

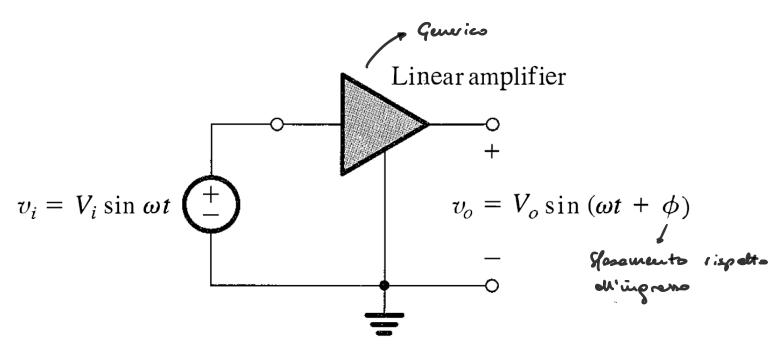
Fondamenti di Elettronica

07
Risposta in frequenza degli
amplificatori



Enrico Zanoni enrico.zanoni@unipd.it

Risposta in frequenza degli amplificatori lineari

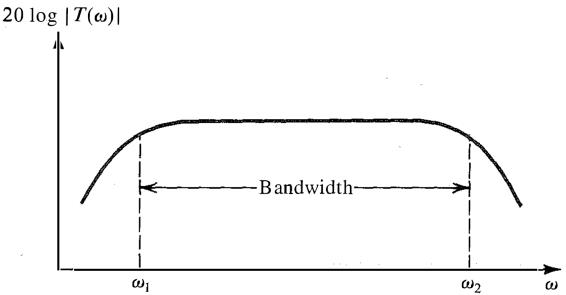


immaginiamo di utilizzare un segnale sinusoidale per «provare» il nostro amplficatore e di esplorare diversi valori di pulsazione ω [rad/s]: in generale, il guadagno dell'amplificatore dipenderà dalla frequenza, e il segnale di uscita non sarà in fase con il segnale di ingresso

Il guadagno sarà caratterizzato da ampiezza $\frac{V_O}{V_i}$ e fase Φ

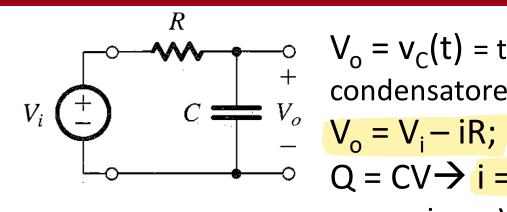
Risposta in frequenza dell'amplificatore e distorsione

Se l'amplificatore è lineare, ad un segnale sinusoidale applicato all'ingresso corrisponde un segnale sinusoidale con la stessa pulsazione in uscita



- al variare della pulsazione misuro la «larghezza di banda» dell'amplificatore
 come varia il guadagno (e la sua fase)
- se il segnale non è sinusoidale ma ha più «componenti» in frequenza, una larghezza di banda limitata introduce distorsione (le diverse componenti vengono amplificate in modo diverso e il segnale di uscita cambia e non rappresenta più fedelmente il segnale di ingresso

Circuito RC passa-basso



(a)

 $V_0 = v_C(t)$ = tensione ai capi del condensatore

$$V_o = V_i - iR;$$

$$Q = CV \rightarrow i = dQ/dt = C*dV_o/dt$$

supponiamo $V_i(t) = V_i \sin(\omega t)$; quindi

frequence de

$$V_1 \sin(\omega t) = RC(dv_c(t)/dt) + v_c(t);$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v_c(t) = \frac{V_I\sin(\omega t)}{\tau}$$
 con τ =RC, costante di tempo

$$v_C(t) = v_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}} + K\sin(\omega t + \theta)$$

soluzione generale

Circuito RC con la funzione di trasferimento (trasformata di Laplace)

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}v_c(t) = \frac{V_I\sin(\omega t)}{\tau} \text{ con } \tau = \text{RC, costante di tempo}$$

se si applica la trasformata di Laplace a questa equazione differenziale, si ottiene un'equazione algebrica.

Più direttamente si può trasformare R → R e C → 1/sC

Rete passa-basso

Si risolve il circuito come un partitore di tensione:

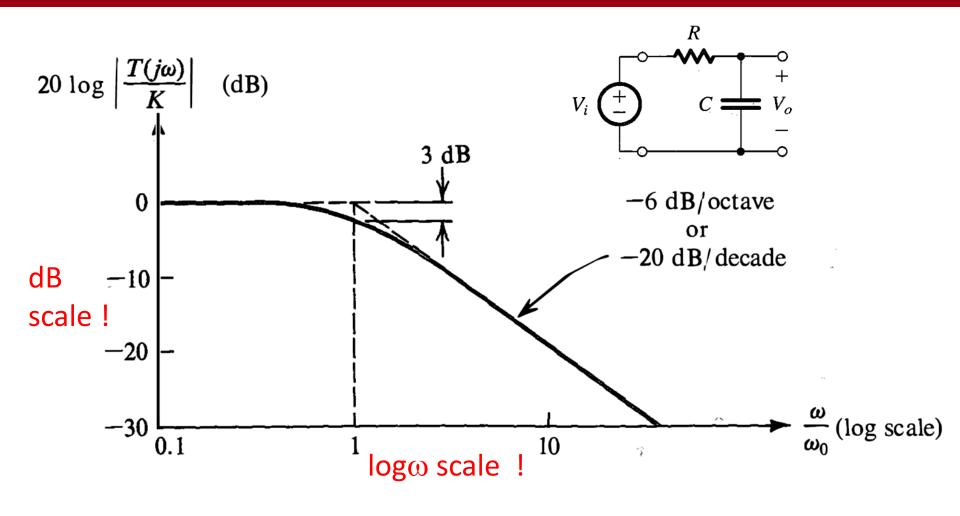
$$V_i \stackrel{\leftarrow}{\stackrel{\leftarrow}{\longrightarrow}} C \stackrel{\leftarrow}{\stackrel{\leftarrow}{\longrightarrow}} V_o$$

$$V_{o} = V_{o}(t) = V_{c}(t) = V_{i}(t) \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = V_{i}(t) \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

La funzione di trasferimento $H(s) = V_o(s)/v_i(s)$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{v_i(s)} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{\omega_o}{s + \omega_o} = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_o}}$$

Diagramma di Bode del circuito passa-basso del 1mo ordine



$$\frac{V_2}{V_1} = 2 \implies 6 \ dB \ ogni \ 6dB \ la \ tensione \ raddoppia \ ; \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{2} \implies 3 \ dB$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 10 \implies 20 \ dB \ ogni \ 20 \ dB \ la tensione decuplica$$

perchè 20 dB/decade?

