nT)}{T}\right)$
2. $s_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-(\frac{T}{2}+\frac{3T}{2}n)}{T}\right)$

Soluzione es. 13 [Testo]

1. $s_1(t) = \frac{A}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t-3/10T}{3/5T}\right) + \frac{A}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t-2/10T}{2/5T}\right)$ e $s_2(t) = s_1(-t + T)$.
2. $s_1(t) = \frac{AT-At/2}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$, $s_2(t) = -\frac{BT-Bt/2}{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

Soluzione es. 14 [Testo]

1. Es. 12, punti 1 e 2 $E_s = \infty$
2. Es. 13, punto 1 $E_{s_1} = A^2\frac{2}{5}T + \frac{A^2T}{20}$, $E_{s_2} = E_{s_1}$.

3. Es 13, punto 2: $E_{s_1} = \int_0^T \left(\frac{AT-At/2}{T}\right)^2 dt = \frac{7A^2T}{12}$. $E_{s_2} = \frac{7B^2T}{12}$

Soluzione es. 15 [Testo]

1. $E_x = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{A^2}{8}\left[\frac{2\sin(4\pi f_0 T/2)}{\pi f_0} + 4T\right]$.
2. $E_x = 2T$
3. $E_x = \int_{-2T-1}^{-1} \left(\frac{t+2T+1}{2T}\right)^2 dt + \int_{-1}^{2T-1} \left(\frac{2T-(t+1)}{2T}\right)^2 dt = 2\frac{(2T)^3}{12T^2} = \frac{4T}{3}$
4. $E_x = 4 + 4/9$.

Soluzione es. 16 [Testo]
I due segnali hanno energia $E_{x_1} = 4$ e $E_{x_2} = 4/3$, quindi l'energia media è $E_x = 4p + \frac{4(1-p)}{3}$.

Soluzione es. 17 [Testo]
L'energia del triangolo è $E = \frac{2A^2}{3}$, quindi l'energia media è

$$E_x = \frac{1}{2}\left[2 \cdot 3 + \frac{2}{3}\right].$$

Soluzione es. 18 [Testo]

$$z(t) = \int x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-a\tau}e^{-b(t-\tau-2)}\mathbb{1}(t-\tau-2)d\tau =$$
$$= \begin{cases} 0 & t < 2 \\ \int_0^{t-2} e^{-a\tau-b(t-\tau-2)}d\tau = \frac{e^{-b(t-2)}}{a-b}\left[1-e^{-(a-b)(t-2)}\right] & t \geq 2\,. \end{cases}$$

Soluzione es. 19 [Testo]

$$z(t) = \int y(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-2}^{2} \text{triangle}(t-\tau-2)d\tau =$$
$$= \int_{-2}^{2} \text{triangle}(-(\tau-t+2))d\tau = \int_{-2}^{2} \text{triangle}(\tau-t+2)d\tau =$$
$$= \int_{\max\{t-3,-2\}}^{\min\{t-2,2\}} (\tau-t+3)d\tau + \int_{\max\{t-2,-2\}}^{\min\{t-1,2\}} (-\tau+t-1)d\tau$$
$$= \left[\frac{(\tau-t+3)^2}{2}\right]_{\max\{t-3,-2\}}^{\min\{t-2,2\}} + \left[-\frac{(-\tau+t-1)^2}{2}\right]_{\max\{t-2,-2\}}^{\min\{t-1,2\}}$$

Soluzione es. 20 [Testo]

1. $x(kT) = \text{rect}\left(\frac{k}{3}\right)$ ovvero $x(kT) = 1$ per $k = -1, 0, 1$ e $x(kT) = 0$ altrove.
2. $x(kT) = \frac{3}{4}\,\text{rect}\left(\frac{kT-5/2}{3T}\right)$
3. $x(kT) = \exp(-kT)\mathbb{1}(k)$
4. $x(kT) = 3\,\text{triangle}\left(\frac{k}{6}\right) + 1$

Soluzione es. 21 [Testo]

1. $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT) = \frac{3}{4}\,\mathrm{rect}\left(\frac{nT-5/3}{7T}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{t-nT}{T}\right)$
2. $$y(t) = \mathrm{triangle}\left(\frac{t}{2T}\right) + 2\,\mathrm{triangle}\left(\frac{t-T}{2T}\right) - 5\,\mathrm{triangle}\left(\frac{t-3T}{2T}\right)$$

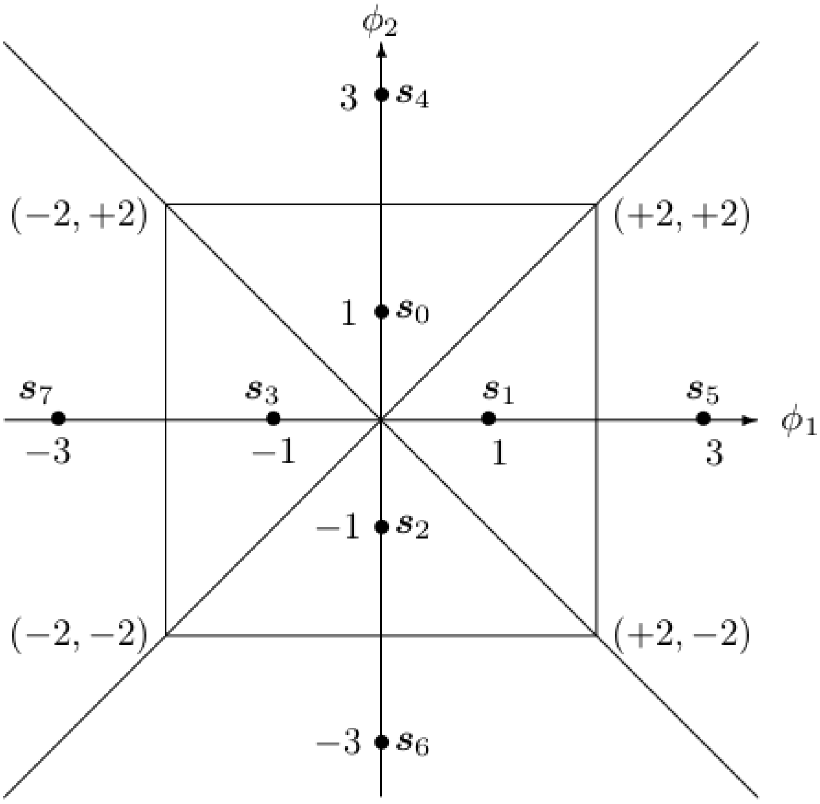
Soluzione es. 22 [Testo]

1. Si ha
$$\mathtt{M}_x = \frac{A^2}{2} = \frac{25}{2}\,, \qquad E_x = +\infty.$$
2. In questo caso
$$E_x = \frac{A^2}{2}T_0 = \frac{10^2}{2}\frac{2}{f_0} = \frac{100}{3}\,, \qquad \mathtt{M}_x = 0.$$
3. Ora si ha
$$E_x = \frac{A^2}{2}\frac{T_0}{4} = \frac{1}{4}\frac{100}{3}\,, \qquad \mathtt{M}_x = 0.$$
4. In questo caso si ha
$$E_x = \frac{A^2}{2}\frac{T_0}{8} = \frac{1}{8}\frac{100}{3}\,, \qquad \mathtt{M}_x = 0.$$

Capitolo 9

Modulazione Digitale

Soluzione es. 23 [Testo]
1.



2 La probabilità d'errore MINORE è $P[\mathrm{E}|s_4]$ in quanto, traslando la regione R_4 in basso di 2 di modo che s_4 e s_0 coincidano, la regione R_0 è contenuta nella regione R_4 (traslata). Questo basta a garantire che la probabilità di decisione corretta è maggiore nel caso di trasmissione del simbolo s_4 rispetto alla trasmissione di s_0.

3. Dato il simbolo trasmesso s_0, in caso di errore l'elemento di decisione opterà con maggiore probabilità per i simboli s_1 oppure s_3. Questo perché, in base al criterio *maximum likelihood*, il ricevitore decide per i simboli della costellazione in ricezione a distanza minima dal simbolo ricevuto. Nel caso venga trasmesso il simbolo s_0 e che si commetta un errore di decisione, è chiaramente più probabile che il segnale ricevuto risulti più vicino a s_1 o s_3 che a qualunque altro simbolo della costellazione.

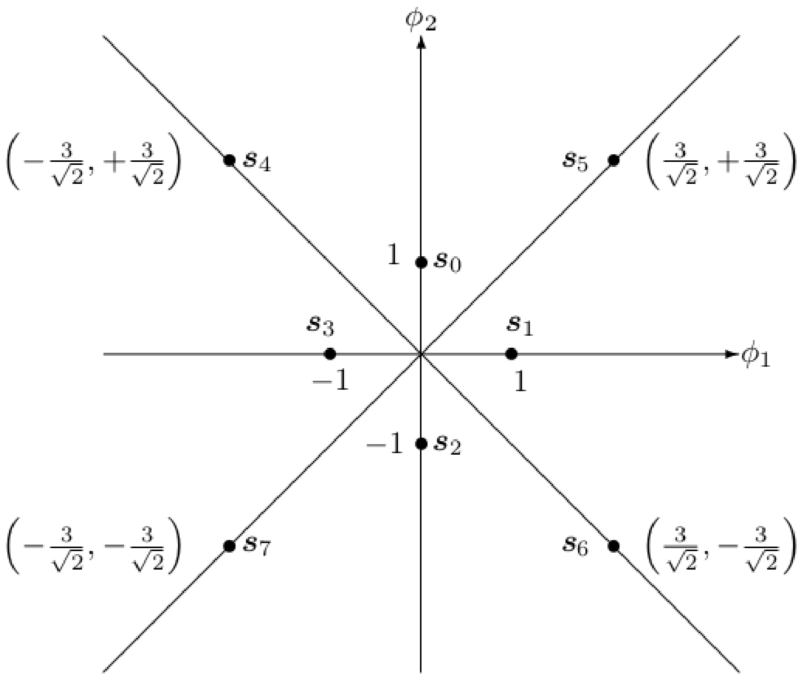
4. Un *lower bound* alla probabilità d'errore è dato da

$$\mathbb{P}[\mathrm{E}] \geq \frac{1}{\mathrm{M}} \sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{M}} \mathrm{Q}\left(\frac{\mathrm{d}_{\mathrm{min,n}}}{2\sigma_{\mathrm{I}}}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(4 \cdot \mathrm{Q}\left(\frac{d_{\mathrm{min},\boldsymbol{s}_0}}{2\sigma_I}\right) + 4 \cdot \mathrm{Q}\left(\frac{d_{\mathrm{min},\boldsymbol{s}_4}}{2\sigma_I}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Q}\,(14) + \frac{1}{2}\mathrm{Q}\,(20)$$

5. In base al bound trovato nella domanda precedente, per migliorare la probabilità d'errore è sufficiente aumentare la distanza minima dei simboli *esterni*. A tal fine, si possono ruotare i simboli di $\pi/4$ rispetto al sistema di riferimento. La costellazione che si ottiene è la seguente.

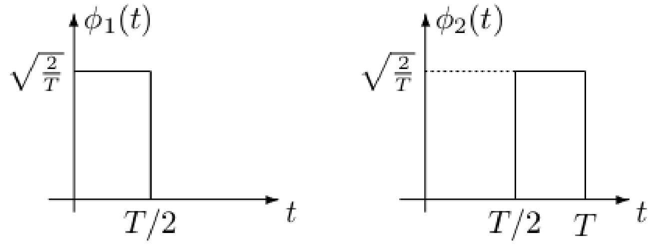


Si può osservare come la potenza della costellazione sia rimasta invariata, mentre la distanza minima dei punti esterni sia passata da 2 a

$$\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 1 - 3\sqrt{2}} = \sqrt{10 - 3\sqrt{2}} = 2.4\,.$$

Soluzione es. 24 [Testo]

1. Innanzitutto è necessario definire una base per lo spazio dei segnali. Si trova immediatamente che una possibile base è costituita dai seguenti segnali:

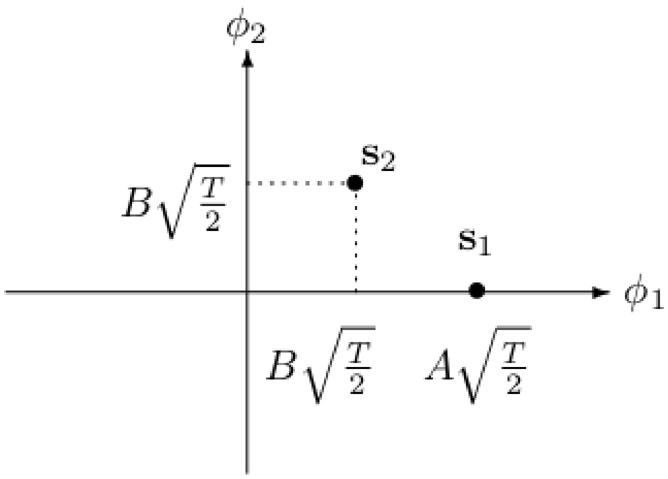


Le coordinate dei segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ risultano quindi

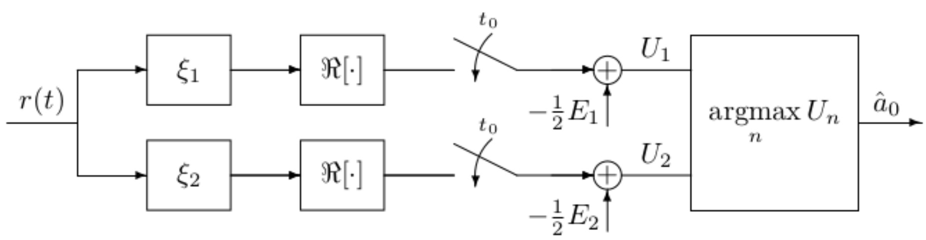
$$E_{s_1} = \frac{A^2 T}{2} \implies \mathbf{s}_1 = \left(\sqrt{E_{s_1}}, 0\right) = \left(A\sqrt{\frac{T}{2}}, 0\right) = (5 \cdot 10^{-4}, 0)$$

$$E_{s_2} = B^2 T \implies \mathbf{s}_2 = \left(\sqrt{\frac{E_{s2}}{2}}, \sqrt{\frac{E_{s2}}{2}}\right) = \left(B\sqrt{\frac{T}{2}}, B\sqrt{\frac{T}{2}}\right)$$
$$= (2.5 \cdot 10^{-4}, 2.5 \cdot 10^{-4})$$

la cui costellazione è:



2. Lo schema a blocchi è quello di Fig. 5.11 con $M = 2$, e con $\xi_n(t) = s_n^*(t_0 - t)$, ovvero:



3. Essendo la segnalazione binaria, si può usare la formula che dà la probabilità d'errore in funzione della distanza dei punti della costellazione:

$$P_e = \mathrm{Q}\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right) .$$

La distanza si calcola immediatamente dalla notazione vettoriale dei segnali, risultando:

$$d = \sqrt{\frac{(A-B)^2T}{2} + \frac{B^2T}{2}} = \sqrt{\frac{(A-A/2)^2T}{2} + \frac{(A/2)^2T}{2}}$$

$$= \frac{A\sqrt{T}}{2} = 0.35\,\mathrm{m}\sqrt{\mathrm{V}^2\mathrm{s}}\,.$$

La varianza del rumore gaussiano è data da $\sigma_I^2 = \frac{N_0}{2}$, e quindi

$$\sigma_I = \sqrt{\frac{N_0}{2}} = \sqrt{10^{-8}} = 10^{-4}\,\mathrm{m}\sqrt{\mathrm{V}^2\mathrm{s}}\,.$$

Infine

$$P_e = \mathrm{Q}\left(\frac{0.35\cdot 10^{-3}}{2\cdot 10^{-4}}\right) = \mathrm{Q}\,(1.75)\ .$$

4. Affinché $s_2(t)$ abbia la stessa energia di $s_1(t)$ deve essere

$$E_{s_2} = \tilde{B}^2T = E_{s_1} = \frac{A^2T}{2}$$

ovvero $\tilde{B} = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$. La scelta tra le due soluzioni avviene considerando che il valore di $\tilde{B}$ che minimizza la probabilità di errore è quello che massimizza la distanza tra i due punti della costellazione, per cui

$$\tilde{B} = -\frac{A}{\sqrt{2}}\,.$$

Soluzione es. 25 [Testo]

1. Si sa che $E_s = T\,A^2\,9/20$ e $\rho = 1/9$. Da questo si ottiene

$$A = \sqrt{20\,E_s/(9\,T)} = 0.47\,\mathrm{V}$$

inoltre la base diventa

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)-s_2(t)}{\sqrt{2\,E_s\,(1-\rho)}}\,, \qquad \phi_2(t) = \frac{s_1(t)+s_2(t)}{\sqrt{2\,E_s\,(1+\rho)}}$$

e la costellazione

$$\boldsymbol{s}_1 = [K_1, K_2]\,, \quad \boldsymbol{s}_2 = [-K_1, K_2]$$

dove $K_1 = \sqrt{E_s\,(1-\rho)/2}$ e $K_2 = \sqrt{E_s\,(1+\rho)/2}$.

2. Schema a blocchi del ricevitore a singolo filtro, Fig. 5.20. Le regioni di decisione sono $R_1 = \{(x,y)\,|\,x \geq 0\}$ e $R_2 = \{(x,y)\,|\,x < 0\}$.

3. Basta il solo ramo 1 con $R_1 = \{x\,|\,x \geq 0\}$ e $R_2 = \{x\,|\,x < 0\}$.

4. Essendo $\mathrm{Q}\,(a) = 10^{-3}$ per $a = 3.09$, dalla (5.77)

$$P_e = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s\,(1-\rho)}{N_0}}\right)\,,$$

si ottiene

$$\sigma_I^2 = \frac{N_0}{2} = \frac{E_s\,(1-\rho)}{2\,a^2} = 4.65\cdot 10^{-8}\,\mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}\,.$$

Soluzione es. 26 [Testo]

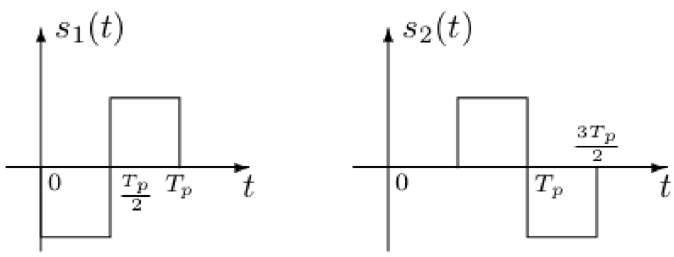
1. Lo schema a blocchi più efficiente è quello a 2 rami perchè lo spazio dei segnali ha dimensione 2. Le regioni di decisione sono i 4 quadranti.

2. Si ha
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[\mathrm{C}|\boldsymbol{s}_1]\\&= \mathbb{P}[\boldsymbol{r} \in R_1|\boldsymbol{s}_1]\\&= \mathbb{P}[\boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{w} \in R_1]\\&= \mathbb{P}[A + w_I > 0\,,\ B + w_Q > 0] = \mathbb{P}[w_I > -A]\,\mathbb{P}[w_Q > -B]\\&= \mathrm{Q}\left(-A/\sigma_I\right)\ \mathrm{Q}\left(-B/\sigma_I\right)\\&= \left(1 - \mathrm{Q}\left(\frac{A}{\sigma_I}\right)\right)\ \left(1 - \mathrm{Q}\left(\frac{B}{\sigma_I}\right)\right)\end{aligned}$$
che è uguale a $\mathbb{P}[\mathrm{C}]$.

3. Si ha
$$\begin{aligned}&P_e = 1 - \mathbb{P}[\mathrm{C}]\\&= 1 - (1 - \mathrm{Q}\,(2.3))\,(1 - \mathrm{Q}\,(5)) = \mathrm{Q}\,(2.3) + \mathrm{Q}\,(5) - \mathrm{Q}\,(2.3)\,\mathrm{Q}\,(5)\\&= 1.0724 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$
da cui
$$P_{bit} = \frac{P_e}{\log_2 4} = 5 \cdot 10^{-3}\ .$$

Soluzione es. 27 [Testo]

1. I segnali sono quelli rappresentati in figura.

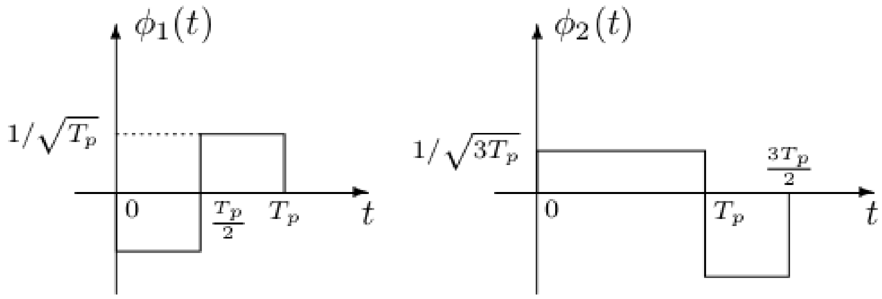


Si ha $E_s = E_1 = E_2 = A^2\,T_p$ e
$$\rho = \frac{< s_1(t), s_2(t) >}{E_s} = \frac{A^2\,T_p/2}{A^2\,T_p} = \frac{1}{2}$$
per cui
$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \begin{cases} -1/\sqrt{T_p}\,, & 0 < t < \frac{1}{2}T_p \\ +1/\sqrt{T_p}\,, & \frac{1}{2}T_p < t < T_p \\ 0\,, & \text{altrove}\end{cases}$$

e $\phi_2'(t) = s_2(t) - \rho\sqrt{E_1}\,\phi_1(t) = s_2(t) - s_1(t)/2$ con $E_{\phi_2'} = 3A^2T_p/4$ che dà

$$\phi_2(t) = \frac{\phi_2'(t)}{\sqrt{E_{\phi_2'}}} = \begin{cases} +1/\sqrt{3T_p}\,, & 0 < t < T_p \\ -2/\sqrt{3T_p}\,, & T_p < t < \frac{3}{2}T_p \\ 0\,, & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

La base è illustrata qui sotto in figura.



La costellazione diventa quindi

$$\boldsymbol{s}_1 = \sqrt{E_s}\,[1\,,\,0]\,, \qquad \boldsymbol{s}_2 = \sqrt{E_s}\left[\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

con la soglia tra le regioni di decisione la retta inclinata di $\pi/6$.

Alternativamente, possiamo scegliere

$$\phi_1'(t) = s_1(t) - s_2(t)\,, \qquad \phi_2'(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

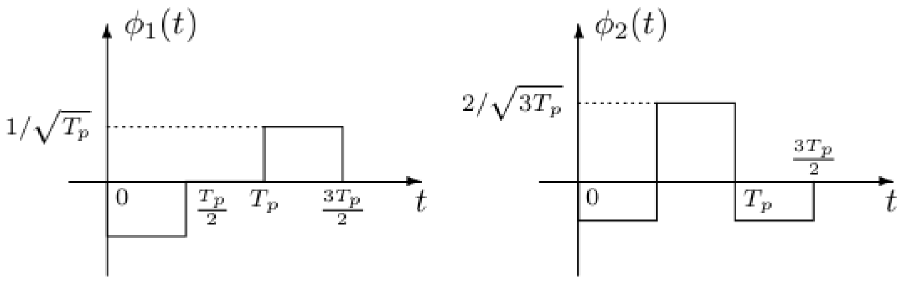
con energie $E_{\phi_1'} = 2E_s(1-\rho) = E_s$ e $E_{\phi_2'} = 2E_s(1+\rho) = 3E_s$ ovvero

$$\phi_1(t) = \begin{cases} -1/\sqrt{T_p}\,, & 0 < t < \frac{1}{2}T_p \\ +1/\sqrt{T_p}\,, & T_p < t < \frac{3}{2}T_p \\ 0\,, & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

e

$$\phi_2(t) = \begin{cases} -1/\sqrt{3T_p}\,, & 0 < t < \frac{1}{2}T_p\,,\ T_p < t < \frac{3}{2}T_p \\ +2/\sqrt{3T_p}\,, & \frac{1}{2}T_p < t < T_p \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

La base alternativa è illustrata qui sotto in figura.



In questo caso la costellazione è

$$\boldsymbol{s}_1 = \sqrt{E_s}\left[+\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], \qquad \boldsymbol{s}_2 = \sqrt{E_s}\left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

con la soglia tra le regioni l'asse delle ordinate.

2. Si scelga $T = \frac{3}{2}T_p = 3\,\mu$s. Dall'espressione della probabilità d'errore (5.77) otteniamo

$$P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}(1-\rho)}\right) = 10^{-4}$$

da cui

$$\frac{E_s}{N_0} = \frac{\left(Q^{-1}(P_{\text{bit}})\right)^2}{1-\rho} = 27.38\ .$$

3. Migliorano perchè si passa ad una modulazione ortogonale con $\rho' = 0 < \rho = \frac{1}{2}$.

Soluzione es. 28 [Testo]

1. Ricevitore tipo I di Fig. 5.10. Le regioni di decisione sono

$$R_{(A,A)} = \left\{(x,y):\ x>0, y>0\right\}$$

$$R_{(A,-A)} = \left\{(x,y):\ (x>0, y<0)\cup(x<0, y<x)\right\}$$

$$R_{(-A,A)} = \left\{(x,y):\ (x<0, y>0)\cup(y<0, y>x)\right\}$$

2. Il bound è

$$P_e \le \frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\sum_{\substack{n=1\\n\neq m}}^{M}\mathrm{Q}\left(\frac{d_{n,m}}{2\sigma_I}\right)$$

con $d_{1,2} = 2A$ e $d_{1,3} = 2\sqrt{2}\,A$, $d_{2,1} = d_{2,3} = 2A$, e $d_{3,2} = 2A$ e $d_{3,1} = 2\sqrt{2}\,A$. Per cui, usando i valori $\mathrm{Q}(5) = 2.87\cdot 10^{-7}$ e $\mathrm{Q}\left(5\sqrt{2}\right) \simeq \mathrm{Q}(7) = 1.28\cdot 10^{-12}$, si ottiene

$$P_e \le \frac{1}{3}\left(4\mathrm{Q}\left(\frac{A}{\sigma_I}\right) + 2\mathrm{Q}\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma_I}\right)\right) \simeq 3.82\cdot 10^{-7}\ .$$

3. Qui diventa una modulazione binaria con

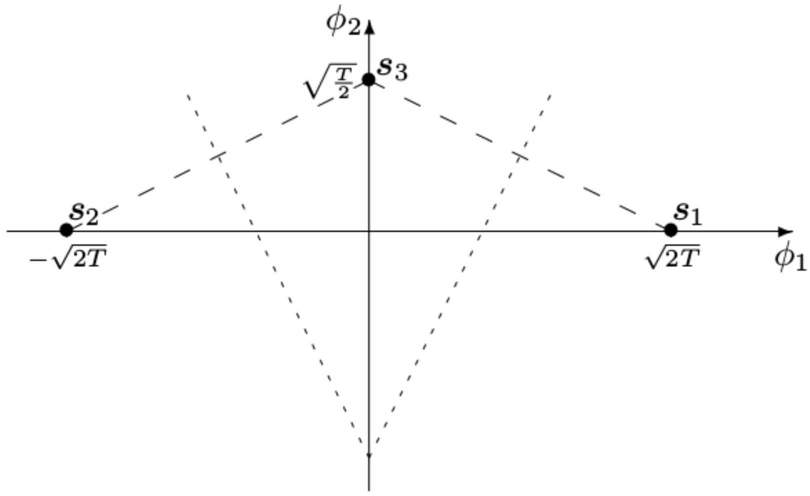
$$P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{4A^2}{2\sigma_I^2}}\right) = \mathrm{Q}\left(5\sqrt{2}\right) = 7.7\cdot 10^{-13}\ .$$

Soluzione es. 29 [Testo]

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\ \cos(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\ \sin(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

1. Costellazione



$$d_{\min} = \sqrt{2T + \frac{T}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}T}$$

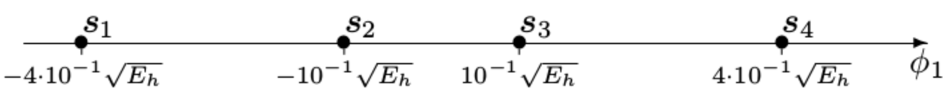
2. $$P_e \leq (M-1)\mathrm{Q}\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_I}\right) = 2\mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{5T/2}}{\sqrt{2N_0}}\right) = 2\mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right) = 2\mathrm{Q}\,(3.53)\ .$$

3. Si veda la Figura 5.10 del testo con $t_0 = T$.

Soluzione es. 30 [Testo]

1. $$\phi_1(t) = \frac{h_{\mathrm{Tx}}(t)}{\sqrt{E_{h_{\mathrm{Tx}}}}} \quad , \quad E_{h_{\mathrm{Tx}}} = T\ .$$

   La costellazione nel punto di decisione è la seguente



2. Si veda la Fig. 5.10 con $t_0 = T$.

3. Dalla simmetria della costellazione

$$P_e = \frac{1}{2}\Big\{P[w > 1.5 \cdot 10^{-1}] + P[w < -1.5 \cdot 10^{-1}] + P[w > 1 \cdot 10^{-1}]\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{2\mathrm{Q}\left(\frac{1.5 \cdot 10^{-1}}{\sigma_I}\right) + \mathrm{Q}\left(\frac{\cdot 10^{-1}}{\sigma_I}\right)\Big\}$$

   dove $\sigma_I^2 = N_0/2$.

4. Poiché
$$< \phi_1(t), d(t) > = \int_0^T d(t)\, dt = 0$$
il disturbo non passa e la P_e rimane inalterata.

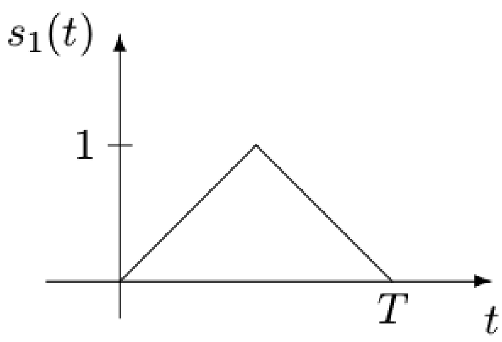
Soluzione es. 31 [Testo]

1. Si ha
$$s_1(t) = s_1\, \phi(t)\,, \qquad s_2(t) = s_2\, \phi(t)\,,$$
dove
$$\phi(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}}\,, \quad s_1 = \sqrt{E_{s_1}}\,, \quad s_2 = \sqrt{E_{s_2}}\,.$$
Inoltre
$$E_{s_1} = \int_0^T \left(A - \frac{At}{2T}\right)^2 dt = A^2T + \frac{A^2}{12T^2}T^3 - 2A\frac{A}{4T}T^2 = \frac{7A^2T}{12}\,,$$
$$E_{s_2} = \int_0^T \left(B - \frac{Bt}{2T}\right)^2 dt = \frac{7B^2T}{12}\,.$$
La costellazione è illustrata nella seguente figura nel caso in cui $0 < A < B$.

2. Lo schema a blocchi è quello di Fig. 5.10 dove ci sono due regioni di decisione con soglia a $(s_1+s_2)/2$.
3. Trattandosi di una segnalazione binaria con distanza tra i punti della costellazione $|s_1 - s_2|$ si ha
$$P_e = \mathrm{Q}\left(\frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{2N_0}}\right)\,.$$
4. Poiché $s_2(t)$ deve avere la stessa energia di $s_1(t)$ si ha $|B| = A$. La minima probabilità di errore si ha per segnali antipodali quindi $B = -A$.

Soluzione es. 32 [Testo]

1. Il segnale $s_1(t)$ è mostrato dalla figura sottostante



2. s_1 e s_2 non possono costituire una base ortonormale non essendo a energia unitaria e neppure ortogonali tra loro.

Soluzione es. 33 [Testo]

1. La potenza statistica del segnale trasmesso è

$$\mathtt{M}_{s_{\mathrm{Tx}}} = \frac{M-1}{3T} E_h \,,$$

con

$$E_h = \int |h_{\mathrm{Tx}}(t)|^2 dt = V_0^2 \frac{T}{2} = 0.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{V}^2\mathrm{s}\,,$$

quindi $\mathtt{M}_{s_{\mathrm{Tx}}} = 2.5$ V^2.

2. Il filtro di ricezione causale ottimo è adattato a quello in trasmissione e risulta (vedi (5.201))

$$h_{\mathrm{Rc}}(t) = \frac{1}{\sqrt{T/2}} \mathrm{rect}\left(\frac{2}{T}(t-t_0)\right) \,,$$

con fase di campionamento $t_0 = T/4$.

3. Si ha

$$\sigma_I^2 = \frac{N_0}{2} = 2 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{V}^2.$$

4. L'energia media del segnale ricevuto è

$$E_s = \frac{\mathtt{M}_{s_{\mathrm{Tx}}} T}{\mathtt{a}_{\mathrm{Ch}}} = \frac{M-1}{3}\frac{E_h}{10^{50/10}} = 2.5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{V}^2\mathrm{s}\,.$$

Dalla (5.211) si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_e &= 4\left(1-\tfrac{1}{4}\right)\mathrm{Q}\left(\sqrt{\tfrac{1}{5}\tfrac{E_s}{N_0}}\right) \\ &= 3\mathrm{Q}\left(\sqrt{1.25}\right) = 0.4. \end{aligned}$$

Soluzione es. 34 [Testo]

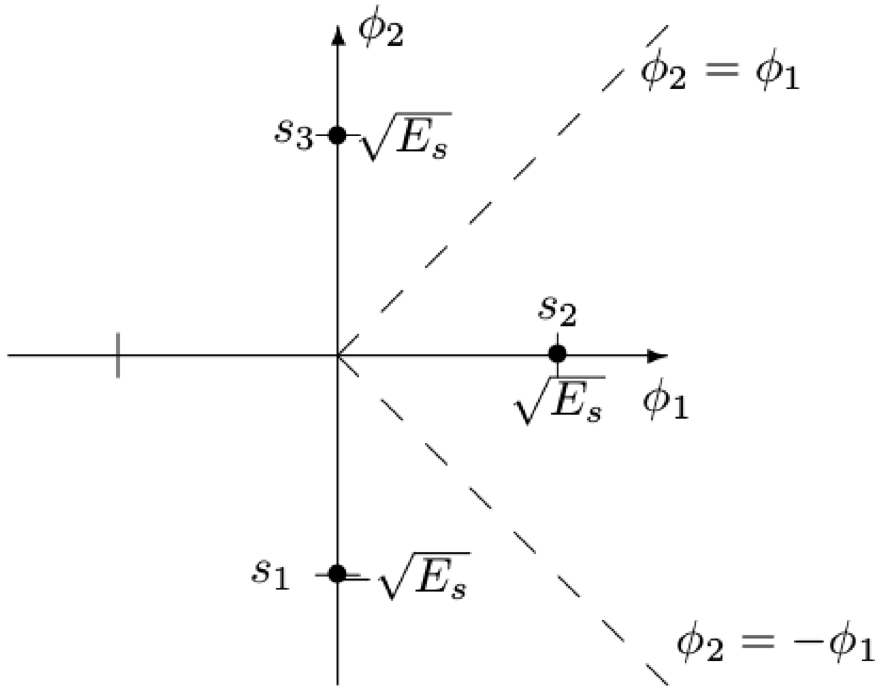
1. Schema di Fig. 5.10con $I = 2$,

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_s}} s_1(T-t)\,, \qquad \phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E_s}} s_2(T-t)$$

e $E_s = E_{s_1} = E_{s_2} = 4A^2 \cdot 0.5 = 50$ V^2s.

2. In forma analitica

$$\hat{a}_k = \begin{cases} 3 & \text{per } x_1 > 0 \text{ e } x_2 > x_1 \\ 3 & \text{per } x_1 < 0 \text{ e } x_2 > 0 \\ 1 & \text{per } x_1 > 0 \text{ e } x_1 < -x_2 \\ 1 & \text{per } x_1 < 0 \text{ e } x_2 < 0 \\ 2 & \text{per } x_1 > 0 \text{ e } -x_2 < x_1 < x_2 \end{cases}$$



3. Usando la (5.108) con $d_{1,2} = d_{2,3} = \sqrt{2}\sqrt{E_s}$ e $d_{1,3} = 2\sqrt{E_s}$ si ha

$$P_e \leq \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1,m\neq n}^{3} \mathrm{Q}\left(\frac{d_{m,n}}{2\sigma_{\mathrm{I}}}\right)$$

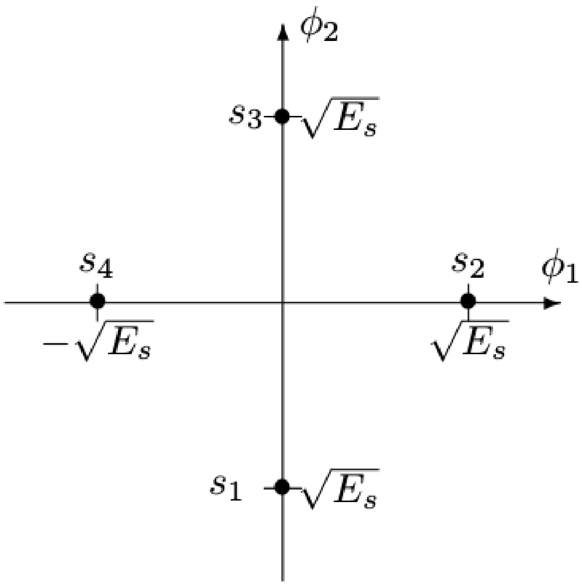
$$= \frac{2}{3}\mathrm{Q}\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right) + \frac{4}{3}\mathrm{Q}\left(5\right)$$

$$= 3.8 \cdot 10^{-7}$$

e

$$P_{\mathrm{bit}} = \frac{P_e}{\log_2 M} = 1.9 \cdot 10^{-7}\,.$$

4. La figura mostrata di seguito



5. Si tratta di una modulazione QPSK e dalla (5.226) abbiamo

$$P_e = 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) - \left[\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right]^2 \approx 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = 5.7 \cdot 10^{-7}\,.$$

Soluzione es. 35 [Testo]

1. Si ha

$$\phi_1'(t) = \sin(2\pi f_0 t) + \cos(2\pi f_0 t) \qquad t \in \left(0, \frac{1}{f_0}\right]\,,$$

da cui

$$\begin{aligned} E_{\phi_1'} &= \int_0^{\frac{1}{f_0}} \left[\sin^2(2\pi f_0 t) + \cos^2(2\pi f_0 t) + 2\sin(2\pi f_0 t)\,\cos(2\pi f_0 t)\right]\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{f_0}} \sin^2(2\pi f_0 t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{f_0}} \cos^2(2\pi f_0 t)\,dt = \frac{1}{2f_0} + \frac{1}{2f_0} = \frac{1}{f_0}\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\phi_1(t) = \frac{\phi_1'(t)}{\sqrt{\frac{1}{f_0}}}$$

da cui

$$s_1 = A\sqrt{\frac{1}{f_0}} \qquad s_2 = B\sqrt{\frac{1}{f_0}}\,.$$

2. È importante osservare che la segnalazione ha dimensione $I = 1$ e la soglia di decisione è posta a $\frac{A+B}{2\sqrt{f_0}}$.

3.
$$P_e = \mathrm{Q}\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right) = 3.5 \cdot 10^{-3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{2\sigma_I} = 2.7\,.$$

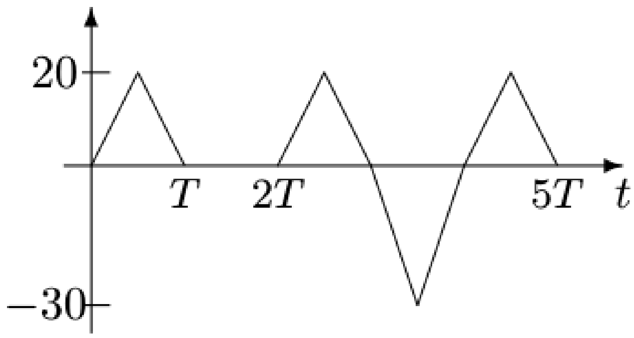
Quindi, essendo $d = \frac{A-B}{\sqrt{f_0}}$,
$$2.7 = \frac{d}{2\sigma_I} = \frac{A-B}{2\sqrt{1/4}} = A - B\,,$$
da cui $A = 4.7$.

