

11/10/2022

SPAZIO VETTORIALE DI SEGNALI A ENERGIA FINITA

PRODOTTO INTERNO

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt$$

NORMA

$$\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle} = \sqrt{E_x}$$

E_x energia del segnale

BASE ORTONORMALE

Una base ortonormale di uno spazio vettoriale è un insieme di vettori (segnali) $x_1(t), \dots, x_n(t)$ t.c.

$$\langle x_i(t), x_j(t) \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad \forall i, j$$

$$\|x_i(t)\| = 1, \forall i$$

e inoltre deve valere che il generico segnale $y(t) \in V$ sia scrivibile come

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n(t) \\ \alpha_i = \langle y(t), x_i(t) \rangle \end{cases}$$

I vettori sono ortogonali in quanto il prodotto interno (scalare) da 0, sono normali in quanto il modulo di ogni vettore è 1

E_s :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = 0$$

questo caso si verifica

- se i due segnali hanno **sostegni diversi** (se sono non nulli in momenti diversi, il prodotto dei segnali sarà sempre nullo); in questo caso i segnali hanno **supporto disgiunto** TODO: INSERISCO DISEGNO 0
- TODO: INSERISCO DISEGNO 1

SOTTOSPAZIO GENERATO DA UN INSIEME DI N SEGNALI A ENERGIA FINITA

Dati n segnali $s_1(t), \dots, s_n(t)$, il sottospazio generato da questi segnali è l'insieme dei vettori (compresi quelli ottenuti da operazioni tra vettori):

$$s(t) = \sum_{n=1}^N \alpha_n s_n(t), \quad \alpha_n \in \mathbb{R}, \quad \forall n$$

I vettori **non sono per forza ortonormali**

Perché si tratti di un sottospazio vettoriale bisogna che sia **chiuso per le operazioni di somma e prodotto**

$$x(t) + y(t) = \sum_n \alpha_n s_n(t) + \sum_n \beta_n s_n(t) = \sum_n (\alpha_n + \beta_n) s_n(t)$$

Es:

TODO: INSERIRE DISEGNO 2

Partendo da segnali che generano un sottospazio, posso descrivere il sottospazio con una base ortonormale di dimensione $I \leq N$, $\phi_1(t), \dots, \phi_I(t)$

$$x(t) \iff x = [x_1, \dots, x_I]$$

$$x(t) = \sum_{i=1}^I x_i \phi_i(t)$$

PRODOTTO INTERNO NEI DUE SPAZI

$\langle x(t), y(t) \rangle$ con $x(t)$ e $y(t)$ nel sottospazio $\{\phi_1(t), \dots, \phi_I(t)\}$

$$x_i = \langle x(t), \phi_i(t) \rangle$$

$$y_i = \langle y(t), \phi_i(t) \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle x(t), y(t) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^I x_i \phi_i(t), \sum_{i=1}^I y_i \phi_i(t) \right\rangle = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \langle x_i \phi_i(t), y_j \phi_j(t) \rangle \\
&\stackrel{*0}{=} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I x_i y_j \langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle \stackrel{*1}{=} \sum_{i=1}^I x_i y_i \langle \phi_i(t), \phi_i(t) \rangle \stackrel{*2}{=} \sum_{i=1}^I x_i y_i \\
&= \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle
\end{aligned}$$

prodotto interno nello spazio euclideo.

*0: per linearità

*1: ortogonalità dei segnali della base

*2: normalizzazione dei segnali della base

Energia:

$$E_x = \langle x(t), x(t) \rangle = \sum_{i=1}^I x_i^2$$

Norma:

$$\|x(t)\| = \sqrt{E_x} = \sqrt{\sum_{i=1}^I x_i^2} = \|\underline{x}\|$$

Distanza:

$$d^2(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - y(t)]^2 dt$$

$$x(t) - y(t) = \sum x_i \phi_i(t) - \sum y_i \phi_i(t) = \sum (x_i - y_i) \phi_i(t) \rightarrow \underline{x} - \underline{y}$$

$$d^2(x(t), y(t)) = \dots = \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = d^2(\underline{x}, \underline{y})$$