$$\begin{array}{c|c}
20 \log \left| \frac{T(j\omega)}{K} \right| & \text{(dB)} \\
\hline
0 & -6 \text{ dB/octave} \\
\text{or} \\
-20 & -20 \text{ dB/decade}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
-20 & \omega \\
0 & \omega_0 \text{ (log scale)}
\end{array}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_o}}; \quad |H(s)| = \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_o}};$$

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_o}\right)^2}} \approx \frac{\omega_o}{\omega}$$

quindi ogni volta che ω cresce di una decade, |H(s)| cala di $20log_{10}10 = 20 dB$

Per
$$\omega = \omega_0 |H(s)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow -3dB$$

Circuiti passa basso (LP, sinistra) e passa alto (HP, destra)

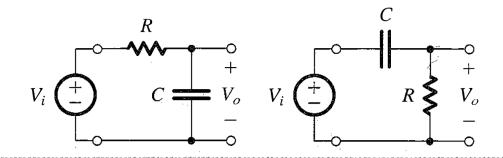


TABLE 1.2 Frequency Response of STC Networks

	Low-Pass (LP)	High-Pass (HP)
Transfer Function $T(s)$	$\frac{K}{1+(s/\omega_0)}$	$\frac{Ks}{s+\omega_0}$
Transfer Function (for physical frequencies) $T(j\omega)$	$\frac{K}{1+j(\omega/\omega_0)}$	$\frac{K}{1-j(\omega_0/\omega)}$
Magnitude Response $ T(j\omega) $	$\frac{ K }{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}$	$\frac{ K }{\sqrt{1+(\omega_0/\omega)^2}}$
Phase Response $\angle T(j\omega)$	$-\tan^{-1}(\omega/\omega_0)$	$\tan^{-1}(\omega_0/\omega)$
Transmission at $\omega = 0$ (dc)	K	0
Transmission at $\omega = \infty$	0	K
3-dB Frequency	$\omega_0 = 1/\tau; \ \tau \equiv \text{time constant}$ $\tau = CR \text{ or } L/R$	

Diagramma di Bode ampiezza e fase – circuito passa basso

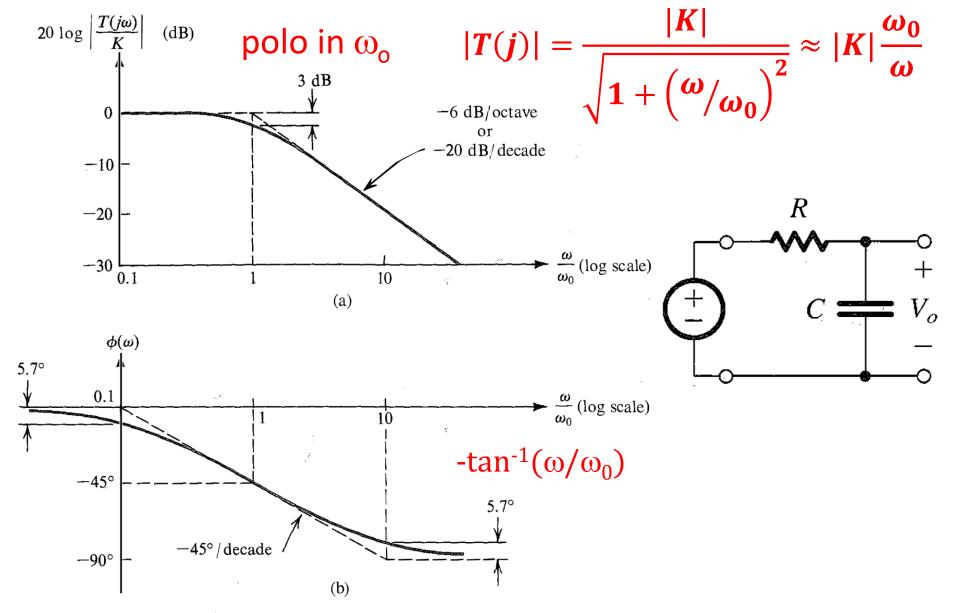


FIGURE D.6 (a) Magnitude and (b) phase response of STC circuits of the low-pass type.