4. La segnalazione antipodale minimizza la probabilità d'errore, quindi
$$A = -B = -2\;.$$

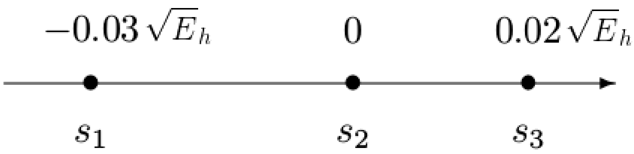
Soluzione es. 36 [Testo]

1. $T = 10s$, $\tau_0 = 5$s.

2. Si ha
$$s_{\rm Tx}(t) = \sum_{k=0}^{4} a_k h(t-kT) = 2h(t) + 2h(t-2T) - 3h(t-3T) + 2h(t-4T)\,.$$

3. 

4. L'energia dell'impulso č
$$E_h = 2\int_0^5 (2t)^2\,dt = 333\,\mathrm{V^2s}$$
e l'energia media della segnalazione č
$$E_{s_{\rm Tx}} = \left(\frac{1}{4}\cdot 9 + \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 4\right) E_h = 3.25 E_h = 1083\,\mathrm{V^2s}\,,$$
e $(E_{s_{\rm Tx}})_{\rm dBV^2s} = 30.3$ dBV^{2}s. Dalla 4.1
$$\Gamma = \frac{2E_s}{N_0}$$
per cui
$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} = \frac{E_{s_{\rm Tx}}}{\Gamma \mathsf{a}_{\rm Ch}}\,,$$
e
$$(\sigma_w^2)_{\rm dBV^2s} = (E_{s_{\rm Tx}})_{\rm dBV^2s} - (\Gamma)_{\rm dB} - (\mathsf{a}_{\rm Ch})_{\rm dB} = 30.3 + 30 - 10 - 40$$
$$= 10.31\,\mathrm{dBmV^2s}\;.$$

5. 

6. La probabilità di errore risulta

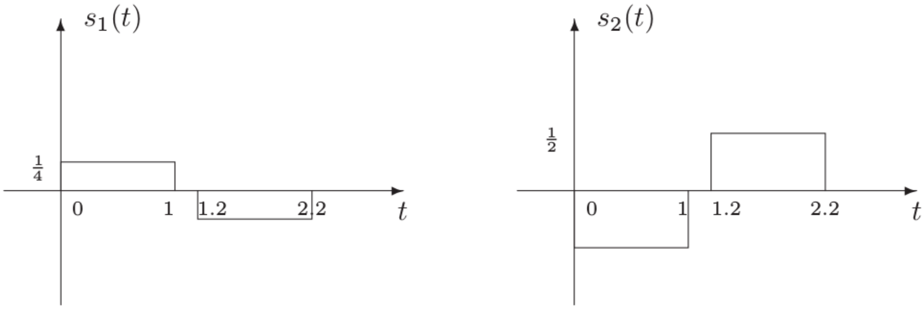
$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_e = & \frac{1}{4}\mathrm{P}[w < -\sqrt{E_h}\cdot 10^{-2}|a_k = 2] \\
& +\frac{1}{2}\left(\mathrm{P}[w > \sqrt{E_h}\cdot 10^{-2}|a_k = 0] + \mathrm{P}[w < -\sqrt{E_h}\cdot 10^{-2}|a_k = 0]\right) \\
& +\frac{1}{4}\mathrm{P}[w > 2\sqrt{E_h}\cdot 10^{-2}|a_k = 3] \\
= & \frac{1}{4}\mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{E_h}\cdot 10^{-2}}{\sigma_w}\right) + \mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{E_h}\cdot 10^{-2}}{\sigma_w}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{Q}\left(\frac{2\sqrt{E_h}\cdot 10^{-2}}{\sigma_w}\right) \\
= & \, 0.0369.
\end{aligned}$$

Soluzione es. 37 [Testo]

1. All'uscita del canale le forma d'onda sono

$$s_1(t) = (s_{\mathrm{Tx},1} * g_{\mathrm{Ch}})(t) = \frac{1}{4}\text{rect}(t-0.5) - \frac{1}{4}\text{rect}(t-1.7)\,,$$

$$s_2(t) = (s_{\mathrm{Tx},2} * g_{\mathrm{Ch}})(t) = -\frac{1}{2}\text{rect}(t-0.5) + \frac{1}{2}\text{rect}(t-1.7) = -2s_1(t)\,.$$



2. Per non avere interferenza intersimbolica poniamo

$$T = 2.2\,\mathrm{s}.$$

3. Lo schema è quello di Fig. 4.29 con

$$\xi_1(t) = s_1^*(t_0 - t) - s_2^*(t_0 - t)$$

dove $t_0 = T$ e

$$E_1 = \frac{1}{16}\cdot 2 = \frac{1}{8}\,, \quad E_2 = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}\,.$$

4. Si ha
$$P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_1 + E_2 - 2\rho\sqrt{E_1 E_2}}{2N_0}}\right),$$
con
$$\rho = \frac{< s_1(t), s_2(t) >}{\sqrt{E_1 E_2}} = -2\frac{E_1}{\sqrt{E_1 E_2}} = -2\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = -1\,.$$
quindi
$$P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\,(6.33) = 7.7 \cdot 10^{-11}\,.$$

Soluzione es. 38 [Testo]

1. Dalla (4.234) si ha
$$E_{s_{\text{Tx}}} = \frac{(M-1)}{3} E_h\,.$$
Essendo nel nostro caso $E_h = g_0^2 T$ la (4.181) porge
$$\mathtt{M}_{s_{\text{Tx}}} = \frac{M-1}{3} g_0^2 = 5\,\mathrm{V}^2\,.$$
2. Vedi Fig. 4.45 con
$$h_{\text{Rc}}(t) = \frac{h^*_{\text{Tx}}(t_0 - t)}{\sqrt{E_h/2}}\,,$$
e $t_0 = T$.
3. Dalla (5.211) la probabilità di errore per un sistema 16-QAM è
$$P_e = 3\mathrm{Q}\left(\sqrt{\Gamma\frac{1}{5}}\right)\,.$$
Imponendo $P_e = 10^{-5}$ otteniamo
$$Q\left(\sqrt{\Gamma\frac{1}{5}}\right) = 3.3 \cdot 10^{-6}$$
da cui
$$\Gamma = 81\frac{5}{4} \approx 100\,.$$
e
$$E_s = N_0\Gamma = 4 \cdot 10^{-16} \quad \mathrm{V}^2/\mathrm{Hz}.$$
4. Dalla relazione $E_s = \frac{E_{s_{\text{Tx}}}}{\mathtt{a}}$ risulta $\mathtt{a} = \frac{E_{s_{\text{Tx}}}}{E_s}$ e
$$\mathtt{a} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-16}} = 1.25 \cdot 10^{10}\,,$$
e $(\mathtt{a})_{\text{dB}} = 100.97$ dB, da cui otteniamo
$$d = (\mathtt{a})_{\text{dB}}/10 = 10 \quad \text{km}\,.$$

Soluzione es. 39 [Testo]

1. Il primo elemento di una base ortonormale per i segnali della trasmissione è dato da

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}}, \quad E_{s_1} = S_0^2 T,$$

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

mentre per il secondo essendo $< s_1(t), s_2(t) >= 0$ risulta

$$\phi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_{s_2}}},$$

quindi, da $E_{s_2} = S_0^2 T$ si ha

$$\phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \mathrm{sign}(t).$$

D'altra parte, $s_3(t)$ ha correlazione con modulo unitario con $s_1(t)$, ovvero $\rho_{1,3} = -1$ e la base ortonormale è quindi costituita dalle funzioni $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$.

2. Lo schema del ricevitore più semplice è quello di tipo 1 di Fig. 4.18 che ha due rami.

3. Data la costellazione di trasmissione e il fatto che i segnali sono trasmessi con la stessa probabilità, le regioni di decisione sono determinate sulla base della distanza minima.

4. Applicando il bound (5.109), con distanza minima d, si ha

$$P_e \leq 2\mathrm{Q}\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right)$$

Inoltre si ha

$$\mathrm{Q}\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right) = \frac{1}{2} P_e = 0.5 \cdot 10^{-7}$$

quindi

$$\frac{d}{2\sigma_I} = 5.3$$

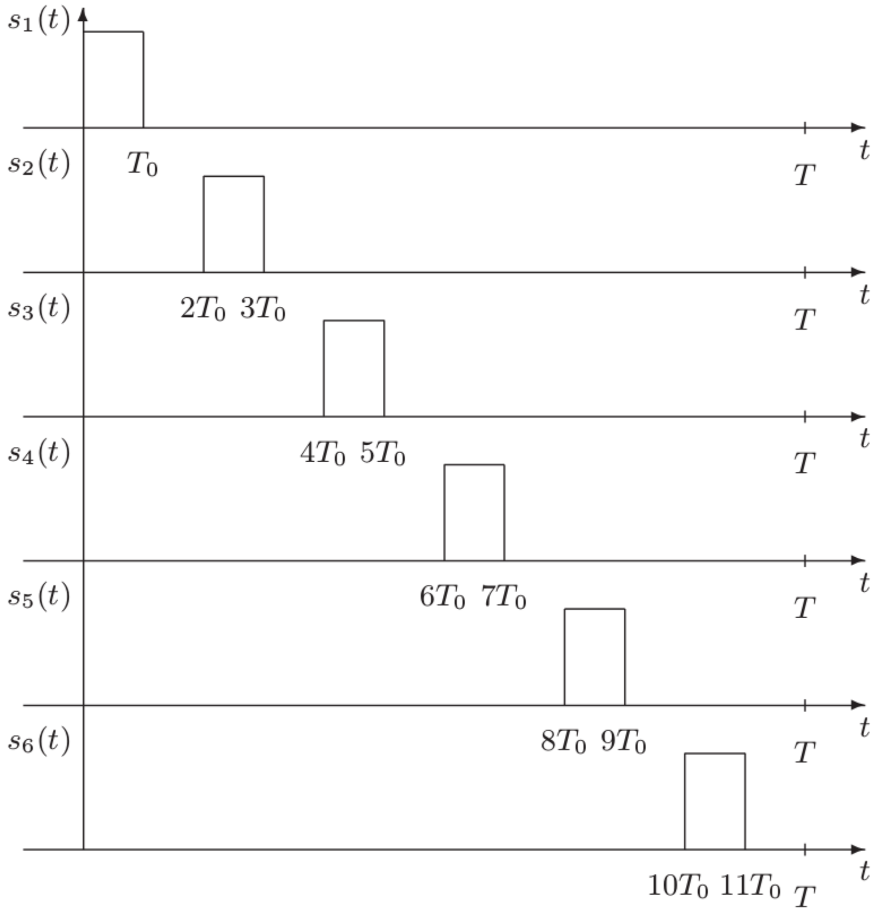
e $d_{\mathrm{min}}^2 = 2E_s$. Per $B_{\mathrm{min}} = \frac{1}{2T}$ e $d^2 = 2E_s$ risulta

$$\Gamma = \frac{E_s}{N_0(1/2)} = \frac{2E_s}{N_0} = \frac{d^2}{2\sigma_I^2} = 56,$$

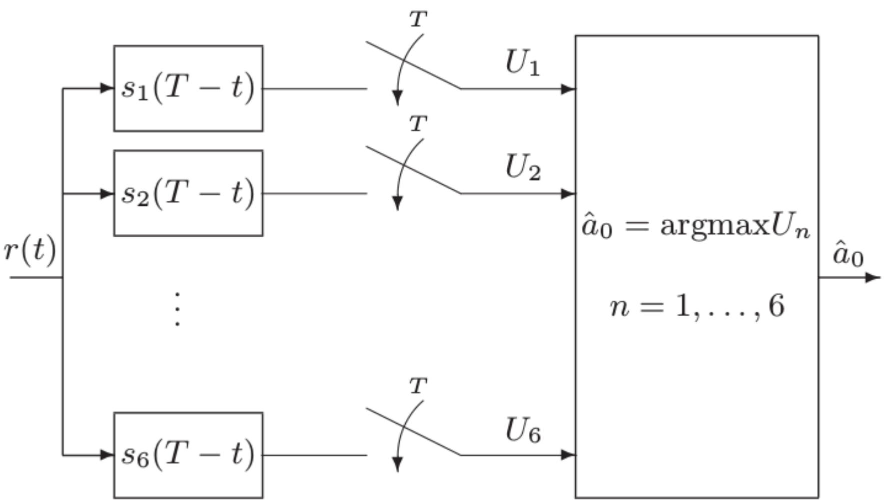
ovvero $(\Gamma)_{\mathrm{dB}} = 17.5$ dB.

Soluzione es. 40 [Testo]

1. Le forme d'onda della segnalazione sono



2. I segnali sono ortogonali

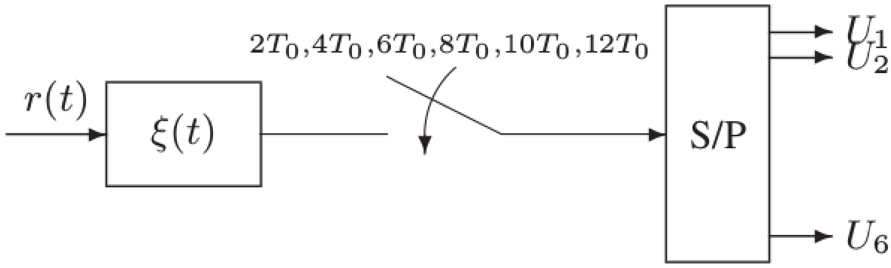


con

$$\psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \text{rect}\left(\frac{T - t - t_n}{T_0}\right)$$

Le energie sono $E_s = E_n = A^2 T_0 = 4/12 = 1/3$ V²/Hz. La rappresentazione vettoriale del segnali è data da $\mathrm{s}_n = [0, 0, \ldots, \sqrt{E_s}, 0 \ldots, 0]$ in cui $\sqrt{E_s}$ si trova nella posizione n-esima del vettore.

3. Considerando che i sei filtri sono tutti uguali, a parte un ritardo, si può utilizzare lo schema



   con

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{T_0}} \operatorname{rect}\left(\frac{t - 1.5T_0}{T_0}\right)$$

4. Trattandosi di modulazione ortogonale, si utilizza il bound (4.168)

$$P_e = (M-1)\,Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{2N_0/2}}\right) = (M-1)\,Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = 5\,Q\left(\sqrt{\frac{50}{3}}\right) = 1.3 \cdot 10^{-4}\,.$$

Soluzione es. 41 [Testo]

1. Dall'Esempio 5.1.A si ha

$$P_{\text{sat}} = 2Q\left(\frac{v_{\text{sat}}}{\sigma_a}\right) = 6.3 \cdot 10^{-5}$$

   che porge $v_{\text{sat}} = 4\sigma_a = 12$ V. Inoltre da

$$(\Lambda_q)_{\text{dB}} = 6.02\,\mathtt{b} + 4.77 + 20\log_{10}\left(\frac{\sigma_a}{v_{\text{sat}}}\right)$$

$$= 6.02\,\mathtt{b} + 4.77 - 12$$

$$= 6.02\,\mathtt{b} - 7.23$$

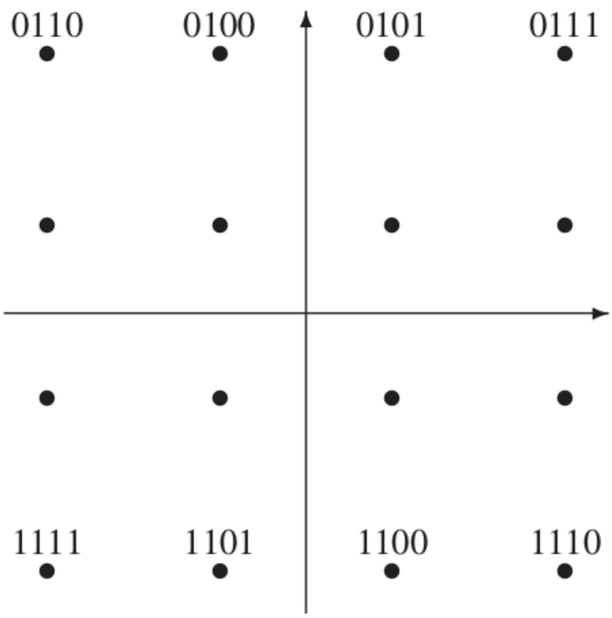
   risulta $\mathtt{b} \geq 8.7$ per cui $\mathtt{b} = 9$ bit.

2. Assunto che il valore massimo di $a_2(t)$ sia inferiore a v_{sat}, Λ_q non cambia.

3. I simboli ad ampiezza maggiore sono

   0/1 111
   0/1 110
   0/1 101
   0/1 100

   dove il primo bit indica il segno (0 positivo, 1 negativo). Una codifica possibile è quindi



Soluzione es. 42 [Testo]

1. I segnali s_1 e s_2 sono ortogonali. Una possibile base è quindi

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{rect}\left(2(t - T/4)T\right) \qquad \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{rect}\left(2(t - 3T/4)T\right)$$

   Secondo questa base la costellazione risulta

$$\mathbf{s}_{1,3} = \left(\pm A\sqrt{\frac{T}{2}}, 0\right) \qquad \mathbf{s}_{2,4} = \left(0, \pm A\sqrt{T}\right) \ .$$

2. Con una modulazione QPSK la distanza minima corrispondente alla potenza statistica specificata è $d_{\min}^{(\mathrm{QPSK})} = A\sqrt{T}$. La distanza minima della segnalazione è invece $d_{\min} = A\sqrt{\frac{3T}{2}}$. Essendo quindi minore la distanza minima nel caso QPSK, la probabilità d'errore risulta maggiore.

3. Tenendo conto che la distanza minima è $d_{\min} = A\sqrt{\frac{3T}{2}}$ e che per ogni segnale si hanno $N_{\min} = 2$ punti della costellazione a distanza minima, utilizzando l'upper bound sulla P_e si ha

$$P_e \leq 3Q\left(\frac{A\sqrt{\frac{3T}{2}}}{2\sigma_I}\right) = 3Q\left(A\sqrt{\frac{3T}{4N_0}}\right) \ .$$

4. Utilizzando una codifica di Gray si ha

$$P_{\text{bit}} = \frac{1}{2}P_e \ .$$

   Imponendo

$$10^{-4} = \frac{1}{4}Q(x)$$

   si ottiene $x = 3.38$ e quindi $A = x\sqrt{\frac{4N_0}{3T}} = 3.38\sqrt{\frac{4\cdot 10^{-7}}{\cdot 10^{-7}}} = 6.76$ V.

Capitolo 10

Codifica di Canale e ARQ

Soluzione es. 43 [Testo]

1.
$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(x) = \mathbb{E}[-\log_2(p_x(n))] &= -\sum_{n=0}^{\infty}(1-2^{-\mu})2^{-\mu n}\left[\log_2(1-2^{-\mu})-\mu n\right] \\
&= -\log_2(1-2^{-\mu}) + \mu 2^{-\mu}(1-2^{-\mu})\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right]_{2^{-\mu}} \\
&= -\log_2(1-2^{-\mu}) + \mu 2^{-\mu}(1-2^{-\mu})\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right]_{2^{-\mu}} = \\
&= -\log_2(1-2^{-\mu}) - \mu 2^{-\mu}(1-2^{-\mu})\frac{1}{(1-2^{-\mu})^2} = \\
&= -\log_2(1-2^{-\mu}) - \frac{\mu 2^{-\mu}}{(1-2^{-\mu})} = 2.5\,\text{bit}
\end{aligned}$$

2.
$$\mathbb{H}(x) = \mathbb{E}[-\log_2(p_x(n))] = \log A - \frac{1}{A}\sum_{n=0}^{Q}\left(1-\frac{n}{Q}\right)\log_2\left(1-\frac{n}{Q}\right) -$$
$$-\frac{1}{A}\sum_{n=-Q}^{-1}\left(1+\frac{n}{Q}\right)\log_2\left(1+\frac{n}{Q}\right)$$

per $Q=3$ si ha $A=2$, $p_x(0)=0.5$, $p_x(-1)=p_x(1)=0.25$
$$\mathbb{H}(x) = 1.5\,\text{b}.$$

Soluzione es. 44 [Testo]
1) $i(\{1,2\}) = -\log_2(0.3) = 1.737$ b, 2) $i(\{1,4\}) = -\log_2(0.5) = 1$ b.

Soluzione es. 45 [Testo]
Essendo a valori equiprobabili $\mathbb{H}(x) = \log_2(M)$ con M numerosità dell'alfabeto, quindi $M = 2^4 = 16$.

Soluzione es. 46 [Testo]
Poiché $\mathbb{H}(x) = 1.2955$ b, dal Teorema 3.4 abbiamo 1) c, 2) b, 3) a.

Soluzione es. 47 [Testo]
Poiché l'entropia è l'informazione media si ha

$$\mathbb{H}(x) = -\sum_{n=1}^{3} p_x(n)\log_2(p_x(n))$$

da cui $p_x(3)i_x(3) = 0.5236$ b.

Soluzione es. 48 [Testo]

1. Si tratta di un canale AWGN che raggiunge la capacità con ingresso gaussiano a media nulla e varianza 1 (imposta dal problema). La capacità è

   $$C = \frac{1}{2\cdot 0.2}\log_2\left(1+\frac{9}{4}\right) = 4.3\,\mathrm{b/s}.$$

2. Ancora un canale AWGN con un termine costante (4) aggiunto dal rumore che ha media 4. L'informazione mutua non cambia e quindi ancora la capacità è raggiunta con ingresso gaussiano a media nulla e varianza 1 (imposta dal problema). La capacità è

   $$C = \frac{1}{2\cdot 0.2}\log_2\left(1+\frac{9}{1}\right) = 8.3\,\mathrm{b/s}.$$

3. Si tratta di un canale binario simmetrico con probabilità di errore

   $$P_{\mathrm{bit}} = Q\left(\frac{\sqrt{E_s}}{\sigma_I}\right) = 1.3\cdot 10^{-3}$$

   e capacità $C = 5[1 + P_{\mathrm{bit}}\log_2 P_{\mathrm{bit}} + (1-P_{\mathrm{bit}})\log_2(1-P_{\mathrm{bit}})] = 4.93$ b/s, che è raggiunta con ingresso uniforme, ovvero $\mathbb{P}(x=1) = 0.5$.

4. Si tratta di un canale con cancellazione simmetrico, con capacità

   $$C = 5(1-0.1) = 4.5\mathrm{b/s}$$

   raggiunta con ingresso uniforme, ovvero $\mathbb{P}(x=1) = 0.5$.

Soluzione es. 49 [Testo]
Si ha

1. $$S_{\mathrm{SW-ARQ}} = \frac{t_{\mathrm{P}}(1-p)}{t_p + t_{\mathrm{A}} + 2\tau_{\mathrm{P}}} = 0.16.$$

2. Si ha

   $$N - 1 = \frac{2\tau_{\mathrm{P}}}{t_{\mathrm{A}} + t_{\mathrm{P}}} = 5$$

   e quindi $N = 6$ e

   $$S_{\mathrm{GBN-ARQ}} = \frac{(1-p)t_{\mathrm{P}}}{[(N-1)p+1](t_{\mathrm{P}} + t_{\mathrm{A}})} = 0.63.$$

3. $$S_{\mathrm{SR-ARQ}} = (1-p)\frac{t_{\mathrm{P}}}{t_{\mathrm{P}} + t_{\mathrm{A}}} = 0.66.$$

Capitolo 11

Codifica di Sorgente

Soluzione es. 50 [Testo]

1. **Segnale gaussiano.**

$$P_{\text{sat}} = 2\mathrm{Q}\left(\frac{v_{\text{sat,G}}}{\sigma_a}\right)$$

$$v_{\text{sat,G}} = \sigma_a\, \mathrm{Q}^{-1}\left(\frac{P_{\text{sat}}}{2}\right) = \sqrt{1}\cdot \mathrm{Q}^{-1}\left(1.9\cdot 10^{-1}/2\right) = 1.3\,\mathrm{V}$$

$$\Delta_G = \frac{2v_{\text{sat}}}{2^{\mathtt{b}}}\ .$$

Segnale sinusoidale. Da $a(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$, poiché il segnale ha potenza statistica unitaria deve essere $A = \sqrt{2}$, quindi

$$v_{\text{sat,S}} = a_{\max} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\Delta_G}{\Delta_S} = \frac{v_{\text{sat},G}}{v_{\text{sat},S}} = \frac{1.3}{\sqrt{2}} = 0.919 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{\Delta_G}{\Delta_S}\right)_{\text{dB}} = 0.37\,\text{dB}\ .$$

2. Da

$$(\Lambda_q)_{\text{dB}} = 6.02\mathtt{b} + 4.77 - 20\log\left(\frac{v_{\text{sat}}}{\sigma_a}\right)$$

$$(\Lambda_{q,G})_{\text{dB}} - (\Lambda_{q,S})_{\text{dB}} = -20\log\left(\frac{v_{\text{sat},G}}{v_{\text{sat},S}}\right) = -0.73\,\text{dB}\ .$$

3. Si ha

$$\begin{aligned}
\mathtt{b}_G - \mathtt{b}_S &= \left\lceil \frac{(\Lambda_{q,G})_{\text{dB}} - 4.77 + 20\log(v_{\text{sat},G})}{6.02}\right\rceil - \left\lceil \frac{(\Lambda_{q,S})_{\text{dB}} - 4.77 + 20\log_{10}(v_{\text{sat},S})}{6.02}\right\rceil \\
&= \left\lceil \frac{42 - 4.77 + 20\log_{10} 1.3}{6.02}\right\rceil - \left\lceil \frac{42 - 4.77 + 20\log_{10}\sqrt{2}}{6.02}\right\rceil \\
&= \lceil 6.56\rceil - \lceil 6.68\rceil = 0\ .
\end{aligned}$$

4. Da

$$(\Lambda_{q,G})_{\text{dB}} = 42\,\text{dB}$$

otteniamo

$$\mathtt{b} = 7\ .$$

Essendo poi

$$B = 4\,\mathrm{kHz}$$

risulta

$$R_b = \mathtt{b}2B = 56\,\mathrm{kbit/s}\;.$$

Soluzione es. 51 [Testo]

1. Il segnale uniformemente distribuito in $[-x_{\max}, x_{\max}]$ ha potenza statistica $\mathtt{M}_x = x_{\max}^2/3$ quindi per il segnale video $v_{\mathrm{sat,V}} = \sqrt{3}$V, mentre per il segnale audio $v_{\mathrm{sat,A}} = \sqrt{0.01} = 0.1$ V.
2. Da
$$\Lambda_q = \frac{12\mathtt{M}_{\mathrm{V}}}{\Delta^2}$$
si ha $\Delta \leq \left(\frac{12\mathtt{M}_{\mathrm{V}}}{\Lambda_q}\right)^{1/2} = 0.0195$ V. I livelli sono almeno $L = \lceil 2v_{\mathrm{sat,V}}/\Delta\rceil = 178$, a cui corrispondono $\mathtt{b}_{\mathrm{V}} = \lceil \log_2(L)\rceil = 8$ bit per campione.

Soluzione es. 52 [Testo]

1. Per s_1, da (3.34) si ha
$$v_{\mathrm{sat},1} = \sigma_a \mathrm{Q}^{-1}\left(\sqrt{\frac{P_{\mathrm{sat}}}{2}}\right) = \sqrt{2}\mathrm{Q}^{-1}\left(\sqrt{1.35\,10^{-3}}\right) = 3.0\sqrt{2}\,\mathrm{V}$$
Per s_2, da (3.36) si ha
$$v_{\mathrm{sat},2} = \sqrt{2}\sigma_a = \sqrt{2}\,.$$
Da (5.34) si ha
$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{v_{\mathrm{sat},1}}{v_{\mathrm{sat},2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3.$$
2. Si ha
$$(\Lambda_{q,1})_{\mathrm{dB}} = 6.02\mathtt{b} + 4.77 + 20\log_{10}\left(\frac{\sigma_{a_1}}{v_{\mathrm{sat},1}}\right)\,,$$
$$(\Lambda_{q,2})_{\mathrm{dB}} = 6.02\mathtt{b} + 4.77 + 20\log_{10}\left(\frac{\sigma_{a_2}}{v_{\mathrm{sat},2}}\right)\,,$$
da cui
$$(\Lambda_{q,1})_{\mathrm{dB}} = (\Lambda_{q,2})_{\mathrm{dB}} + 20\log_{10}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = (\Lambda_{q,2})_{\mathrm{dB}} - 6.5\,\mathrm{dB}.$$
A parità di bit, $\Lambda_{q,2} > \Lambda_{q,1}$.

Soluzione es. 53 [Testo]

1. Imponendo
$$P_{\mathrm{sat}} = 2Q\left(\frac{v_{\mathrm{sat}}}{\sigma_a}\right) = 10^{-6}$$
si ottiene $v_{\mathrm{sat}} = 4.9\sigma_a = 0.98$ V.

2. Da (5.32) con $v_{\text{sat}}/\sigma_a = 4.9$, si ottiene

$$(\Lambda_q)_{\text{dB}} = 6.02\,\mathtt{b} + 4.77 - 13.8$$

da cui

$$\mathtt{b} = \lceil 18.1 \rceil = 19$$

3. $$\Delta = \frac{2\,v_{\text{sat}}}{2^{\mathtt{b}}} = 3.73\,\mu\text{V}$$

e

$$(\Lambda_q)_{\text{dB}} = 6.02 \cdot 19 + 4.77 - 13.8 = 105.3\,\text{dB}$$

4. Tenendo conto che i canali sono due

$$R_b = 2F_s\,\mathtt{b} = 2 \cdot 40 \cdot 10^3 \cdot 19 = 1.52\,\text{Mbit/s}$$

Soluzione es. 54 [Testo]

1. Dalla (5.36) si ha

$$\mathtt{b} = \left\lceil \frac{(\Lambda_q)_{\text{dB}}}{6.02} \right\rceil$$

e per un colore del segnale video si ha

$$\mathtt{b}_v = 9$$

mentre per uno audio

$$\mathtt{b}_a = 16.$$

2. Il bit rate per il segnale video è

$$R_v = F_v 3\mathtt{b}_v = 2 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 9 = 54 \cdot 10^7\,\text{bit/s}\,,$$

mentre per il segnale audio è

$$R_a = F_a 4\mathtt{b}_a = 2 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 16 = 1.92 \cdot 10^6\,\text{bit/s}\,,$$

3. Dalla formula (5.81) del rapporto segnale rumore per una trasmissione PCM si ha

$$P_{\text{bit}} = \frac{2^{2\mathtt{b}} - \Lambda_{\text{PCM}}}{4\Lambda_{\text{PCM}}(2^{2\mathtt{b}} - 1)}\,.$$

Per il segnale video si ha

$$P_{\text{bit},v} = \frac{2^{18} - 10^5}{4 \cdot 10^5 \cdot 2^{18}} = 1.55 \cdot 10^{-6}\,,$$

mentre per il segnale audio si ha

$$P_{\text{bit},a} = \frac{2^{32} - 2 \cdot 10^9}{4 \cdot 2 \cdot 10^9 \cdot 2^{32}} = 6.68 \cdot 10^{-11}\,.$$

La probabilità di errore da garantire sul canale è $6.68 \cdot 10^{-11}$.

Soluzione es. 55 [Testo]

1. Per i due tipi di spezzone gaussiani, dalla (5.35) si ha che $v_{\text{sat}} = 4\sigma$, quindi i due valori di saturazione sono $v_{\text{sat},1} = 4$ V, $v_{\text{sat},2} = 8$ V. Dalla (5.32) il numero di bit per campione è
$$b_{1,2} = \left\lceil \frac{1}{6.02}\left[(\Lambda_q)_{\text{dB}} - 4.77 - 20\log_{10}\left(\frac{1}{4}\right)\right]\right\rceil = 6\,\text{bit/campione}.$$
Per i due tipi di spezzone uniformi, scegliamo $v_{\text{sat},3} = 5$ V e $v_{\text{sat},4} = 12$ V. Dalla (5.36) abbiamo
$$b_{3,4} = \left\lceil \frac{(\Lambda_q)_{\text{dB}}}{6.02}\right\rceil = 5\,\text{bit/campione}.$$
2. Otteniamo
$$R_b = 64kHz\left[\frac{15+5}{60}b_{1,2} + \frac{20+20}{60}b_{3,4}\right] = 341.3\,\text{kb/s}.$$
3. Ogni pacchetto è composto da due bit per identificare il quantizzatore e un numero di bit variabile per il segnale quantizzato. Per gli spezzoni di tipo 1) e 2) i bit di dati sono $6 \cdot 64000 \cdot 10/1000 = 3840$ bit, mentre per gli spezzoni di tipo 3) e 4) sono $5 \cdot 64000 \cdot 10/1000 = 3200$.
4. Scegliamo il valore di saturazione massimo, ovvero $v_{\text{sat}} = 12$ V e il passo di quantizzazione minore o uguale al minimo dei passi utilizzati. I passi di quantizzazione sono $\Delta = 2v_{\text{sat}}/2^b$, ovvero $\Delta_1 = 8/64 = 0.125$, $\Delta_2 = 16/64 = 0.25$, $\Delta_3 = 10/32 = 0.313$ e $\Delta_4 = 24/32 = 0.75$ quindi scelgo $\Delta \le 0.125$ che fornisce
$$b = \left\lceil \log_2\left(\frac{2v_{\text{sat}}}{\Delta}\right)\right\rceil = \lceil \log_2(192)\rceil = 8\,\text{bit/campione}$$
con bit rate $R_b = 64\text{kHz} \cdot 8 = 512$ kbit/s.

Soluzione es. 56 [Testo]

1. Generando il codice di Huffman per la sorgente in esame abbiamo ad esempio
$$T_1 \to 000 \quad T_2 \to 001 \quad T_3 \to 01 \quad T_4 \to 1$$
con lunghezze $L(T_1) = 3$, $L(T_2) = 3$, $L(T_3) = 2$, e $L(T_4) = 1$.
2. Il numero di bit al secondo che vengono mediamente generati da un sensore è
$$R = (3 \cdot 0.08 + 3 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.27 + 1 \cdot 0.4)/10^{-3} = 1.93 \cdot 10^3\ \text{b/s}$$
Poiché deve essere $N \cdot R < 4.2 \cdot 10^3$ si ha
$$N_{\max} = \left\lfloor \frac{4.2}{1.93}\right\rfloor = 2$$
3. Nel caso di temperature dei due sensori modellate come variabili aleatorie dipendenti, l'entropia della coppia è inferiore rispetto all'entropia delle due variabili indipendenti (con la stessa densità del caso precedente).
4. Dal teorema di Shannon per la codifica di sorgente, il limite inferiore cercato è l'entropia della nuova sorgente (X_1, X_2), ovvero
$$\mathbb{H}(X_1, X_2) = -0.1\log_2 0.1 - 0.2\log_2 0.2 - 0.3\log_2 0.3 - 0.4\log_2 0.4 = 1.85\text{b}.$$
5. Osserviamo che X_1 è funzione deterministica di X_2, quindi $H(X_1|X_2) = 0$ e che la densità di probabilità di X_1 è $p(T_1) = 0.3$, $p(T_3) = 0.7$, da qui
$$H(X_1) = -0.3\log_2 0.3 - 0.7\log_2 0.7 = 0.88\text{b}$$
e infine
$$I(X_1; X_2) = H(X_1) - H(X_1|X_2) = 0.88\,\text{b}.$$

Capitolo 12

Temi d'Esame

12.1 Primo compitino del 11/11/2016

Soluzione es. 57 [Testo]

1. La variabile aleatoria con alfabeto $\mathcal{A}$ a massima entropia ha $P(X_n = i) = 1/4$ per $i \in \mathcal{A}$ e $H(X_n) = 2$ bit.
2. Si ha $i_X(1) = \log_2 5$ bit, $i_X(2) = \log_2(10/3)$ bit, $i_X(3) = 1.4$ bit. Inoltre
$$P[X_n = 3] = 2^{-i_X(3)} = 0.38,$$
da cui $P[X_n = 4] = 1 - 0.2 - 0.3 - 0.38 = 0.12$ e quindi
$$i_X(4) = \log_2 1/0.12 = 3.06 \text{ bit}.$$
Infine si ottiene
$$H(X_n) = \sum_{i=1}^{4} P(X_n = i) i_X(i) = 0.46 + 0.52 + 0.53 + 0.37 = 1.88 \text{ bit}.$$
3. Dal teorema di Shannon sulla codifica di sorgente, certamente esiste un codice a prefisso per X_n con lunghezza media $L < H(X_n) + 1 = 1.8$ bit, quindi questa è la lunghezza cercata.
4. Usando la procedura di Huffman otteniamo $1 \to 011$, $2 \to 00$, $3 \to 010$, $4 \to 1$.

12.2 Secondo compitino del 15/1/2017

Soluzione es. 58 [Testo]

1. Le prime due parole sono le prime due colonne della matrice generatrice $\boldsymbol{G}$, mentre
$$X_3 + X_1 = (0011)$$
che è la quarta colonna, ovvero
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
e matrice di parità è $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Si tratta dell'aggiunta di un bit di parità pertanto può rilevare al più un errore e non ha capacità di correzione.

3. $\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e matrice di parità $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. La sindrome è $\sigma = \boldsymbol{H}\,[1\,1\,0\,1\,0]^T = [1\,0]^T$, che non è nulla, quindi ci sono stati errori. Poiché la sindrome è la terza colonna di $\boldsymbol{H}$, un coset leader è 00100 e la parola di codice corretta è $11010 + 00100 = 11110$.

Soluzione es. 59 [Testo]

1. $T = 10$s, $\tau_0 = 5$s.

2. L'energia dell'impulso è
$$E_{\rm h} = 2\int_0^5 (2t)^2 dt = 333\mathrm{V}^2\mathrm{s}$$
e l'energia media della segnalazione è
$$E_{\rm sTx} = \left(\frac{1}{4}9 + \frac{1}{4}4\right) E_{\rm h} = 1083\ \mathrm{V}^2\mathrm{s}$$
Al ricevitore abbiamo $E_{\rm s} = E_{\rm sTx}/10^4 = 0.108\ \mathrm{V}^2\mathrm{s}$ e quindi
$$\sigma_{\rm I}^2 = \frac{E_{\rm s}}{10} = 0.01\ \mathrm{V}^2\mathrm{s}$$

3. I punti della costellazione sono $-3\sqrt{E_{\rm h}}10^{-2}$, 0 e $2\sqrt{E_{\rm h}}10^{-2}$.

4. La probabilità di errore risulta
$$P_e = \frac{1}{4}\mathrm{P}[w < -\sqrt{E_{\rm h}} \cdot 10^{-2}|a_k = 2] +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathrm{P}[w > \sqrt{E_{\rm h}} \cdot 10^{-2}|a_k = 0] + \mathrm{P}[w < -\sqrt{E_{\rm h}} \cdot 10^{-2}|a_k = 0] +\right)$$
$$+\frac{1}{4}\mathrm{P}[w > 2\sqrt{E_{\rm h}} \cdot 10^{-2}|a_k = -3] =$$
$$\frac{1}{4}\mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{E_{\rm h}} \cdot 10^{-2}}{\sigma_I}\right) + \mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{E_{\rm h}} \cdot 10^{-2}}{\sigma_I}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{Q}\left(\frac{2\sqrt{E_{\rm h}} \cdot 10^{-2}}{\sigma_I}\right) = 5 \cdot 10^{-2}.$$

Soluzione es. 60 [Testo]

1. Si ha $s_1 = 2$ V, $s_2 = -2$ V, e le due soglie sono a $S = 2/3$ V e $-S = -2/3$ V.

2. Chiamiamo la regione legata all'erasure R_0 e le due regioni associate ai due punti R_1 e R_2. Sia $b = \pm 1$ il bit trasmesso. Si ha

$$P[r \in R_0|b = -1] = P[r \in R_0|b = 1] = P[s_1 + w < S, s_1 + w > -S] =$$
$$P[w \in [-S - s_1, S - s_1]] = \mathrm{Q}\left(\frac{-S - s_1}{\sigma_\mathrm{I}}\right) - \mathrm{Q}\left(\frac{S - s_1}{\sigma_\mathrm{I}}\right) =$$
$$= \mathrm{Q}\left(\frac{-8}{3\sqrt{0.5}}\right) - \mathrm{Q}\left(\frac{-4}{3\sqrt{0.5}}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{4}{3\sqrt{0.5}}\right) - \mathrm{Q}\left(\frac{8}{3\sqrt{0.5}}\right) = 0.0296.$$

3. Trattandosi di un erasure channel con probabilità di erasure $\alpha = P[r \in R_0|b = -1] = P[r \in R_0|b = 1]$, la capacità è
$$C = \frac{1-\alpha}{T} = 1000(1 - 0.296) = 970.4 \quad \mathrm{bit/s}\,,$$
e i due bit sono equiprobabili.