Diagramma di Bode ampiezza e fase – circuito passa alto

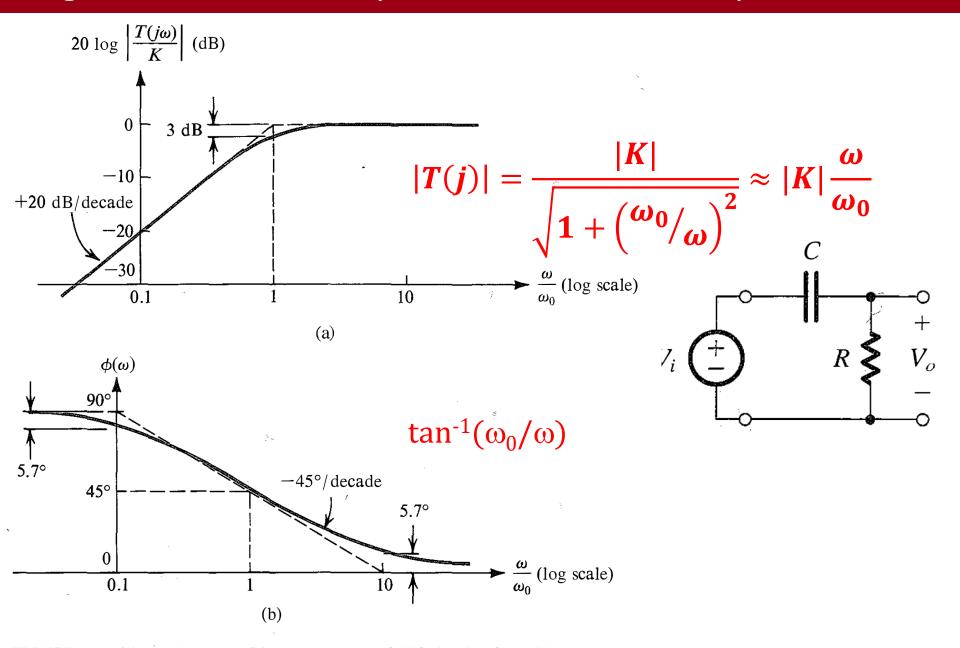
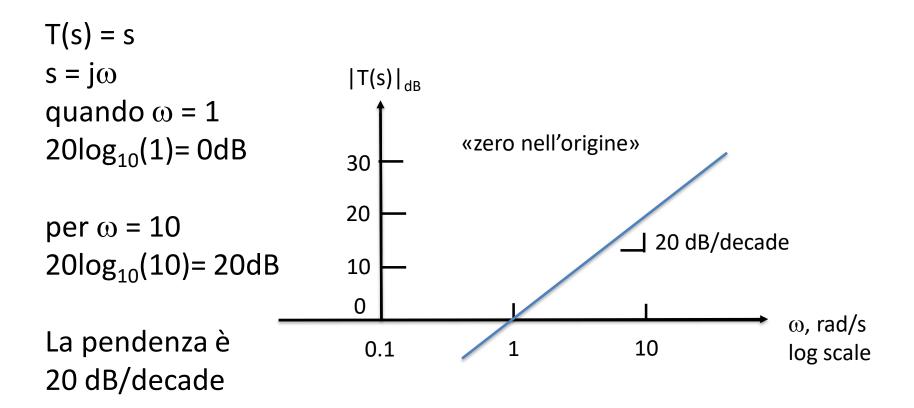
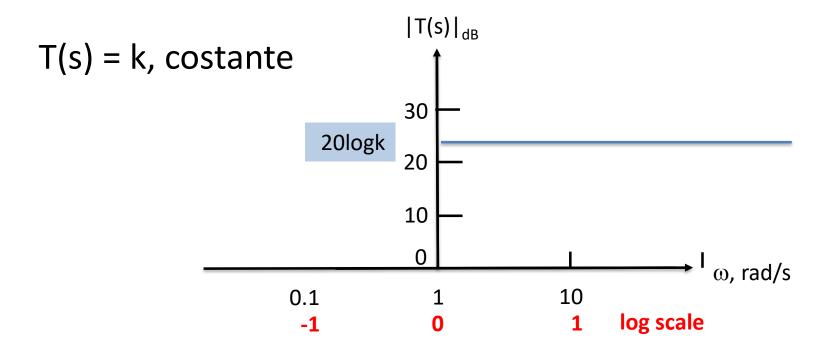
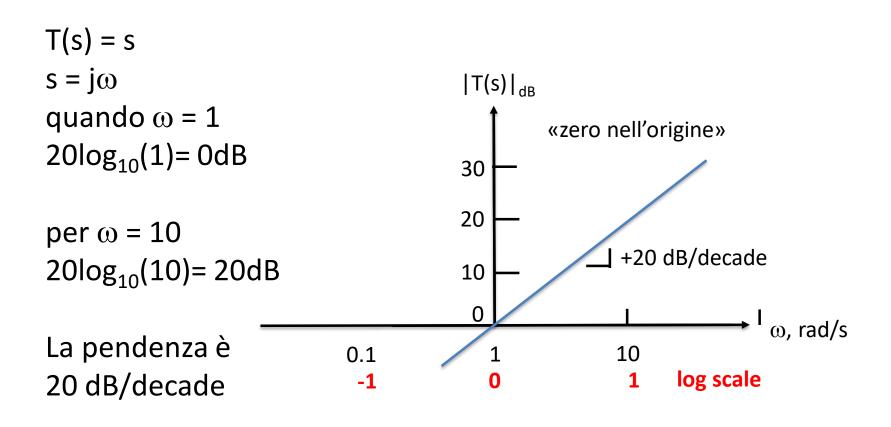
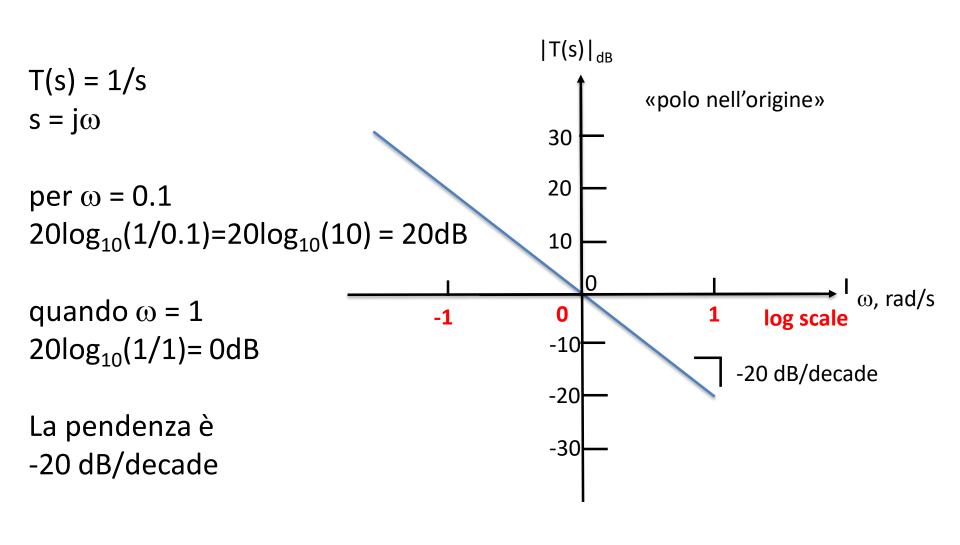


FIGURE D.8 (a) Magnitude and (b) phase response of STC circuits of the high-pass type.

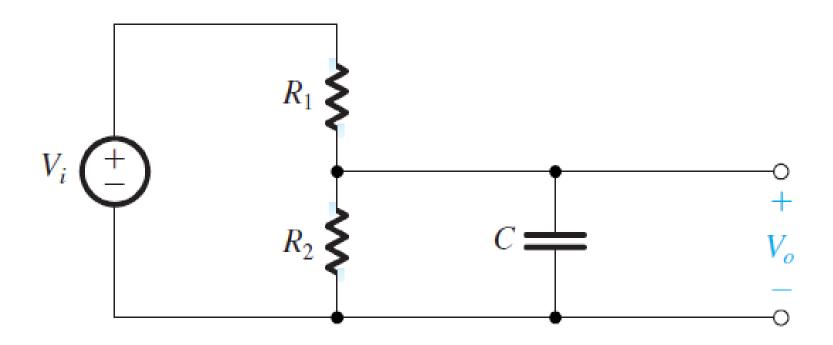








Esercizio



Dimostrare che la funzione di trasferimento T(s) di questo circuito è data da:

$$T(s) = \frac{\frac{1}{CR_1}}{s + \frac{1}{C(R_1||R_2)}}$$

Funzione di trasferimento: poli e zeri

Descrivere la risposta in frequenza di un amplificatore

scrivere il guadagno dell'amplificatore come funzione della frequenza complessa s

Nel dominio s, la capacità C → diventa l'impedenza 1/sC; L'induttanza L → si trasforma nell'impedenza sL

Si scrive la funzione di trasferimento $T(s) = V_o(s) / V_i(s)$ Per recuperare il significato fisico di T(s) si sostituisce a $s \rightarrow j\omega$ (ω = frequenza angolare, rad/s)

In generale

$$T(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}$$

a, b numeri reali; ordine m del numeratore minore dell'ordine n del denominatore; n è l'ordine della rete; per un circuito stabile il denominatore deve avere solo radici a parte reale negativa.

Funzione di trasferimento: poli e zeri

$$T(s) = a_m \frac{(s - Z_1)(s - Z_2) \dots (s - Z_m)}{(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_n)}$$

$${\rm Z_1...\,Z_n}$$
 «zeri della funzione di trasferimento»; $Z_i=-\frac{1}{T_i}$

 ${\rm P_1...\,P_n}$ «poli della funzione di trasferimento»; $P_i=-rac{1}{ au_i}$

$$T(s) = \frac{k}{s^g} \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_m)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \dots (1 + s\tau_n)}$$

s^g rappresenta l'effetto complessivo dei poli e degli zeri all'origine con g positivo o negativo

Funzione di trasferimento e guadagno

$$T(s) = \frac{k}{s^g} \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + sT_m)}{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \dots (1 + s\tau_n)}$$

$$|T(s)|_{dB} = 20 \log|k| \pm g20 \log\omega$$

$$+20 \log|1 + sT_1| + 20 \log|1 + sT_2| + \dots + 20 \log|1 + sT_m|$$

$$-20 \log|1 + s\tau_1| - 20 \log|1 + s\tau_2| - \dots - 20 \log|1 + s\tau_n|$$

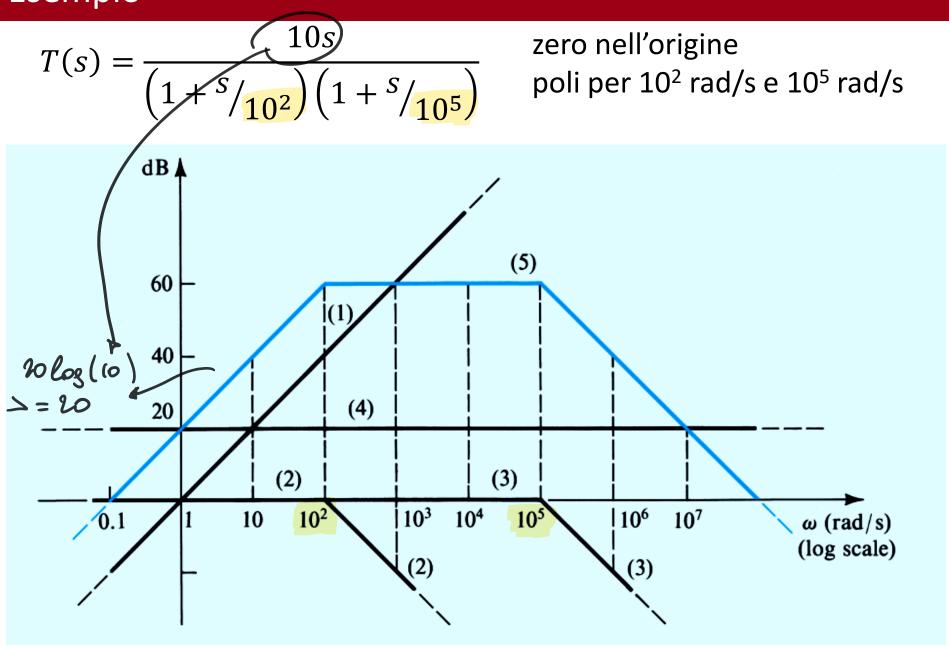
 $s = j\omega \rightarrow |1 + sT_i| = \sqrt{1 + (\omega T_i)^2}$ cresce con ω e fa aumentare il guadagno

 $s = j\omega \rightarrow |1 + s\tau_i| = \sqrt{1 + (\omega\tau_i)^2}$ cresce con ω e fa diminuire il guadagno

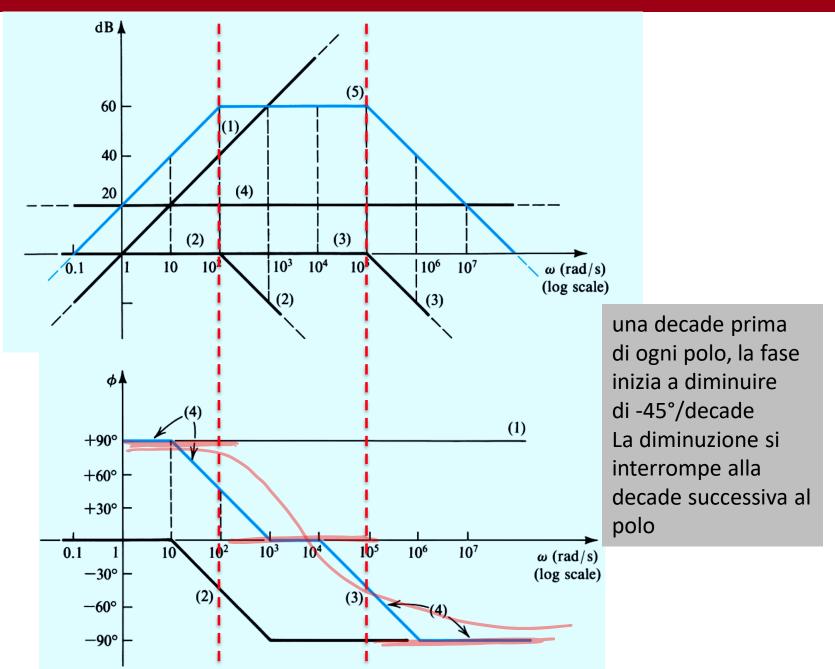
Come tracciare il diagramma di Bode

- 1. Per ogni zero e polo della funzione, tracciare il «diagramma asintotico» corrispondente ad uno dei quattro diagrammi precedentemente identificati = +20 dB/decade per uno zero, -20 dB/decade per un polo.
- 2. Si sommano i vari contributi in dB
- 3. Si sposta la curva in alto di 20logk, dove k è la costante moltiplicativa della funzione

Esempio



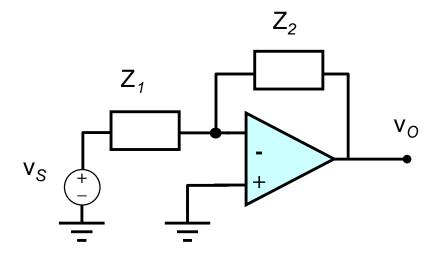
Esempio



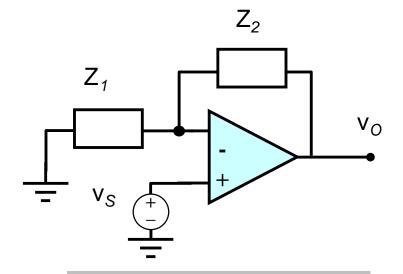
Amplificatori operazionali con elementi reattivi (L, C)

$$\neg W \quad Z_{R} = R \qquad \neg Z_{C} = \frac{1}{sC} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{j\omega C}$$

$$\neg Z_{L} = sL \xrightarrow{s=j\omega} j\omega L$$

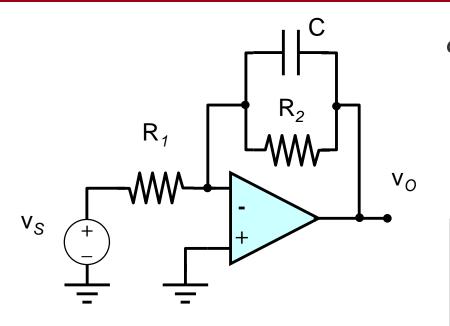


$$W(s) = \frac{v_O}{v_S} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$



$$W(s) = \frac{v_0}{v_s} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

Amplificatore (filtro) passa-basso



$$\overset{\text{Z}}{Z}_{2} = \frac{R_{2} \cdot \frac{1}{\text{sC}}}{R_{2} + \frac{1}{\text{sC}}} = \frac{R_{2}}{1 + \text{sCR}_{2}}$$

$$W(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + sCR_2}$$

$$W_{PB}(s) = \frac{A_0 \omega_H}{s + \omega_H} = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_H}}$$

Funzione di trasferimento generica di un filtro passa basso.