12.3 Esame del 26/6/2017

Soluzione es. 61 [Testo]

1. La variabile aleatoria y_n è gaussiana a media nulla e con varianza
$$\sigma_y^2 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$$
Per la probabilità di saturazione si ha
$$P_\mathrm{sat} = 2\mathrm{Q}\left(\frac{v_\mathrm{sat}}{\sigma}\right)$$
da cui
$$v_{\mathrm{sat},x} = \sigma_x \mathrm{Q}^{-1}\left(\frac{P_\mathrm{sat}}{2}\right) = 2.58 \qquad v_{\mathrm{sat},y} = \sigma_y \mathrm{Q}^{-1}\left(\frac{P_\mathrm{sat}}{2}\right) = 3.86$$
e per il passo di quantizzazione
$$\Delta_x = \frac{2v_{\mathrm{sat},x}}{N_x} = 0.86 \qquad \Delta_y = \frac{2v_{\mathrm{sat},y}}{N_y} = 1.93$$
e dalla (3.31) si ottiene un rapporto segnale-errore di quantizzazione
$$(\Lambda_{\mathrm{q},x})_\mathrm{dB} = 6.02 \cdot \log_2 6 + 4.77 + 20\log_{10}\left(\frac{1}{2.58}\right) = 12.1\,\mathrm{dB}$$
$$(\Lambda_{\mathrm{q},y})_\mathrm{dB} = 6.02 \cdot 2 + 4.77 + 20\log_{10}\left(\frac{3}{2 \cdot 3.86}\right) = 8.6\,\mathrm{dB}$$
dove per x abbiamo usato $\mathtt{b} = \log_2 6 = 3$ che in questo caso non rappresenta il numero dei bit utilizzati per la rappresentazione dei livelli (si veda sotto) ma solo il logaritmo dei numero di livelli di quantizzazione.

2. Si tratta di un canale AWGN con ingresso gaussiano, con informazione mutua
$$\mathbb{I}(x;y) = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}\right) = 0.42\,\mathrm{b}\,.$$

3. $y^{(\mathrm{q})}$ ha alfabeto $\mathcal{A} = \{-\frac{3}{2}\Delta_y, -\frac{\Delta_y}{2}, \frac{\Delta_y}{2}, \frac{3}{2}\Delta_y\}$, Per la densità di probabilità discreta di $y^{(\mathrm{q})}$ si ha

$$p_{y^{(\mathrm{q})}}\left(-\frac{3\Delta_y}{2}\right) = p_{y^{(\mathrm{q})}}\left(\frac{3\Delta_y}{2}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{\Delta_y}{\sigma_y}\right) = 0.099$$

$$p_{y^{(\mathrm{q})}}\left(\frac{\Delta_y}{2}\right) = p_{y^{(\mathrm{q})}}\left(\frac{-\Delta_y}{2}\right) = \frac{1}{2} - \mathrm{Q}\left(\frac{\Delta_y}{\sigma_y}\right) = 0.401$$

da cui

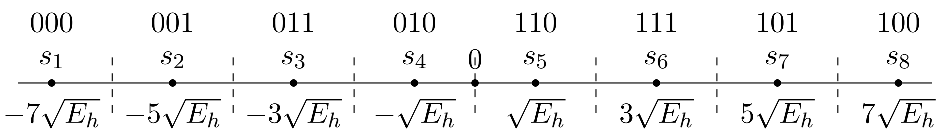
$$\mathbb{H}(y^{(\mathrm{q})}) = -\sum_{a\in\mathcal{A}} p_{y^{(\mathrm{q})}}(a)\log_2 p_{y^{(\mathrm{q})}}(a) = 1.72.$$

Per il teorema di Shannon questa è la lunghezza media minima di un codice di sorgente che codifica ciascun simbolo $y^{(\mathrm{q})}$.

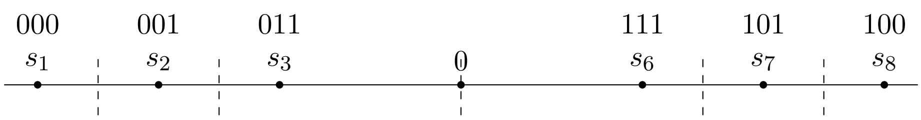
Soluzione es. 62 [Testo]

1. Si veda la Fig. 5.37 del libro dove $s_{\mathrm{Tx}}(t)$ e $r(t)$ sono a tempo continuo.

2. Abbiamo simboli equiprobabili e rumore gaussiano, scegliamo la regola della minima distanza. La costellazione e le regioni di decisione sono come segue (indichiamo anche la mappatura Gray):



3. Eliminiamo i due punti e spostiamo il confine della regione di decisione nel nuovo punto medio



4. I simboli s_1 e s_8 hanno probabilità di decisione corretta

$$P(C|s_1) = P(C|s_8) = 1 - \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_h}{\sigma_{\mathrm{I}}^2}}\right)$$

mentre per i simboli s_2 e s_7 si ha

$$P(C|s_2) = P(C|s_7) = 1 - 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_h}{\sigma_{\mathrm{I}}^2}}\right)$$

infine per i simboli s_3 e s_6 si ha

$$P(C|s_3) = P(C|s_6) = 1 - \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_h}{\sigma_{\mathrm{I}}^2}}\right) - \mathrm{Q}\left(3\sqrt{\frac{E_h}{\sigma_{\mathrm{I}}^2}}\right).$$

La probabilità d'errore è

$$P_e = 1 - \frac{1}{6}\sum_{i=1,2,4,6,7,8} P(C|s_i).$$

Soluzione es. 63 [Testo]

1. Il codice è a blocco (mappa blocchi di lunghezza 2 in blocchi di lunghezza 4), non è lineare perché 01 + 10 = 11 ma
$$0111 + 1011 = 0100 \neq 1110$$
non essendo lineare non è neppure in forma sistematica.

2. Le parole a distanza minima sono 0111 e 1011 che hanno distanza 2, quindi il codice può rilevare un errore.

3. Le parole di ingresso hanno probabilità
$$P(00) = 1/16\,, P(01) = P(10) = 3/16\,, P(11) = 9/16\,,$$
e entropia
$$H(X) = -\sum_X P(X)\log_2 P(X) = 1.62\text{b}$$
da cui l'efficienza del codice è
$$\eta = \frac{H(X)}{\log_2 4} = 0.82\,.$$

4. A partire dalla parola 0000 (corrispondente) all'ingresso $\boldsymbol{b} = [00]$ usando la decodifica a minima distanza controllando esaustivamente tutte le possibilità si ottiene ancora 0000 solo per tutte le sequenze con un solo bit che vale 1, che sono 4, oppure in assenza di errori, quindi la probabilità di errore cercata è
$$P_e = 1 - 4P_{\text{bit}}(1 - P_{\text{bit}})^3 - (1 - P_{\text{bit}})^4 = 0.05.$$
Si noti che non posso arrivare a questo risultato solo a partire dalla conoscenza del numero di errori sempre (a prescindere dalla parola trasmessa) correggibili dal codice.

12.4 Esame del 6/7/2017

Soluzione es. 64 [Testo]

1. Poiché è lineare comprende anche la parola di codice $X_3 + X1 = 0011$ quindi la matrice generatrice è
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Si tratta di un codice con un bit di parità che può rilevare un errore e non ne corregge nessuno.

3. Per il nuovo codice si ha
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. La sindrome è

$$\sigma = \boldsymbol{H} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

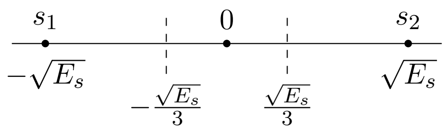
La sindrome non è nulla quindi ci sono errori. Dall'ispezione della matrice di parità si nota che un coset leader è 00100 quindi la parola decodificata è 11010 + 00100 = 11110 $\rightarrow$ 111.

Soluzione es. 65 [Testo]

1. Essendo una BPSK standard si ha

$$P_e = P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{\sigma_{\mathrm{I}}^2}}\right) = \mathrm{Q}(2.82) = 2.4 \cdot 10^{-3} .$$

2. La costellazione e le regioni decisione sono le seguenti:



3. Per simmetria le due probabilità condizionate sono uguali e in particolare si tratta della probabilità che il rumore w sia compreso nell'intervallo $\left[\frac{2\sqrt{E_s}}{3}, \frac{4\sqrt{E_s}}{3}\right]$ ovvero

$$P(\text{erasure}|s = s_1) = \mathrm{Q}\left(\frac{2\sqrt{E_s}}{3\sigma_I}\right) - \mathrm{Q}\left(\frac{4\sqrt{E_s}}{3\sigma_I}\right) = 0.0296.$$

4. Si tratta di un canale binario con cancellazione con probabilità di cancellazione 0.297 che raggiunge la capacità con ingressi a valori equiprobabili e la cui capacità è

$$C = \frac{1 - 0.297}{10^{-3}} = 9.7 \cdot 10^2 \text{ bit/s} .$$

12.5 Esame del 1/9/2017

Soluzione es. 66 [Testo]

1. Le parole di codice sono 010111 100001 101001 110001 110101 100101 111001 111101 101101 011001. Mi servono 4 bit per rappresentare 10 simboli, quindi $k = 4$ e $n = 6$. Il codice non è lineare perché manca la parola identicamente nulla

2. La distanza minima è 1 (i codici delle parole 1 e 2 sono diverse per un solo bit) quindi il codice non rileva sempre nessun errore e non corregge sempre nessun errore.

3. Ad esempio uso il quinto bit come bit di parità quindi ho parole di codice 00000 00011 00101 00110 01001 01010 01100 01111 10001 10010 e poi le altre che non uso per rappresentare le 10 cifre.

4. Il codice del punto precedente rileva un errore e non ne corregge nessuno.

Soluzione es. 67 [Testo]

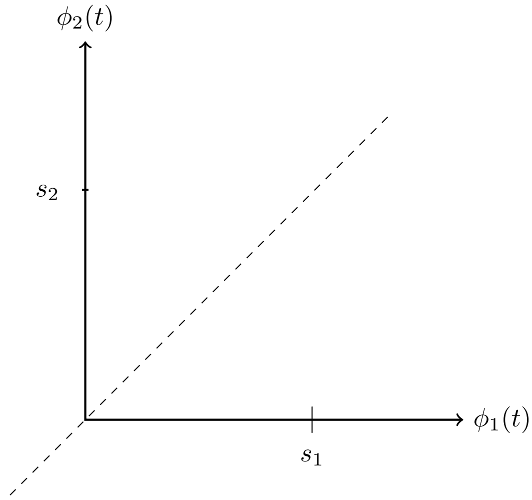
1. Osservo che $s_1(t)$, $s_2(t)$ e $s_3(t)$ hanno supporti senza intersezione quindi sono ortogonali, mentre $s_4(t)$ è l'opposto di $s_1(t)$ quindi normalizzando l'energia di $q(t)$ in

$$q'(t) = \sqrt{\frac{3}{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t - T/6}{T/3}\right)$$

la base è data da

$$\phi_1(t) = q'(t),\ \phi_2(t) = q'(t - T/3),\ \phi_3(t) = q'(t - 2T/3)\,.$$

2. Abbiamo una modulazione binaria ortogonale



3. Trattandosi di una modulazione ortogonale si ha

$$P_e = P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\sigma_{\mathrm{I}}^2}}\right)\,.$$

Soluzione es. 68 [Testo]

1. Si ha che $p_x(C) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0.1667$. Il vettore $[x_{2n}, x_{2n+1}]$ assume valori AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC con probabilità

	A	B	C
A	0.2500	0.1667	0.0833
B	0.1667	0.1111	0.0556
C	0.0833	0.0556	0.0278

Usando Huffman otteniamo AA=11, CA=1000, AC=1001, BA=101, AB= 01, BB= 001, BC=0001, CC=00000, CB=00001

2. La lunghezza media è

$$L_y = 0.25 \cdot 2 + 4 \cdot 0.0833 + 4 \cdot 0.0833 + 3 \cdot 0.1667 +$$

$$+0.1667 \cdot 2 + 3 \cdot 0.1111 + 0.0556 \cdot 4 + 0.0275 \cdot 5 + 0.0556 \cdot 5 = 2.97\mathrm{b}$$

3. L'entropia di $[x_{2n}, x_{2n+1}]$ è
$$H([x_{2n}, x_{2n+1}]) = 2.92 \text{ b}$$
e l'efficienza è
$$\eta = \frac{H([x_{2n}, x_{2n+1}])}{L_y} = 0.98.$$
Poiché l'efficienza è minore di 1, il codice non raggiunge la lunghezza minima data dal teorema di Shannon. Per raggiungerla si possono considerare vettori di lunghezza maggiore $[x_{nP}, \ldots, x_{n(P+1)-1}]$: con $P \to \infty$ ci si può avvicinare a piacimento al limite di Shannon.

4. Il codice richiesto si può ottenere aggiungendo a ciascuna parola del codice relativo a $[x_{2n}, x_{2n+1}]$ un bit che indica la realizzazione della va $z_n \in \{2n, 2n+1\}$ binaria di parametro 0.5 che seleziona l'indice di x per ottenere y_n che avrà lunghezza media uguale a quella del codice di $[x_{2n}, x_{2n+1}]$ più uno. Il codice in generale non è ottimo perché y_n dipende da $[x_{2n}, x_{2n+1}]$ (es. per $x_{2n} = x_{2n+1}$ anche $y_n = x_{2n}$) quindi l'entropia sarà inferiore rispetto alla somma delle entropie di $[x_{2n}, x_{2n+1}]$ e z_n.

12.6 Primo compitino del 24/11/2017

Soluzione es. 69 [Testo]

1. Il segnale $s_1(t)$ può essere scritto come
$$s_1(t) = \begin{cases} 4 - t & t \in [0, 3/2] \\ 10 - 5t & t \in (3/2, 2) \end{cases}$$
da cui
$$\begin{aligned} E_{s_1} &= \int_0^2 s_1^2(t)dt = \int_0^{3/2} (4-t)^2\,dt + \int_{3/2}^2 (10-5t)^2 dt = \\ &= \left[-\frac{1}{3}(4-t)^3\right]_0^{3/2} + \left[-\frac{1}{15}(10-5t)^3\right]_{3/2}^2 = \\ &= 4^3/3 - (4-3/2)^3/3 + (10 - 5\cdot 3/2)^3/15 = 17.16 \end{aligned}$$
Per il segnale $s_2(t)$ si ha
$$E_{s_2} = A^2 \int_0^1 (1-t^2)^2 dt = A^2 \left[t + \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{8A^2}{15}\,.$$
Imponendo $E_{s_1} = E_{s_2}$ si ha
$$A = \sqrt{17.16\frac{15}{8}} = 5.67\,.$$

2. Si ha
$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t) - s_2(t)}{\sqrt{E_{\phi_1'}}}$$
$$E_{\phi_1'} = \int [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = 2E_{s_1} - 2 < s_1(t), s_2(t) > .$$
$$< s_1(t), s_2(t) >= A\left[\int_0^1 (4-t)\,(1-t^2)dt\right]$$

$$= 5.67 \int_0^1 \left(4 - t - 4t^2 + t^3\right) dt = 5.67 \left[4t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4\right]_0^1 = 5.67 \cdot 2.42 = 13.72$$

da cui $E_{\phi'_1} = 2(17.16 - 13.72) = 6.88$. Ponendo

$$\phi'_2(t) = s_1(t) - c\phi_1(t)$$

con

$$c =< s_1(t), \phi_1(t) >= \frac{E_{s_1}}{\sqrt{E_{\phi'_1}}} - \frac{< s_1(t), s_2(t) >}{\sqrt{E_{\phi'_1}}} = 1.31$$

si ha

$$\phi'_2(t) = \left(1 - \frac{c}{\sqrt{E_{\phi'_1}}}\right) s_1(t) + \frac{c}{\sqrt{E_{\phi'_1}}} s_2(t)$$

$$= \begin{cases} \left(1 - \frac{c}{\sqrt{E_{\phi'_1}}}\right)(4-t) + \frac{c}{\sqrt{E_{\phi'_1}}}(A - At^2) & t \in [0,1] \\ \left(1 - \frac{c}{\sqrt{E_{\phi'_1}}}\right)(4-t) & t \in [1, 3/2] \\ \left(1 - \frac{c}{\sqrt{E_{\phi'_1}}}\right)(10-5t) & t \in [3/2, 2]\,. \end{cases}$$

Il secondo elemento della base è

$$\phi_2(t) = \frac{\phi'_2(t)}{\sqrt{E_{\phi'_2}}},$$

dove, calcolando l'energia di $\phi'_2(t)$, ovvero l'integrale del quadrato di $(s_1(t) - c\phi_1(t))$, svolgendo il quadrato abbiamo

$$E_{\phi'_2} = E_{s_1} + c^2 - 2c \cdot c = E_{s_1} - c^2 = 17.16 - 1.31^2 = 15.44.$$

Infine si ha

$$< s_1(t), \phi_2(t) >=< s_2(t), \phi_2(t) >= \sqrt{E_{\phi'_2}}\,.$$

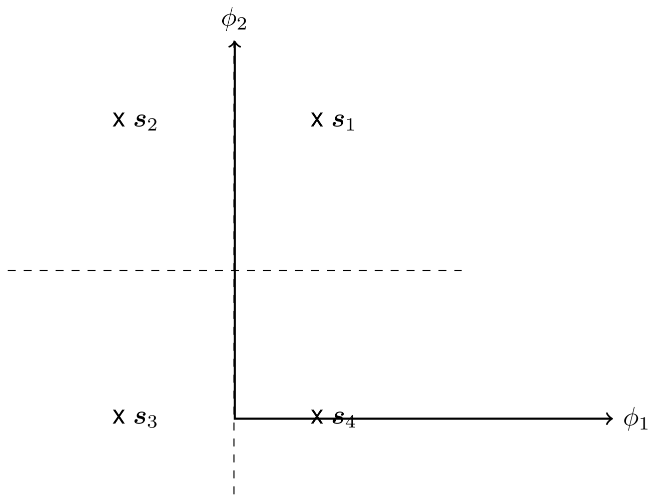
quindi la costellazione è data da

$$\boldsymbol{s}_1 = [c, \sqrt{E_{\phi'_2}}] = [1.31, 3.93] \quad \boldsymbol{s}_2 = [-c, \sqrt{E_{\phi'_2}}] = [-1.31, 3.93]\,.$$

3. I due nuovi punti hanno coordinate

$$\boldsymbol{s}_3 = [c, 0] \quad \boldsymbol{s}_2 = [-c, 0]\,.$$

Le regioni di decisione sono



4. Poiché le componenti del rumore nello spazio euclideo sono indipendenti si ha, ponendo $d = 2c = 2.62$

$$P(E|\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_1) = 1 - P\left(w_2 < \frac{\sqrt{E_{\phi_2'}}}{2}\right) P\left(w_1 < \frac{d}{2}\right) =$$

$$= Q\left(\frac{\sqrt{E_{\phi_2'}}}{2\sigma_I}\right) + Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right) - Q\left(\frac{\sqrt{E_{\phi_2'}}}{2\sigma_I}\right) Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right) = 3.5 \cdot 10^{-2}.$$

Per simmetria delle regioni e dei punti e l'equiprobabilità dei simboli, la probabilità di d'errore sul simbolo è quindi

$$P(E) = 3.5 \cdot 10^{-2}.$$

Soluzione es. 70 [Testo]

1. Si ha

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le parole di codice sono le seguenti, con indicato accanto il relativo peso di Hamming.

Parola	w_H
0000000	0
0010111	4
0101011	4
0111100	4
1001101	4
1011001	4
1100110	4
1110001	4

Quindi il peso minimo di Hamming è 4 e essendo un codice lineare, questo coincide con la distanza minima. Quindi il codice è in grado di rilevare 3 errori e correggerne 1.

2. Poiché nelle colonne della matrice generatrice ci sono parole di codice, se c'è una parola con peso di Hamming 3, possiamo correggere al massimo 2 errori, quindi il codice non è grado di rilevare (sempre) né 3 né 5 errori.

3. $\mathcal{C}_1$ non è lineare perché non c'è la parola nulla; $\mathcal{C}_2$ è lineare perché tutte le combinazioni lineari delle parole di codice sono parole di codice; $\mathcal{C}_3$ non è lineare perché 0101+0100 = 0001 che non è parola di codice.

4. E' un codice in forma sistematica, quindi la matrice di parità è
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Le sindromi fornite sono colonne di $\boldsymbol{H}$ quindi le sequenze di peso minimo di Hamming che forniscono le due sindromi sono tutte nulle tranne che per un '1' in corrispondenza della colonna che coincide con la sindrome cercata, ovvero i coset leader cercati sono
$$(010000), (100000).$$

5. Il codice non è lineare perché non contiene la parola nulla ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$ porta a $c_5 = 1$). Al ricevitore basta invertire il quinto bit per ottenere un codice lineare, infatti risulta il codice con matrice generatrice
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soluzione es. 71 [Testo]

1. La variabile aleatoria a massima entropia con alfabeto $\mathcal{A}$ è uniforme sull'alfabeto con entropia $\log_2 3 = 1.59$ b. L'entropia di x è
$$\mathbb{H}(x) = -0.1 \log_2 0.1 - 0.2 \log_2 0.2 - 0.7 \log_2 0.7 = 1.16\text{b}$$
quindi la differenza cercata è $1.59 - 1.16 = 0.43$ b.

2. Si ha $p_y(0) = 0.2$, $p_y(1) = 0.8$ da cui
$$i_y(0) = -\log_2 0.2 = 2.32\,\text{b} \quad i_y(1) = -\log_2 0.8 = 0.32\,\text{b}.$$
L'entropia congiunta è uguale all'entropia di x poiché y è funzione deterministica di x.

12.7 Secondo compitino del 12/1/2018

Soluzione es. 72 [Testo]

1. Un codice di Huffman è 10, 110, 0, 111 con lunghezza media $L = 2$.
2. Il codice di Shannon-Fano non raggiunge il limite inferiore in quanto la densità discreta di probabilità delle parole non è costituita unicamente da potenze di 2. Il limite inferiore è dato dall'entropia della sorgente ovvero
$$\mathbb{H}(x) = -0.32\log_2 0.32 - 0.15\log_2 0.15 - 0.34\log_2 0.34 - 0.19\log_2 0.19 = 1.92 \text{ b}\,.$$
3. Il codice di Elias ha lunghezza delle parole di codice uguale alla parte alta dell'informazione della parola di codice più 1 quindi si ha
$$\bar{L} = 1 + 0.32\lceil -\log_2 0.32\rceil + 0.15\lceil -\log_2 0.15\rceil$$
$$+0.34\lceil -\log_2 0.34\rceil + 0.19\lceil -\log_2 0.19\rceil = 3.34 \text{ b}$$

Soluzione es. 73 [Testo]

1. Dai dati si ha $\tau_\text{p} = 0$, $t_\text{A}/t_\text{p} = 0.5$. La probabilità di errore sul pacchetto è $p = 0.15(1-q) = 0.06$ da cui si ha il throughput normalizzato
$$S_\text{SW-ARQ} = \frac{(1-p)}{1 + t_\text{A}/t_p + 2\tau_\text{p}/t_\text{p}} = 0.63$$
2. Nel nuovo schema per i pacchetti 1 e 2 (con probabilità $q = 0.6$) il tempo di occupazione esclusiva del canale è t_p, mentre per i pacchetti 0 e 3 (con probabilità $1-q = 0.4$) il tempo medio occupazione esclusiva è quello di un sistema ARQ-SW con probabilità di errore $p = 0.15$, ovvero
$$m_\text{SW} = \frac{t_\text{P} + t_\text{A} + 2\tau_\text{p}}{1-p} = \frac{1.5t_\text{P}}{0.85} = 1.76t_\text{P},.$$
Il tempo medio di uso esclusivo del canale è
$$m_{t_\text{T}} = 0.6t_\text{p} + 0.4\cdot 1.76t_\text{p} = 1.3t_\text{p}$$
e il throughput normalizzato risulta
$$S = \frac{t_\text{P}}{m_{t_\text{T}}} = 0.77\,,$$
ovviamente maggiore rispetto a $S_\text{SW-ARQ}$ (in quanto il nuovo protocollo manda l'ACK solo quando necessario).
3. L'uscita del canale ha alfabeto 0, 1, 2, 3, E, con E simbolo di erasure e PDF
$$p_y(1) = p_y(2) = \frac{q}{2}\,, p_y(0) = p_y(3) = 0.85\cdot\frac{1-q}{2}\,, p_y(E) = 0.15\cdot(1-q)$$
quindi
$$\mathbb{H}(y) = -q\log_2\left(\frac{q}{2}\right) - 0.85(1-q)\log_2[0.425(1-q)] - 0.15(1-q)\log_2[0.15(1-q)]$$
mentre per l'entropia condizionata dell'uscita rispetto all'ingresso si ha
$$\mathbb{H}(y|x=1) = \mathbb{H}(y|x=2) = 0 \text{ b}$$

$$\mathbb{H}(y|x=0) = \mathbb{H}(y|x=3) = -0.15\log_2 0.15 - 0.85\log_2 0.85 = 0.61 \text{ b}$$

$$\mathbb{H}(y|x) = 0.61 \cdot (1-q)$$

quindi l'informazione mutua cercata è

$$I(x;y) = \mathbb{H}(y) - \mathbb{H}(y|x) = -q\log_2\left(\frac{q}{2}\right) - 0.85(1-q)\log_2[0.425(1-q)]$$

$$-0.15(1-q)\log_2[0.15(1-q)] - 0.61(1-q)\,.$$

4. Bisogna trovare il massimo dell'informazione mutua rispetto a $q \in [0,1]$. Si può trovare calcolando la derivata dell'informazione mutua rispetto a q è

$$\frac{dI(x;y)}{dq} = -\log_2\left(\frac{q}{2}\right) - \frac{1}{\ln 2} + 0.85\log_2[0.425(1-q)]$$

$$+\frac{0.85}{\ln 2} + 0.15\log_2[0.15(1-q)] + \frac{0.15}{\ln 2} + 0.61$$

e poi eguagliando a zero, risolvendo l'equazione trascendentale risultate. Questo fornisce i punti di massimo e minimo dell'informazione mutua tra cui si sceglie il valore di massimo; in realtà essendo somma di logaritmi è concava quindi ammette un solo massimo, con derivata nulla.

Soluzione es. 74 [Testo]

1. Per $A = B$ x è uniforme e poiché i valori di saturazione coincidono con i valori minimi e massimi di x l'errore di quantizzazione è puramente granulare e il rapporto segnale/rumore di quantizzazione è esattamente

$$(\Lambda_{\rm q})_{\rm dB} = 6.02\,b = 120.4 \text{ dB}\,.$$

2. Le regioni di quantizzazione sono $(-\infty,-1]$, $(-1,-0.5]$, $(-0.5,0]$, $(0,0.5]$, $(0.5,1]$, $(1,\infty)$ con valori quantizzati -1.25, -0.75, -0.25, 0.25, 0.75, 1.25. Non si ha mai errore di saturazione e poiché il segnale non assume mai valori all'infuori dell'intervallo di quantizzazione ($v_{\rm sat} = 1.5$) e, poiché la densità di probabilità è costante in ciascun intervallo di quantizzazione, l'errore di quantizzazione è uniforme in ciascun intervallo. Sia ϵ l'errore di quantizzazione. La PDF di ϵ condizionato rispetto al fatto di finire in ciascun intervallo di quantizzazione è $p_\epsilon = 2$, $\epsilon \in [-0.25, 0.25]$, e la potenza della variabile condizionata è

$$M_{\epsilon|i} = \frac{0.5^2}{12} = 0.0208$$

che coincide con la potenza dell'errore di quantizzazione $M_\epsilon = 0.0208$ ottenuta mediando sempre lo stesso valore.

3. La potenza del segnale di ingresso è

$$M_x = \int_0^{0.5} x^2 dx + 0.5\int_{0.5}^{1.5} x^2 dx = \frac{0.5^3}{3} + \frac{1.5^3 - 0.5^3}{6} = 0.58$$

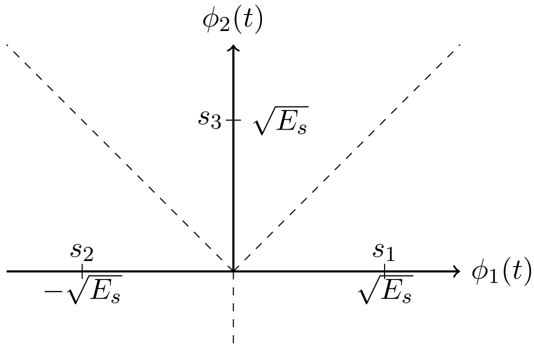
quindi $(\Lambda_{\rm q})_{\rm dB} = 10\log_{10}(M_x/M_\epsilon) = 14.45$ dB.

4. Il valore di saturazione del quantizzatore va ora spostato a 3, mentre il rapporto segnale/rumore di quantizzazione non cambia in quanto lo stesso scalamento si ha sia sul segnale che sul rumore.

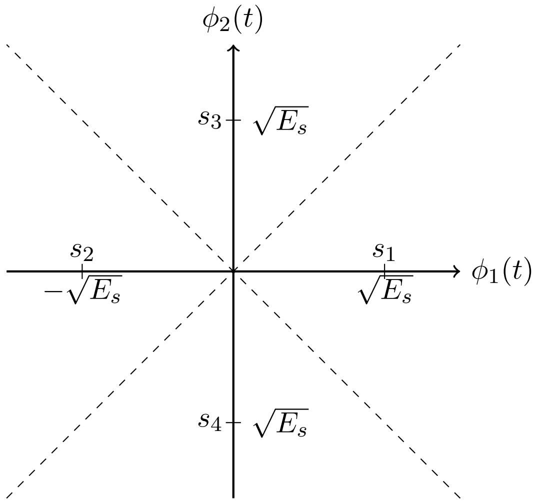
12.8 Esame del 23/1/2018

Soluzione es. 75 [Testo]

1. Osservo che $s_1(t)$ e $s_3(t)$ sono ortogonali perché hanno supporto disgiunto, mentre $s_2(t)$ è combinazione lineare di $s_1(t)$ quindi la base è costituita dai due segnali
$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}, \quad \phi_2(t) = \frac{s_3(t)}{\sqrt{E_3}},$$
con (l'energia del triangolo è la lunghezza della base diviso 3)
$$E_s = E_1 = E_3 = \int s_1(t)^2 dt = \frac{36}{3} = 12.$$
I punti della costellazione sono $s_1 = [\sqrt{E_1}, 0]$, $s_2 = [-\sqrt{E_1}, 0]$, $s_3 = [0, \sqrt{E_3}]$ e le regioni di decisione sono



2. Schema di Fig. 5.10 con $I = 2$.
3. Usando la (5.108) con $d_{1,3} = d_{2,3} = \sqrt{2}\sqrt{E_s} = 4.9$ e $d_{1,2} = 2\sqrt{E_s} = 6.92$ si ha
$$P_e \leq \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{3} \sum_{m=1, m\neq n}^{3} \mathrm{Q}\left(\frac{d_{m,n}}{2\sigma_\mathrm{I}}\right)$$
$$= \frac{2}{3}\mathrm{Q}\left(\frac{6.92}{2}\right) + \frac{4}{3}\mathrm{Q}\left(\frac{4.9}{2}\right) = 9.7 \cdot 10^{-3}.$$

4. 

5. Si tratta di una modulazione QPSK e dalla (5.226) abbiamo

$$P_e = 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) - \left[\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)\right]^2 \approx 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{3.5}\right) = 5.3 \cdot 10^{-4}\,.$$

Soluzione es. 76 [Testo]

1. Il codice non è lineare perché manca la parola nulla. Per renderlo lineare basta cambiare la parola associata a 000 nella parola nulla, perché il codice così ottenuto è composto da tutte le combinazioni lineari delle parole di codice corrispondenti alle combinazioni lineari delle parole associate.

2. Con la permutazione 1-2 otteniamo

$$001 \to 0011, 010 \to 0100, 011 \to 0111, 100 \to 1000, 101 \to 1011,$$

$$110 \to 1100, 111 \to 1111, 000 \to 0000$$

che è in forma sistematica con matrice generatrice

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Il codice del punto 1. è equivalente, quanto a capacità correttive, al codice in forma sistematica del punto 3. Osserviamo che ci sono parole di codice con peso di Hamming 1, quindi il codice non è in grado di rilevare sempre un errore, e nemmeno di correggerlo.

4. Mettendo a uno tutti gli elementi dell'ultima riga della matrice generatrice si ottiene un codice con un bit di parità che è in grado di rilevare un errore.

Soluzione es. 77 [Testo]

1. Imponendo la probabilità di saturazione

$$P_{\mathrm{sat}} = 1 - 2\int_0^{v_{\mathrm{sat}}} \frac{1}{10} e^{-\frac{|a|}{5}}\, da = e^{-\frac{v_{\mathrm{sat}}}{5}} = 10^{-2}$$

si ha $v_{\mathrm{sat}} = -5\log(10^{-2}) = 23$. La media di x è zero e la sua varianza è

$$\sigma_x^2 = 2\int_0^{\infty} \frac{a^2}{10} e^{-\frac{a}{5}}\, da = 2 \cdot 5^2 = 50,$$

quindi dalla (3.31) si ha che il numero di bit richiesti è

$$\mathrm{b} = \left\lceil \frac{(\Lambda_{\mathrm{q}})_{\mathrm{dB}} - 4.77 - 20\log_{10}\left(\frac{\sigma_x}{v_{\mathrm{sat}}}\right)}{6.02} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{15 - 4.77 - 20\log_{10}\left(\frac{\sqrt{50}}{23}\right)}{6.02} \right\rceil = 4\,.$$

2. Il passo di quantizzazione è
$$\Delta = \frac{2v_{\text{sat}}}{4} = 1.2$$
e i quattro intervalli di quantizzazione sono $(-\infty, -1.2]$, $(-1.2, 0]$, $(0, 1.2]$ e $(1.2, \infty)$. Si hanno quattro valori in uscita dal quantizzatore, con probabilità
$$p(00) = p(11) = \int_{-\infty}^{-v_{\text{sat}}+\Delta} \frac{1}{10} e^{-\frac{|a|}{5}} da = \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{a}{5}}\right]_{1.2}^{\infty} = \frac{1}{2} e^{-1.2/5} = 0.39$$
$$p(01) = p(10) = \frac{1 - 0.78}{2} = 0.11.$$
Da cui l'entropia risulta
$$\mathbb{H}(x) = \sum_a -p_x(a) \log_2(p_x(a)) = 1.76\,\text{bit}\,.$$

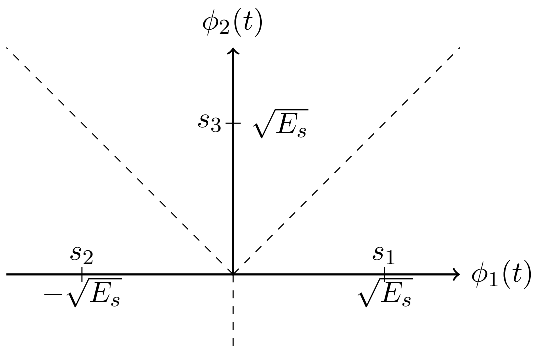
3. Applicando Huffman il codice di sorgente è ad esempio (1, 01, 001, 000) con lunghezza media 1.83, quindi l'efficienza è
$$\eta = \frac{1.76}{1.83} = 0.96.$$

4. Il segnale quantizzato ha entropia massima se i quattro valori sono equiprobabili. Il valore di v_{sat} è lo stesso del punto 1 (è chiesta la stessa probabilità di saturazione), le altre due soglie di saturazione sono simmetriche rispetto all'origine e indicata con v quella positiva si deve avere (perché tutti i valori quantizzati abbiano la stessa probabilità)
$$\int_0^v \frac{1}{10} e^{-\frac{|a|}{5}} da = \int_v^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{|a|}{5}} da$$
ovvero
$$\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{v}{5}} - 1\right] = -\frac{1}{2} e^{-\frac{v}{5}}$$
quindi
$$v = -5 \log \frac{1}{2} = 3.47.$$

12.9 Esame del 13/2/2018

Soluzione es. 78 [Testo]

1. Osservo che $s_1(t)$ e $s_3(t)$ sono ortogonali perché il loro prodotto interno è nullo, mentre $s_2(t)$ è combinazione lineare di $s_1(t)$ quindi la base è costituita dai due segnali
$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}}\,, \quad \phi_2(t) = \frac{s_3(t)}{\sqrt{E_3}}\,,$$
con (l'energia del triangolo è la lunghezza della base diviso 3)
$$E_s = E_1 = E_3 = 12.$$
I punti della costellazione sono $s_1 = [\sqrt{E_1}, 0]$, $s_2 = [-\sqrt{E_1}, 0]$, $s_3 = [0, \sqrt{E_3}]$ e le regioni di decisione sono

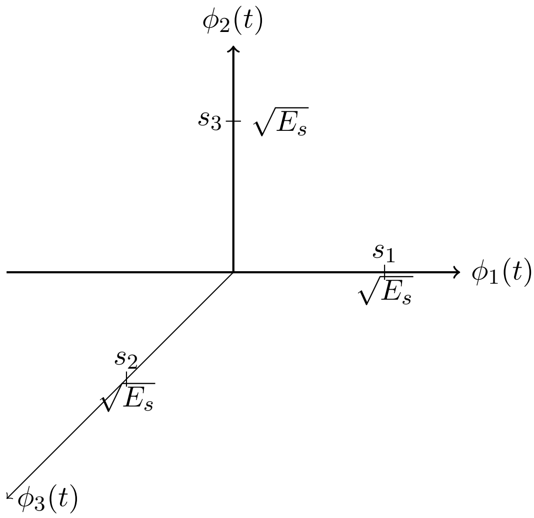


2. Schema di Fig. 5.10 con $I = 2$.
3. Usando la (5.115) con $d_{1,3} = d_{2,3} = \sqrt{2}\sqrt{E_s} = 4.9$ e $d_{1,2} = 2\sqrt{E_s} = 6.92$ si ha

$$P_e \geq \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{3} \mathrm{Q}\left(\frac{d_{\min,n}}{2\sigma_{\mathrm{I}}}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{4.9}{2}\right) = 7.1 \cdot 10^{-3}.$$

4. Il nuovo segnale è ortogonale a tutti gli altri e con la stessa energia e la costellazione diventa quella di una modulazione ternaria ortogonale con

$$\phi_3(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_s}}.$$



5. Essendo una modulazione ortogonale abbiamo

$$\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\sigma_I^2}}\right) \leq P_e \leq (M-1)\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\sigma_I^2}}\right)$$

ovvero

$$7.1 \cdot 10^{-3} \leq P_e \leq 1.4 \cdot 10^{-2}.$$

Soluzione es. 79 [Testo]

1. L'entropia congiunta di due variabili aleatorie è sempre minore o uguale alla somma dell'entropia delle due variabili. D'altra parte, se x_1 e x_2 sono indipendenti allora anche y_1 e y_2 lo sono tra di loro, e quindi si raggiunge il massimo dell'entropia.