A₀=Guadagno a bassa frequenza; ω_H=Frequenza di taglio

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\omega_H = \frac{1}{R_2C}$$

$$W_{PB}(s) = \frac{A_0 \omega_H}{s + \omega_H} = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_H}}$$

Obiettivo: tracciare il diagramma di Bode del Modulo

Sostituiamo s con jω e calcoliamo il modulo:

$$\left| W_{PB} (j\omega) \right| = \left| \frac{A_0 \omega_H}{j\omega + \omega_H} \right| = \frac{\left| A_0 \omega_H \right|}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}}$$

Il modulo della funzione di trasferimento va espresso in dB:

$$\left| W_{PB}(j\omega) \right|_{dB} = 20 \log \left| A_0 \omega_H \right| - 20 \log \sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}$$

Usando un qualsiasi foglio elettronico o foglio matematico è possibile graficare le funzioni appena ottenute.

E' comunque molto utile (e immediato) disegnare il diagramma asintotico alle basse e alte frequenze):

$$\frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}} \approx \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega_H^2}} = A_0$$

$$\frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}} \approx \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}} = \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}} = \frac{A_0 \omega_H}{\omega}$$

$$\approx \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}} \approx \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{A_0 \omega_H}{\omega}$$

$$\approx \frac{A_0 \omega_H}{\sqrt{\omega^2 + \omega_H^2}} = \frac{A_0 \omega_H}{\omega}$$

$$(20\log A_0 + 20\log \omega_H - 20\log \omega)dB$$

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}, \omega_H = \frac{1}{R_2C} \Rightarrow A_0\omega_H = -\frac{1}{R_1C} \quad \text{quindi} \quad \text{quando} \quad \omega = A_0\omega_H = \frac{1}{R_1C} \Rightarrow \left| W(j\omega) \right| = 1$$

quando
$$\omega = A_0 \omega_H = \frac{1}{R_1 C} \Rightarrow |W(j\omega)| = 1$$

$$\begin{split} \omega << \omega_{H} & \left(20 \log A_{_{0}}\right) dB = A_{_{0}}\big|_{dB} \\ \omega >> \omega_{H} & \left(20 \log A_{_{0}} + 20 \log \omega_{H} - 20 \log \omega\right) dB \\ \hline \left| W_{PB} \left(j\omega\right) \right|_{dB} & A_{_{0}}\big|_{dB} \\ \hline \left| A_{_{0}}\omega_{H} \right|_{\omega = \omega_{H}} & = \frac{A_{_{0}}\omega_{H}}{\sqrt{2\omega_{H}^{2}}} = \frac{A_{_{0}}}{\sqrt{2}} \end{split} \qquad \begin{array}{c} \text{grafico} \\ \text{grafico} \\ \text{reale} \end{array}$$

$$W_{PB}(s) = \frac{A_0 \omega_H}{s + \omega_H} = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_H}}$$

Diagramma di Bode della fase

Sostituiamo s con jo

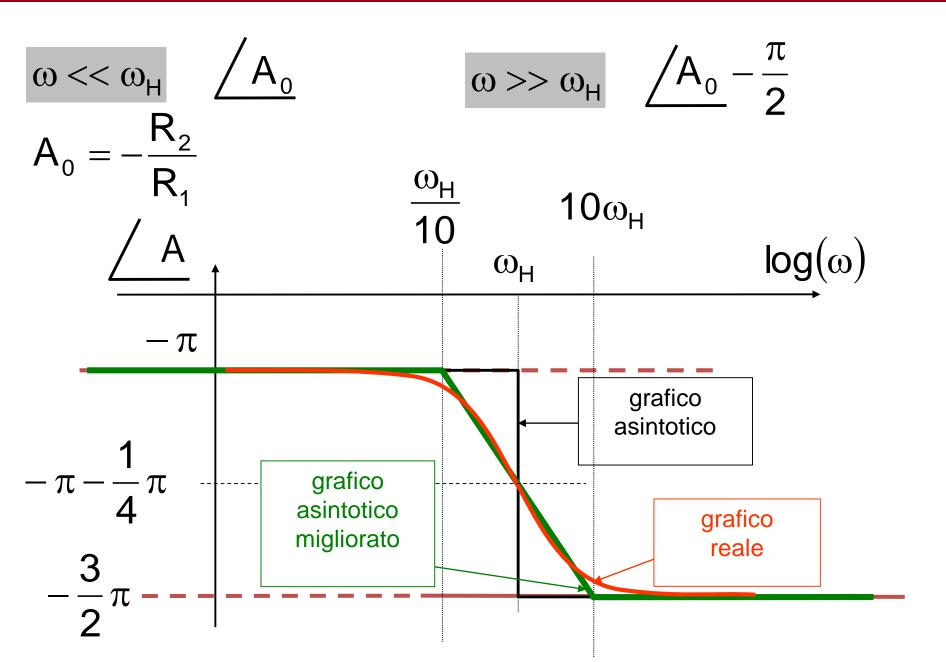
$$\frac{\int W_{PB}(j\omega) = \int \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_H}} = \frac{\int A_0 - tan^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_H}\right)}{1 + j\frac{\omega}{\omega_H}}$$

$$\omega \ll \omega_{H} / W_{PB}(j\omega) = /A_{0}$$

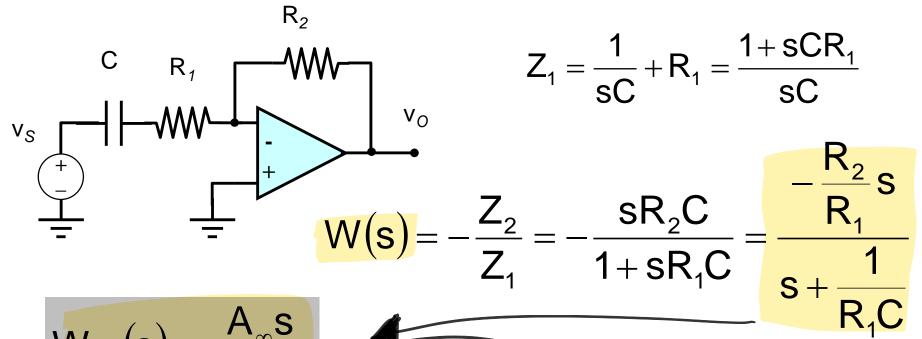
$$\omega \gg \omega_{H} / W_{PB}(j\omega) = / A_{0} - \frac{\pi}{2}$$

$$A_0 = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\omega_H = \frac{1}{R_2C}$$



Amplificatore (filtro) passa-alto



$$W_{PA}(s) = \frac{A_{\infty}s}{s + \omega_{L}}$$

Funzione di trasferimento generica di un filtro passa alto.