2. L'informazione mutua tra ingresso e uscita è
$$\mathbb{I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{y}) - \mathbb{H}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) .$$
Inoltre $\mathbb{H}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{e})$ che non dipende dalla densità di probabilità dell'ingresso, quindi dal risultato del punto precedente la capacità è ottenuta con x_1 e x_2 indipendenti e quindi la capacità è la somma delle capacità di due canali binari simmetrici, ottenuta quando gli ingressi sono a valori equiprobabili e quindi
$$C = \frac{1}{10}[2 + 0.7 \log_2 0.7 + 0.3 \log_2 0.3 + 0.8 \log_2 0.8 + 0.2 \log_2 0.2] =$$
$$= 0.0397 \text{ b/s}.$$

3. E' un codice lineare a blocco, con un bit di informazione e uno di ridondanza. E' in grado di rilevare sempre al più un errore e non è in grado di correggerne nessuno.

4. Poiché gli errori sono costanti, basta correggerli sistematicamente al ricevitore, quindi trasmettere due bit distinti su x_1 e x_2 e al ricevitore calcolare $y_1 + 1, y_2$ che fornirà direttamente i due bit senza errori. Posso trasmettere 2 bit ad ogni simbolo, con probabilità di errore nulla, quindi per un tasso nominale di 0.1 b/s per x_1 e x_2, ottengo che la capacità di questo canale è 0.2 b/s.

5. In questo caso non ci possono essere due errori su entrambi i bit. Un codice che rileva tutti gli errori è ottenuto trasmettendo lo stesso bit su entrambi gli ingressi: se al ricevitore si osservano bit diversi, c'è stato un errore, mentre se sono uguali non ci sono stati errori. Questo codice non è in grado correggere errori. Un altro codice che rileva tutti gli errori usa come parole di codice $[0, 1]$ e $[1, 0]$. Anche in questo caso non si è in grado di correggere errori.

Soluzione es. 80 [Testo]

1. Per non avere saturazione impongo $v_{\text{sat}} = 5$ e i due valori quantizzati -2.5 e 2.5 vengono assunti con probabilità $P[x < 0] = 1/3$ e $P[x \geq 0] = 2/3$, rispettivamente.

2. Per non avere rumore di saturazione e minimizzare l'errore granulare scegliamo i valore di saturazione minimo, e osservando che $y \in [-10, 10]$ scegliamo $v_{\text{sat}} = 10$. Le probabilità assunte dai quattro valori quantizzati -7.5, -2.5, 2.5 e 7.5 sono 0.4/3, 0.8/3, 0.6/3 e 1.2/3, rispettivamente.

3. L'entropia di y è $\mathbb{H}(y) = -\sum p_y \log_2 p_y = 1.89$. Poiché x è funzione deterministica di y, si ha che $\mathbb{H}(y) = \mathbb{H}(x, y)$.

4. Dall'osservazione fatta al punto precedente basta codificare y e usando la procedura di Huffman si ha $-7.5 \to 111$, $-2.5 \to 10$, $2.5 \to 110$, $7.5 \to 0$, con lunghezza media
$$L = 0.4 + 1.6/3 + 0.6 + 1.2/3 = 1.93.$$

12.10 Esame del 10/7/2018

Soluzione es. 81 [Testo]

1. Il canale ha un guadagno di -12 dB ovvero $G = 10^{-1.2} = 0.063$ in lineare. Indicando con $E_{s,c}$ l'energia per simbolo dei pacchetti di controllo da
$$P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{GE_{s,c}}{\sigma^2}}\right) = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.063E_{s,c}}{0.01}}\right) = 0.1642$$
si ha $E_{s,c} = \frac{0.01}{0.063}[\mathrm{Q}^{-1}(0.1642)]^2 = 0.1516$.

2. Indicando con $E_{s,d}$ l'energia media per simbolo dei pacchetti dati, l'energia media complessiva trasmessa è
$$\frac{1}{10}E_{s,c} + \frac{9}{10}E_{s,d} = 0.01516 + 0.9E_{s,d} = 1$$
che imponiamo uguale a 1 come richiesto dall'esercizio. Abbiamo pertanto $E_{s,d} = \frac{1-0.01516}{0.9} = 1.0943$. Dalla formula della BER per una 16-QAM otteniamo
$$P_{\text{bit}} \approx \frac{1}{\log_2 M}4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}\frac{GE_{s,d}}{2\sigma^2}}\right) = 0.15.$$

3. L'energia media aumenta perché l'energia di ciascun punto è crescente con la distanza del punto dall'origine. La BER diminuisce perché allontano i quattro punti di angolo da tutti gli altri punti quindi aumentano le distanze dagli altri punti della costellazione.

4. Poiché i pacchetti di controllo sono modulati con modulazione BPSK che ha i punti della costellazione lungo l'asse reale, e lungo quest'asse la statistica del rumore non cambia, abbiamo la stessa BER di prima, 10^{-3}.

5. La probabilità di errore di un simbolo interno alla costellazione 16-QAM si può scrivere come il complementare della probabilità che l'errore lungo l'asse reale e immaginario sia all'interno del segmento $[-\sqrt{GE_{s,d}/2}, \sqrt{GE_{s,d}/2}]$, ovvero
$$P_E = 1 - \left(1 - 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_{s,d}G}{2\sigma_{\mathrm{R}}^2}}\right)\right)\left(1 - 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_{s,d}G}{2\sigma_{\mathrm{I}}^2}}\right)\right) =$$
$$1 - \left(1 - 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{1.0943 \cdot 0.063}{2 \cdot 10^{-2}}}\right)\right)\left(1 - 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{1.0943 \cdot 0.063}{4 \cdot 10^{-2}}}\right)\right) = 8.5 \cdot 10^{-2}.$$

Soluzione es. 82 [Testo]

1. Le probabilità delle coppie di simboli sono $\mathbb{P}(00) = 0.09$, $\mathbb{P}(10) = \mathbb{P}(01) = 0.21$, $\mathbb{P}(11) = 0.49$. Applicando Huffman abbiamo $00 \to 000,\ 01 \to 001,\ 10 \to 01,\ 11 \to 1$. La lunghezza media del codice è $L = 3 \cdot 0.09 + 2 \cdot 0.21 + 3 \cdot 0.21 + 1 \cdot 0.49 = 1.81$.

2. Dal codice calcolato al punto 1) abbiamo che mediamente in una parola ci sono $N_0 = 3 \cdot 0.09 + 2 \cdot 0.21 + 1 \cdot 0.21 = 0.9$ zeri e $N_1 = 0.21 + 0.21 + 0.49 = 0.91$ uni, quindi chiamando x' il segnale codificato la sua distribuzione è
$$\mathbb{P}(x' = 1) = \frac{N_0}{L} = 0.5028\,, \quad \mathbb{P}(x' = 1) = \frac{N_1}{L} = 0.4972.$$

3. Indicando con y l'uscita del primo canale si ha

$$P[z=1|x=0] = P[z=1|x=0,y=1]P[y=1|x=0]+$$
$$+P[z=1|x=0,y=0]P[y=0|x=0] =$$
$$P[z=1|y=1]P[y=1|x=0]+$$
$$+P[z=1|y=0]P[y=0|x=0] = (1-P_2)P_1 + P_2(1-P_1) = 0.26$$
$$P[z=0|x=0] = 1 - P[z=1|x=0] = 0.74$$

che non dipende dalla statistica di x. Ripetendo i conti per gli altri casi, considerata la simmetria dei canali abbiamo che la cascata dei due canali può essere rappresentata come un canale binario simmetrico con probabilità di errore $P_e = 0.26$.

4. Abbiamo che

$$p_z(1) = p_x(1)(1-P_e) + p_x(0)P_e = 0.7(1-0.26) + 0.3 \cdot 0.26 = 0.596$$
$$p_z(0) = 1 - 0.596 = 0.404\,.$$

Calcolando l'informazione mutua otteniamo

$$I(x;z) = h(p_z(1)) - h(P_e)\,,$$

con $h(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$ entropia di v.a. binaria di parametro p, da cui

$$I(x;z) = 0.147\,.$$

5. Indicando con y l'uscita del canale binario non simmetrico, la probabilità di erre media è

$$P[y=1|x=0]P[x=0] + P[y=0|x=1]P[x=1] =$$
$$= P[y=1|x=0]0.33 + P[y=0|x=1]0.7$$

Imponendo che $P[y=1|x=0] + P[y=0|x=1] = 0.2$ si ha

$$P[y=1|x=0]0.33 + P[y=0|x=1]0.7 =$$
$$= (0.2 - P[y=0|x=1])0.33 + P[y=0|x=1]0.7 = 0.066 + P[y=0|x=1]0.37$$

e il minimo si ha per $P[y=0|x=1] = 0$ e $P[y=1|x=0] = 0.2$, coerentemente con il fatto che il valore 1 viene assunto più frequentemente dall'ingresso, e quindi è meglio ridurne la probabilità d'errore.

Soluzione es. 83 [Testo]

1. Poiché x è uniforme negli intervalli [-2, -1] e [1, 2] cerchiamo un quantizzatore uniforme simmetrico con $v_{\text{sat}} = 2$ e passo di quantizzazione Δ tale che

$$\frac{\Delta^2}{12} \leq 5 \cdot 10^{-2}$$

per soddisfare le richieste di progetto. Si ha quindi $\Delta \leq 0.775$ e da $\Delta = 4/2^b$ si ha che il numero minimo di bit da utilizzare è

$$b = \left\lceil \log_2 \frac{4}{\Delta} \right\rceil = 3.$$

2. Poiché x non assume mai i valori nell'intervallo [-1, 1] e negli intervalli [-2,-1] e [1,2] ho due intervalli di quantizzazione, quindi utilizzo il primo bit per indicare il segno e il secondo bit per indicare i due intervalli di quantizzazione, ottenendo ad esempio la mappatura

$$[-\infty, -2+\Delta] \to 00\,, \quad [-2+\Delta, -2+2\Delta] \to 01,$$

$$[-2+6\Delta, -2+7\Delta] \to 10, \quad [-2+7\Delta, \infty] \to 11.$$

3. Con un bit di parità di rileva al massimo un errore e non se ne corregge neanche uno. Gli eventi di errore non rilevati sono quelli in cui si hanno 2 errori per parola, il che accade con probabilità

$$3P_e^2(1-P_e) = 0.096,$$

dove 3 è il numero di possibili configurazioni con 2 errori.

4. Poiché le sequenze trasmesse sono solo 111, 110, 010 e 011, un errore può non essere rilevato (es. 010 -¿ 011, che è una sequenza che può essere stata trasmessa). Due e tre errori sono invece sempre rilevabili in quando cambiando due o tre bit si ottiene sempre una sequenza non trasmessa.

12.11 Esame del 5/9/2018

Soluzione es. 84 [Testo]

1. Abbiamo una trasmissione QPSK su canale AWGN con SNR di 10 dB, con probabilità di errore su simbolo

$$P_e = 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{10}\right) - \mathrm{Q}^2\left(\sqrt{10}\right) = 1.6 \cdot 10^{-3}\,,$$

mentre per la trasmissione 16-PSK si ha

$$P_e \approx 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{20}\sin\frac{\pi}{16}\right) = 3.8 \cdot 10^{-1}\,.$$

Le probabilità di errore sul bit sono approssimabili come $P_{\text{bit}} = P_e/2 = 8 \cdot 10^{-4}$ e $P_{\text{bit}} = P_e/4 = 9.5 \cdot 10^{-2}$.

2. Il canale AWGN in esame è uguale per i due sistemi (stesso SNR e stesso periodo di simbolo T) e la capacità è pertanto

$$C = \frac{1}{T}\log_2(1+10) = 3.5\ \text{kb/s}.$$

3. La probabilità cercata è

$$\bar{p} = 1 - [(1-P_{\text{bit}})^{4b} + 4bP_e(1-P_{\text{bit}})^{4b-1}],$$

dove b è il numero di bit per simbolo (2 per il primo sistema e 4 per il secondo sistema) e la probabilità è ottenuta come complemento della probabilità di avere zero errori oppure un errore (per il quale ci sono $4b$ posizioni possibili). Si ottiene per il primo sistema $\bar{p} = 1.8 \cdot 10^{-5}$.

4. Per il primo sistema dalla tabella 6.2 abbiamo $t_c = 1$, quindi la CEW coincide con $\bar{p}$.

5. Con 4 simboli la 16-PSK trasmette 16 bit, quindi dalla tabella 6.2 selezioniamo i codici di Reed-Muller con $n = 16$. Poiché $k = 4$ per il codice del sistema 1, scegliamo per il sistema 2 il codice con $k = 5$ scartando quello con $k = 11$ che ha sicuramente una CER maggiore in quanto offre una minore ridondanza.

Soluzione es. 85 [Testo]

1. Il primo gruppo contiene bit indipendenti a valori equiprobabili, quindi non è necessaria la codifica di sorgente (servono ancora 4 bit). Per ciascun altro gruppo si può codificare la posizione del bit modificato in ciascun gruppo, utilizzando 2 bit (ho 4 posizioni possibili) per gruppo. Ci sono 9 gruppi dopo il primo, la lunghezza del pacchetto codificato è pertanto
$$4 + 9 \cdot 2 = 22 \text{ b}.$$
2. Con la codifica scelta si è tolta tutta la ridondanza (abbiamo efficienza unitaria), quindi non è possibile rilevare e correggere nessun errore al ricevitore.
3. Possiamo usare Huffman per codificare la posizione del bit modificato in ogni gruppo. La lunghezza media di un gruppo risulta
$$L = 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 = 1.9 \text{ b}$$
e la lunghezza media del pacchetto codificato è
$$4 + 9 \cdot 1.9 = 21.1 \text{ b}.$$
4. Il codice di correzione d'errore è un codice lineare a blocco $(25, 22)$ e dal bound di Singleton la distanza minima di Hamming è $d_{\min} \leq 4$. Poiché un codice lineare a blocco corregge al più $d_{\min}/2 - 1 = 1$ errori (con $d_{\min}$ pari), non è possibile correggere sempre 2 errori per pacchetto.

Soluzione es. 86 [Testo]

1. Si deve avere
$$2\mathrm{Q}\left(\frac{v_{\text{sat}}}{0.1}\right) = 0.1$$
da cui $v_{\text{sat}} = 0.1\mathrm{Q}^{-1}(0.05) = 0.16$.
2. Dalla (3.31) si ha che il numero di bit richiesti è
$$\mathrm{b} = \left\lceil \frac{(\Lambda_{\mathrm{q}})_{\mathrm{dB}} - 4.77 - 20\log_{10}\left(\frac{\sigma}{v_{\text{sat}}}\right)}{6.02} \right\rceil =$$
$$= \left\lceil \frac{12 - 4.77 - 20\log_{10}\left(\frac{0.1}{0.16}\right)}{6.02} \right\rceil = 2\,.$$
Il passo di quantizzazione è $\Delta = 2 \cdot 0.16/2^2 = 0.08$.
3. I quattro valori quantizzati $\{\pm\Delta/2, \pm 3\Delta/2\}$ hanno probabilità
$$p_{a_q}(-3\Delta/2) = p_{a_q}(3\Delta/2) = Q(\Delta/\sigma) = 0.21$$
$$p_{a_q}(-\Delta/2) = p_{a_q}(\Delta/2) = (1 - 2p_{a_q}(3\Delta/2))/2 = 0.29,$$
e l'entropia risulta (si indichi con x_1 i simboli generati dalla sorgete)
$$H(x_1) = -2 \sum_{a \in \{\pm\Delta/2, \pm 3\Delta/2\}} p_{a_q}(a) \log_2 p_{a_q}(a) = 2.08 \text{ bit}.$$

4. Poiché la 8-PSK porta 3 bit per simbolo si ha che il tasso di trasmissione di simbolo è

$$\frac{14 \cdot \mathrm{b}}{3} = \frac{28}{3} = 9.33 \text{ simboli/s},$$

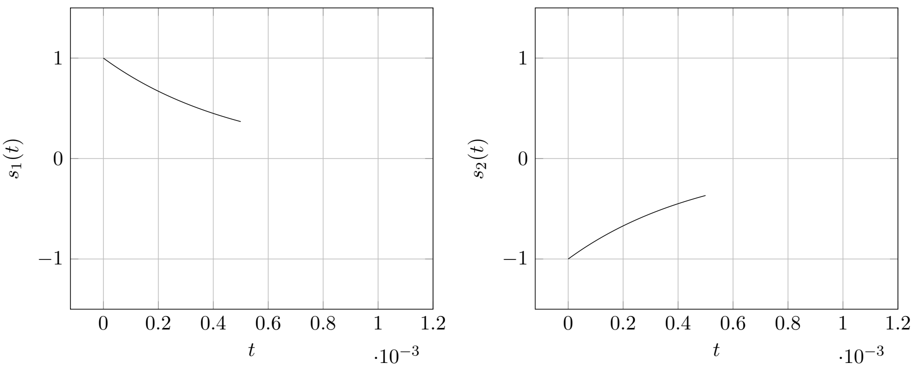
per cui in 60 s vengono generati $9.33 \cdot 60 = 560$ simboli 8-PSK.

5. I valori quantizzati per la seconda sorgente differiscono dalla prima solo per il segno, che varia con probabilità 0.5. Indicando con x_i i simboli generati dalla sorgente i si ha immediatamente $H(x_2|x_1) = 1$ bit.

12.12 Primo compitino del 23/11/2018

Soluzione es. 87 [Testo]

1. I segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono rappresentati in figura:



Per le espressioni si ha ad esempio

$$s_3(t) = 2 \operatorname{triangle}\left(\frac{t - 3/4T}{T/4}\right), \quad s_4(t) = -2 \operatorname{triangle}\left(\frac{t - 3/4T}{T/4}\right)$$

2. Si tratta di una modulazione biortogonale, in quanto $s_1(t) = -s_2(t)$, $s_3(t) = -s_4(t)$ e $s_1(t)$ è ortogonale a $s_3(t)$ in quanto hanno supporto disgiunto.

3. Una base ortonormale è immediatamente trovata normalizzando in potenza $s_1(t)$ e $s_3(t)$. L'energia di questi due segnali è

$$E_{s_1} = \int s_1^2(t)dt = \int_0^{T/2} e^{-4t/T} dt = \left[-\frac{T}{4} e^{-4t/T}\right]_0^{T/2} =$$

$$= \frac{T}{4}\left[1 - e^{-2}\right] = 2.2 \cdot 10^{-4}.$$

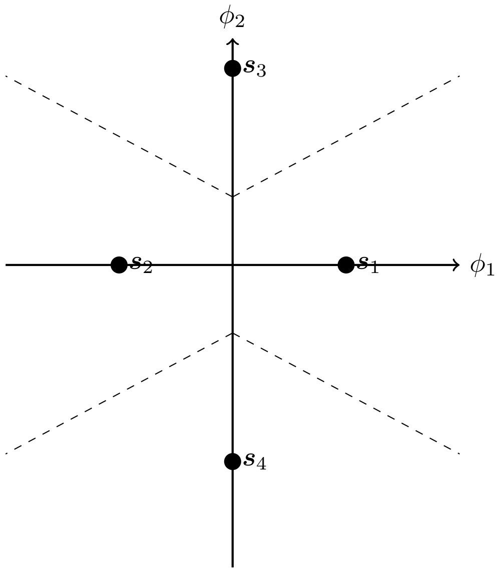
$$E_{s_3} = \frac{2^2}{3}\frac{10^{-3}}{2} = 6.7 \cdot 10^{-4}.$$

da cui

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}} = 67 \cdot s_1(t), \quad \phi_2(t) = \frac{s_3(t)}{\sqrt{E_{s_3}}} = 39 \cdot s_3(t).$$

4. Le coordinate dei punti della costellazione sono

$$\boldsymbol{s}_1 = [\sqrt{E_{s_1}}, 0] = [1.5 \cdot 10^{-2}, 0], \quad \boldsymbol{s}_2 = [-1.5 \cdot 10^{-2}, 0]$$
$$\boldsymbol{s}_3 = [0, \sqrt{E_{s_3}}] = [0, 2.6 \cdot 10^{-2}], \quad \boldsymbol{s}_4 = [0, -2.6 \cdot 10^{-2}]$$



5. Le regioni di decisione sono indicate nella figura del punto precedente. La distanza minima è tra $\boldsymbol{s}_1$ e $\boldsymbol{s}_2$, e vale $d_{\min} = 3 \cdot 10^{-2}$. Un bound superiore alla probabilità di errore che utilizza un solo parametro è dato dalla (5.109) ovvero
$$P_{\mathrm{E}} \le 3\,\mathrm{Q}\left(\frac{3 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}\right) = 4 \cdot 10^{-3}.$$

Soluzione es. 88 [Testo]

1. Le regioni di decisione sono $\mathcal{R}_1 = (-\infty, -0.15)$, $\mathcal{R}_2 = (-0.15, 0)$, $\mathcal{R}_3 = (0, 0.15)$, $\mathcal{R}_4 = (0.15, \infty)$. La probabilità di errore è
$$P(E) = \sum_{n=1}^{4} P(E|a_0 = n) p_{a_0}(n) = \frac{1}{2} P(E|a_0 = 1) + \frac{1}{2} P(E|a_0 = 2)\,,$$
per la simmetria delle regioni di decisione e la posizione dei punti nelle regioni. Inoltre
$$P(E|a_0 = 1) = \mathrm{Q}\left(\frac{0.05}{3 \cdot 10^{-2}}\right) = 4.8 \cdot 10^{-2}\,,$$
$$P(E|a_0 = 2) = \mathrm{Q}\left(\frac{0.05}{3 \cdot 10^{-2}}\right) + \mathrm{Q}\left(\frac{0.1}{3 \cdot 10^{-2}}\right) = 4.8 \cdot 10^{-2}\,,$$
da cui $P(E) = 4.8 \cdot 10^{-2}$.

2. La forma d'onda soddisfa le condizioni di assenza di interferenza intersimbolica poiché la base è costituita da un'unica forma d'onda versione scalata di $h_{\mathrm{Tx}}(t)$ e
$$< h_{\mathrm{Tx}}(t - T), h_{\mathrm{Tx}}(t) >= \int_{3/4T}^{T} 1 dt - \int_{T}^{5T/4} 1 dt = 0$$

$$< h_{\rm Tx}(t+T), h_{\rm Tx}(t) >= \int_{-T/4}^{0} 1dt - \int_{0}^{T/4} 1dt = 0$$

mentre per $k > 1$ o $k < -1$, perché i supporti sono disgiunti, si ha

$$< h_{\rm Tx}(t-kT), h_{\rm Tx}(t) >= 0.$$

3. Il campionamento di $h_{\rm Tx}(t)$ offre

$$h_{\rm Tx}(0) = h_{\rm Tx}(T_0) = 1\,, \quad h_{\rm Tx}(k3T/4) = 0 \text{ per } k \neq \{0,1\}.$$

Con interpolazione a holder abbiamo

$$h_{\rm out}(t) = {\rm rect}\left(\frac{t-3T/8}{3T/4}\right) + {\rm rect}\left(\frac{t-3T/8-T_0}{3T/4}\right) =$$

$$= {\rm rect}\left(\frac{2(t-3T/4)}{3T}\right).$$

4. Non soddisfa le condizioni di assenza di interferenza di intersimbolo perché

$$< h_{\rm out}(t-T), h_{\rm out}(t) >= \int_{T}^{3/2T} 1dt = \frac{T}{2} \neq 0\,.$$

12.13 Secondo compitino del 11/1/2019

Soluzione es. 89 [Testo]

1. Le regioni di quantizzazione sono $(-\infty,-1.5]$, $(-1.5,-1]$, $(-1,-0.5]$, $(-0.5,0]$, $(0,0.5]$, $(0.5,1]$, $(1,1.5]$, $(1.5,\infty)$ con valori quantizzati -1.75 -1.25, -0.75, -0.25, 0.25, 0.75, 1.25 e 1.75. Il passo di quantizzazione è $\Delta = 0.5$. Non si ha mai errore di saturazione poiché il segnale non assume mai valori all'infuori dell'intervallo di quantizzazione ($v_{\rm sat} = 2$) e, poiché la densità di probabilità è costante in ciascun intervallo di quantizzazione, l'errore di quantizzazione è uniforme in ciascun intervallo. Sia $e_{\rm q}$ l'errore di quantizzazione. La PDF di $e_{\rm q}$ condizionato rispetto al fatto di finire nel generico intervallo di quantizzazione i-esimo è $p_{e_{\rm q}}(a) = 2$, $a \in [-0.25, 0.25]$, e la potenza della variabile condizionata è

$$M_{e_{\rm q}|i} = \frac{0.5^2}{12} = 0.021$$

che coincide con la potenza dell'errore di quantizzazione $M_{e_{\rm q}} = 0.021$ ottenuta mediando sempre lo stesso valore.

2. La potenza del segnale di ingresso è

$$M_x = \int_{0}^{0.5} x^2 dx + 0.4 \int_{0.5}^{1.5} x^2 dx + 0.2 \int_{1.5}^{2} x^2 dx =$$

$$= \frac{0.5^3}{3} + 0.4\frac{1.5^3 - 0.5^3}{3} + 0.2\frac{2^3 - 1.5^3}{3} = 0.78$$

quindi $(\Lambda_{\rm q})_{\rm dB} = 10\log_{10}(M_x/M_{e_{\rm q}}) = 15.7$ dB, ovvero $\Lambda_{\rm q} = 37.45$.

3. Il codice a blocco non è in forma sistematica perché i primi tre bit della parola di codice non sono $[b_1, b_2, b_3]$. Permutando c_1 con c_2, il codice è in forma sistematica.

4. La matrice generatrice del codice al punto precedente è

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui la matrice di parità è

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è la quarta colonna di $\boldsymbol{H}$, abbiamo immediatamente che un coset leader del coset associato a questa sindrome è $[00010]^T$, in quanto ha la sindrome cercata e ha peso minimo (unitario).

Soluzione es. 90 [Testo]

1. Si ha

$$P(Y=i|X=j) = P(Y=i|X=j, W=0)p_W(0) + P(Y=i|X=j, W=1)p_W(1) =$$
$$= 0.3P(Y=i|X=j, W=0) + 0.7P(Y=i|X=j, W=1) =$$
$$= \begin{cases} 0.24 + 0.42 = 0.66 & i = j \\ 0.06 + 0.28 = 0.34 & i \neq j. \end{cases}$$

Quindi si tratta di una canale binario simmetrico senza memoria con $P_{\text{bit}} = 0.34$.

2. Essendo un canale binario simmetrico senza memoria la capacità è raggiunta con ingresso a valori equiprobabili, e

$$C = \frac{1}{T}(1 + P_{\text{bit}} \log_2 P_{\text{bit}} + (1 - P_{\text{bit}}) \log_2(1 - P_{\text{bit}})) = 376\,\text{b/s}.$$

3. La densità di probabilità associata alle triplette è

$$P(X=0, Y=0, W=0) = 0.15P(Y=0|W=0, X=0) = 0.12$$
$$P(X=0, Y=1, W=0) = 0.15P(Y=1|W=0, X=0) = 0.03$$
$$P(X=1, Y=1, W=0) = 0.15P(Y=1|W=0, X=1) = 0.12$$
$$P(X=1, Y=0, W=0) = 0.15P(Y=0|W=0, X=1) = 0.03$$
$$P(X=0, Y=0, W=1) = 0.35P(Y=0|W=1, X=0) = 0.21$$
$$P(X=0, Y=1, W=1) = 0.35P(Y=1|W=1, X=0) = 0.14$$
$$P(X=1, Y=1, W=1) = 0.35P(Y=1|W=1, X=1) = 0.21$$
$$P(X=1, Y=0, W=1) = 0.35P(Y=0|W=1, X=1) = 0.14.$$

Applicando Huffman otteniamo ad esempio

$$001 \to 00 \; 111 \to 01 \; 011 \to 110 \; 101 \to 101 \; 000 \to 100$$
$$110 \to 1111 \; 100 \to 11101 \; 010 \to 11100$$

con lunghezza media $L_y = 2.82$.

4. L'entropia della tripletta $[X, Y, W]$ è
$$\mathbb{H}([X, Y, W]) =$$
$$= - \sum_{(i,j,k) \in \{0,1\}^3} P(X = i, Y = j, W = k) \log_2 P(X = i, Y = j, W = k) = 2.77,$$
quindi il codice trovato non raggiunge il limite inferiore del teorema di Shannon.

5. Poiché Y non è indipendente da X si ha $\mathbb{H}(Y|X) < \mathbb{H}(Y)$. Poiché $\mathbb{H}(X) > 0$ da $\mathbb{H}(Y|X) + \mathbb{H}(X) = \mathbb{H}(X, Y)$ abbiamo che $\mathbb{H}(Y|X) < \mathbb{H}(X, Y)$.

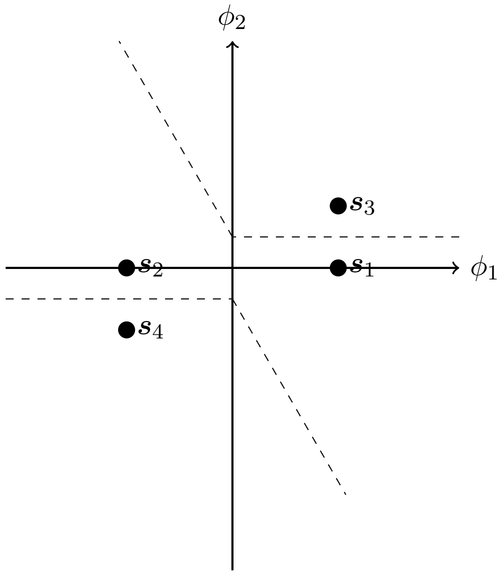
12.14 Esame del 22/1/2019

Soluzione es. 91 [Testo]

1. Le forme d'onda al ricevitore sono
$$\tilde{s}_1(t) = \begin{cases} 2 & t \in [T/4, 3T/4] \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases} \qquad \tilde{s}_2(t) = -\tilde{s}_1(t)\,,$$
$$\tilde{s}_3(t) = \begin{cases} \frac{8t}{T} & t \in [0, T/4] \\ 2 & t \in [T/4, 3T/4] \\ 8 - \frac{8t}{T} & t \in [3T/4, T], \end{cases} \qquad \tilde{s}_4(t) = -\tilde{s}_3(t)\,,$$
L'energia di $\tilde{s}_1(t)$ è $E_1 = 4T/2 = 2T = 2 \cdot 10^{-4}$, quindi usando Gram-Schmidt abbiamo che il primo segnale della base è
$$\phi_1(t) = \frac{\tilde{s}_1(t)}{\sqrt{E_1}} = 70\tilde{s}_1(t)\,.$$
Per il secondo segnale consideriamo $\tilde{s}_3(t)$. Notiamo che per $t \in [T/4, 3T/4]$, $\tilde{s}_3(t)$ è uguale a $\tilde{s}_1(t)$ quindi abbiamo
$$\tilde{\phi}_2(t) = \begin{cases} \frac{8t}{T} & t \in [0, T/4] \\ 8 - \frac{8t}{T} & t \in [3T/4, T], \end{cases}$$
con energia
$$E_{\phi_2} = 2 \int_0^{T/4} \frac{64t^2}{T^2} dt = \frac{128}{T^2} \frac{T^3}{3 \cdot 4^3} = 0.67 \cdot 10^{-4}.$$
Quindi il secondo segnale della base è
$$\phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E_{\phi_2}}} \tilde{\phi}_2(t) = 122\tilde{\phi}_2(t)\,.$$
Gli altri due segnali $s_2(t)$ e $s_4(t)$ sono antipodali a $s_1(t)$ e $s_3(t)$ quindi scrivibili come combinazioni lineare di $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$, quindi $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ costituisce una base ortonormale per la modulazione.

2. La costellazione è
$$\boldsymbol{s}_1 = [\sqrt{E_1}, 0] = [1.4, 0] \cdot 10^{-2}\,, \quad \boldsymbol{s}_2 = [-\sqrt{E_1}, 0] = [-1.4, 0] \cdot 10^{-2}\,,$$
$$\boldsymbol{s}_3 = [\sqrt{E_1}, \sqrt{E_{\phi_2}}] = [1.4, 0.82] \cdot 10^{-2}\,, \quad \boldsymbol{s}_4 = [-1.4, -0.82] \cdot 10^{-2}\,.$$

3. La costellazione è come segue



4. I due punti più vicini sono s_1 e s_3 che si trovano alla distanza minima tra tutte le coppie di punti della costellazione
$$d_{\min} = 0.82 \cdot 10^{-2} \,,$$
quindi il bound inferiore cercato è (deviazione standard del rumore $\sigma_w = 10^{-2}$ e numero di punti a distanza minima $N_{\min} = 4$) dalla (5.116)
$$P(E) \geq \mathrm{Q}\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_w}\right) = \mathrm{Q}(0.41) = 0.34 \,.$$

5. Trattandosi di una modulazione binaria antipodale, la probabilità di errore è minimizzata quando è massima l'energia delle due forme d'onda ricevute ovvero. Poiché il canale riduce l'altezza del rect a 2, scegliendo $A = 0.5$ il segnale trasmesso è $s_1(t) = 2\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T/2}\right)$ che passa inalterato attraverso il canale. In corrispondenza di questo valore di A la probabilità di errore è minima e risulta minima anche l'energia del segnale trasmesso.

Soluzione es. 92 [Testo]

1. I punti medi dei segmenti sono $1/4$, $1/2 + 1/8$, e $1/2 + 1/4 + 1/8$, con rappresentazioni binarie 0.01, 0.101, e 0.111. La lunghezza delle parole è
$$\ell(0) = \lceil \log_2 2 \rceil + 1 = 2 \,, \quad \ell(1) = \lceil \log_2 4 \rceil + 1 = 3 \,, \quad \ell(2) = \lceil \log_2 4 \rceil + 1 = 3 \,,$$
quindi le parole di codice sono
$$0 \to 01, \quad 1 \to 101, \quad 2 \to 111.$$
La lunghezza media delle parole di codice è
$$L = \frac{2}{2} + 2\frac{3}{4} = 2.5.$$

2. Il codice trovato al punto 1) non è di Shannon-Fano in quanto per questo codice la lunghezza delle parole è $\lceil i_X(x) \rceil$, mentre per il codice di Elias è $\lceil i_X(x) \rceil + 1$. Il codice di Shannon-Fano ha sempre lunghezza media delle parole di codice inferiore a quella del codice di Elias, quindi il codice al punto 1) non raggiunge il limite inferiore di Shannon (che a sua volta in generale è ancora più piccolo della lunghezza media del codice di Shannon-Fano).

3. Le parole $[X(n), Y(n)]$ hanno la seguente distribuzione di probabilità
$$p_{X(n),Y(n)}(0,0) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15, \quad p_{X(n),Y(n)}(0,1) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35,$$
$$p_{X(n),Y(n)}(1,1) = 0.25 \cdot 0.3 = 0.075, \quad p_{X(n),Y(n)}(1,2) = 0.25 \cdot 0.7 = 0.175$$
$$p_{X(n),Y(n)}(2,2) = 0.25 \cdot 0.3 = 0.075, \quad p_{X(n),Y(n)}(2,0) = 0.25 \cdot 0.7 = 0.175.$$
Applicando Huffman abbiamo ad esempio
$$(0,0) \to 110, \quad (0,1) \to 0, \quad (1,1) \to 1110, \quad (1,2) \to 101$$
$$(2,2) \to 1111, \quad (2,0) \to 100.$$
La lunghezza media delle parole di codice è
$$L = 0.15 \cdot 3 + 0.35 + 0.075 \cdot 4 \cdot 2 + 0.175 \cdot 3 \cdot 2 = 2.45.$$

4. L'entropia di $X(n)$ (usando la definizione di entropia con la PDF di $X(n)$) è $\mathbb{H}(X) = 1.5$. Per Y si ha
$$p_Y(0) = p_{X(n),Y(n)}(0,0) + p_{X(n),Y(n)}(2,0) = 0.15 + 0.175 = 0.325$$
$$p_Y(1) = p_{X(n),Y(n)}(1,1) + p_{X(n),Y(n)}(0,1) = 0.075 + 0.35 = 0.425$$
$$p_Y(2) = p_{X(n),Y(n)}(2,2) + p_{X(n),Y(n)}(1,2) = 0.075 + 0.175 = 0.25$$
quindi $\mathbb{H}(Y) = 1.55$. L'entropia per simbolo della coppia $[X(n), Y(n)]$ è strettamente maggiore dell'entropia per simbolo di $X(n)$, poiché $Y(n)$ non è funzione deterministica di $X(n)$ e ha entropia non nulla.

5. Abbiamo $p_{Y(n)|X(n)}(a,a) = 0.3$ e $p_{Y(n)|X(n)}(a + 1\text{mod}_4|a) = 0.7$ da cui
$$\mathbb{H}(Y(n)|X(n)) = -\left[p_{X(n),Y(n)}(0,0)\log_2 0.3 + \right.$$
$$+p_{X(n),Y(n)}(1,1)\log_2 0.3 + p_{X(n),Y(n)}(2,2)\log_2 0.3 +$$
$$+p_{X(n),Y(n)}(0,1)\log_2 0.7 + p_{X(n),Y(n)}(1,2)\log_2 0.7 +$$
$$\left. p_{X(n),Y(n)}(2,0)\log_2 0.7\right] = 0.88$$
e quindi
$$\mathbb{I}(X(n);Y(n)) = \mathbb{H}(Y) - \mathbb{H}(Y(n)|X(n)) = 1.55 - 0.88 = 0.67.$$

Soluzione es. 93 [Testo]

1. Per una trasmissione su canale binario simmetrico senza memoria usando un codice a blocco lineare in forma sistematica con bit di parità dato dalla somma di tutti i bit della parola in ingresso al codificatore, proteggiamo in maniera uguale tutti i bit. Questo codice è in grado di rilevare un errore e non è in grado di correggerne nessuno.

2. In presenza di tre errori abbiamo $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}$ con $\boldsymbol{c}$ parola di codice, $\boldsymbol{e}$ parola di errore con tre 1 e due 0. Calcolando il bit di parità siamo sempre in grado di accorgerci che ci sono stati errori, in quanto se i tre errori sono stati nella parte non di parità, la somma sarà diversa dal bit di parità (sommo un numero dispari di 1). Se invece ci sono stati due errori nella parte non di parità allora il bit di parità calcolato è uguale a quello trasmesso, ma il terzo errore si ha nella parte di parità, quindi ancora valore calcolato e valore ricevuto del bit di parità non coincidono, quindi si rilevano gli errori. Possiamo concludere che la probabilità di non rilevare tre errori è dunque zero.

3. Per correggere almeno 3 errori devo avere $d_{\min} \geq 7$ e dal bound di Singleton abbiamo che $7 \leq n-4+1$ da cui $n \geq 10$ che è il valore cercato. Usando il bound di Hamming si ha $n \geq 13$ (conti più complicati).

4. In questo caso uso il bit aggiuntivo per ripetere il secondo bit: se al ricevitore il bit di parità coincide con il secondo bit, non c'è stato errore sul canale, o i due bit scambiati erano uguali, quindi l'errore non ha avuto effetti. Altrimenti c'è stato errore e invertendo il secondo e terzo bit lo correggo. Quindi, indicati con $b_1, \dots b_4$ i 4 bit da codificare, la parola di codice è $[b_1, \dots, b_4, b_2]$. Si noti che come bit di parità potevo anche scegliere b_3.

5. Il codice progettato al punto 2 è lineare perché il bit di parità è combinazione lineare dei bit di ingresso al codificatore, e la matrice generatrice è

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

12.15 Esame del 12/2/2019

Soluzione es. 94 [Testo]

1. Poiché il canale annulla 3/4 del segnale si ha

$$E_h = \frac{1}{4} 4 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 4 \cdot 10^{-3} \quad \mathrm{V^2 s}.$$

La costellazione è quella di una PAM classica, con l'energia appena calcolata.

2. Essendo una PAM abbiamo

$$E_s = \frac{16-1}{3} E_h = 20 \cdot 10^{-3} \quad \mathrm{V^2 s}.$$

e imponendo

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{6}{16-1} \frac{20 \cdot 10^{-3}}{\sigma_w^2}}\right) = 3.5 \cdot 10^{-3}$$

abbiamo $\sigma_w^2 = 10^{-3}$.

3. I segnali $s_5(t)$ e $s_6(t)$ sono tagliati per 1/4 dal canale, e non risultano ortogonali ai segnali PAM per ogni valore di t_0, in quanto il loro integrale non risulta zero.

4. Quando il canale è spento per metà del tempo, abbiamo che l'integrale di $s_5(t)$ e $s_6(t)$ è sempre nullo, quindi le due forme d'onda al ricevitore sono ortogonali alla PAM. Abbiamo anche

$$E_{s_5} = E_{s_6} = 2E_h = 8 \cdot 10^{-3} \quad \mathrm{V^2 s}.$$

dove $2E_h$ è la nuova energia dei segnali PAM nel nuovo canale.

5. Complessivamente abbiamo una modulazione biortogonale e il bound superiore più stretto è dato da

$$P_e \leq 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}}}\right) + \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}}}\right) = 0.048$$

Soluzione es. 95 [Testo]

1. Le quattro lettere dell'alfabeto possono essere rappresentate da coppie di bit, mentre R può essere fatto corrispondere a '0' e V a '1' ottenendo il codice a blocco binario

$$00 \to 0011, \quad 01 \to 0110, \quad 10 \to 1111, \quad 11 \to 0000.$$

Il codice non è lineare (neppure per altre mappature di R e V) perché 0011 + 0110 = 1101 non è una parola di codice.

2. Il canale è binario (in quanto l'ingresso è binario e l'uscita anche), senza memoria (errori sul colore non dipendono da trasmissioni precedenti) e simmetrico (viene detto che le due luci verde e rossa sono confuse con la stessa probabilità).

3. La distanza di Hamming minima tra le parole di codice è 2 (es distanza tra 0011 e 0000), quindi il codice è in grado di rilevare sempre un errore e di correggere sempre al più zero errori.

4. Abbiamo $k = 2$ e $n = 4$, quindi il rate è $k/n = 1/2 = 0.5$. La capacità di Shannon per il canale binario simmetrico senza memoria è

$$C = 1 + 0.1 \log_2 0.1 + 0.9 \log_2 0.9 = 0.53$$

che è maggiore del rate del codice.

5. Il codice cercato è ad esempio

$$X \to RbRbRbRb, \quad Y \to RbVbVbVb, \quad W \to VbRbVbVb \quad W \to VbVbRbRb$$

con matrici generatrice e di parità

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12.16 Esame del 19/6/2019

Soluzione es. 96 [Testo]

1. La probabilità di saturazione è (si noti che x assume solo valori positivi)

$$P_{\text{sat}} = 1 - \mathbb{P}(x < v_{\text{sat}}) = 1 - \int_0^{v_{\text{sat}}} 3e^{-3a} da = e^{-3v_{\text{sat}}},$$

quindi imponendo $P_{\text{sat}} = 10^{-2}$ si ha

$$v_{\text{sat}} = -\frac{1}{3} \ln 10^{-2} = 1.54.$$

2. La potenza di x è (integrando due volte per parti)

$$\mathbb{E}(x^2) = \int_0^\infty 3e^{-3a}a^2 da = \left[-e^{-3a}3a^2\right]_0^\infty + \left[-\frac{e^{-3a}}{3}2a\right]_0^\infty + \left[-\frac{2}{9}e^{-3a}\right]_0^\infty = \frac{2}{9} = 0.22,$$

quindi da

$$(\Lambda_q)_{\text{dB}} = 6.02\,\mathtt{b} + 4.77 + 20\log_{10}\left(\frac{\sigma_a}{v_{\text{sat}}}\right)$$

abbiamo

$$20 \leq 6.02\,\mathtt{b} + 4.77 + 20\log_{10}(\sqrt{0.22}/1.54) = 6.02\,\mathtt{b} - 5.56.$$

Il numero di bit per campione è dunque $\mathtt{b} = 5$, il numero di livelli di quantizzazione è $L = 2^5 = 32$, e il passo di quantizzazione è

$$\Delta = \frac{2v_{\text{sat}}}{L} = 9.6 \cdot 10^{-2}.$$

3. La mappatura prevede il primo bit di segno (0 per valori positivi, 1 per valori negativi) e poi la rappresentazione binaria del numero assoluto del livello (in ordine crescente, a partire dall'intervallo di quantizzazione più vicino all'origine).

4. Possiamo omettere il bit di segno.

12.17 Esame del 3/9/2019

Soluzione es. 97 [Testo]

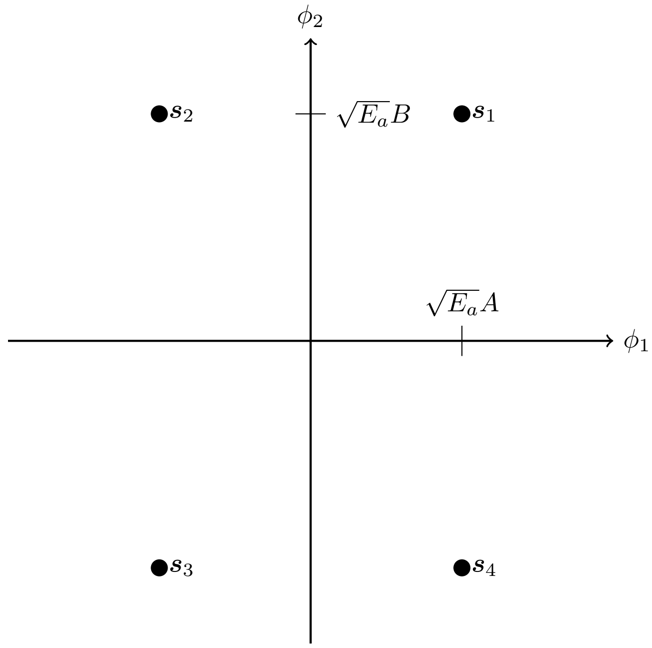
1. I segnali $a_1(t)$ e $a_2(t)$ sono ortogonali, e costituiscono una base per la segnalazione. Le loro energie sono

$$E_a = E_{a_1} = E_{a_2} = 2^2 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 16 \cdot 10^{-4}\ \text{V}^2\text{s},$$

quindi la base ortonormale cercata è

$$\phi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E_a}}a_1(t) = \frac{1}{0.04}a_1(t), \quad \phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E_a}}a_2(t) = \frac{1}{0.04}a_2(t).$$

2. La costellazione è



con le regioni di decisioni a minima distanza (simboli equiprobabili e rumore AWGN) con confini dati dagli assi cartesiani.

3. I segnali hanno tutti la stessa energia, e l'energia media di trasmissione è

$$E_s = E_a(A^2 + B^2) = 16 \cdot 10^{-4}(1 + 1.5^2) = 5.2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{V^2s}$$

4. Si ha

$$\mathbb{P}[\mathrm{C}] = \mathbb{P}[\mathrm{C}|s_1] = \mathbb{P}[r \in R_1|s_1] = \mathbb{P}[s_1 + w \in R_1]$$

$$= \mathbb{P}[A\sqrt{E_a}+w_I > 0\,,\, B\sqrt{E_a}+w_Q > 0] = \mathbb{P}[w_I > -A\sqrt{E_a}]\,\mathbb{P}[w_Q > -B\sqrt{E_a}] = \mathrm{Q}\left(-A\sqrt{E_a}/\sigma_I\right)\mathrm{Q}\left(-B\sqrt{E_a}/\right.$$

$$= \left(1 - \mathrm{Q}\left(\frac{A\sqrt{E_a}}{\sigma_I}\right)\right)\left(1 - \mathrm{Q}\left(\frac{B\sqrt{E_a}}{\sigma_I}\right)\right)$$

Quindi la probabilità di errore cercata è $\mathbb{P}[\mathrm{E}] = 1 - \mathbb{P}[\mathrm{C}] = 2.3 \cdot 10^{-3}$.

5. Con $A = B = (1/\sqrt{2})\sqrt{(1 + 1.5^2)}$ abbiamo una QPSK con

$$\mathbb{P}[\mathrm{E}] = 1 - \left(1 - \mathrm{Q}\left(\frac{A\sqrt{E_a}}{\sigma_I}\right)\right)^2 = 3.1 \cdot 10^{-4}$$

che riduce la probabilità di errore.

12.18 Esame del 25/10/2019

Soluzione es. 98 [Testo]

1. Utilizziamo il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Si ha

$$E_{s_1} = \int A\,\mathrm{triangle}^2\left(\frac{t - 10^{-4}}{10^{-4}}\right)dt = \frac{A^2}{3}2 \cdot 10^{-4} = 2.7 \cdot 10^{-4}$$

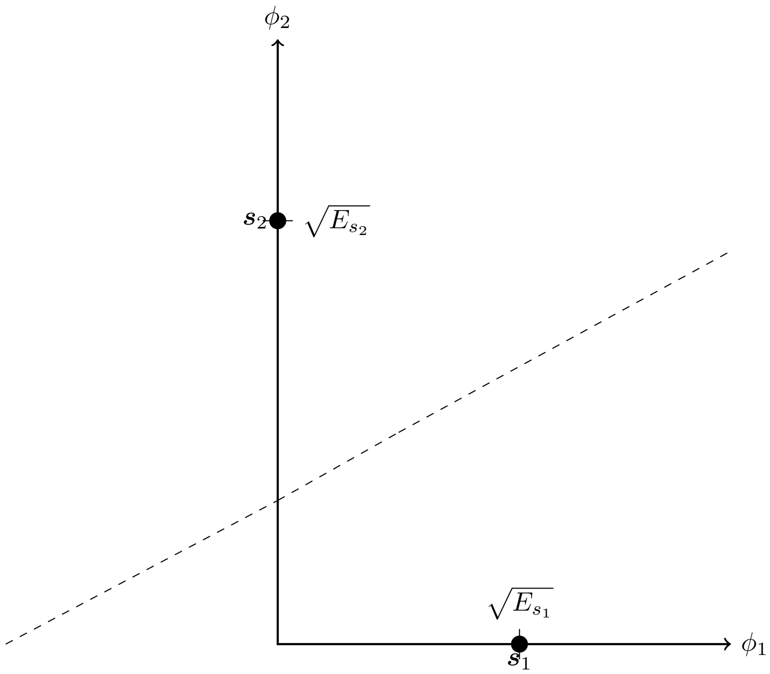
da cui il primo segnale della base è

$$\phi_1(t) = 61\, s_1(t)$$

Osserviamo che per $A = -B = 2$, il prodotto interno tra $s_1(t)$ e $s_2(t)$ coincide con l'area di $s_1(t)$, che è nulla, quindi $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono ortogonali. L'energia di $s_2(t)$ è $E_{s_2} = 8 \cdot 10^{-4}$, quindi il secondo segnale della base è

$$\phi_2(t) = 35\, s_2(t).$$

2. La costellazione è $\boldsymbol{s}_1 = [1.6 \cdot 10^{-2}, 0]$, $\boldsymbol{s}_2 = [0, 2.8 \cdot 10^{-2}]$, ovvero in figura



con le regioni di decisioni a minima distanza (simboli equiprobabili e rumore AWGN).

3. L'energia media della trasmissione è

$$E_s = 0.5 E_{s_1} + 0.5 E_{s_2} = 5.3 \cdot 10^{-4}$$

4. La distanza tra i due punti è

$$d = \sqrt{E_{s_1} + E_{s_2}} = 3.3 \cdot 10^{-2}$$

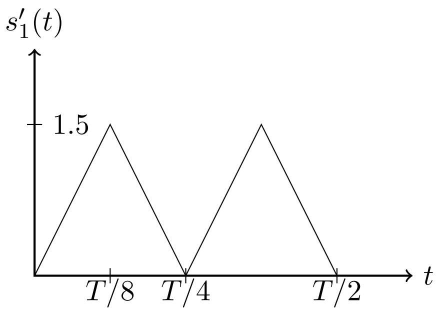
quindi la probabilità di errore è

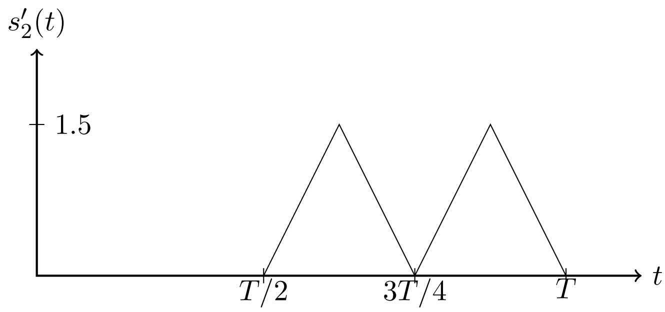
$$P_e = P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\left(\frac{3.3 \cdot 10^{-2}}{2\sigma_I}\right) = 0.12.$$

12.19 Primo compitino del 22/11/2019

Soluzione es. 99 [Testo]

1. Nel punto di decisione i segnali trasmessi diventano





$$s'_3(t) = -s'_1(t) \quad s'_4(t) = -s'_2(t)$$

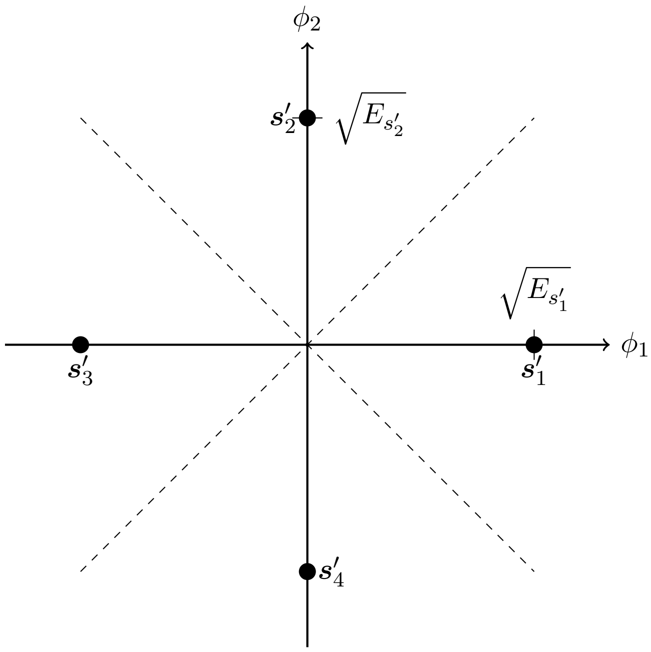
$s'_1(t)$ e $s'_2(t)$ hanno supporto disgiunto, quindi sono ortogonali. Considerando che $s'_3(t)$ e $s'_4(t)$ sono opposti ai primi due, abbiamo una modulazione biortogonale. Una base per la segnalazione è

$$\phi_1(t) = \frac{s'_1(t)}{\sqrt{E_{s'_1}}}, \quad \phi_2(t) = \frac{s'_2(t)}{\sqrt{E_{s'_2}}}$$

con energie (il doppio dell'energia di un triangolo)

$$E_{s'_1} = E_{s'_2} = \frac{2}{3}\frac{10^{-3}}{4}(1.5)^2 = 3.75 \cdot 10^{-4}.$$

La costellazione è $\boldsymbol{s}'_1 = [1.94 \cdot 10^{-2}, 0]$, $\boldsymbol{s}'_2 = [0, 1.94 \cdot 10^{-2}]$, $\boldsymbol{s}'_3 = [-1.94 \cdot 10^{-2}, 0]$ e $\boldsymbol{s}'_4 = [0, -1.94 \cdot 10^{-2}]$,



come rappresentato in figura.

2. Poiché i simboli sono equiprobabili e il rumore è AWGN, il criterio ottimo è quello a minima distanza, e le regioni di decisioni sono quelle indicate nella figura del punto precedente.

3. Posso usare una mappatura di Gray, come per la 4-QAM, con $\boldsymbol{s}_1 \to 00$, $\boldsymbol{s}_2 \to 01$, $\boldsymbol{s}_3 \to 11$ e $\boldsymbol{s}_4 \to 10$.

4. La costellazione è quella di una 4-QAM a meno di una rotazione degli assi, quindi ha la stessa probabilità di errore sul simbolo di una 4-QAM con energia media $E_{s'} = E_{s'_1}$, ovvero

$$P_e = 1 - \left[1 - \mathrm{Q}\left(\frac{\sqrt{E_{s'}}}{\sqrt{2}\sigma_I}\right)\right]^2 = 1 - \left[1 - \mathrm{Q}\left(\frac{1.94 \cdot 10^{-2}}{1.41 \cdot 0.01}\right)\right]^2 = 0.16.$$

5. Trasmettendo $s_1(t)$ e $s_3(t)$ a energia minore, i due punti $\boldsymbol{s}'_1$ e $\boldsymbol{s}'_3$ della costellazione si avvicinano agli altri punti della costellazione, quindi aumenta la probabilità di errore sul simbolo.
6. Se i segnali $s_3(t)$ e $s_4(t)$ vengono trasmessi con probabilità più grande di quella dei segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$, le loro regioni di decisione diventeranno più grandi (rispetto a quelle di $s_1(t)$ e $s_2(t)$): infatti, non potrò più usare il metodo a minima distanza, ma il metodo MAP, e aumenterà (per i simboli a probabilità maggiore $D(\boldsymbol{\rho}; a_0)$).

Soluzione es. 100 [Testo]

1. Per assicurare che $p_x(a)$ sia una densità di probabilità, deve integrare a 1, ovvero
$$\int_{\infty}^{\infty} p_x(a)da = A\frac{16}{3} = 1 \quad \rightarrow \quad A = \frac{3}{16} = 0.19.$$
Per simmetria della densità di probabilità, $\mathbb{E}[x] = 0$ e
$$\sigma_x^2 = \mathbb{E}[x^2] = \int_{\infty}^{\infty} a^2 p_x(a)da = 2A\int_0^2 a^4 da = \frac{3}{40}2^5 = 2.4.$$
2. Per non avere saturazione scelgo $v_{\text{sat}} = 2$, e dalla (3.31) abbiamo che il numero di bit da utilizzare per la quantizzazione è
$$(\Lambda_q)_{\text{dB}} = 6.02\mathtt{b} + 4.77 + 20\log\left(\frac{\sqrt{2.4}}{2}\right) \geq 20 \rightarrow \mathtt{b} = \left\lceil\frac{20 - 4.77 + 2.22}{6.02}\right\rceil = 3$$
e il passo di quantizzazione è
$$\Delta = \frac{2v_{\text{sat}}}{2^b} = 0.5.$$
3. Si veda la Figura 3.11.
4. Per ogni campione si generano 3 bit, quindi la velocità dei bit in uscita dal quantizzatore è $3/(1.5 \cdot 10^{-3}) = 2$ kbit/s.
5. Ogni ms abbiamo 2 bit, quindi ogni 2 ms abbiamo 4 bit da trasmettere, usiamo quindi una $M = 2^4 = 16$ QAM con probabilità di errore sul bit
$$P_{bit} = \frac{1}{4}4\left(1 - \frac{1}{4}\right)\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{3}{15}10}\right) = 5.9 \cdot 10^{-2}.$$

12.20 Secondo compitino del 10/1/2020

Soluzione es. 101 [Testo]

1. La capacità è data da
$$C = \frac{1}{T_s}\text{argmax}_{p_X(a)}[H(Y) - H(Y|X)],$$
con
$$H(Y|X) = \sum p_X(a)H(Y|X = a).$$

Osservando che $H(Y|X = a)$ è la stessa per tutti i valori di ingresso (poiché le tre colonne di $\boldsymbol{Q}$ contengono gli stessi valori, a meno di una permutazione), abbiamo che $H(Y|X) = H(Y|X = a)$ che non dipende da $p_X(a)$. Inoltre, sempre per la struttura della matrice $\boldsymbol{Q}$, scegliendo una densità di probabilità uniforme per i simboli di ingresso, anche i simboli di uscita hanno una densità di probabilità uniforme, che massimizza $H(Y) = \log_2 3 = 1.585$. Si ha anche

$$H(Y|X = a) = -0.5 \log_2 0.5 - 0.4 \log_2 0.4 - 0.1 \log_2 0.1 = 1.361 \text{ bit},$$

da cui $C = 223.9$ bit/s.

Soluzione es. 102 [Testo]

1. Possiamo ricavare le parole di codice associate alle sequenze di ingresso al codificatore (1000), (0100), (0010), (0001) come

$$1000 * * * ** = 001110010 + 101101110 = 100011100,$$

$$0100 * * * ** = 100101110 + 011010101 + 101101110 = 010010101,$$

$$0010 * * * ** = 100101110 + 101101110 = 001000000,$$

$$0001 * * * ** = 001110010 + 00100000 = 000110010,$$

da cui la matrice generatrice è

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. C'è una parola di codice (001000000) con peso di Hamming 1 (che è anche il peso minimo di una qualsiasi parola non nulla di qualsiasi codice), ed essendo il codice lineare abbiamo $d_{\min} = 1$. Quindi il codice rileva e corregge 0 errori.

3. La matrice di parità è

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e le sindromi per le due sequenze sono

$$(00100), (01001).$$

La prima sindrome corrisponde alla 7 colonna di $\boldsymbol{H}$ e quindi un coset leader è 000000100, da cui la parola decodificata è

$$111111011- > 1111 \text{ sequenza di ingresso al codificatore.}$$

La seconda sindrome non è una colonna di $\boldsymbol{H}$, ma può essere ottenuta come combinazione della sesta e nona colonna, e quindi un coset leader è 000001001 da cui la parola decodificata è

$$101011100- > 1010 \text{ sequenza di ingresso al codificatore.}$$

4. Non esiste una codice Hamming (9,4) perché
$$9 \neq 2^{9-4} - 1 = 31.$$

5. Il codice è a blocco perché blocchi di bit (della stessa lunghezza $k = 4$) vengono codificati in blocchi di bit (della stessa lunghezza $n = 10$). Il codice non è lineare perché la parola 0000 non viene mappata in 0000000000 (a causa del +1 in c_{10}). La sequenza 0001 viene codificata, per i primi 9 bit, in (dalla matrice generatrice) 000110010, mentre l'ultimo bit è 1, quindi la parola codificata complessiva è 0001100101.

Soluzione es. 103 [Testo]

1. Il limite inferiore dato dal teorema di Shannon è l'entropia della sorgente
$$H(s) = 2.88 \text{ bit}$$
e non esiste nessun codice decodificabile con lunghezza media inferiore a 2.885, quindi non può esistere un codice con lunghezza media delle parole 1.9.

2. Applicando Huffman si ottiene ad esempio il seguente codice (tutti i codici avranno comunque la stessa lunghezza delle parole):
$$1 \to 001 \quad 2 \to 000 \quad 3 \to 1101 \quad 4 \to 1100$$
$$5 \to 010 \quad 6 \to 10 \quad 7 \to 011 \quad 8 \to 111$$
con lunghezza media
$$L = \sum_a p(a)\ell(a) = 0.14 \cdot 3 + 0.12 \cdot 3 + 0.06 \cdot 4 + 0.05 \cdot 4 + 0.16 \cdot 3 +$$
$$+0.2 \cdot 2 + 0.17 \cdot 3 + 0.1 \cdot 3 = 2.91 \text{ bit}.$$

3. Il limite superiore dato dal teorema di Shannon è
$$H(s) + 1 = 3.88 \text{ bit}.$$

4. Osserviamo che $[s(n), s'(n)]$ è funzione (deterministica) e biunivoca di $s(n)$. Quindi a meno di una nuova mappatura dei simboli, il codice ottimo per $[s'(n), s(n)]$ ha parole della stessa lunghezza, che vengono assunte con la stessa probabilità, quindi la lunghezza media è ancora 2.91 bit.

5. $y(n)$ è funzione deterministica di $s(n)$, quindi avrà entropia minore o uguale a quella di $s(n)$. Inoltre essendo binaria la sua massima entropia è 1. Dal teorema di Shannon sappiamo che il codice ottimo ha lunghezza media minore o uguale a $1 + 1 = 2$ bit, che è minore di 2.91 bit, lunghezza media del codice di Huffman, quindi la lunghezza media del codice ottimo per $y(n)$ sarà strettamente inferiore a 2.91 bit.

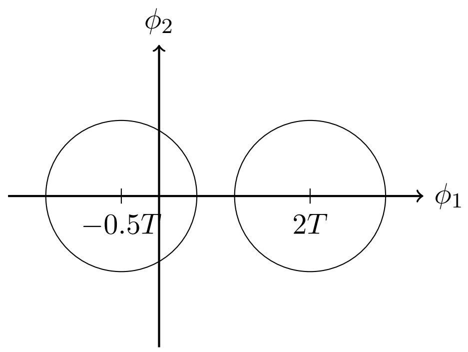
   Possiamo anche più direttamente osservare che qualsiasi codifica di $y(n)$ richiederà (al più) un bit per simbolo, poiché questo è il risultato della codifica di Huffman, qualsiasi sia la distribuzione di $y(n)$ (non deterministica).

12.21 Esame del 21/1/2020

Soluzione es. 104 [Testo]

1. Osservando che i segnali $\sqrt{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ e $\sqrt{T}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{2(t-T/4)}{T}\right)-\mathrm{rect}\left(\frac{2(t-3T/4)}{T}\right)\right]$ sono ortogonali (dall'integrale del loro prodotto) possiamo scegliere
$$\phi_1'(t)=\sqrt{T}\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)\quad E_{\phi_1'}=\int\phi_1'^2(t)dt=T^2,$$
$$\phi_2'(t)=\sqrt{T}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{2(t-T/4)}{T}\right)-\mathrm{rect}\left(\frac{2(t-T/2)}{T}\right)\right]\quad E_{\phi_2'}=\int\phi_2'^2(t)dt=T^2$$
da cui una base ortonormale (per tutti i valori di α e β) è data da
$$\phi_1(t)=\frac{1}{T}\phi_1'(t)\quad\phi_2(t)=\frac{1}{T}\phi_2'(t).$$

2. I punti della costellazione hanno coordinate $\boldsymbol{s}_1=[T(2+\cos\alpha),T\sin\alpha]$ e $\boldsymbol{s}_2=[T(\cos\beta-0.5),T\sin\beta]$, e i punti della costellazione si trovano lungo i cerchi indicati in figura:



dove il cerchio a destra è percorso al variare di α, e il cerchio a sinistra è percorso al variare di β.

3. Per minimizzare l'energia, posiziono i due punti il più vicino possibile all'origine, quindi scelgo $\alpha=-\pi$ e $\beta=0$ da cui ho
$$E_1=0.5^2T^2=2.5\cdot10^{-7}\quad E_1=1^2T^2=10^{-6}$$
e energia media $E_s=(E_1+E_2)/2=0.63\cdot10^{-6}$.

4. Per minimizzare la probabilità di errore scelgo i due punti alla massima distanza, quindi $\alpha=0$ e $\beta=-\pi$, da cui ottengo la distanza dei due punti $d=4.5T$ e la probabilità di errore è
$$P_e=\mathrm{Q}\left(\frac{4.5\cdot10^{-3}}{2\cdot\sqrt{0.5}}\right)=0.4987.$$

Soluzione es. 105 [Testo]

1. Il codice di Elias ha lunghezza delle parole di codice uguale alla parte alta dell'informazione della parola di codice più 1 quindi si ha
$$\bar{L}=1+0.14\lceil-\log_2 0.14\rceil+0.12\lceil-\log_2 0.12\rceil+$$

$$+0.06\lceil -\log_2 0.06\rceil + 0.16\lceil -\log_2 0.16\rceil +$$

$$+0.25\lceil -\log_2 0.25\rceil + 0.17\lceil -\log_2 0.17\rceil + 0.1\lceil -\log_2 0.1\rceil = 4.09 \text{ b}.$$

Per il simbolo 5, la lunghezza della parola di codice è $1 - \log_2 0.25 = 3$ e il punto medio del segmento $[\sum_{i=1}^{4} p(i), \sum_{i=1}^{5} p(i)]$ è $(0.73 + 0.48)/2 = 0.605$ la cui rappresentazione binaria è $0.100\cdots$, e quindi la codifica è

$$5 \to 100.$$

2. L'entropia della sorgente è

$$\mathbb{H}(s) = 2.7,$$

quindi per il teorema di Shannon esiste certamente un codice binario a prefisso con lunghezza media delle parole di codice inferiore o uguale a $\mathbb{H}(s)+1 = 3.7$, quindi esiste un codice con lunghezza media delle parole di codice strettamente inferiore a 3.9.

3. Il segno della nuova sorgente è determinato esclusivamente dalla variabile $q(n)$, indipendente da $s(n)$, quindi per ogni simbolo, l'informazione sarà la somma dell'informazione di $s(n)$ e dell'informazione di $z(n)$. Facendo la media, abbiamo

$$\mathbb{H}(z) = \mathbb{H}(s) + 1,$$

quindi è maggiore rispetto a $\mathbb{H}(s)$, e la differenza è 1.

Soluzione es. 106 [Testo]

1. Si ha

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le parole di codice sono le seguenti, con indicato accanto il relativo peso di Hamming.

Parola	w_H
0000000	0
0011101	4
0101011	4
0110110	4
1000111	4
10100011	4
1101100	4
1110001	4

Quindi il peso minimo di Hamming è 4 e essendo un codice lineare, questo coincide con la distanza minima. Quindi il codice è in grado di rilevare 3 errori e correggerne 1.

2. La nuova matrice generatrice ottenuta sopprimendo c_1 è

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che non è in forma sistematica. Per trovare una matrice generatrice in forma sistematica, scambiando ad esempio la quarta e la terza riga ottengo

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e facendo poi operazioni di combinazioni lineari per colonne ottengo

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $\mathcal{C}_1$ non è lineare perché non c'è la parola nulla; $\mathcal{C}_2$ è lineare perché tutte le combinazioni lineari delle parole di codice sono parole di codice; $\mathcal{C}_3$ è lineare perché è lo spazio nullo della matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. E' un codice in forma sistematica, quindi la matrice di parità è

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La prima sindrome è la seconda colonne di $\boldsymbol{H}$ quindi la sequenze di peso di Hamming minimo che fornisce la sindrome è tutta nulle tranne che per un '1' in corrispondenza della seconda colonna ovvero

$$(010000).$$

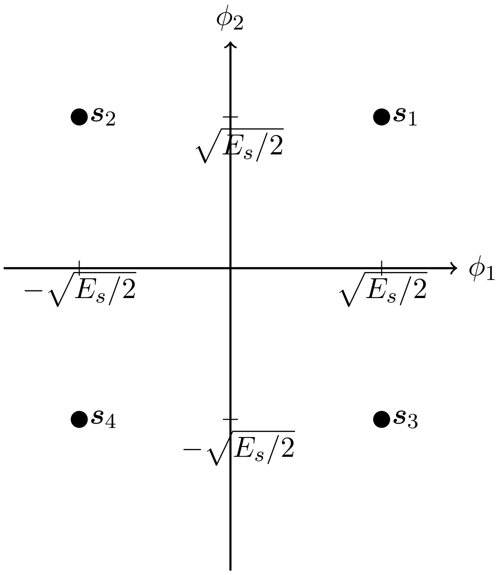
La seconda sindrome non è una colonna, ma combinazione della quarta e quinta colonna, quindi un coset leader è

$$(000110).$$

12.22 Esame dell'11/2/2020

Soluzione es. 107 [Testo]

1. Invertendo la formula (approssimata) della probabilità di errore per una QPSK si ha
$$E_s = 2\sigma_I^2 \mathrm{Q}^{-1}\left(\frac{P_e}{2}\right)^2 = 0.2\left[\mathrm{Q}^{-1}\left(\frac{10^{-2}}{2}\right)\right]^2 = 1.33.$$
La costellazione è come segue e le regioni di decisione ottime (criterio minima distanza) coincidono con gli assi cartesiani:



2. La rotazione della costellazione non modifica né le distanze dei punti della costellazione dall'origine, né le distanze relative tra i vari punti. Pertanto, l'energia di ciascun segnale (e quindi l'energia media) e la probabilità di errore non cambiano.

3. La traslazione non cambia le distanze relative tra i punti, quindi la probabilità di errore rimane invariata. L'energia media invece cambia. In particolare, le coordinate dei nuovi punti della costellazione sono $[0, 0.82]$, $[0, -0.82]$, $[1.64, 0.82]$, $[1.64, -0.82]$ e l'energia media è
$$E_s' = \frac{1}{4}\left[2 \cdot 0.82^2 + 2 \cdot (1.64^2 + 0.82^2)\right] = 2.02,$$
quindi l'energia media aumenta.

4. Aggiungendo un punto nell'origine (di energia nulla), per mantenere inalterata l'energia media, l'energia degli altri punti diventa
$$E_s'' = \frac{5}{4}E_s = 1.66.$$
I punti a distanza minima sono quello nell'origine e uno qualsiasi degli altri punti e $d_{\min} = \sqrt{2}\sqrt{E_s''/2} = 1.29$. Il bound inferiore alla probabilità d'errore basato sulla distanza minima fornisce
$$P_e \geq \mathrm{Q}\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_I}\right) = 0.02,$$
che è superiore alla probabilità di errore della costellazione al punto 1), quindi possiamo concludere che la nuova costellazione avrà una probabilità di errore (esatta) superiore.

Soluzione es. 108 [Testo]

1. Il codice è in forma sistematica quindi la matrice generatrice è

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La parola di codice associata a $[1, 1, 0]^T$ è

$$\boldsymbol{G} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. La sindrome della sequenza $[0, 1, 0, 1, 0, 1]^T$ è $\boldsymbol{H}[0, 1, 0, 1, 0, 1]^T = [0, 1, 1]^T$ che è la terza colonna di $\boldsymbol{H}$ quindi ha come coset leader $[0, 0, 1, 0, 0, 0]^T$. La parola di codice decodificata è $[0, 1, 1, 1, 0, 1]^T$ a cui corrisponde la sequenza di ingresso $[0, 1, 1]$.

3. La matrice generatrice diventa

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

da cui

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il bound di Singleton fornisce $d_{\min} \leq 7 - 3 + 1 = 5$, quindi il codice corregge non più di 2 errori.

Soluzione es. 109 [Testo]

1. Il codice non è a prefisso perché 10 è prefisso di 100. Non è ottimo perché non esistono due parole di lunghezza massima uguali a meno dell'ultimo bit, infatti 111 e 100 sono diverse anche nel penultimo bit. Non può essere di Elias, perché la lunghezza delle parole del codice di Elias è sempre strettamente maggiore di 1, mentre in $\mathcal{C}$ la prima parola ha lunghezza 1.

2. Associamo parole più lunghe a simboli meno probabili quindi ad esempio

$$1 \to 100, \quad 2 \to 111, \quad 3 \to 10, \quad 4 \to 0.$$

La lunghezza media è

$$L = 0.3 + 0.6 + 0.6 + 0.4 = 1.9,$$

e il rate in uscita è

$$R = \frac{L}{T} = \frac{1.9}{3 \cdot 10^{-3}} = 633 \text{ b/s}.$$

3. L'entropia della sorgente è

$$\mathbb{H}(s) = -0.1 \log_2 0.1 - 0.2 \log_2 0.2 - 0.3 \log_2 0.3 - 0.4 \log_2 0.4 = 1.85,$$

quindi per il teorema di Shannon non esiste un codice binario di lunghezza inferiore a 1.85, quindi non esiste il codice cercato con lunghezza media delle parole di codice strettamente inferiore a 1.2.

4. Si ha $p_4 = 1 - 0.12 - 0.23 - 0.31 = 0.34$ e codice (ad esempio)

$$1 \to 11, \; 2 \to 10, \; 3 \to 01, \; 4 \to 00.$$

12.23 Esame del 16/6/2020

Soluzione es. 110 [Testo]

1. Analogamente a quanto visto per la QAM, abbiamo che

$$\phi_1'(t) = A\cos(2\pi f_c t)\text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \quad \phi_2'(t) = A\sin(2\pi f_c t)\text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

sono (circa) ortogonali, e le loro energie sono

$$E_{\phi_1'} = \frac{A^2}{2}T = 0.5 \cdot 10^{-7} \text{ [V}^2\text{s]} \quad E_{\phi_2'} = \frac{A^2}{2}T = 0.5 \cdot 10^{-7} \text{ [V}^2\text{s]},$$

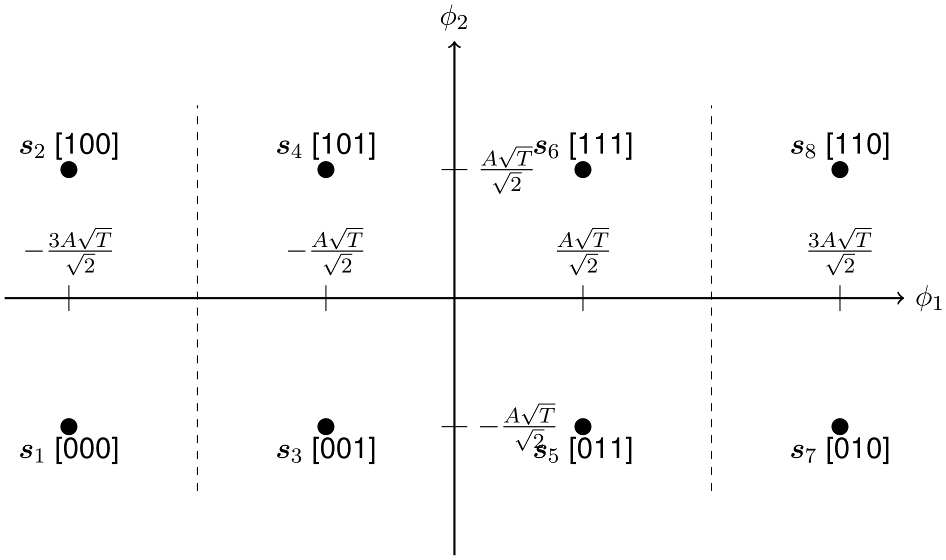
da cui i due segnali della base sono

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(2\pi f_c t)\text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right), \quad \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(2\pi f_c t)\text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right).$$

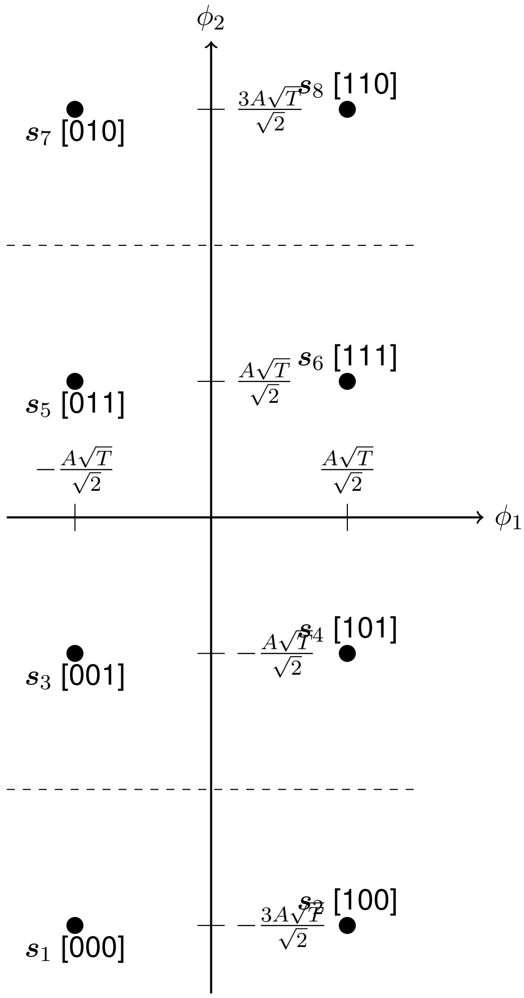
2. Le coordinate dei punti della costellazione sono

$$s_1 = \left[-\frac{3A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}, -\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right], \; s_2 = \left[-\frac{3A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}, \frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right], \; s_3 = \left[-\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}, -\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right], \; s_4 = \left[-\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}, \frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right],$$

$$s_5 = \left[\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}, -\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right], \; s_6 = \left[\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}, \frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right], \; s_7 = \left[\frac{3A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}, -\frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right], \; s_8 = \left[\frac{3A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}, \frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}}\right].$$

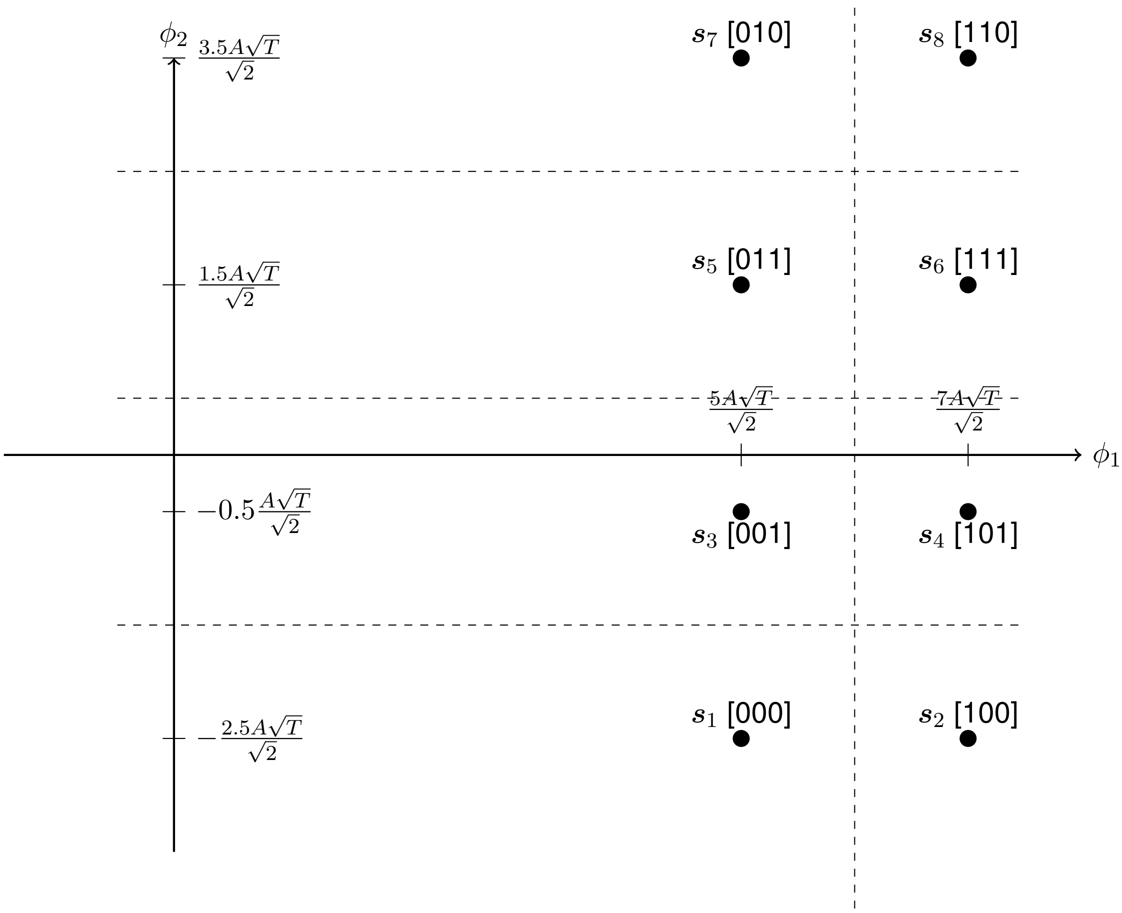


Variante 2 Usando la stessa base ottengo



I punti successivi sono uguali, in quanto la costellazione è la stessa della variante 1, a meno di una rotazione, che non cambia le distanze tra i punti, qui la probabilità di errore rimane invariata.