 A_{∞} =Guadagno ad alta frequenza; ω_{I} =Frequenza di taglio

$$A_{\infty} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\omega_L = \frac{1}{R_1 C}$$

Filtro passa-alto

$$W_{PA}(s) = \frac{A_{\infty}s}{s + \omega_{L}}$$

$$W_{PA}(s) = \frac{A_{\infty}s}{s + \omega_{L}}$$

$$|W_{PA}(j\omega)| = \left|\frac{A_{\infty}j\omega}{j\omega + \omega_{L}}\right| = \frac{A_{\infty}\omega}{\sqrt{\omega^{2} + \omega_{L}^{2}}}$$

$$\frac{A_{\infty}\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}} \approx \frac{A_{\infty}\omega}{\omega_L} \Rightarrow \text{ output } \Delta \cdot \text{ 20 JB/dec}$$

 $20 \log A_{\infty} - 20 \log \omega_{1} + 20 \log \omega$

$$\frac{A_{\infty}\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_L^2}}\Big|_{\omega >> \omega_L} \cong \frac{A_{\infty}\omega}{\sqrt{\omega^2}} = A_{\infty} \text{ contains } 20\log A_{\infty}$$

Filtro passa alto

$$\begin{split} \omega >> \omega_L & \left(20 \log A_\infty\right) \! dB = A_\infty \big|_{dB} \\ \omega << \omega_L & \left(20 \log A_\infty - 20 \log \omega_L + 20 \log \omega\right) \! dB \\ & \left| W_{PA} \left(j\omega\right) \right|_{dB} & \left| A_\infty \omega \right|_{asintotico} \\ & \left| A_\infty \omega \right|_{dB} \\ & \left| A_\infty \omega \right|_{\omega^2 + \omega_L^2} = \frac{A_\infty \omega_L}{\sqrt{2\omega_L^2}} = \frac{A_\infty}{\sqrt{2}} \\ & \left| \log(\omega) \right|_{\omega_L} & \left| \log(\omega) \right|_{\omega} \end{split}$$

Filtro passa-alto

$$W_{PA}(s) = \frac{A_{\infty}s}{s + \omega_{L}}$$

Diagramma di Bode della fase

$$\omega \ll \omega_L$$
 $M_{PA}(j\omega) = A_{\infty} + \frac{\pi}{2}$

$$\omega >> \omega_L \left(W_{PA}(j\omega) = A_{\infty} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$A_{\infty} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$\omega_{L} = \frac{1}{R_{1}C}$$

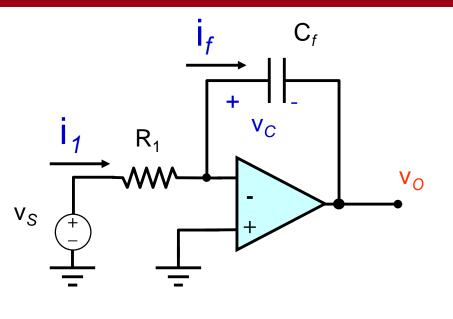
$$i_{1} = i_{f} = \frac{v_{s}}{R_{1}} \quad i_{f} = \frac{v_{s}}{R_{1}} = C_{f} \frac{dv_{c}}{dt}$$

$$v_{o} = -\frac{1}{C_{f}} \int_{0}^{t} \frac{v_{s}(\tau)}{R_{1}} d\tau - v_{c}(0)$$

Se $v_c(0)=0$ otteniamo:

$$v_{o}(t) = -\frac{1}{R_{1}C_{f}} \int_{0}^{t} v_{s}(\tau) d\tau$$

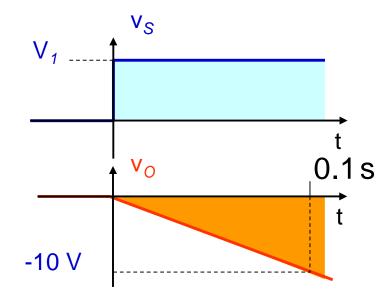
$$W(s) = -\frac{Z_{f}}{Z_{in}} = -\frac{\frac{1}{sC_{f}}}{R_{1}} = -\frac{1}{sR_{1}C_{f}}$$



$$v_s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ V_1 & t \ge 0 \end{cases}$$

$$v_{O}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\frac{V_{1}}{R_{1}C_{f}}t & t \geq 0 \end{cases}$$

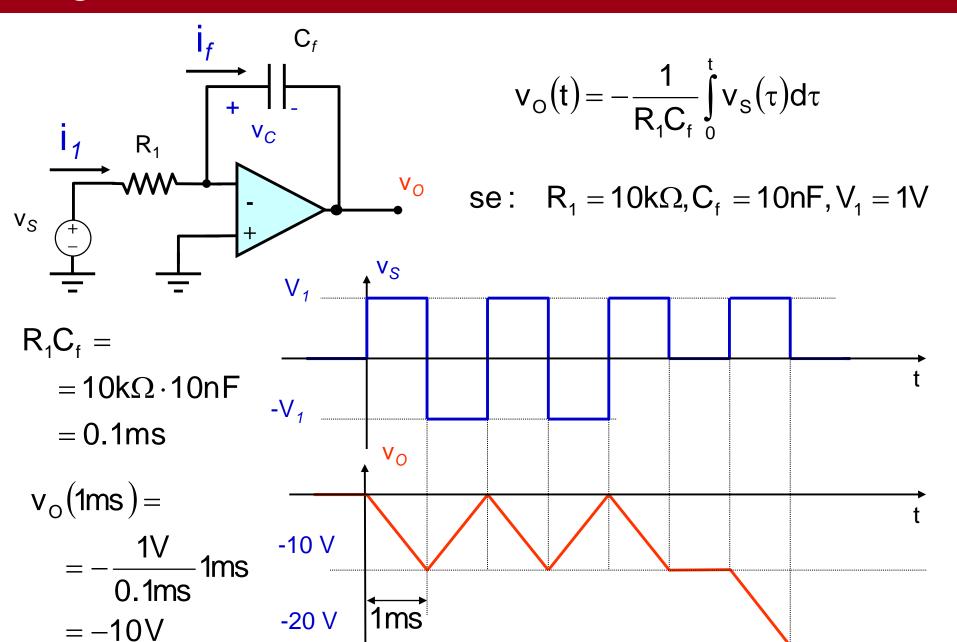
$$v_{O}(t) = -\frac{1}{R_{1}C_{f}} \int_{0}^{t} v_{S}(\tau) d\tau$$

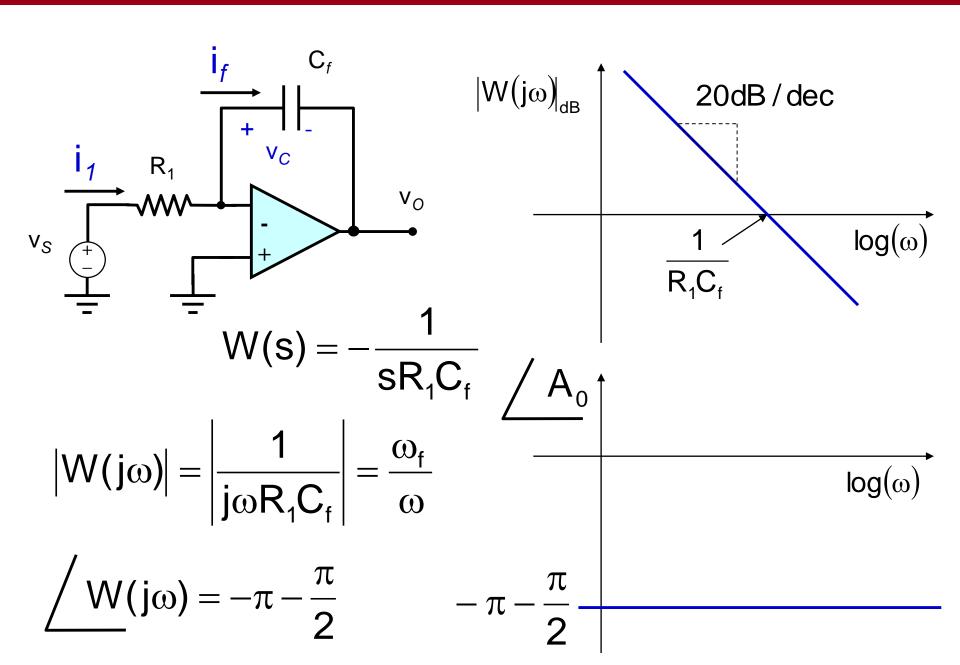


se:

$$R_1 = 10k\Omega, C_f = 1\mu F, V_1 = 1V$$

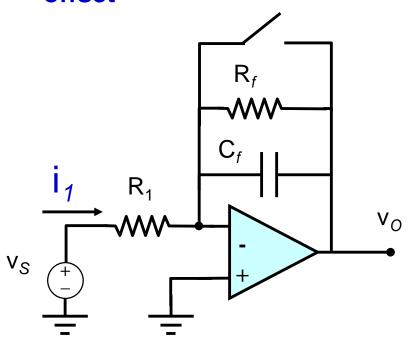
$$v_{O}(0.1s) = -\frac{1V}{10^{4}\Omega 10^{-6}F}0.1s = -10V$$

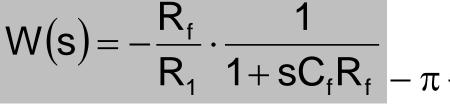


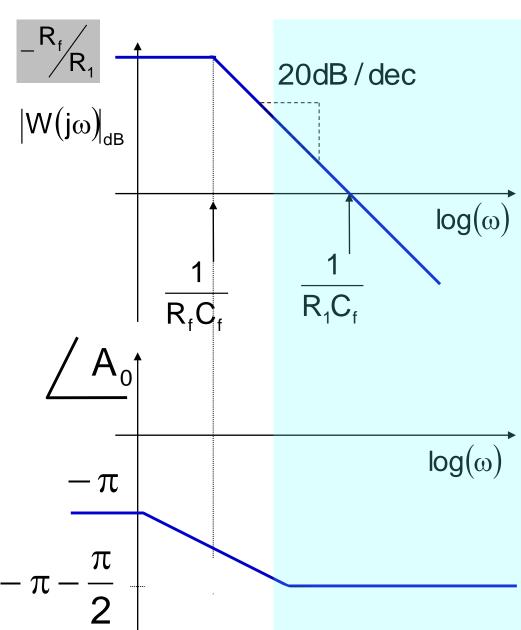


Integratore reale

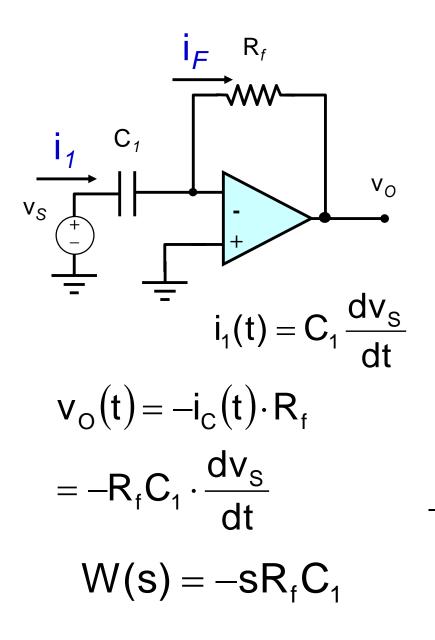
- Problema della DC
- Problema delle correnti di perdita e della tensione di offset