Variante 3



I punti successivi sono uguali, in quanto la costellazione è la stessa della variante 1, a meno di una rotazione e traslazione, che non cambiano le distanze tra i punti, qui la probabilità di errore rimane invariata.

3. Abbiamo due tipi di regioni: quelle di angolo (in numero di 4, per s_1, s_2, s_7 e s_8) e quelle centrali (altre 4, per i restanti simboli). Procedendo analogamente a quanto visto per la QAM abbiamo:

   - **Regione di angolo (s_8):** la distanza dal simbolo più vicino per la prima coordinata è

$$d_1 = \frac{3A\sqrt{T}}{\sqrt{2}} - \frac{A\sqrt{T}}{\sqrt{2}} = \frac{2A\sqrt{T}}{\sqrt{2}} = 4.47 \cdot 10^{-4}$$

     e anche per la seconda coordinata è

$$d_2 = \frac{2A\sqrt{T}}{\sqrt{2}} = d_1 = 4.47 \cdot 10^{-4}.$$

     La probabilità di decisione corretta è dunque

$$P(C|\boldsymbol{s}_1) = \left[1 - \mathrm{Q}\left(\frac{d_1}{2\sigma}\right)\right]\left[1 - \mathrm{Q}\left(\frac{d_2}{2\sigma}\right)\right] = \left[1 - \mathrm{Q}\left(\frac{d_1}{2\sigma}\right)\right]^2$$

     con dipende da $\#$, con valori risultati della probabilità di errore nell'intervallo $P(E|\boldsymbol{s}_1) = 1 - P(C|\boldsymbol{s}_1) \in [0.03, 0.23]$.

- **Regione interna (s_3):** la probabilità di decisione corretta è

$$P(C|\boldsymbol{s}_3) = \left[1 - 2\mathrm{Q}\left(\frac{d_1}{2\sigma}\right)\right]\left[1 - \mathrm{Q}\left(\frac{d_2}{2\sigma}\right)\right]$$

con dipende da $\#$, con valori risultati della probabilità di errore nell'intervallo $P(E|\boldsymbol{s}_3) = 1 - P(C|\boldsymbol{s}_3) \in [0.03, 0.33]$.

Quindi la probabilità di errore media sul simbolo è

$$P_e = \frac{4}{8}P(E|\boldsymbol{s}_1) + \frac{4}{8}P(E|\boldsymbol{s}_3).$$

4. Usando per il primo bit una codifica di Gray lungo ϕ_2 e per i restanti due bit una codifica di Gray lungo ϕ_1, ottengo quanto indicato nella figura della costellazione.

Soluzione es. 111 [Testo]

1. (tutte le varianti) $n = 6$ è il numero delle colonne di $\boldsymbol{H}$, mentre $k = 3$ è il numero delle colonne meno il numero delle righe di $\boldsymbol{H}$. Il codice non è di Hamming, perché se lo fosse avrebbe nelle colonne di $\boldsymbol{H}$ tutte le sequenze non nulle, che sono $2^3 - 1 = 7$.
2. Permutando i bit delle parole di codice le colonne di $\boldsymbol{H}$ vengono permutate. Con la permutazione

$$c_1' = c_2,\ c_2' = c_4,\ c_3' = c_6,\ c_4' = c_5,\ c_5' = c_3,\ c_6' = c_1,$$

otteniamo la nuova matrice di parità

$$\boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Variante 2:

$$c_1' = c_2,\ c_2' = c_4,\ c_3' = c_6,\ c_4' = c_3,\ c_5' = c_5,\ c_6' = c_1,$$

$$\boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Variante 3

$$c_1' = c_3,\ c_2' = c_4,\ c_3' = c_6,\ c_4' = c_1,\ c_5' = c_2,\ c_6' = c_5,$$

$$\boldsymbol{H}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Essendo $\boldsymbol{H}'$ in forma sistematica abbiamo immediatamente (per le tre varianti)

$$\boldsymbol{G}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre, poiché i due codici differiscono solo per la permutazione, basta permutare le righe di $\boldsymbol{G}'$ per ottenere la matrice generatrice del codice originale, ovvero (per le tre varianti)

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Si tratta di fare la decodifica a sindrome, dove i coset leader sono

$$[1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \text{ per } [0,\ 0,\ 1,\ ]^T, \quad [0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0] \text{ per } [1,\ 0,\ 1,\ ]^T,$$
$$[0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0] \text{ per } [0,\ 1,\ 0,\ ]^T, \quad [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0] \text{ per } [0,\ 1,\ 1,\ ]^T,$$
$$[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0] \text{ per } [1,\ 0,\ 0,\ ]^T, \quad [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1] \text{ per } [1,\ 1,\ 0,\ ]^T,$$
$$[0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0] \text{ per } [1,\ 1,\ 1,\ ]^T.$$

Si noti che per l'ultima sindrome si possono scegliere altri coset leader.

Variante 2: A parte i coset leader ottenuti direttamente dalle colonne di $\boldsymbol{H}$, si ha

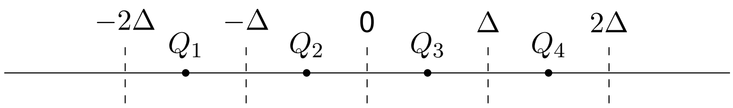
$$[0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0] \text{ per } [1,\ 0,\ 1,\ ]^T.$$

Variante 3: A parte i coset leader ottenuti direttamente dalle colonne di $\boldsymbol{H}$, si ha

$$[1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0] \text{ per } [0,\ 1,\ 1,\ ]^T.$$

Soluzione es. 112 [Testo]

1. Per impedire la saturazione, osservando che $x(t) \in [-3.5, 4)$, scelgo $v_{\text{sat}} = 4$. Quindi l'intervallo di quantizzazione è $[-4, 4]$, e il passo di quantizzazione è $\Delta = 8/4 = 2$. La funzione caratteristica è



Variante 2: $v_{\text{sat}} = 8$, $\Delta = 4$.

Variante 3: $v_{\text{sat}} = 12$, $\Delta = 6$.

2. La densità di probabilità di $y(n)$ è

$$p_y(1) = \int_{-4}^{-2} p_x(a)da = \frac{0.5}{2} + \frac{1}{6} = 0.417,$$

$$p_y(2) = \int_{-2}^{0} p_x(a)da = \frac{0.5}{6} + \frac{1.5}{10} = 0.233,$$

$$p_y(3) = \int_{0}^{2} p_x(a)da = \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = 0.183,$$

$$p_y(4) = \int_2^4 p_x(a)da = \frac{2}{12} = 0.167.$$

Facendo il codice di Huffman otteniamo

$$1,\ 01,\ 000,\ 001,$$

con lunghezza media $L_y = 0.417 + 2 \cdot 0.233 + 3 \cdot (0.183 + 0.167) = 1.93$.

Si ottengono gli stessi numeri anche con le altre varianti.

3. Per avere un codice con la stessa lunghezza media basta ad esempio invertire tutti i bit delle parole di codice ottenendo il codice equivalente

$$0,\ 10,\ 111,\ 110.$$

Variante 2: Per avere un codice con lunghezza media strettamente maggiore, basta aggiungere un bit a tutte le parole di codice, è ancora a prefisso binario, quindi ad esempio

$$11,\ 011,\ 0001,\ 0011.$$

Variante 3: Il nuovo codice è

$$0,\ 11,\ 100,\ 101.$$

che è ancora a prefisso e ottimo (avendo la stessa lunghezza media).

4. Abbiamo

$$p_z(1) = 0.233 + 0.167 = 0.4, \quad p_z(0) = 0.6.$$

$$H(z) = -0.4 \log_2 0.4 - 0.6 \log_2 0.6 = 0.971$$

$$p_{z|y}(1|2) = p_{z|y}(1|4) = 1, \quad p_{z|y}(1|1) = p_{z|y}(1|3) = 0,$$

$$p_{z|y}(0|2) = p_{z|y}(0|4) = 0, \quad p_{z|y}(0|1) = p_{z|y}(0|3) = 1,$$

quindi $H(z|y) = 0$. Infine

$$I(y,z) = H(z) - H(z|y) = 0.971.$$

Variante 2: Anche in questo caso $H(z|y) = 0$ e

$$p_z(1) = 0.417 + 0.167 = 0.584, \quad p_z(0) = 0.416.$$

$$H(z) = 0.98 \quad I(y,z) = H(z) - H(z|y) = 0.98.$$

Variante 3: Anche in questo caso $H(z|y) = 0$ e

$$p_z(1) = 0.417 + 0.233 = 0.65, \quad p_z(0) = 0.35.$$

$$H(z) = 0.934, \quad I(y,z) = H(z) - H(z|y) = 0.934.$$

12.24 Esame dell'8/9/2020

Soluzione es. 113 [Testo]

1. Il canale non è ”binario simmetrico senza memoria” perché i segnali in ingresso e uscita non sono con alfabeto binario.

2. Abbiamo
$$p_Y(0) = p_X(0) + \frac{1}{3}p_X(1) = \frac{26}{55} + \frac{1}{3}\frac{3}{55} = \frac{27}{55} = 0.491$$
che è uguale per simmetria del canale e dell'ingresso a $p_Y(2)$, inoltre
$$p_Y(1) = 1 - 2\frac{27}{55} = \frac{1}{55} = 0.019.$$
L'entropia di Y è pertanto
$$H(Y) = -2\frac{27}{55}\log_2\frac{27}{55} - \frac{1}{55}\log_2\frac{1}{55} = 1.113$$

3. Condizionando rispetto a X abbiamo
$$P(X \neq Y) = [P(Y = 1|X = 0) + P(Y = 1|X = 0)]P(X = 0) + [P(Y = 0|X = 1)+$$
$$+P(Y = 2|X = 1)]P(X = 1) + [P(Y = 1|X = 2) + P(Y = 0|X = 2)]P(X = 2) =$$
$$= [P(Y = 0|X = 1) + P(Y = 2|X = 1)]P(X = 1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{55} = \frac{2}{55} = 0.036$$

4. L'entropia condizionata dell'uscita rispetto all'ingresso è
$$H(Y|X) = -\frac{3}{55}3\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} = -\frac{3}{55}\log_2\frac{1}{3} = 0.086$$
Da cui la capacità è
$$C = \frac{1}{T}[H(Y) - H(Y|X)] = 1.113 - 0.086 = 1.027 \quad \text{bit/s}.$$

5. Poiché $R > C$, non è certo che esista un altro codice con probabilità di errore più piccola.

Soluzione es. 114 [Testo]

1. L'energia del primo segnale è
$$E_{s_1} = \int_0^T (e^{-5t})^2 dt = \frac{1}{10} - \frac{e^{-10T}}{10} = 9.95 \cdot 10^{-5},$$
e per il secondo si ha
$$E_{s_2} = A^2\int_0^T e^{10T} = A^2\left(\frac{e^{10T}}{10} - \frac{1}{10}\right) = A^2 10^{-4},$$
quindi, imponendo $E_{s_1} = E_{s_2}$ si ha
$$A = 1.$$

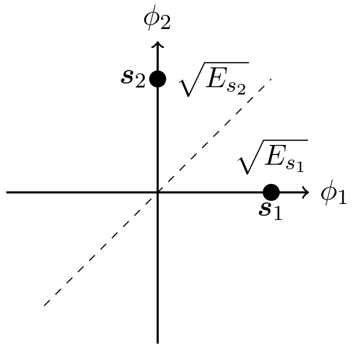
2. Osservo che i due segnali sono ortogonali poiché

$$\int_0^{T/2} s_1(t)s_2(t)dt + \int_{T/2}^{T} s_1(t)s_2(t)dt = 1 - 1 = 0,$$

quindi la base ortonormale è

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}}, \quad \phi_2(t) = \frac{s_2(t)}{\sqrt{E_{s_2}}}.$$

La costellazione è così fatta



3. Posso adottare il criterio a minima distanza (simboli equiprobabili e rumore AWGN). Le regioni di decisione ottima sono indicate in figura.

4. La probabilità di errore è

$$P_E = P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{10}{2}}\right) = 0.013.$$

5. Con l'estensione otteniamo una costellazione biortogonale, simile alla QPSK con probabilità di errore che dobbiamo imporre a 10^{-2}, da cui

$$P_{\text{bit}} \approx 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{E_s \sigma_I^2}\right) = 10^{-2}$$

da cui

$$\sigma_I^2 = 1.84 \cdot 10^{-5}.$$

12.25 Primo compitino del 20/11/2020

Soluzione es. 115 [Testo]

1. Avendo 3 bit per campione si ha immediatamente che i livelli di quantizzazione sono $L = 2^3 = 8$. Inoltre, ignorando l'errore di saturazione, dalla (3.31) abbiamo

$$20 \log\left(\frac{\sqrt{\mathtt{N}/4}}{v_{\text{sat}}}\right) = (12 + 2\mathtt{N}) - 6.02 \cdot 3 - 4.77$$

da cui

$$v_{\text{sat}} = \frac{1}{\sqrt{\mathtt{N}/4}} 10^{-\frac{(12+2\mathtt{N})-6.02\cdot 3-4.77}{20}}$$

ovvero $v_{\text{sat}} = 5.5, 3.1, 2.0, 1.4$ e 0.98 per i cinque valori di $\mathtt{N}$. Il passo di quantizzazione è dunque

$$\Delta = \frac{2v_{\text{sat}}}{L} = 1.4,\ 0.78,\ 0.50,\ 0.35,\ 0.25.$$

Gli 8 valori (in binario) associati agli 8 valori quantizzati sono (dal più piccolo valore quantizzato al più grande) 111 101 110 100 000 001 010 011.

2. Troviamo la soglia positiva v_1. Dobbiamo avere

$$P(x \in [0, v_1]) = 0.25$$

ovvero $\mathrm{Q}\left(0\right) - \mathrm{Q}\left(\frac{v_1}{\sqrt{\mathtt{N}/4}}\right) = 0.25$, da cui

$$v_1 = \mathrm{Q}^{-1}\left(0.25\right)\frac{\sqrt{\mathtt{N}}}{2} = 0.34\sqrt{\mathtt{N}}$$

ovvero $v_1 = 0.34,\ 0.48,\ 0.58,\ 0.67,\ 0.75$. Per simmetria della PDF gaussiana a media nulla abbiamo che la soglia negativa è $v_2 = -v_1$. Quindi gli intervalli di quantizzazione sono $[-\infty, -0.34], [-0.34, 0], [0, 0.34], [0.34, +\infty]$, per il primo valore di $\mathtt{N}$.

3. Abbiamo 4 valori quantizzati nel punto 2, quindi ora consideriamo una 4-PAM. Inoltre, poiché i valori quantizzati sono assunti tutti con la stessa probabilità, abbiamo che i simboli trasmessi sono equiprobabili. L'energia dell'impulso fondamentale è (vedi energia del triangolo)

$$E_h = (1 - e^{-\mathtt{N}})^2 \frac{T}{3}$$

che fornisce $E_h = 1.3 \cdot 10^{-4},\ 2.5 \cdot 10^{-4},\ 3.0 \cdot 10^{-4},\ 3.2 \cdot 10^{-4}$ e $3.3 \cdot 10^{-4}$ per i vari valori di $\mathtt{N}$. Le coordinate dei punti della costellazione sono dunque $\pm\sqrt{E_h}$ e $\pm 3\sqrt{E_h}$. Avendo la trasmissione di simboli equiprobabili su canale AWGN, applichiamo il criterio di decisione a minima distanza e le soglie di decisione ottime sono 0, $\pm 2\sqrt{E_h}$.

4. Essendo una PAM abbiamo

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right)\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_h}{\sigma_I^2}}\right)$$

quindi $P_e = 0.19, 0.086, 0.062, 0.055, 0.052$.

5. Utilizzando una codifica di Gray possiamo fare in modo che simboli adiacenti differiscano per un solo bit, e, trascurando la possibilità di finire in una regione non adiacente a causa di un errore abbiamo

$$P_{\text{bit}} = \frac{1}{2}P_e$$

quindi $P_{\text{bit}} = 0.093, 0.043, 0.031, 0.027, 0.026$.

Soluzione es. 116 [Testo]

1. Abbiamo

$$E_{r_1} = E_{r_2} = 0.4 \cdot 10^{-3} \cdot 4 = 1.6 \cdot 10^{-3}.$$

Applicando la procedura di Gram-Schmidt ai segnali $r_1(t)$ e $r_2(t)$ inseriamo nella base ortonormale come primo segnale

$$\phi_1(t) = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-3}} r_1(t) = 25\, r_1(t)$$

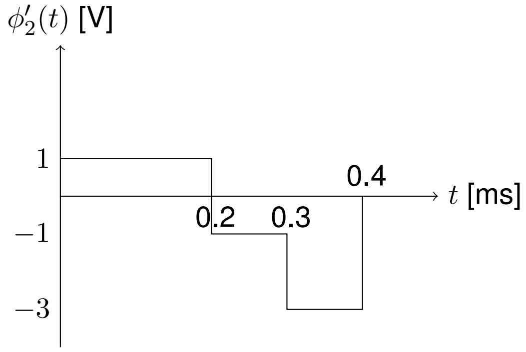
e poiché

$$< \phi_1(t), r_2(t) >= 25 \cdot 4(0.3 \cdot 10^{-3} - 0.1 \cdot 10^{-3}) = 0.02$$

si ha

$$\phi_2'(t) = r_2(t) - 0.02\phi_1(t) = r_2(t) - 0.5r_1(t)$$

rappresentato in figura



con

$$E_{\phi_2'} = 0.3 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4} = 1.2 \cdot 10^{-3}$$

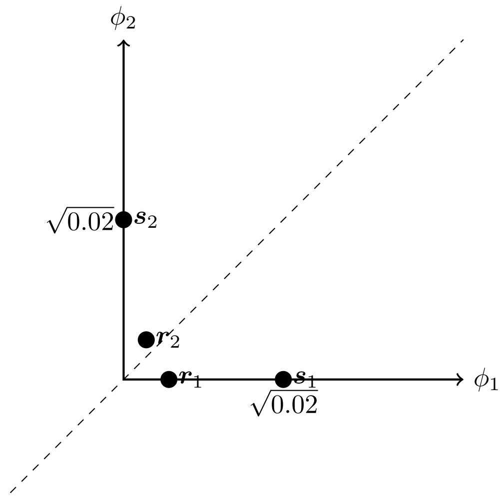
e infine

$$\phi_2(t) = \frac{\phi_2'(t)}{\sqrt{1.2 \cdot 10^{-3}}}.$$

I due segnali della segnalazione ortogonale cercata sono

$$s_1(t) = \sqrt{0.02}\phi_1(t), \quad s_2(t) = \sqrt{0.02}\phi_2(t).$$

2. La costellazione è riportata in figura.



Le coordinate dei punti $\boldsymbol{r}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ sono

$$r_{1,1} =< r_1(t), \phi_1(t) >= \frac{1}{25} = 0.04 \quad r_{1,2} =< r_1(t), \phi_2(t) >= 0$$

$$r_{2,1} =< r_2(t), \phi_1(t) >= 0.02 \quad r_{2,2} = \sqrt{E_{r_1} - r_{2,1}^2} = 0.035.$$

3. I simboli sono equiprobabili e il canale AWGN, quindi possiamo usare il criterio a minima distanza. Le regioni di decisione ottime sono indicate in figura. I simboli demodulati sono 1 per $r_1(t)$ e 2 per $r_2(t)$, poiché le loro rappresentazioni nel piano della costellazione cadono nelle rispettive regioni di decisione.

4. Abbiamo una modulazione binaria ortogonale, con segnali a eguale energia, quindi dalla (5.93) abbiamo
$$P_e = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.02}{2\sigma_I^2}}\right) = \mathtt{N}^2 \cdot 10^{-3}$$
abbiamo $\sigma_I^2 = 0.0011, 0.0014, 0.0018, 0.0021, 0.0026$.

5. Abbiamo una modulazione biortogonale, con segnali a uguale energia, quindi la probabilità di errore sul simbolo è quella di una 4-QAM, ovvero
$$P_e = 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.02}{6 \cdot 10^{-5} \cdot \mathtt{N}}}\right) - \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.02}{6 \cdot 10^{-5} \cdot \mathtt{N}}}\right)^2$$
ovvero $P_e = 0.034, 0.098, 0.15, 0.18, 0.21$.

12.26 Secondo compitino dell'8/1/2021

Soluzione es. 117 [Testo]

1. Matricola pari: il codice non può avere $d_{\min} = 4$, poiché per un codice lineare la distanza minima coincide con il peso di Hamming minimo delle parole (tranne quella nulla), e le due parole indicate hanno peso 3, quindi il codice ha distanza minima minore o uguale a 3.

   Matricola dispari: le parole di codice fornite hanno peso di Hamming 3, quindi è possibile (se anche tutte le altre parole hanno peso di Hamming minimo 3) che il codice abbia $d_{\min} = 3$. Ad esempio con $k = 2$ e usando le due parole date per costruire una matrice generatrice in forma sistematica, abbiamo una sola terza parola non nulla 110101, che ha peso 4: quindi abbiamo un codice con $d_{\min} = 3$.

2. Abbiamo un canale binario simmetrico senza memoria e parole equiprobabili, quindi possiamo adottare il metodo di decodifica a minima distanza.

   La sequenza 000100 è a distanza di Hamming 1 dalla parola 000000, che è presente nel codice in quanto lineare: poiché le altre parole si trovano almeno a distanza 3, questa parola è quella a minima distanza, quindi la parola decodificata è 000000.

   Per la sequenza 010111, notiamo è a distanza di Hamming 1 dalla sequenza 110101, somma delle due parole di codice, che, essendo il codice lineare, è essa stessa una parola di codice. Quindi la parola decodificata è 110101.

3. Le due parole di codice forniscono le prime due colonne della matrice generatrice, da cui otteniamo, per matricola pari
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$, ovvero la matrice di parità è

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per matricola dispari dobbiamo avere

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

da cui $a = 0$, $b = 0$ e $c = 1$, ovvero la matrice di parità è

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Per matricola pari, poiché 110 è la prima colonna di $\boldsymbol{H}$, la decodifica a minima distanza è 111111 + 100000 = 011111. Per matricola dispari, poiché 011 è la seconda colonna di $\boldsymbol{H}$ la decodifica a minima distanza è 111111 + 010000 = 101111.

5. Per $k = 2$ abbiamo 4 parole di codice, una è la parola identicamente nulla, due sono quelle fornite dall'esercizio, e l'ultima è la combinazione lineare delle due fornite, ovvero

$$000000, 100110, 010011, 110101.$$

Soluzione es. 118 [Testo]

1. Abbiamo $p(4) = 0.7,\ 0.6,\ 0.5,\ 0.4,\ 0.3$, per i cinque valori di $\mathtt{N}$. Applicando Huffman otteniamo lunghezze medie $1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.0$.

2. Il codice di Shannon-Fano è ottimo solo se le probabilità dei simboli sono tutte potenze di 2, il che non si ha mai nel nostro caso, quindi il codice del punto 1 non può essere di Shannon-Fano.

3. La lunghezza della parola è $\lceil i_X(1) \rceil + 1 =$ 6, 5, 4, 4, 3, per i diversi valori di $\mathtt{N}$ e la parola, sequenza di bit del punto medio del segmento di lunghezza $\mathtt{N}$ dopo la virgola è

$$000001, 00001, 0001, 0001, 0001$$

per i diversi valori di $\mathtt{N}$.

4. Dalla definizione di entropia condizionata abbiamo

$$\mathtt{N} + \frac{3}{2}\mathtt{N}^2 = p(1)2\mathtt{N} + p(2)\mathtt{N} + p(3)2\mathtt{N} + p(4)\mathtt{N}$$

e dalla somma a 1 della densità di probabilità abbiamo

$$2p(1) + 2p(2) = 1$$

quindi $p(2) = 0.5 - p(1)$. Otteniamo quindi

$$\mathtt{N} + \frac{3}{2}\mathtt{N}^2 = p(1)4\mathtt{N} + (0.5 - p(1))2\mathtt{N}$$

e la densità di probabilità è

$$p(1) = \frac{3}{4}\mathtt{N} = 0.038,\ 0.075,\ 0.11,\ 0.15,\ 0.19,$$

per i diversi valori di $\mathtt{N}$, mentre $p(2) = 0.5 - p(1)$. Infine l'entropia di X è

$$\mathbb{H}(X) = -\sum_a p(a)\log_2 p(a) = 1.4,\ 1.6,\ 1.8,\ 1.9,\ 2.0 \quad \text{bit}.$$

5. Perché esista il codice di canale richiesto dobbiamo avere

$$R = L_y/2 < C$$

ovvero $L_y < 1.2$ bit. Dal teorema di Shannon per la codifica di sorgente abbiamo che certamente esiste un codice di sorgente ad alfabeto binario con $L_y < H(x) + 1 = 1.1$, quindi esiste un codice di sorgente che soddisfa le richieste dell'esercizio.

12.27 Esame del 19/1/2021

Soluzione es. 119 [Testo]

1. Per una 16-QAM abbiamo $E_s = 5E_h$ e inoltre

$$E_h = \int h_1^2(t)dt = cA^2,$$

con

$$c = \frac{T}{3}, \quad T, \quad \frac{T}{2} + \frac{T}{6}, \quad \frac{16}{T^4}\frac{T^5}{5 \cdot 2^5} + \frac{T}{6}.$$

ovvero $c = 0.0007$, 0.0032,0.0029,0.0014. La probabilità di errore sul bit è

$$P_{\text{bit}} = \frac{3}{4}\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_h}{2 \cdot 10^{-2}}}\right)$$

da cui

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-2}}{c}\mathrm{Q}^{-1}\left(\frac{4}{3}P_{\text{bit}}\right)^2}$$

ovvero $A = 10.2$, 4.2, 4.8 e 6.7.

2. Se si triplica A, la probabilità di errore diminuisce, perché aumenta l'energia media della segnalazione. Se si dimezza A la probabilità di errore aumenta, perché si riduce l'energia media della segnalazione. In particolare, se A triplica, σ_I^2 deve essere moltiplicato per 9; se A dimezza, σ_I^2 deve essere diviso per 4 al fine di lasciare inalterata la probabilità di errore.

3. Abbiamo $E_s = E_1 = E_2 = cA^2$ e

$$B = \sqrt{\frac{E_1}{T}}$$

ovvero $B = 12$, 6, 4 e 6. Il prodotto interno tra $s_1(t)$ e $s_2(t)$ è $< s_1(t), s_2(t) >= B \int s_1(t)dt$

$$< s_1(t), s_2(t) >= 2BA\frac{T}{4} = \frac{ABT}{2} = 0.24$$

$$< s_1(t), s_2(t) >= 0$$

$$< s_1(t), s_2(t) >= BA\frac{T}{4} - BA\frac{T}{2} = -\frac{BAT}{4} = -0.22$$

$$< s_1(t), s_2(t) >= B \int_0^{T/2} \frac{4A}{T^2} t^2 dt + \frac{BAT}{4} = \frac{4A}{3T^2}\frac{T^3}{8} + \frac{AT}{4} = 0.025,$$

e il coefficiente di correlazione è

$$\rho = \frac{< s_1(t), s_2(t) >}{cA^2}$$

ovvero $\rho = 0.87$, 0, -0.3 e 0.14. La probabilità di errore sul simbolo è

$$P_e = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_1}{\sigma_I^2}\frac{1-\rho}{2}}\right)$$

quindi $P_e = 0.0854$, 0.0082, 0.0153, 0.0031.

4. Le coordinate dei punti sono

$$(\sqrt{E_s}, 0) \quad (\sqrt{E_s}\rho, \sqrt{E_s}\sqrt{1-\rho^2})$$

ovvero per il primo punto

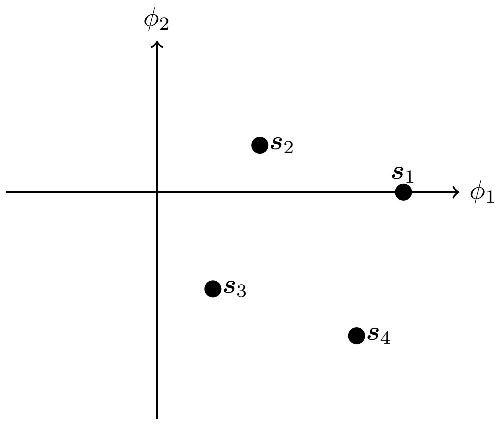
$$(0.5292, 0), (0.3394, 0), (0.2677, 0), (0.4174, 0)$$

e per il secondo punto

$$(0.4583, 0.0709), (0, 0.3394), (-0.0820, 0.3497), (0.0593, 0.3581)$$

Le modulazioni non sono mai antipodali ($\rho \neq -1$ sempre), e solo la seconda modulazione è ortogonale ($\rho = 0$).

5. Aggiungendo due punti alla costellazione come indicato si ottiene



Abbiamo una costellazione biortogonale con 4 valori, versione traslata e ruotata della costellazione di una 4-QAM con energia di impulso di trasmissione E'_h, distanza tra due punti dello stesso lato $\sqrt{2E'_h} = \sqrt{2E_s(1-\rho)}$ da cui

$$E'_h = \sqrt{E_s(1-\rho)}$$

ovvero $E'_h = 0.1937$, 0.3394, 0.3060, 0.3866. Otteniamo dunque la probabilità di errore di simbolo

$$P_e = 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E'_h}{2\sigma_I^2}}\right) - \mathrm{Q}^2\left(\sqrt{\frac{E'_h}{2\sigma_I^2}}\right)$$

quindi $P_e = 0.1573$, 0.0644, 0.0787, 0.048.

Soluzione es. 120 [Testo]

1. Poiché le densità di probabilità hanno supporto finito e simmetrico abbiamo immediatamente $v_{\mathrm{sat}} = 2.4, 3.5, 4.1$, e 3.2. Il passo di quantizzazione è $\Delta = 2v_{\mathrm{sat}}/4 = 1.2$, 2.0, 2.2 e 1.8.

2. Poiché il numero di livelli è elevato, possiamo approssimare l'errore granulare come uniforme. Tutte la variabili hanno media nulla e varianza

$$\sigma_a^2 = \int_{-v_{\mathrm{sat}}}^{v_{\mathrm{sat}}} Be^{-C|a|}a^2 da = \frac{2B}{C^3}\left[2 - e^{-Cv_{\mathrm{sat}}}(Cv_{\mathrm{sat}}^2 + 2Cv_{\mathrm{sat}} + 2)\right]$$

   ovvero $\sigma_a^2 = 0.95$, 1.7, 2.1 e 1.6. Abbiamo quindi

$$(\Lambda_q)_{\mathrm{dB}} = 6.02 \cdot \log_2 L + 4.77 + 20\log_{10}\left(\frac{\sigma_a}{v_{\mathrm{sat}}}\right)$$

   ovvero 16.9, 17.6, 19.2 e 21.8 dB.

3. Per $n = 0, 1$ abbiamo

$$p(Q_{3+n}) = \int_{n\Delta}^{(n+1)\Delta} Be^{-Ca}da = \frac{B}{C}(e^{-Cn\Delta} - e^{-C(n+1)\Delta})$$

   e inoltre $p(Q_1) = p(Q_4)$ e $p(Q_2) = p(Q_3)$, ovvero

$$p(Q_1) = p(Q_4) = 0.116, \quad p(Q_2) = p(Q_3) = 0.384$$

$$p(Q_1) = p(Q_4) = 0.1071, \quad p(Q_2) = p(Q_3) = 0.3929$$
$$p(Q_1) = p(Q_4) = 0.0806, \quad p(Q_2) = p(Q_3) = 0.4194$$
$$p(Q_1) = p(Q_4) = 0.989, \quad p(Q_2) = p(Q_3) = 0.4011$$

4. Utilizzando la codifica di Huffman abbiamo lunghezze medie

$$\bar{L} = 1.8472, \quad 1.8212, \quad 1.7417, \quad 1.7967.$$

5. Poiché i campioni emessi dalla sorgente sono indipendenti abbiamo

$$\mathbb{H}([X_{\mathrm{q}}(n-1), X_{\mathrm{q}}(n), X_{\mathrm{q}}(n+1)]) = 3 \cdot \mathbb{H}(X_{\mathrm{q}}(n)) = -3\sum_n p(Q_n)\log_2 p(Q_n)$$

   ovvero $\mathbb{H}([X_{\mathrm{q}}(n-1), X_{\mathrm{q}}(n), X_{\mathrm{q}}(n+1)]) = 5.3$, 5.2, 4.9 e 5.1 bit.

Poiché i campioni sono indipendenti, per l'entropia condizionata abbiamo

$$\mathbb{H}(X_q(n)|X_q(n-1) = \mathbb{H}(X_q(n))$$

ovvero $\mathbb{H}(X_q(n)) = 1.8$, 1.7, 1.6 e 1.7 bit.

Per l'entropia di $X_q(n)+X_q(n-1)$ / $X_q(n)/X_q(n+1)$ / $X_q(n)X_q(n+1)$ / $X_q(n)-X_q(n+1)$, osserviamo che tutte le operazioni in generale possono estendere l'insieme di possibili valori fino al massimo $4 \cdot 4 = 16$ valori. Quindi ci stiamo chiedendo se una variabile aleatoria con alfabeto di 16 valori può avere entropia strettamente maggiore di 4. Ciò è impossibile, poiché un bound superiore all'entropia è $\log_2 16 = 4$.

6. I simboli in uscita del canale hanno probabilità

$$p(Z(n) = Q_1) = p(Q_1), \quad p(Z(n) = Q_2) = p(Q_2) \quad p(Z(n) = 0) = 1 - p(Q_1) - p(Q_2),$$

da cui abbiamo l'entropia dell'uscita

$$\mathbb{H}(Z(n)) = 1.4, \quad 1.4, \quad 1.3, \quad 1.4 \text{ bit}.$$

L'entropia condizionata dell'uscita rispetto all'ingresso del canale è

$$\mathbb{H}(Z(n)|X_q(n)) = 0.$$

perché l'uscita è funzione deterministica dell'ingresso. Quindi $\mathbb{I}(Z(n); X_q(n)) = \mathbb{H}(Z(n))$.

Soluzione es. 121 [Testo]

1. Per la prima parola $\boldsymbol{x}$, la lunghezza di $\boldsymbol{x}$ è $n = 8$, quindi è possibile che il codice abbia $128 < 2^8$ parole di codice, in questo caso $k = 7$. Inoltre, essendo un codice lineare, deve valere il bound di Hamming ovvero

$$d_{\min} \leq 8 - 7 + 1 = 2$$

Per correggere 2 errori, dobbiamo avere $d_{\min} \geq 5$, il che è impossibile. Quindi non esiste un codice con 128 parole di codice (di cui una $\boldsymbol{x}$) che corregge 2 errori.

Per la seconda parola $\boldsymbol{x}$, la lunghezza di $\boldsymbol{x}$ è $n = 8$, quindi è possibile che il codice abbia $64 < 2^8$ parole di codice, in questo caso $k = 6$. Tuttavia, notiamo che $\boldsymbol{x}$ ha solo 3 uni e poiché per un codice lineare la distanza minima coincide con il peso di Hamming minimo delle parole di codice, non può correggere 4 errori. Quindi non esiste un codice con 64 parole di codice (di cui una $\boldsymbol{x}$) che corregge 4 errori.

OPPURE

Osservo che la distanza tra $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ è 2 e 4, quindi il codice non può correggere 2 errore e non può rilevare 3 errori.

2. Poiché il codice è in forma sistematica e la sindrome ha lunghezza 5, abbiamo che la matrice di parità $\boldsymbol{H}$ ha dimensione 5×8 e le ultime 5 colonne sono la matrice identità. Poiché il coset leader della sindrome 01100 è 01000000, abbiamo che la seconda colonna di $\boldsymbol{H}$ è 01100. La sindrome di $\boldsymbol{y}$ può essere calcolata in funzione della terza/prima colonna, c di $\boldsymbol{H}$ come segue

$$c + 01111 = 11001 \quad \rightarrow c = 01111 + 11001 = 10110$$

Infine poiché $\boldsymbol{z}$ ha sindrome 00101, dobbiamo avere che la prima/terza colonna, d di $\boldsymbol{H}$ soddisfa

$$d + 01100 + 00100 = 00101 \quad \rightarrow d = 01100 + 00100 + 00101 = 01101$$

$$d + 01100 + 01100 = 00101 \quad \rightarrow d = 01100 + 01100 + 00101 = 00101$$

Abbiamo quindi la matrice di parità

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Il codice non è lineare perché $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ non è una parola di codice. La distanza di $\boldsymbol{x}$ da $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ è 5, 2 e 6 (3, 4 e 5) quindi può correggere al massimo 0 (1) errore.

4. Per $\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ ho $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{c}$. Per $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ ottengo $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ in corrispondenza di $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$, rispettivamente. Quindi le possibili parole ricevute sono $\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, e $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, con probabilità

$$p(\mathbf{0}) = 0.25 \cdot 0.7 = 0.175, \ p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{y}) = 0.25 \cdot (0.7 + 0.3) = 0.25, \ p(\boldsymbol{z}) = 0.25 \cdot 0.7 = 0.175,$$

$$p(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = 0.25 \cdot 0.3 = 0.075, \ p(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = 0.25 \cdot 0.3 = 0.075$$

e nell'altro caso

$$p(\mathbf{0}) = 0.25 \cdot 0.6 = 0.15, \ p(\boldsymbol{x}) = p(\boldsymbol{y}) = 0.25 \cdot (0.6 + 0.4) = 0.25, \ p(\boldsymbol{z}) = 0.25 \cdot 0.6 = 0.15,$$

$$p(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = 0.25 \cdot 0.4 = 0.1, \ p(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = 0.25 \cdot 0.4 = 0.1.$$

5. Utilizzo il criterio a massima verosimiglianza. Se ricevo $\mathbf{0}$ o $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ posso aver trasmesso solo $\mathbf{0}$, quindi decodifico $\mathbf{0}$, e non faccio errori. Se ricevo $\boldsymbol{x}$ o $\boldsymbol{y}$ decodifico $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ e commetto un errore con probabilità 0.3 / 0.4. Se ricevo $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ o $\boldsymbol{z}$ decodifico $\boldsymbol{z}$ senza errore. Quindi la probabilità di errore media è

$$P_e = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15 \quad \text{oppure} \quad 0.5 \cdot 0.4 = 0.20.$$

12.28 Esame del 10/2/2021

Soluzione es. 122 [Testo]

1. Analogamente a quanto visto per la modulazione QAM, poiché $10^9 = f_0 >> 1/T = 10^4$, abbiamo che una base ortonormale per la segnalazione è

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_h}} h(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_h}} h(t) \sin(2\pi f_0 t),$$

dove l'energia dell'impulso $h(t)$ è

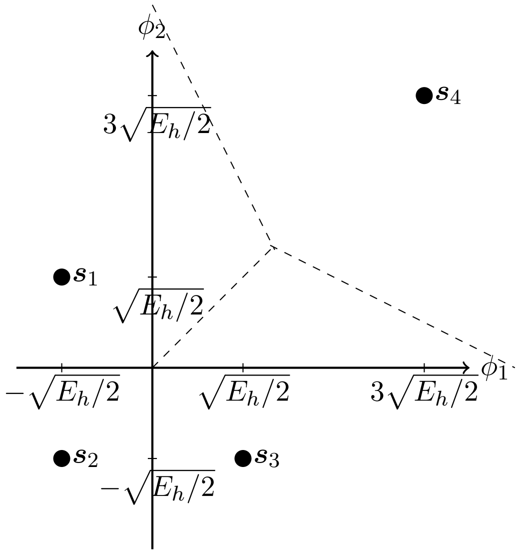
$$E_h = \frac{2 \cdot 10^{-3} T}{3} = 6.6 \cdot 10^{-7}.$$

2. Con la base trovata al punto precedente i punti della costellazione sono

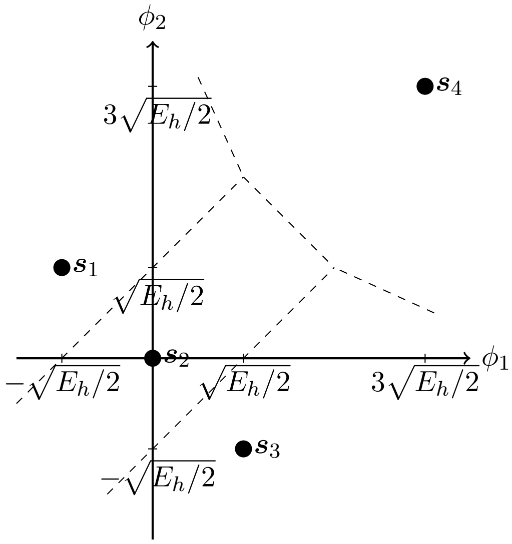
$$\boldsymbol{s}_1 = [-1, 1]\sqrt{E_h/2}, \quad \boldsymbol{s}_3 = [1, -1]\sqrt{E_h/2}, \quad \boldsymbol{s}_4 = [3, 3]\sqrt{E_h/2},$$

$$\boldsymbol{s}_2 = [-1, -1]\sqrt{E_h/2}, \quad [\text{variante: } \boldsymbol{s}_2 = [0, 0]].$$

Avendo un canale AWGN e simboli equiprobabili, utilizziamo il criterio di decisione a minima distanza.



Variante:



3. La regione di decisione di $\boldsymbol{s}_2$ è il terzo quadrante e, come per le regioni di angolo di una QAM abbiamo

$$\mathrm{P}[\mathrm{C}|a_n = 2] = \left[1 - \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_h}{2\sigma_I^2}}\right)\right]^2 = [1 - \mathrm{Q}(1.82)]^2 = 0.93$$

Variante: In questo caso la probabilità di decisione corretta è la probabilità di rimanere all'interno del rettangolo aperto su un lato. Con una rotazione degli assi (corrispondente ad un cambio di base) in modo da avere i lati lunghi del rettangolo allineati con ϕ_1, abbiamo

$$\mathrm{P}[\mathrm{C}|a_n = 2] = \mathrm{P}[w_1 \leq d_{4,2}/2, w_2 \in (-\sqrt{E_h}/2, \sqrt{E_h}/2)] =$$

$$= \mathrm{P}[w_1 \leq d_{4,2}/2]\mathrm{P}[w_2 \in (-\sqrt{E_h}/2, \sqrt{E_h}/2)] =$$

con $d_{4,2} = 3\sqrt{E_h} = 2.4 \cdot 10^{-3}$ la distanza tra i punti 2 e 4, da cui

$$\mathrm{P}[\mathrm{C}|a_n = 2] = \left[1 - \mathrm{Q}\left(\frac{d_{4,2}}{2\sigma_I}\right)\right]\left[1 - 2\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{E_h}{4\sigma_I^2}}\right)\right] = (1 - \mathrm{Q}(3.85))(1 - 2\mathrm{Q}(1.28)) = 0.80.$$

4. Diminuendo la probabilità di $s_2(t)$ non abbiamo più i segnali equiprobabili, e ricorriamo al criterio di decisione maximum a posteriori (MAP). I confini delle regioni di decisione attorno a $\boldsymbol{s}_2$ si avvicinano a $\boldsymbol{s}_2$, e l'energia media aumenta perché gli altri segnali hanno energia uguale o maggiore di $s_2(t)$.

Soluzione es. 123 [Testo]

1. Il canale è binario perché sia all'ingresso che all'uscita i simboli possono assumere due soli valori. Non è simmetrico perché la matrice di transizione non è simmetrica.

2. Le probabilità dei simboli in uscita sono

$$\mathrm{P}[y(nT) = 0] = \mathrm{P}[y(nT) = 0|x(nT) = 4]0.7 + \mathrm{P}[y(nT) = 0|x(nT) = 9]0.3 = 0.8 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.3 = 0.65$$

$$\mathrm{P}[y(nT) = 1] = 1 - \mathrm{P}[y(nT) = 0] = 0.35.$$

L'entropia dell'uscita è

$$\mathrm{H}(y(nT)) = -0.65 \log_2 0.65 - 0.35 \log_2 0.35 = 0.934 \quad \text{bit}$$

e l'entropia condizionata è

$$\mathrm{H}(y(nT)|x(nT)) = -0.7[0.8 \log_2 0.8 + 0.2 \log_2 0.2] - 0.3[0.7 \log_2 0.7 + 0.3 \log_2 0.3] = 0.770 \quad \text{bit.}$$

Pertanto si ha

$$\mathrm{I}(x(nT); y(nT)) = 0.934 - 0.770 = 0.164 \quad \text{bit.}$$

3. Da

$$\mathrm{P}[y(nT) = 0] = \mathrm{P}[y(nT) = 0|x(nT) = 4]\mathrm{P}[x(nT) = 4] + \mathrm{P}[y(nT) = 0|x(nT) = 9](1 - \mathrm{P}[x(nT) = 4]) =$$

$$= 0.8\mathrm{P}[x(nT) = 4] + 0.3(1 - \mathrm{P}[x(nT) = 4]) = 0.3 + 0.5\mathrm{P}[x(nT) = 4],$$

imponendo $\mathrm{P}[y(nT) = 0] = 0.5$ abbiamo

$$\mathrm{P}[x(nT) = 4] = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5} = 0.6, \quad \mathrm{P}[x(nT) = 9] = 0.4.$$

Con questa densità di probabilità dell'ingresso i due valori di uscita sono equiprobabili, quindi ad entropia massima (in questo caso uguale a 1).

4. Trattandosi di un canale senza memoria e simboli di ingresso indipendenti, la densità di probabilità del vettore $\boldsymbol{y}(2kT)$ è

$$p_{\boldsymbol{y}}([0,0]) = 0.65^2 = 0.4225, \quad p_{\boldsymbol{y}}([0,1]) = p_{\boldsymbol{y}}([1,0]) = 0.35{\cdot}0.65 = 0.2275, \quad p_{\boldsymbol{y}}([1,1]) = 0.35^2 = 0.1225.$$

Il codice di Huffman è il codice ottimo cercato, (es. 1, 000, 01, 001), con lunghezza media delle parole di codice $L = 1.92$ bit.

Variante:

Per il codice di Elias abbiamo che le lunghezze delle parole sono

$$L_1 = \lceil -\log_2 0.4225 \rceil + 1 = 3, \quad L_2 = L_3 = \lceil -\log_2 0.2275 \rceil + 1 = 4, \quad L_4 = \lceil -\log_2 0.1225 \rceil + 1 = 5$$

quindi le parole di codice hanno lunghezza media 3.7 (codice 110, 0011, 0111, 00001).

5. Il canale è un canale binario con cancellazione, con probabilità di cancellazione 0.2 con capacità
$$C = (1 - 0.2)/T = 800 \quad \text{bit/s}.$$

Soluzione es. 124 [Testo]

1. Trattandosi di un codice di Hamming con $n = 255$ deve valere
$$255 = 2^{255-k} - 1,$$
ovvero la lunghezza delle parole in ingresso al codificatore è $k = 255 - \log_2 256 = 255 - 8 = 247$.

2. La distanza minima di un codice di Hamming è 3, e la sequenza $\tilde{c}$ è a distanza 1 dalla sequenza identicamente nulla, che certamente è una parola di codice. Quindi la parola decodificata è la sequenza di k bit identicamente nulla.

3. Poiché nella matrice di parità di un codice di Hamming ci sono tutte colonne diverse dalla sequenza identicamente nulla, con la sostituzione proposta abbiamo due colonne del tipo $[1, 0, \dots, 0]^T$, pertanto per la sindrome $[1, 0, \dots, 0]^T$ ci sono due vettori con un solo 1 nel coset. Questo significa che la distanza minima è minore o uguale a 2. La distanza minima non può essere 1 perché tutte le colonne della matrice di parità sono comunque non-nulle.

4. Avendo matrice generatrice, il codice è lineare. Con il nuovo codice abbiamo un solo bit di parità. Per assicurarsi che il codice riesca almeno a rilevare 1 errore, poniamo il bit di parità come somma di tutti i bit del messaggio
$$c_{255} = \sum_{\ell=1}^{254} b_\ell.$$

5. Essendo il codice cercato lineare, abbiamo che
$$d_{\min} \geq 2 \cdot 122 + 1 = 245$$
dal bound di Singleton abbiamo
$$k \leq n + 1 - d_{\min} = 255 + 1 - 245 = 11$$
e quindi il codice cercato ha al più $2^{11} = 2048$ parole di codice.

12.29 Esame del 16/6/2021

Soluzione es. 125 [Testo]

1. Utilizzando la procedura di Gram-Schmidt abbiamo
$$E_{s_1} = \int_0^T \left[\frac{T+1}{T(t+1)}\right]^2 dt = \frac{(T+1)^2}{T^2}\left(1 - \frac{1}{T+1}\right) = \frac{T+1}{T} = 11,$$
quindi il primo segnale della base è
$$\phi_1(t) = \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{T+1}} \frac{T+1}{T(t+1)} = \frac{\sqrt{T+1}}{\sqrt{T}(t+1)}.$$

Calcoliamo la proiezione di $s_2(t)$ su $\phi_1(t)$

$$\int_0^T \frac{\sqrt{T+1}}{\sqrt{T}(t+1)}\left[\frac{(t+1)}{3(T+1)} - \frac{T}{3(T+1)\log(T+1)}\right] dt = 0$$

quindi $s_2(t)$ è ortogonale a $s_1(t)$. Riscrivendo $s_2(t)$ come

$$s_2(t) = \frac{t - 0.049}{3.3}$$

abbiamo

$$E_{s_2} = \int_0^T \left[\frac{t-0.049}{3.3}\right]^2 dt = \frac{(T-0.049)^3 - 0.049^3}{3 \cdot 3.3^2} = 4.5 \cdot 10^{-7}.$$

Il secondo segnale della base è dunque $\phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E_{s_2}}} s_2(t)$. Per $s_3(t)$ abbiamo

$$s_3(t) = 2.5 s_1(t) + s_2(t)$$

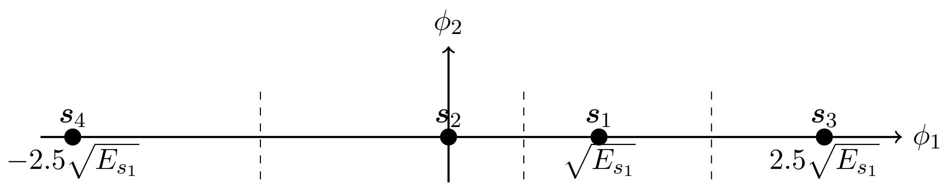
e quindi sia $s_3(t)$ che $s_4(t)$ sono combinazioni lineari di $s_1(t)$ e $s_2(t)$, ovvero di $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$, e quindi la base è completa con $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$.

2. Dal punto precedente le coordinate dei punti della costellazione sono

$$\boldsymbol{s}_1 = [\sqrt{E_{s_1}}, 0] = [3.32, 0], \quad \boldsymbol{s}_2 = [0, \sqrt{E_{s_2}}] = [0, 6.7 \cdot 10^{-4}],$$

$$\boldsymbol{s}_3 = [2.5\sqrt{E_{s_1}}, \sqrt{E_{s_2}}] = [8.29, 6.7 \cdot 10^{-4}], \quad \boldsymbol{s}_4 = [-2.5\sqrt{E_{s_1}}, -\sqrt{E_{s_2}}] = [-8.29, -6.7 \cdot 10^{-4}].$$

Avendo un canale AWGN e simboli equiprobabili, utilizziamo il criterio di decisione a minima distanza.



3. Essendo s_1 e s_2 i simboli più vicini, con distanza

$$d_{\min} \approx \sqrt{E_{s_1}} = 3.32$$

un limite inferiore della probabilità di errore basato sulla una distanza fornisce (ho $N_{\min} = 2$ punti con altri punti a distanza minima)

$$P(E) \geq \frac{2}{4} \mathrm{Q}\left(\frac{3.32}{2 \cdot 1.5}\right) = 0.26.$$

4. Diminuendo la probabilità di $s_2(t)$ non abbiamo più i segnali equiprobabili, e ricorriamo al criterio di decisione maximum a posteriori (MAP). I confini delle regioni di decisione attorno a $\boldsymbol{s}_2$ si avvicinano a $\boldsymbol{s}_2$, e l'energia media aumenta perché gli altri segnali hanno energia uguale o maggiore di $s_2(t)$.

Soluzione es. 126 [Testo]

1. Dalla (3.31) abbiamo

$$b \geq \frac{10 - 4.77 - 20\log_{10}(2/4)}{6.02} = 1.9$$

quindi $b = 2$, che fornisce $L = 4$ livelli di quantizzazione. Il passo di quantizzazione è dunque

$$\Delta = 8/4 = 2.$$

2. La probabilità di saturazione è
$$P_{\text{sat}} = 2\int_4^5 \frac{1+\cos a}{10+2\sin 5}da = \frac{5+\sin 5 - 4 - \sin 4}{5+\sin 5} = 0.197.$$
3. Calcoliamo la probabilità di ciascun valore quantizzato
$$P(Q_2) = P(Q_3) = \int_0^2 \frac{1+\cos a}{10+2\sin 5}da = \frac{2+\sin 2}{10+2\sin 5} = 0.23$$
$$P(Q_1) = P(Q_4) = \frac{1-2\cdot 0.23}{2} = 0.27$$
e l'entropia è
$$H(Q) = -2\cdot 0.23\log_2 0.23 - 2\cdot 0.27\log_2 0.27 = 1.995 \text{ bit}.$$
4. Abbiamo 2 livelli in più con probabilità
$$P(Q_1) = P(Q_6) = \int_4^5 \frac{1+\cos a}{10+2\sin 5}da = \frac{1+\sin 5 - \sin 4}{10+2\sin 5} = 0.099,$$
mentre per gli altri livelli si ha
$$P(Q_3) = P(Q_4) = 0.23$$
$$P(Q_2) = P(Q_5) = \frac{1-2(0.23+0.099)}{2} = 0.171.$$
Si noti che solo Q_3 e Q_4 hanno la stessa probabilità del punto precedente. Costruiamo un codice di Huffman (es. 001, 000,01, 10, 111, 110), che ha lunghezza media delle parole di codice $L = 2.54$ bit.

Soluzione es. 127 [Testo]

1. Poiché l'entropia condizionata è
$$H(Z|X) = 0.5H(Z|X=0)+0.5H(Z|X=1) = -[0.05\log_2 0.05 + (1-0.05)\log_2(1-0.05)] = 0.286 \text{ bit}$$
e Z assume i valori 0 e 1 con la stessa probabilità (quindi $H(Z) = 1$) si ha
$$I(X;Z) = H(Z) - H(Z|X) = 1 - 0.286 = 0.71 \text{ bit}.$$
2. Abbiamo a che fare con un canale binario senza memoria simmetrico, infatti
$$P(Z=1|X=1) = 0.95, \quad P(Z=0|X=0) = 0.95,$$
$$P(Z=1|X=0) = 0.05, \quad P(Z=0|X=1) = 0.05.$$
La densità di $X(n)$ è uniforme ($P(X(n) = 1) = 0.5$) e quindi l'efficienza spettrale è l'informazione mutua calcolata al punto precedente
$$C_s = 0.71 \text{ bit}.$$
3. Si tratta di un codice lineare con un bit di ridondanza, in grado di rilevare un errore e non in grado di correggere errori.
4. Osserviamo che otteniamo un canale con cancellazione (erasure) dove "2" è il simbolo di erasure e la probabilità di erasure è 0.1. Quindi l'efficienza spettrale è
$$C_s = 1 - 0.1 = 0.9 \text{ bit}.$$
Anche in questo caso l'efficienza spettrale è raggiunta con densità di $X(n)$ uniforme ($P(X(n) = 1) = 0.5$).

12.30 Esame del 29/8/2021

Soluzione es. 128 [Testo]

1. Il codice è in forma sistematica, quindi una matrice di parità è

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Osserviamo che una qualsiasi colonna di $\boldsymbol{H}$ può essere scritta come combinazione lineare di altre colonne due colonne, quindi la distanza minima è $d_{\min} = 3$.

2. I coset coincidono con il numero di diverse sindromi. Poiché le colonne di $\boldsymbol{H}$ generano l'intero spazio vettoriale di dimensione 3, ci sono $2^3 = 8$ coset.

3. Poiché la distanza minima è 2, singoli errori sono correggibili, quindi tutti i 7 vettori con un solo 1 (peso di Hamming 1) sono coset leader di diversi coset.

4. Togliere bit di parità diminuisce (o al più non cambia) la distanza minima. D'altra parte, diminuendo la lunghezza delle parole di codice, il rate del codice aumenta.

Soluzione es. 129 [Testo]

1. Il canale introduce uno scalamento di ampiezza, irrilevante per il calcolo della base. I due segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono proporzionali quindi la base è costuita da un segnale, ad esempio

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}}.$$

   L'energia dei due segnali è

$$E_{s_1} = \int_0^T \frac{1}{2T} \cos^2\left(2\pi \frac{8t}{T}\right) = 0.25, \qquad E_{s_2} = 0.5,$$

   quindi

$$\phi_1(t) = 31.62 \cos\left(2\pi \frac{8t}{T}\right), t \in [0, T], \text{ e } \phi_1(t) = 0 \text{ altrove},$$

   e l'energia media in tramissione è

$$E_s = 0.5 E_{s_1} + 0.5 E_{s_2} = 0.375.$$

2. Il canale scala i segnali di $A = 10^{6/20} = 2$. Si tratta di una modulazione binaria su canale AWGN con simboli equiprobabili, dove i due simboli distano

$$d = A[\sqrt{E_{s_2}} - \sqrt{E_{s_1}}] = 0.414$$

   quindi la probabilità di errore è

$$P_e = \mathrm{Q}\left(\frac{d}{2\sigma_w}\right) = 0.019.$$

3. Dobbiamo ricorrere al criterio di decisione MAP perché i simboli non sono equiprobabili. Abbiamo

$$p_{r|a_0}(r|1) = \frac{1}{10}e^{-\frac{|a-A\sqrt{E_1}|}{5}}, \quad p_{r|a_0}(r|2) = \frac{1}{10}e^{-\frac{|a-A\sqrt{E_2}|}{5}},$$

da cui il confine tra le due regioni di decisioni si ottiene trovando il valore di r per cui $D(r;1) = D(r;2)$, ovvero

$$0.45e^{-\frac{|a-1.414|}{5}} = 0.55e^{-\frac{|a-1|}{5}}$$

$$-\frac{|a-1.414|}{5} + \ln 0.55 = -\frac{|a-1|}{5} + \ln 0.45$$

Ipotizzando che il confine della regione di decisione si trovi tra i due simboli risolviamo

$$a - 1.414 - 0.598 = -a + 1 - 0.798 \quad \to \quad a = 1.11$$

che effettivamente è tra i due simboli.

Se le probabilità dei simboli sono 0.3 e 0.7, si ha che $D(r;1) < D(r;2)$ per ogni r, e quindi si decide sempre per il simbolo 2.

4. La probabilità di errore è

$$P(E) = 1 - P(C) = 1 - 0.45\int_{-\infty}^{a-A\sqrt{E_{s_1}}} p_w(w)dw - 0.55\int_{a-A\sqrt{E_{s_2}}}^{\infty} p_w(w)dw =$$

$$1 - 0.45\left[0.5 - 0.5e^{-0.11/5} + 0.5\right] - 0.55\left[0.5 + 0.5 - 0.5e^{(1.11-1.41)/5}\right] = 0.48.$$

Se il simbolo 1 viene trasmesso con probabilità 0.3, la probabilità di errore è

$$P(E) = 0.3.$$

12.31 Primo compitino del 12/11/2021

Soluzione es. 130 [Testo]

1. Le energie dei due segnali in trasmissione sono

$$E_{s_1} = \frac{T}{4T} = 0.25, \quad E_{s_2} = \frac{T}{T} = 1,$$

e l'energia media è

$$E_s = \frac{1.25}{2} = 0.63.$$

Osservo che il canale introduce solo un guadagno, quindi la base può essere ottenuta dai due segnali in trasmissione. Inoltre, i due segnali $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono proporzionali tra loro, quindi la base ha dimensione $I = 1$ e, poiché $s_2(t)$ ha già energia unitaria

$$\phi_1(t) = s_2(t) = \sqrt{\frac{1}{T}}\mathrm{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right).$$

2. I punti della costellazione al ricevitore sono

$$s_1' = \sqrt{10^{0.6} E_{s_1}} = 1, \quad s_2' = \sqrt{10^{0.6}} = 2$$

e la distanza tra i due punti è $d = 1$, quindi la probabilità di errore è

$$P_e = \mathrm{Q}\left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-1}}\right) = 6.2 \cdot 10^{-3}.$$

3. Devo usare il criterio di decisione MAP e scegliere per ogni valore di r il valore di m che massimizza $D(r; m)$ con

$$D(r;1) = 0.45 \frac{1}{\sqrt{1.4}} \mathrm{rect}\left(\frac{a-1}{1.4}\right) \quad D(r;2) = 0.55 \frac{1}{\sqrt{1.4}} \mathrm{rect}\left(\frac{a-2}{1.4}\right).$$

Osservo pertanto che le due regioni di decisioni sono semirette e che $D(r;2) > D(r;1)$ nel supporto di $D(r;2)$, quindi il confine delle due regioni è nel punto

$$A = 2 - 0.7 = 1.3.$$

4. Noto che trasmettendo s_2 il rumore non può mai portare fuori dalla regione di decisione, quindi $P(E|1) = 0$, mentre trasmettendo s_1 la probabilità di finire fuori dalla regione $\mathcal{R}_1$ è

$$P(E|1) = \int_A^{\infty} p_w(a - s_1) = \frac{1}{1.4}(1.7 - 1.3) = 0.29,$$

quindi la probabilità di errore è

$$P(E) = 0.45 \cdot 0.29 = 0.13.$$

5. La convoluzione di due $\mathrm{rect}(t/T)$ è $T\mathrm{triangle}(t/T)$, quindi i due segnali al ricevitore diventano

$$s_1'(t) = \frac{\sqrt{T}}{4} \mathrm{triangle}((t - T/2)/T) \quad s_2'(t) = \frac{\sqrt{T}}{2} \mathrm{triangle}((t - T/2)/T),$$

con energie

$$E_{s_1'} = \frac{10^{-6}}{24} = 0.04 \cdot 10^{-6}, \quad E_{s_2'} = 0.16 \cdot 10^{-6}$$

e distanza $d = \sqrt{E_{s_2'}} - \sqrt{E_{s_1'}} = 0.12 \cdot 10^{-3}$ che è minore della distanza calcolata al punto 2, quindi la probabilità di errore aumenta.

Soluzione es. 131 [Testo]

1. Si tratta di una 10-PAM ($M = 10$) traslata (il coefficiente moltiplicativo è $2m - M + 1$ anziché $2m - M - 1$) con energia dell'impulso ($h_{\mathrm{Tx}}(t) = s_5(t)$)

$$E_h = A^2 \frac{T}{3} = A^2 \cdot 1.7 \cdot 10^{-4}.$$

Imponendo probabilità di errore sul simbolo 10^{-3}, dalla (5.180) abbiamo

$$1.8\mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{A^2 \cdot 1.7 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}}}\right) = 10^{-3}$$

da cui

$$A = \sqrt{[\mathrm{Q}^{-1}(5.56 \cdot 10^{-4})]^2 \frac{1}{1.7 \cdot 10^{-1}}} = 7.9.$$

2. Lo schema è quello di Figura 5.10 con $t_0 = T$ per rendere causale il filtro con risposta impulsiva
$$\psi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1.7 \cdot 10^{-4}}} \text{triangle}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right).$$

3. Con $A = 1/\sqrt{2T}$ l'energia dell'impulso è
$$E_h = \frac{1}{6} = 0.167,$$
e dalla (5.172) l'energia media della segnalazione è $E_s = 0.17 \cdot (33 + 4) = 6.18$, tenendo conto della traslazione di $2\sqrt{E_h}$.

4. La coordinata è la proiezione di $r(t)$ sul segnale della base $\phi_1(t)$ ovvero
$$r_1 = \int \phi_1(t) r(t) dt = 0.8\sqrt{\frac{3}{T}} \int_0^{T/2} \text{triangle}\left(\frac{t - T/2}{T/2}\right) dt = 7.7 \cdot 10^{-3}.$$

5. Rimuovo i due segnali esterni che hanno energia massima, ovvero per $m = 9$ e 10. La probabilità di errore diminuisce, perché ho un numero inferiore di segnali interni, che hanno probabilità di errore maggiore. Infatti, dalla (5.180) al diminuire di M la probabilità di errore diminuisce, se E_h e σ_I^2 rimangono invariati.

12.32 Secondo compitino del 11/1/2022

Soluzione es. 132 [Testo]

1. Osservo che esiste un codice di Hamming con le caratteristiche indicate, perché $k = 57$ e $n = 63$ soddisfano il bound di Hamming all'eguaglianza, infatti $63 = 2^{63-57} - 1$.

2. Essendo di Hamming, la distanza minima del codice è $d_{min} = 3$ e il codice rileva sempre fino a 2 errori e ne corregge sempre fino a 1.

3. La matrice ha 6 righe e 63 colonne e le ultime 6 colonne costituiscono la matrice identità. Le colonne sono tutte diverse, con almeno un bit non nullo e hanno peso di Hamming decrescente da sinistra a destra. La prima colonna è costituita da tutti 1. La sindrome della sequenza cercata è un vettore identicamente nullo perché somma di tutte le colonne della matrice identità e di una colonna di tutti 1. Quindi la sequenza considerata è parola di codice e la sua decodifica fornisce la stessa sequenza.

4. Se il codice avesse distanza minima 5, correggerebbe sempre 2 errori. Usando il bound di Hamming dovrei avere
$$0.8906 = \frac{57}{64} \leq 1 - \frac{1}{64} \log_2(1 + 64 + 2016) = 0.8278$$
che però non è verificato. Quindi il nuovo codice deve avere distanza minima strettamente inferiore a 5.

   Alternativamente, si può osservare che aggiungendo un bit di parità al più la distanza minima aumenta di 1, diventando $d_{\min} = 4$.

Soluzione es. 133 [Testo]

1. Imponendo la probabilità di saturazione desiderata abbiamo

$$\int_{-v_{\rm sat}}^{v_{\rm sat}} \frac{\pi}{24}\cos\left(\frac{\pi a}{12}\right) da = 1 - 10^{-3}$$

$$\sin\left(\frac{\pi v_{\rm sat}}{12}\right) = 1 - 10^{-3} \quad \rightarrow \quad v_{\rm sat} = 5.83.$$

Poiché in questo caso la densità di probabilità è una funzione pari, la media di X_n è zero, e la potenza coincide con la varianza, quindi la deviazione standard vale $\sigma_X = \sqrt{6.82} = 2.61$. Dalla (3.31) abbiamo

$$12 = 6.02b + 4.77 + 20\log_{10}\left(\frac{2.61}{6}\right),$$

quindi $b = 2.4$, ovvero uso 3 bit e quindi ho 8 livelli di quantizzazione.

2. Le probabilità dei sei livelli sono

$$p(-5) = p(5) = 0.067, \quad p(-3) = p(3) = 0.183, \quad p(-1) = p(1) = 0.25$$

e applicando il metodo di Huffman le parole di codice sono ad esempio [0,0,1,1], [0,0,0], [1,0], [0,1], [1,1], [0,0,1,0] con lunghezza media delle parole di 2.451 bit.

3. La lunghezza media delle parole di codice di Shannon-Fano è

$$L = \sum_i p(i)\lceil -\log_2(p(i))\rceil = 2.63\,\text{bit}.$$

4. Il quantizzatore A ha soglia a zero, due valori di uscita (-3 e 3) con uguale probabilità. Il secondo quantizzatore ha due soglie a -2 e 2, tre valori di uscita (-4, 0, 4) e probabilità

$$P(Z_n = 4) = P(Z_n = -4)\int_{-6}^{-2} \frac{\pi}{24}\cos\left(\frac{\pi a}{12}\right) da = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{6\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{12}\right)\right] = 0.25,$$

$$P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n = 4) - P(Z_n = -4) = 0.5.$$

La probabilità condizionata è

$$P(Z_n = 4|Y_n = 3) = P(Z_n = -4|Y_n = -3) = \frac{0.25}{0.5} = 0.5,$$

$$P(Z_n = 0|Y_n = 3) == 1 - P(Z_n = 4|Y_n = 3) = P(Z_n = 0|Y_n = -3) = 1 - P(Z_n = -4|Y_n = -3) = 0.5$$

5. Si tratta di un canale con erasure, con probabilità di erasure 0.25 e ingresso equiprobabile, quindi l'informazione mutua è

$$I(Y;Z) = 1 - 0.5 = 0.5\,\text{bit}.$$

12.33 Esame del 19/1/2022

Soluzione es. 134 [Testo]

1. I due segnali hanno la stessa energia, e l'energia media al ricevitore (considerando anche il guadagno di 3 dB) è $E_s = 1.2B^2$. Si tratta di una modulazione binaria con coefficiente di correlazione (tenendo conto del guadagno)
$$\rho = 2\frac{< s_1(t), s_2(t) >}{E_s} = 0.4\frac{B^2}{E_s} = 0.33,$$
e dalla (5.77) bisogna avere
$$E_s(1-\rho) = (\mathrm{Q}^{-1}(10^{-3})^2 2\sigma_I^2 \rightarrow \quad 0.8B^2 = 1.9$$
da cui infine $B = 1.54$ e $E_s = 2.85$.

2. Una base ortogonale per la costellazione è (usando Gram-Schmidt)
$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_s}} = 24\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.3T}{0.6T}\right),$$
$$\phi_2'(t) = s_2(t) - < s_2(t), \phi_1(t) > \phi_1(t) = 56\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.8T}{0.4T}\right),$$
che normalizzato fornisce
$$\phi_2(t) = 1.58\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.8T}{0.4T}\right).$$
Le coordinate della costellazione al ricevitore (tenendo conto dell'amplificazione del canale) sono $\boldsymbol{s}_1 = [\sqrt{E_s}, 0] = [1.69, 0]$ e $\boldsymbol{s}_2(t) = [\rho\sqrt{E_s}, \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{E_s}] = [0.56, 1.5]$.

3. Ogni simbolo porta 1 bit, quindi il numero di b/s trasmessi è $1/T = 333.3$ b/s. Il ricevitore è quello a singolo filtro di figura 5.20. Scegliendo come primo segnale della base ortonormale
$$\phi_1(t) = s_1(t) - s_2(t) = \frac{1}{\sqrt{0.8T}}\left[\mathrm{rect}\left(\frac{t-0.2T}{0.4T}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{t-0.8T}{0.4T}\right)\right],$$
il filtro ha risposta impulsiva $h(t) = \phi_1(T-t)$ per essere causale e $t_0 = T$.

4. L'energia di $s_2'(t)$ è la stessa di $s_1(t)$, quindi l'energia media non cambia. La probabilità di errore diminuisce perché i due nuovi segnali (con la stessa energia di prima) sono ora antipodali ($\rho = -1$).

5. Dalla (5.77), la probabilità di errore dipende dal prodotto $E_s(1-\rho)$. Aumentando A sia aumenta l'energia media E_s che varia il coefficiente di correlazione ρ. In particolare abbiamo (considerando anche il guadagno di 3 dB del canale)
$$E_s = 18A, \quad \rho = 2(A-0.5)/A$$
da cui $E_s(1-\rho) = 18(2-2A)$ che è decrescente in A per $A \in [0.5, 1]$, quindi dalla (5.77) poiché Q è una funzione decrescente, la probabilità di errore aumenta.

Soluzione es. 135 [Testo]

1. Notiamo che $X(nT)$ è a media nulla e la potenza statistica coincide con la varianza. Dalla (3.31) abbiamo
$$v_{\mathrm{sat}} = 10^{\frac{-23.2+6.02\cdot 4+4.77+10\log_{10}6.82}{20}} = 5.$$

2. La capacità del canale è (si veda la (6.81))

$$C = \frac{1}{0.2}[1 + 10^{-2}\log_2(10^{-2}) + (1-10^{-2})\log_2(1-10^{-2})] = 4.6 \text{ b/s}.$$

Il quantizzatore genera $4 < 4.6$ b/s, quindi per il teorema di Shannon esiste un codice a correzione d'errore che permette di avere probabilità di errore sulle parole di codice piccola a piacere.

3. Gli intervalli di quantizzazione sono $[0, \pm 1.5]$, $[\pm 1.5, \pm 3]$, $[\pm 3, \pm 4.5]$, $[\pm 4.5, \pm 6]$ e i valori quantizzati ± 0.75, ± 2.25, ± 3.75 e ± 5.25, che hanno probabilità

$$p_Y(0.75) = p_Y(-0.75) = 0.5\left[\cos\left(\frac{\pi 1.5}{12}\right) - 1\right] = 0.038$$

$$p_Y(2.25) = p_Y(-2.25) = 0.108, \quad p_Y(3.75) = p_Y(-3.75) = 0.162, \quad p_Y(5.25) = p_Y(-5.25) = 0.192.$$

Dal teorema di Shannon la lunghezza media del codice di sorgente in esame deve essere almeno di

$$H(Y) = -2[0.038\log_2(0.038) + 0.108\log_2(0.108) + 0.162\log_2(0.162) + 0.1920\log_2(0.1920)] = 2.82\,\text{b}.$$

quindi non esiste il codice cercato.

4. Con il nuovo quantizzatore ogni intervallo di quantizzazione include esattamente due intervalli di quantizzazione del quantizzatore al punto 3. Quindi $Z(nT)$ è funzione deterministica di $Y(nT)$ e abbiamo $H(Y,Z) = H(Y) = 2.82$ b. Abbiamo inoltre $H(Z|Y) = 0$. Sempre per lo stesso motivo, essendo la funzione deterministica non iniettiva, concludiamo che $H(Z) < H(Y)$.

5. Essendo un codice a prefisso i primi due bit di [_,_,1,1], [_,_,0] devono essere 00 perché non possono essere le altre parole di codice da due bit ([1,0], [0,1], [1,1]). Inoltre, essendo ottimo deve avere due parole di lunghezza massima che differiscono solo nell'ultimo bit, quindi [0,0,1,_] = [0,0,1,0].

Soluzione es. 136 [Testo]

1. Indicando con $X \in \{-1, 1\}$ e $Y = \{-1, 0, 1\}$ l'ingresso e l'uscita del canale, rispettivamente, abbiamo (per qualsiasi valore dell'ingresso $X = a$)

$$H(Y|X=a) = -[\alpha\log_2(\alpha) + \beta\log_2(\beta) + (1-\alpha-\beta)\log_2(1-\alpha-\beta)] = 1.16 \text{ b}$$

e l'entropia condizionata è $H(Y|X) = 1.16$ b per una qualsiasi distribuzione dell'ingresso. La distribuzione dell'uscita è

$$p_Y(1) = p_Y(-1) = 0.4, \quad p_Y(0) = 0.2,$$

con entropia $H(Y) = 1.52$ b quindi la mutua informazione cercata è

$$I(X;Y) = 1.52 - 1.16 = 0.36 \text{ b}.$$

2. Il canale è a) binario simmetrico senza memoria per $\beta = 0$ e b) binario con cancellazione con $\alpha + \beta = 1$.

3. Mettendo la prima, quarta e terza colonna a destra otteniamo

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a cui corrisponde la matrice generatrice

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la parola di codice cercata è $\boldsymbol{G}[1,1]^T = [1,1,0,0,1]^T$.

4. Il codice al punto 3. non è di Hamming perché la matrice di parità non contiene tutte le possibili colonne non nulle. Si può estendere $\boldsymbol{H}$ perché diventi matrice di parità del codice di Hamming con $n = 7$ e $k = 4$, ad esempio con
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Calcolando la sindrome di una sequenza $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}$, con $\boldsymbol{c}$ parola di codice, abbiamo
$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{H}[\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}] = \boldsymbol{H}\boldsymbol{e}.$$
Poiché nella matrice $\boldsymbol{H}$ non ci sono colonne nulle, nessun vettore errore $\boldsymbol{e}$ con peso di Hamming 1 può annullare la sindrome, quindi $d_{\min} > 1$. Osserviamo inoltre che non ci sono due colonne uguali, quindi neppure un vettore $\boldsymbol{e}$ con peso di Hamming 2 annulla la sindrome $d_{\min} > 2$. Infine, notiamo che l'ultima colonna è la somma della seconda e della terza quindi il vettore $\boldsymbol{e} = [01101]$ (con peso di Hamming 3) ha sindrome nulla, quindi $d_{\min} = 3$.