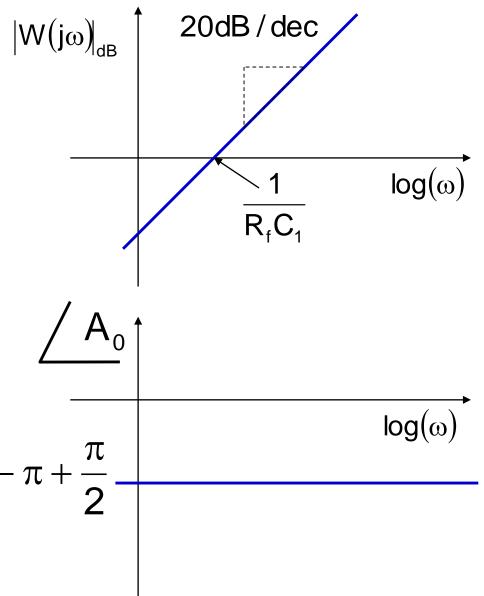




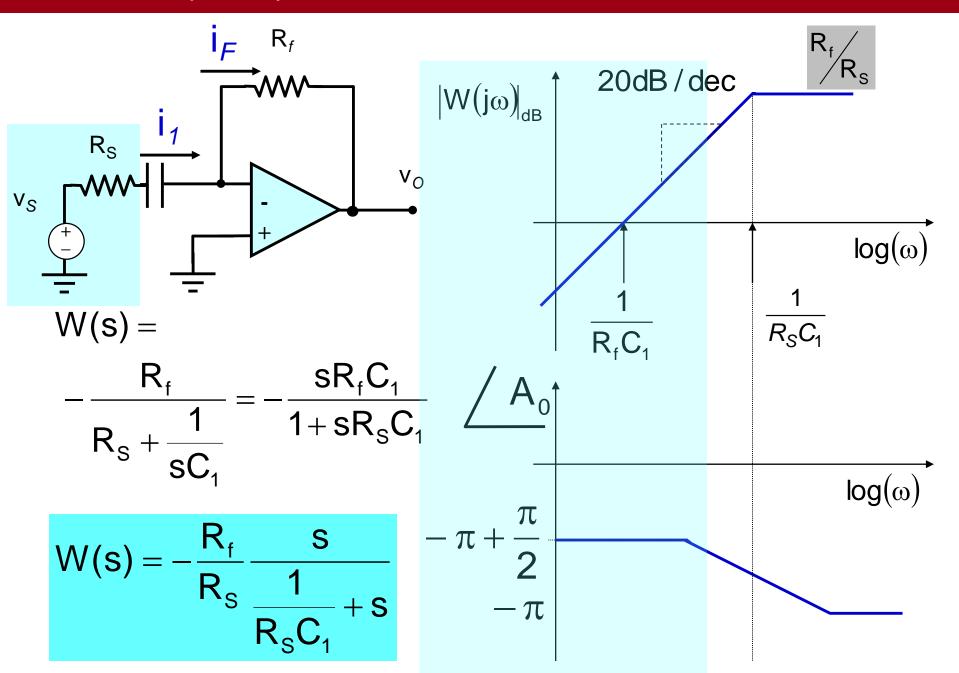


Derivatore (ideale)

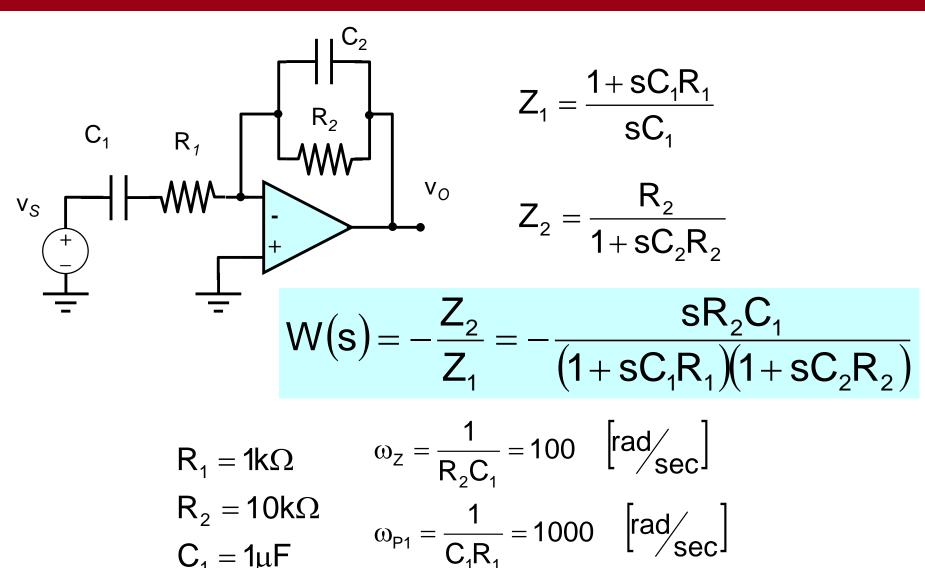




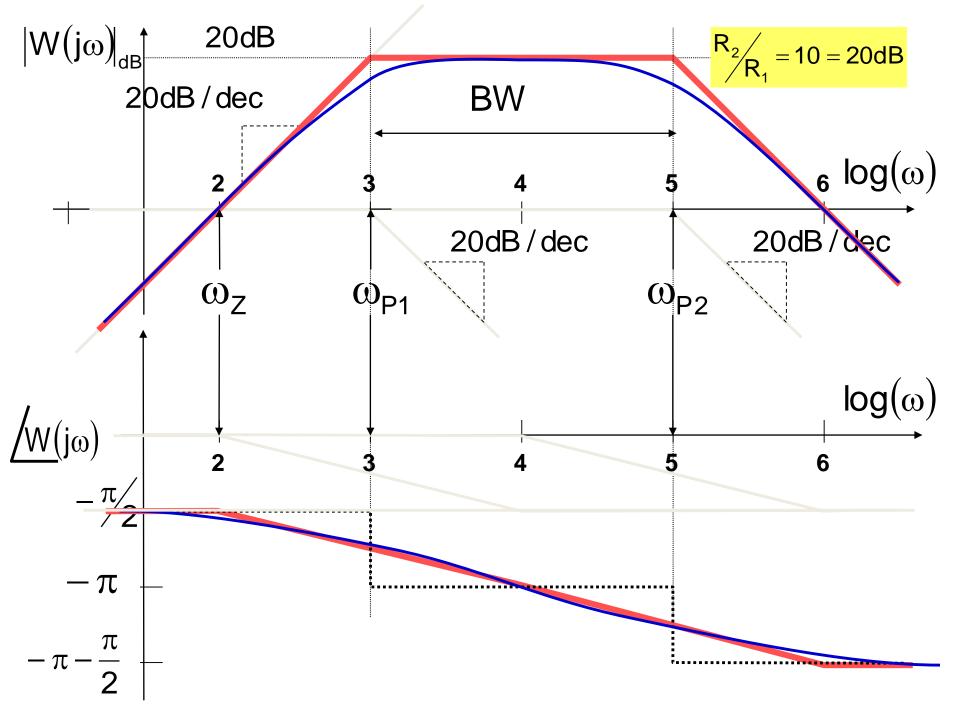
Derivatore (reale)



Filtro passa-banda



$$C_1 = 1\mu F$$
 C_1R_1 $C_2 = 1nF$ $C_2 = \frac{1}{C_2R_2} = 100000$ $\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$



Filtro passa banda

$$W(s) = -\frac{sR_2C_1}{(1 + sC_1R_1)(1 + sC_2R_2)}$$

$$W(s) = -\frac{sR_2C_1}{(1+sC_1R_1)(1+sC_2R_2)}$$

$$W(s) = -\frac{\frac{s}{\omega_z}}{(1+\frac{s}{\omega_{P1}})(1+\frac{s}{\omega_{P2}})}$$
Posso riscrivere come:

Posso riscrivere come:

$$W(s) = -\frac{R_2}{R_1} \frac{s}{\left(s + \frac{1}{C_1 R_1}\right)} \frac{1}{\left(s C_2 R_2 + 1\right)} \qquad W(s) = A_0 \frac{s}{\left(s + \omega_{P1}\right)} \frac{1}{\left(s + \omega_{P2}\right)}$$

Metto in evidenza il guadagno a centro banda.

Regola Generale:

Se individuo poli e zeri a bassa frequenza (prima del centro banda) e li scrivo nella forma ($s+\omega$), avrò una formula che ha come coefficiente (non dipendente da s) il guadagno a centro banda.