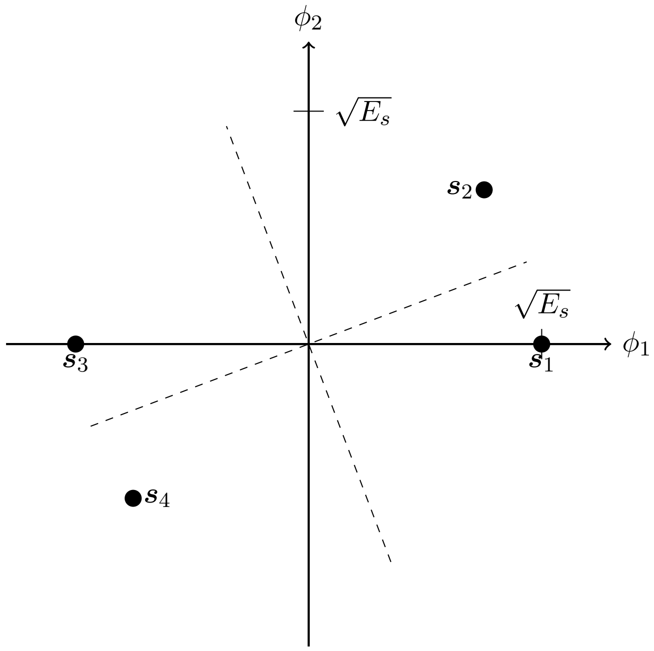
12.34 Esame del 16/2/2022

Soluzione es. 137 [Testo]

1. Dalle formule per l'energia del rettangolo e del triangolo abbiamo
$$E_{s_1} = E_{s_2} = E_{s_3} = E_{s_4} = \frac{0.6T}{T} = 0.6.$$
L'energia media è pertanto $E_s = 0.6$. [Versione 2: $E_s = 0.8$]

2. Per il primo segnale abbiamo immediatamente
$$\boldsymbol{s}_1 = [\sqrt{E_s}, 0] = [0.77, 0]$$
Per il secondo segnale si ha
$$\boldsymbol{s}_2 = [\rho\sqrt{E_s}, \sqrt{(1-\rho^2)E_s}] = [0.43, 0.64]$$
che garantisce la correlazione fissata ($\rho = 0.56$) e l'energia fissata E_s. Per gli altri due
$$\boldsymbol{s}_3 = [-0.77, 0], \quad \boldsymbol{s}_4 = [-0.43, -0.64].$$
[Versione 2: $\boldsymbol{s}_1 = -\boldsymbol{s}_3 = [0.89, 0]$ e $\boldsymbol{s}_2 = -\boldsymbol{s}_4 = [0.49, 0.78]$]

3. La costellazione è riportata in figura, con le regioni di decisione secondo la regola della minima distanza, poiché i simboli sono equiprobabili e il canale è AWGN.



4. I due punti più vicini nella costellazione sono s_1 e s_2, quindi la distanza minima è

$$d_{\min} = \sqrt{(0.77 - 0.43)^2 + 0.64^2} = 0.72$$

e dal bound (5.109) abbiamo

$$3\mathrm{Q}\left(\frac{0.72}{2\sigma_I}\right) \leq 10^{-2} \rightarrow \frac{0.72}{2\sigma_I} \geq \mathrm{Q}^{-1}(0.0033) \rightarrow \sigma_I \leq \frac{0.72}{2\mathrm{Q}^{-1}(0.0033)} = 0.013.$$

ovvero $\sigma_I^2 \leq 2 \cdot 10^{-2}$. [Versione 2: $d_{\min} = 0.88$ e $\sigma_I^2 \leq 10^{-2}$]

5. Ora $s_2''(t)$ è traslato a destra rispetto a $s_2(t)$ con supporto disgiunto da s_1, quindi abbiamo una modulazione biortogonale. La distanza minima aumenta e la probabilità di errore diminuisce. Poiché il periodo di simbolo aumenta, il numero di bit al secondo trasmessi diminuisce.

Soluzione es. 138 [Testo]

1. Condizionando rispetto ai tre comportamenti del canale abbiamo

$$P(Y=1|X=1) = P(Y=1|X=1,M1)P(M1) + P(Y=1|X=1,M0)P(M0) +$$

$$+ P(Y=1|X=1,M=)P(M=) = 1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.7 = 0.9$$

$$P(Y=0|X=0) = P(Y=0|X=0,M1)P(M1) + P(Y=0|X=0,M0)P(M0) +$$

$$+ P(Y=0|X=0,M=)P(M=) = 0 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.7 = 0.8$$

$$P(Y=0|X=1) = 1 - P(Y=1|X=1) = 0.1, \quad P(Y=1|X=0) = 1 - P(Y=0|X=0) = 0.2.$$

[Versione 2: $P(Y=1|X=1) = 0.8$ $P(Y=0|X=0) = 0.7$, $P(Y=0|X=1) = 0.2$, $P(Y=1|X=0) = 0.3$]

2. Il canale non è simmetrico perché ad esempio $0.9 = P(Y = 1|X = 1) \neq P(Y = 0|X = 0) = 0.8$.

3. Abbiamo
$$H(Y|X = 0) = -0.8 \log_2 0.8 - 0.2 \log_2 0.2 = 0.72 \text{ b}$$
$$H(Y|X = 1) = -0.9 \log_2 0.9 - 0.1 \log_2 0.1 = 0.47 \text{ b}$$
e
$$H(Y|X) = 0.55 \cdot 0.72 + 0.45 \cdot 0.47 = 0.6 \text{ b}$$
[Versione 2: $H(Y|X) = 0.82$ b]

4. Le quattro parole di codice sono
$$[0\,1\,a\,0\,b], [c\,d\,1\,1\,1], [c,\ d+1,\ a+1,\ 1,\ b+1], [0\,0\,0\,0\,0],$$
E' un codice lineare, le cui prestazioni di correzione e rilevazione degli errori sono determinate dal peso di Hamming del codice. Notiamo che ponendo $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$ abbiamo le parole (non nulle)
$$[0\,1\,1\,0\,1], [1\,0\,1\,1\,1], [1\,1\,0\,1\,0],$$
di peso maggiore o uguale a 3, quindi il peso di Hamming è 3. Non è possibile d'altra parte avere un peso minimo maggiore perché la prima parola contiene al massimo 3 "1". La matrice generatrice in forma sistematica è
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
[Versione 2: $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$ e matrice generatrice in forma sistematica
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
]

5. Dalla matrice $\boldsymbol{G}$ in forma sistematica otteniamo la matrice di controllo di parità
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
La parola di codice a distanza minima dalla sequenza $[11111]$ è $[10111]$ che si trova a distanza di Hamming 1.

[Versione 2:
$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
e parola decodificata $[110011]$.]

12.35 Esame del 14/6/2022

Soluzione es. 139 [Testo]

Variante 1

1. Calcoliamo A_1 e A_2 per soddisfare i requisiti di energia

$$A_1^2 \int_0^T s_1^2(t)dt = A_1^2 \left[\frac{T}{2} - \frac{T}{2}e^{-2}\right] = A_1^2 4.3 \cdot 10^{-3} = 10^{-4} \rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{10^{-4}}{4.3 \cdot 10^{-3}}} = 0.15$$

$$A_2^2 \int_0^T s_2^2(t)dt = A_2^2 \left[2Te^{1/2} - 2T\right] = A_2^2 1.3 \cdot 10^{-2} = 1.5 \cdot 10^{-4} \rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{1.5 \cdot 10^{-4}}{1.3 \cdot 10^{-2}}} = 0.11$$

Come primo segnale della base consideriamo una versione normalizzata di $s_1(t)$, ovvero

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}} = 15e^{-10t},$$

per $t \in [0, T]$ e $\phi_1(t) = 0$ altrove. Consideriamo ora $s_2(t)$ per il secondo segnale della base. Il prodotto interno tra $s_2(t)$ e $\phi_1(t)$ è

$$< s_2(t), \phi_1(t) >= 15A_2\frac{4T}{3}[1 - e^{-3/4}] = 1.2 \cdot 10^{-2}.$$

Considerando ora la componente di $s_2(t)$ ortogonale a $\phi_1(t)$ abbiamo

$$\phi_2'(t) = s_2(t) - < s_2(t), \phi_1(t) > \phi_1(t) = 0.11 \cdot e^{t/0.4} - 0.0017e^{-10t}$$

per $t \in [0, T]$ e $\phi_2'(t) = 0$ altrove; l'energia di $\phi_2'(t)$ è

$$E_{\phi_2'} = \int_0^T \phi_2'^2(t)dt = 1.1 \cdot 10^{-2} 2T[e^{1/2} - 1] - 10^{-4}\frac{T}{2}[e^{-2} - 1] + 2.510^{-3}\frac{4}{3}T[e^{-3/4} - 1] = 1.32 \cdot 10^{-4}.$$

Infine il segnale da inserire nella base è

$$\phi_2(t) = \frac{\phi_2'(t)}{\sqrt{E_{\phi_2'}}} = 9.4 \cdot e^{t/0.4} - 15e^{-10t}.$$

Poiché $s_3(t)$ e $s_4(t)$ hanno punti complanari con l'origine degli assi e $\boldsymbol{s}_1$ e $\boldsymbol{s}_2$, bastano questi due segnali per la base ortonormale della segnalazione al ricevitore.

2. I valori di A_1 e A_2 sono stati calcolati nel punto precedente. Abbiamo anche immediatamente

$$\boldsymbol{s}_1 = [10^{-2}, 0]$$

e per il secondo punto

$$\boldsymbol{s}_2 = [< s_2(t), \phi_1(t) >, \sqrt{E_{s_2} - < s_2(t), \phi_1(t) >^2}] = [1.21 \cdot 10^{-2}, 4.2 \cdot 10^{-3}]$$

e per gli altri due

$$\boldsymbol{s}_3 = [-10^{-2}, 0], \quad \boldsymbol{s}_4 = [-1.2 \cdot 10^{-2}, -4.2 \cdot 10^{-3}].$$

3. Poiché abbiamo segnali trasmessi equiprobabili e canale AWGN possiamo usare il criterio a minima distanza.

4. La distanza minima è quella tra s_1 e s_2, ovvero $d_{\min} = \sqrt{(s_{1,1} - s_{2,1})^2 + s_{2,2}^2} = 4.5 \cdot 10^{-3}$ e dalla (5.116) abbiamo (essendoci due punti a distanza minima)
$$P_e \geq \frac{2}{4}\mathrm{Q}\left(\frac{4.5 \cdot 10^{-3}}{2\sigma_I}\right)$$
da cui
$$\sigma_I = \frac{4.5 \cdot 10^{-3}}{2\mathrm{Q}^{-1}(2 \cdot 10^{-3})} = 7.8 \cdot 10^{-4}.$$

5. Perché tutte le probabilità di errore condizionato siano uguali, devo avere i quattro punti sui vertici di un quadrato, con diagonale la distanza tra s_1 e s_3, quindi le nuove coordinate sono
$$\boldsymbol{s}_2 = [0, \sqrt{2} \cdot 10^{-2}], \quad \boldsymbol{s}_4 = [0, -\sqrt{2} \cdot 10^{-2}].$$

Variante 2

1. Calcoliamo A_1 e A_2 per soddisfare i requisiti di energia
$$A_1^2 \int_0^T s_1^2(t)dt = A_1^2\left[\frac{T}{2} - \frac{T}{2}e^{-2}\right] = A_1^2 4.3 \cdot 10^{-3} = 10^{-4} \rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{10^{-4}}{4.3 \cdot 10^{-3}}} = 0.15$$
$$A_2^2 \int_0^T s_2^2(t)dt = A_2^2\left[\frac{T}{4} - \frac{T}{4}e^{-4}\right] = A_2^2 2.5 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-4} \rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-4}}{2.5 \cdot 10^{-3}}} = 1.1$$
Come primo segnale della base consideriamo una versione normalizzata di $s_1(t)$, ovvero
$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{Es_1}} = 15e^{-10t},$$
per $t \in [0, T]$ e $\phi_1(t) = 0$ altrove. Consideriamo ora una versione scalata di $s_2(t)$ per il secondo segnale della base. Il prodotto interno tra $s_2(t)$ e $\phi_1(t)$ è
$$< s_2(t), \phi_1(t) >= 15A_2\frac{T}{3}[1 - e^{-3}] = 1.4 \cdot 10^{-2}.$$
Considerando ora la componente di $s_2(t)$ ortogonale a $\phi_1(t)$ abbiamo
$$\phi_2'(t) = s_2(t) - < s_2(t), \phi_1(t) > \phi_1(t) = e^{-2t/T} - 2.1 \cdot 10^{-3}e^{-t/T},$$
per $t \in [0, T]$ e $\phi_2'(t) = 0$ altrove. L'energia di $\phi_2'(T)$ è
$$E_{\phi_2'} = \int_0^T \phi_2'^2(t)dt = -8.2 \cdot 10^{-2}\frac{T}{4}[e^{-4} - 1] - 2 \cdot 10^{-4}\frac{T}{2}[e^{-2} - 1] + 7.9 \cdot 10^{-3}\frac{T}{3}[e^{-3} - 1] = 1.8 \cdot 10^{-4}.$$
Infine il segnale da inserire nella base è
$$\phi_2(t) = \frac{\phi_2'(t)}{\sqrt{E_{\phi_2'}}} = 22e^{-2t/T} - 16e^{-t/T}].$$

2. I valori di A_1 e A_2 sono stati calcolati al punto precedente. Abbiamo anche immediatamente
$$\boldsymbol{s}_1 = [10^{-2}, 0]$$
e per il secondo punto
$$\boldsymbol{s}_2 = [< s_2(t), \phi_1(t) >, \sqrt{E_{s_2} - < s_2(t), \phi_1(t) >^2}] = [1.4 \cdot 10^{-2}, 4.2 \cdot 10^{-3}]$$

3. Poiché abbiamo segnali trasmessi equiprobabili e canale AWGN possiamo usare il criterio a minima distanza.

4. Poiché i punti della costellazione stanno su un quadrato, si tratta di una 4-QAM traslata e ruotata, con lato del quadrato
$$d_{\min} = \sqrt{(s_{1,1} - s_{2,1})^2 + s_{2,2}^2} = 5 \cdot 10^{-3}$$
e dalla probabilità di errore abbiamo (nella 4-QAM non traslata si aveva $d_{\min} = 2\sqrt{E_h}$), ignorando i termini in $\mathrm{Q}^2(\cdot)$
$$P_e = 4\mathrm{Q}\left(\frac{d_{\min}}{2\sigma_I}\right) = 10^{-4} \to \sigma_I = \frac{d_{\min}}{2\mathrm{Q}^{-1}\left(\frac{1}{4}10^{-4}\right)} = 6.2 \cdot 10^{-4}.$$

5. Per minimizzare l'energia media, devo far coincidere il centro del quadrato della costellazione con il centro degli assi. L'energia media sarà (uguale per tutti i simboli)
$$E_s = 2\left(\frac{d_{\min}}{2}\right)^2 = 1.2 \cdot 10^{-5}.$$

Soluzione es. 140 [Testo]

Variante 1

1. Un codice di Huffman è ad esempio [1,0,0], [0,1,0,0], [0,0,0,1], [0,0,0,0], [0,1,0,1,1], [1,1,1], [0,1,1,1], [0,1,0,1,0], [1,0,1,0,1], [1,0,1,0,0] [0,0,1,1], [1,1,0], [1,0,1,1,1], [1,0,1,1,0], [0,0,1,0], [0,1,1,0], con ordine dei simboli leggendo la tabella per colonne, da sinistra a destra. La lunghezza media è $L_{\boldsymbol{x}} = 3.822$ b.

2. Le densità di probabilità di x_1 e x_2 (ottenute sommando i valori per colonna e per riga) sono
$$p_{x_1}(1) = 12/36, p_{x_1}(2) = 8/36, p_{x_1}(3) = 9/36, p_{x_1}(4) = 7/36,$$
$$p_{x_2}(1) = 7/36, p_{x_2}(2) = 8/36, p_{x_2}(3) = 11/36, p_{x_2}(4) = 10/36,$$
con entropie
$$H(x_1) = 1.97\,\mathrm{b}, \quad H(x_2) = 1.98\,\mathrm{b}.$$
Poiché i codici per x_1 e x_2 hanno lunghezza almeno pari all'entropia per il teorema di Shannon, abbiamo che sicuramente il codice trovato al punto 1 ha lunghezza media minore della somma delle lunghezze medie dei due codici per x_1 e x_2 (che deve essere ≥ 3.95 b).

3. $\boldsymbol{y}$ è una funzione deterministica biunivoca di $\boldsymbol{x}$, quindi la lunghezza media del codice è quella trovata al punto 1, $L_{\boldsymbol{y}} = 3.822$ b.

4. Poiché dalla somma e differenza di due numeri si possono sempre ottenere entrambi i numeri, anche $\boldsymbol{z}$ è una funzione deterministica biunivoca di $\boldsymbol{x}$, quindi l'entropia di $\boldsymbol{z}$ è uguale a quella di $\boldsymbol{x}$.

5. w è una variabile aleatoria binaria, che ha entropia massima 1, mentre $H(\boldsymbol{x}) \geq \max\{H(x_1), H(x_2)\} > 1$, quindi l'entropia di w è minore o uguale a quella di $\boldsymbol{x}$.

Variante 2

1. Per x_1 otteniamo il codice [0,0], [0,1], [1,0], [1,1], con lunghezza media $L_{x_2} = 2$ b. Per x_2 otteniamo il codice [0,1], [0,0,0], [0,0,1], [1], con lunghezza media $L_{x_2} = 1.944$ b.

2. Poiché vale
$$H(\boldsymbol{x}) \leq H(x_1) + H(x_2) \leq L_{x_1} + L_{x_2}$$
e può esistere un codice di sorgente per $\boldsymbol{x}$ con lunghezza media uguale all'entropia $H(\boldsymbol{x})$, concludiamo che può esistere un codice con lunghezza media inferiore alla somma delle due lunghezze medie.

3. Poiché y_2 è una funzione deterministica biunivoca di x_2, la lunghezza media del codice è quella trovata al punto 1, $L_{y_2} = 1.944$ b.

4. z è una funzione deterministica biunivoca di x_1 e x_2, perché i valori delle due variabili si leggono nella prima e seconda cifra di z, quindi l'entropia di z è uguale all'entropia di $\boldsymbol{x}$.

5. Scegliendo x_3 indipendente da x_1 e x_2, si ha
$$H(\boldsymbol{w}) = H(\boldsymbol{x}) + H(x_3)$$
e scegliendo x_3 non deterministica, si ha $H(\boldsymbol{w}) > H(\boldsymbol{x})$.

Soluzione es. 141 [Testo]

1. Abbiamo
$$P(Y=-1|X=1) = 0.2 + 0.1 = 0.3, \quad P(Y=-1|X=-1) = 0.7 + 0.1 = 0.8,$$
$$P(Y=1|X=-1) = 0.2 \quad P(Y=1|X=1) = 0.7.$$
[Variante 2]
$$P(Y=-1|X=1) = 0.3 + 0.2 = 0.5, \quad P(Y=-1|X=-1) = 0.5 + 0.2 = 0.7,$$
$$P(Y=1|X=-1) = 0.3 \quad P(Y=1|X=1) = 0.5.$$

2. Il canale non con cancellazione perché ingressi e uscite sono binarie e manca il simbolo di cancellazione.

3. Abbiamo
$$H(Y|X=1) = -0.3\log_2 0.3 - 0.7\log_2 0.7 = 0.88 \text{ b}$$
$$H(Y|X=-1) = -0.8\log_2 0.8 - 0.2\log_2 0.2 = 0.72 \text{ b}$$
e
$$H(Y|X) = 0.45 \cdot 0.72 + 0.55 \cdot 0.88 = 0.80 \text{ b}$$
[Versione 2: $H(Y|X) = 0.94 \text{ b}$]

4. Per avere un solo coset leader per ogni coset, devo assicurarmi che per ciascuna sindrome ci sia una sola combinazione lineare delle colonne di $\boldsymbol{H}$ con peso minimo che porti alla sindrome. Essendoci già una base dello spazio delle sindromi nelle ultime tre colonne, basta assicurarci che non ci siano due colonne uguali, ponendo $a = 1$ e $b = 1$. [Versione 2: Qualsiasi coppia di a e b va bene, tranne $a = b = 1$, scegliamo $a = b = 0$.]

5. Trattandosi di una matrice di controllo di parità in forma sistematica, abbiamo immediatamente
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{[Versione 2]: } \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
e la sequenza codificata è $[0, 1, 1, 0, 1]$ (Versione 2: $[1, 1, 0, 1, 1]$).

12.36 Esame del 25/8/2022

Soluzione es. 142 [Testo]

1. Le due energie sono (3 mezze energie di 3 triangoli di base $2T/3$ e altezza A e di 3 rettangoli di base $T/3$ e altezza A)
$$E_{s_1} = \frac{3}{2}\frac{2TA^2}{9} = \frac{A^2}{3}T, \quad E_{s_2} = 3\frac{TA^2}{3} = A^2T.$$
Imponendo $E_{s_1} = 5 \cdot 10^{-2}$, abbiamo $A = \sqrt{15} = 3.87$ e $E_{s_2} = 15 \cdot 10^{-2}$.

2. Consideriamo come primo segnale della base
$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}}$$
e come secondo segnale una versione normalizzata di
$$\phi_2'(t) = s_2(t) - < s_2(t), \phi_1(t) > \phi_1(t).$$
Il coefficiente di correlazione è
$$\rho = \frac{< s_1(t), s_2(t) >}{\sqrt{E_{s_1}E_{s_2}}} = \frac{1}{\sqrt{E_{s_1}E_{s_2}}}\int s_2(t)s_1(t)dt = -\frac{A^2T}{6\sqrt{E_{s_1}E_{s_2}}} = -0.29.$$
Le coordinate dei punti della costellazione sono dunque
$$\boldsymbol{s}_1 = [\sqrt{E_{s_1}}, 0] = [0.2236, 0]$$
$$\boldsymbol{s}_2 = [\rho\sqrt{E_{s_2}}, \sqrt{(1-\rho^2)E_{s_2}}] = [-0.112, 0.371].$$

3. Avendo canale AWGN e segnali equiprobabili, il criterio di decisione ottimo è quello a minima distanza.

4. La distanza tra i due punti è
$$d_{\min} = \sqrt{(0.2236 + 0.112)^2 + 0.371^2} = 0.50$$
e la probabilità di errore cercata è data dalla (5.75)
$$P_e = \mathrm{Q}\left(\frac{0.47}{2\sqrt{6 \cdot 10^{-3}}}\right) = 6.2 \cdot 10^{-4}.$$

5. Abbiamo una 4-PAM in diagonale. Usiamo la codifica di Gray per avere la minima probabilità di errore sul bit
$$\boldsymbol{s}_3 \to 00, \ \boldsymbol{s}_1 \to 01, \ \boldsymbol{s}_2 \to 11, \ \boldsymbol{s}_4 \to 10.$$

Soluzione es. 143 [Testo]

1. Essendo gli X_n indipendenti ed equidistribuiti abbiamo
$$P(\boldsymbol{Y}_n = [0,0]) = 0.2^2 = 0.04, \quad P(\boldsymbol{Y}_n = [0,1]) = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16,$$
$$P(\boldsymbol{Y}_n = [1,0]) = 0.2 \cdot 0.8 = 0.16, \quad P(\boldsymbol{Y}_n = [1,1]) = 0.8^2 = 0.64.$$

2. Il codice cercato è quello di Huffman, ad es.

$$[0,0] \to [101] \quad [0,1] \to [100]$$

$$[1,0] \to [11] \quad [1,1] \to [0]$$

con lunghezza media delle parole di codice $L_y = 1.56$.

3. Abbiamo

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{Y}_n|X_{2n}) = 0.2\mathbb{H}(\boldsymbol{Y}_n|X_{2n}=0) + 0.8\mathbb{H}(\boldsymbol{Y}_n|X_{2n}=1)$$

$$= 0.2\mathbb{H}(X_{2n+1}) + 0.8\mathbb{H}(X_{2n+1}) = \mathbb{H}(X_{2n+1}) = -0.2\log_2 0.2 - 0.8\log_2 0.8 = 0.72 \text{ b}.$$

e inoltre, poiché X_n è funzione deterministica di $\boldsymbol{Y}_n$ e $\boldsymbol{Y}_n$ è un vettore aleatorio a componenti i.i.d.

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{Y}_n, X_{2n}) = \mathbb{H}(\boldsymbol{Y}_n) = 2\mathbb{H}(X_{2n}) = 1.44 \text{ b}.$$

4. Poiché tutti i simboli sono iid, l'entropia per simbolo è l'entropia di ciascun elemento del vettore ovvero

$$\mathbb{H}_S(\boldsymbol{Z}_n) = \mathbb{H}(X_n) = 0.72 \text{ b}.$$

Soluzione es. 144 [Testo]

1. Il canale non è "binario con cancellazione" perché i segnali in ingresso e uscita non sono con alfabeto binario.

2. Abbiamo

$$p_Y(0) = 0.9 p_X(0) = 0.9 \cdot 0.2 = 0.18$$

che è uguale per simmetria del canale e dell'ingresso a $p_Y(2)$, inoltre

$$p_Y(1) = 1 - 2 \cdot 0.18 = 0.64.$$

L'entropia di Y è pertanto

$$H(Y) = -2 \cdot 0.18 \log_2 0.18 - 0.64 \log_2 0.64 = 1.12 \text{ b}.$$

3. Per la probabilità di errore $P(X \neq Y)$, condizionando rispetto a X abbiamo

$$P(X \neq Y) = P(Y=1|X=0)P(X=0) + P(Y=1|X=2)P(X=2) =$$

$$= 2P(Y=1|X=0)P(X=0) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04.$$

4. L'entropia condizionata dell'uscita rispetto all'ingresso è

$$H(Y|X) = -0.4 \cdot [0.1 \log_2 0.1 + 0.9 \log_2 0.9] = 0.19 \text{ bit}.$$

Da cui la capacità è

$$C = \frac{1}{T}[H(Y) - H(Y|X)] = 1.12 - 0.19 = 0.93 \quad \text{bit/s}.$$

5. Poiché $R > C$, non è certo che esista un altro codice con probabilità di errore più piccola.

12.37 Esame del 6/9/2022

Soluzione es. 145 [Testo]

1. L'energia di $s_2(t)$ al ricevitore è

$$E_{s_2} = 10^{-1} \int s_2^2(t)\, dt = 10^{-1} A^2 5 \cdot 10^{-3}$$

e imponendo $E_{s_2} = 5 \cdot 10^{-2}$ abbiamo $A = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-4}}} = 10$. L'energia di $s_1(t)$ al ricevitore è metà dell'energia di tre triangoli, tutti con base $2T/3$, due con altezza A e uno con altezza $2A$ quindi

$$E_{s_1} = 10^{-1} \cdot 10^2 \frac{5 \cdot 10^{-3}}{9}(2+4) = 0.33.$$

2. Poiché

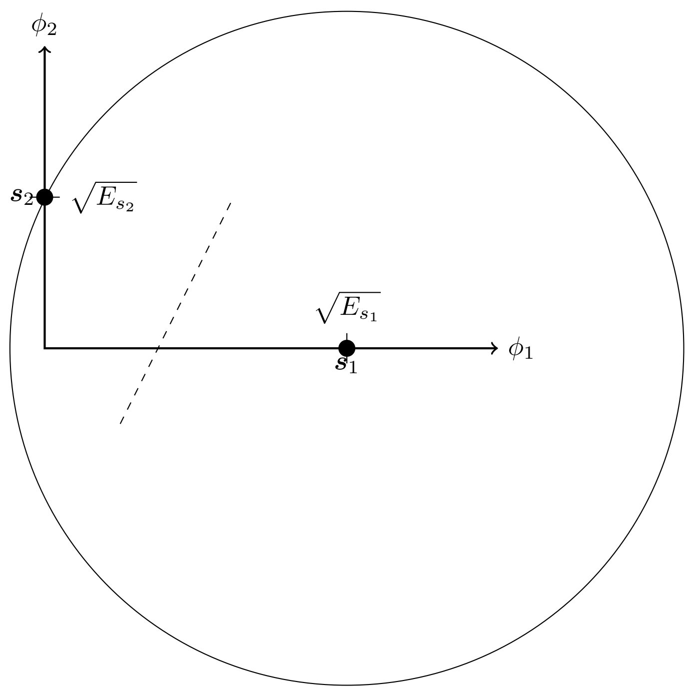
$$\int s_1(t) s_2(t) dt = \frac{2A^2 T}{2 \cdot 3} - \frac{A^2 T 2}{3 \cdot 2} = 0$$

abbiamo una segnalazione ortogonale e la base cercata è

$$\phi_1(t) = \frac{\sqrt{0.1} s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}}, \quad \phi_2(t) = \frac{\sqrt{0.1} s_2(t)}{\sqrt{E_{s_2}}},$$

e le coordinate dei due punti della costellazione sono

$$\boldsymbol{s}_1 = [\sqrt{E_{s_1}}, 0] = [0.22, 0], \quad \boldsymbol{s}_2 = [0, \sqrt{E_{s_2}}] = [0, 0.71].$$



3. Avendo una trasmissione su canale AWGN di simboli equiprobabili, il criterio di decisione ottima è quello a minima distanza e le regioni sono segnate in figura.

4. La distanza tra i due simboli è
$$d = \sqrt{0.22^2 + 0.71^2} = 0.74$$
quindi la probabilità d'errore è
$$P_e = \mathrm{Q}\left(\frac{0.25}{0.3}\right) = 0.11.$$

5. La linea cercata è il cerchio centrato in s_1 e di raggio d. L'unico altro punto (oltre a quello originale di s_2) che sta sul cerchio e porta la stessa energia media è $-s_2$ (intersezione tra il cerchio trovato e un altro cerchio, centrato nell'origine e di raggio $\sqrt{E_{s_2}}$).

Soluzione es. 146 [Testo]

1. La matrice di controllo di parità è in forma sistematica, e la matrice generatrice è
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Il codice non è Hamming perché non contiene nelle colonne tutte le sequenze non-nulle di lunghezza $6 - 3 = 3$.

3. La sindrome è
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Poiché la sindrome non è identicamente nulla, la sequenza non è una parola di codice.

4. Non ci sono due colonne uguali, quindi il peso è ≥ 2, d'altra parte la somma della prima e seconda colonna è la terza colonna, quindi il peso Hamming minimo è 3. La parola cercata è $[100011]$ per la quale si ha
$$\boldsymbol{H} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Dal punto precedente, la condizione cercata è quando il canale introduce 3 errori su 5 bit trasmessi, che accade con probabilità
$$0.1^3(1 - 0.1)^3 = 7.3 \cdot 10^{-4}.$$

Soluzione es. 147 [Testo]

1. Imponendo la probabilità di saturazione abbiamo
$$\int_{v_{\rm sat}}^{\infty} e^{-2a} da = \frac{e^{-2v_{\rm sat}}}{2} = 1.225 \cdot 10^{-3},$$
da cui $v_{sat} = -\frac{1}{2}\ln(2 \cdot 1.225 \cdot 10^{-3}) = 3$.

2. Le probabilità dei quattro simboli sono

$$P(00) = \int_{-3}^{-1.5} \frac{1}{4} da = 0.125$$
$$P(01) = \int_{-1.5}^{0} \frac{1}{4} da = 0.5 - 0.125 = 0.375$$
$$P(10) = \int_{0}^{1.5} e^{-2a} da = \frac{1-e^{-3}}{2} = 0.475$$
$$P(11) = 1 - 0.125 - 0.375 - 0.475 = 0.025.$$

3. L'entropia dei simboli quantizzati è

$$H(X) = [0.125 \log_2(0.125) + 0.375 \log_2(0.375) + 0.475 \log_2(0.475) + 0.025 \log 2(0.025) = 1.545\,\mathrm{b}.$$

4. Il codice di Huffman è ad esempio

$$[0\,1\,0], [0\,0], [1], [0\,1\,1],$$

   con lunghezza media 1.675 b.

5. Poiché la probabilità d'errore è 0.5 e gli errori sono indipendenti, i bit ricevuti sono indipendenti da quelli trasmessi, e le coppie saranno tutte equiprobabili. In questo caso il codice ottimo prevede 2 bit per parola, con lunghezza media 2 b.

12.38 Primo compitino del 25/11/2022

Soluzione es. 148 [Testo]

1. La modulazione non è ortogonale perché $s_1(t)$ e $s_2(t)$ sono proporzionali uno all'altro, e non è antipodale perché $s_1(t) \neq -s_2(t)$.

   [Variante: La modulazione non è biortogonale perché non ha almeno 4 simboli, e i simboli non hanno la stessa energia perché $s_2(t) = -3s_1(t)$ quindi energia di $s_2(t)$ è $E_{s_2} = 3^2 E_{s_1}$.]

2. Una base per la segnalazione è una versione normalizzata di $s_1(t)$. Poiché l'energia del segnale $s_1(t)$ è

$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{\infty} s_1^2(t) dt = \int_0^T \left(\frac{t}{T}\right)^{2/3} dt = T^{-2/3} \left[\frac{3}{5} t^{5/3}\right]_0^T = 6 \cdot 10^{-4}.$$

   Le coordinate dei due punti della costellazione sono

$$\boldsymbol{s}_1 = [\sqrt{E_{s_1}}] = [0.025], \quad \boldsymbol{s}_1 = [-3\sqrt{E_{s_2}}] = [-0.074].$$

   L'energia di $s_2(t)$ è $E_{s_2} = 3^2 E_{s_1} = 5.4 \cdot 10^{-3}$.

3. Avendo segnali equiprobabili e canale AWGN posso usare il criterio a minima distanza. La distanza dei due segnali è $4\sqrt{E_{s_1}} = 0.098$ e imponendo la probabilità di errore sul bit abbiamo

$$P_{\text{bit}} = \mathrm{Q}\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right) = 2 \cdot 10^{-3}$$

   e la varianza del rumore è $\sigma_I^2 = \left[\frac{0.098}{2\mathrm{Q}^{-1}(2\cdot 10^{-3})}\right]^2 = 2.9 \cdot 10^{-4}$. [Variante: sempre dalla stessa formula, abbiamo $P_{\text{bit}} = 1.4 \cdot 10^{-2}$.]

4. Per avere la stessa probabilità di errore lascio inalterata la distanza tra i punti e per minimizzare l'energia media li rendo antipodali, quindi

$$\boldsymbol{s}_1' = [2\sqrt{E_{s_1}}], \quad \boldsymbol{s}_2' = [-2\sqrt{E_{s_1}}].$$

[Variante: sempre lasciando inalterata la distanza tra i punti, posso scegliere

$$\boldsymbol{s}_1' = [0], \quad \boldsymbol{s}_2' = [4\sqrt{E_{s_1}}].$$

]

5. Se scegliamo

$$s_3(t) = 3s_1(t) \qquad s_4(t) = -s_1(t)$$

abbiamo che i punti della costellazione sono

$$\boldsymbol{s}_1 = [\sqrt{E_{s_1}}], \boldsymbol{s}_2 = [-3\sqrt{E_{s_1}}], \boldsymbol{s}_3 = [3\sqrt{E_{s_1}}], \boldsymbol{s}_4 = [-\sqrt{E_{s_1}}]$$

che hanno la spaziatura di una 4-PAM, quindi abbiamo una 4-PAM a meno di una permutazione dell'indice dei simboli.

6. Non avendo segnali equiprobabili devo usare il criterio MAP e la coordinate del punto di confine tra le regioni di decisione è la soluzione della seguente equazione

$$D(r;1) = D(r;2) \to 0.49p_w(a - \sqrt{E_{s_1}}) = 0.51p_w(a - \sqrt{E_{s_2}})$$

Supponiamo che la soglia tra le due regioni di decisione sia tra $\boldsymbol{s}_1$ e $\boldsymbol{s}_2$, allora deve essere

$$0.51\frac{1}{10}e^{-\frac{|a-s_2|}{5}} = 0.49\frac{1}{10}e^{-\frac{|a-s_1|}{5}}$$

e la soglia si trova alla coordinata

$$0.51e^{-\frac{(a-s_2)}{5}} = 0.49e^{+\frac{(a-s_1)}{5}} \to a = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{0.51e^{-0.074/5}}{0.49e^{-0.025/5}}\right] = 0.015.$$

che in effetti è tra $\boldsymbol{s}_1$ e $\boldsymbol{s}_2$, quindi questa è la soluzione che cerchiamo. Nota: se la soglia calcolata non fosse caduta tra $\boldsymbol{s}_1$ e $\boldsymbol{s}_2$ avremmo dovuto controllare gli altri casi (a destra di $\boldsymbol{s}_1$ e a sinistra di $\boldsymbol{s}_2$) considerando di volta in volta l'espressione della pdf negli intervalli considerati, fino a trovare un valore consistente con l'ipotesi fatta.

[Variante: in questo caso abbiamo

$$a = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{0.49e^{-0.074/4}}{0.51e^{-0.025/4}}\right] = -0.0282.$$

Soluzione es. 149 [Testo]

1. Imponendo la probabilità di saturazione cercata abbiamo

$$P_{\rm sat} = P(|x| > v_{\rm sat}) = \frac{2}{3}\int_{v_{\rm sat}}^{2}(2-a)da = \frac{1}{3}(2-v_{\rm sat})^2 = \frac{2}{3}\cdot 10^{-2},$$

da cui $v_{\rm sat} = 1.9$.

[Variante: dalla stessa formula abbiamo $P_{\rm sat} = \frac{1}{3}(2-v_{\rm sat})^2 = 1.3\cdot 10^{-2}$.]

2. Notiamo che $p_x(a)$ è pari, quindi $E[x] = 0$, mentre la sua varianza è

$$\sigma^2 = \int p_x(a)a^2 da = \frac{2}{3}\left[\int_0^1 a^2 da + \int_1^2 (2-a)a^2 da\right] =$$

$$\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}(2^3-1) - \frac{1}{4}\left(2^4-1\right)\right] = 0.83$$

e invertendo la (3.31) abbiamo

$$\mathtt{b} = \left\lceil \frac{(14)_{\text{dB}} - 4.77 + 20\log(1.9/\sqrt{0.83})}{6.02} \right\rceil = \lceil 2.6 \rceil = 3.$$

3. Il numero dei livelli è 8 e il passo di quantizzazione è $\Delta = 2 \cdot 1.9/8 = 0.485$. Gli intervalli sono

$$[-\infty, -1.4][-1.4 - 0.95], [-0.95, -0.48], [-0.48, 0][0, 0.48], [0.48, 0.95], [0.95, 1.4][1.4, \infty],$$

con mappatura 111, 110,101, 100, 000, 001, 010, 011.

4. I valori quantizzati sono equiprobabili perché la densità di probabilità di x è costante con lo stesso valore in ciascun intervallo e quindi il suo integrale (ovvero la probabilità di cadere in quell'intervallo) è 1/4 per ogni intervallo. Avendo trasmissione di simboli equiprobabili su canale AWGN possiamo usare la (5.211) con $M = 4$ e quindi

$$P_{\text{bit}} = \frac{1}{\log_2 4} 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.1}{8 \cdot 10^{-3}}}\right) = 2 \cdot 10^{-4}.$$

[Variante: in questo caso abbiamo

$$P_{\text{bit}} = \frac{1}{\log_2 4} 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.2}{10 \cdot 10^{-3}}}\right) = 4 \cdot 10^{-8}.$$

]

5. Dalla mappatura che abbiamo usato, un errore di 2Δ sul valore quantizzato ricostruito si riscontra ogni volta che vengono demodulati con errore entrambi i bit, il significa che l'errore ci sposta in una regione sulla diagonale della QAM, il che accade con probabilità

$$P_{2\Delta} = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.1}{8 \cdot 10^{-3}}}\right) \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.1}{8 \cdot 10^{-3}}}\right) = 4 \cdot 10^{-8}.$$

[Variante: in questo caso devo aver trasmesso 11 e aver demodulato 01 oppure aver trasmesso 01 e aver demodulato 11, e in entrambi i casi ho sbagliato un bit, quindi la probabilità che questo succeda (tenendo conto che trametto 11 o 01 con probabilità 2/4 complessivamente) è

$$P_{3\Delta} = \frac{2}{4}\left[\left(1 - \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.1}{8 \cdot 10^{-3}}}\right)\right) \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{0.1}{8 \cdot 10^{-3}}}\right)\right] = 1.9 \cdot 10^{-6}.$$

]