

2022-11-03

POTENZA DEL RUMORE

σ_I^2 : potenza del rumore su canale AWGN sia nel tempo che in ogni elemento dello spazio euclideo.

$$\underline{r} = \underline{s}_{a_0} + \underline{w}$$
$$\underline{w} = [w_1, \dots, w_I] \quad w_i \sim N(0, \sigma_I^2)$$

$$\sigma_I^2 = \frac{N_0}{2} \quad \text{PSD} \quad \text{Densità spettrale di potenza del rumore}$$

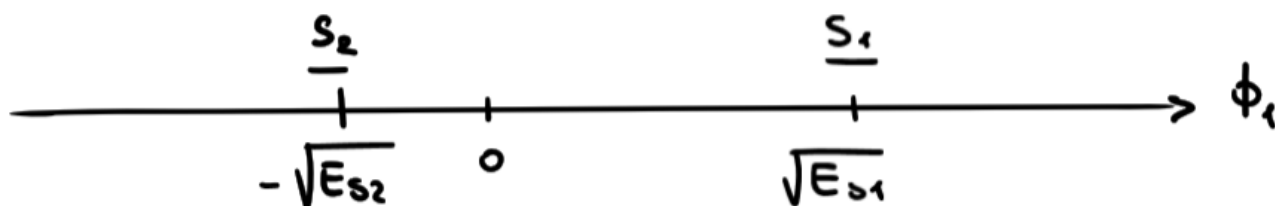
MODULAZIONE BINARIA

$M = 2$ due segnali che mappano i valori di un bit.

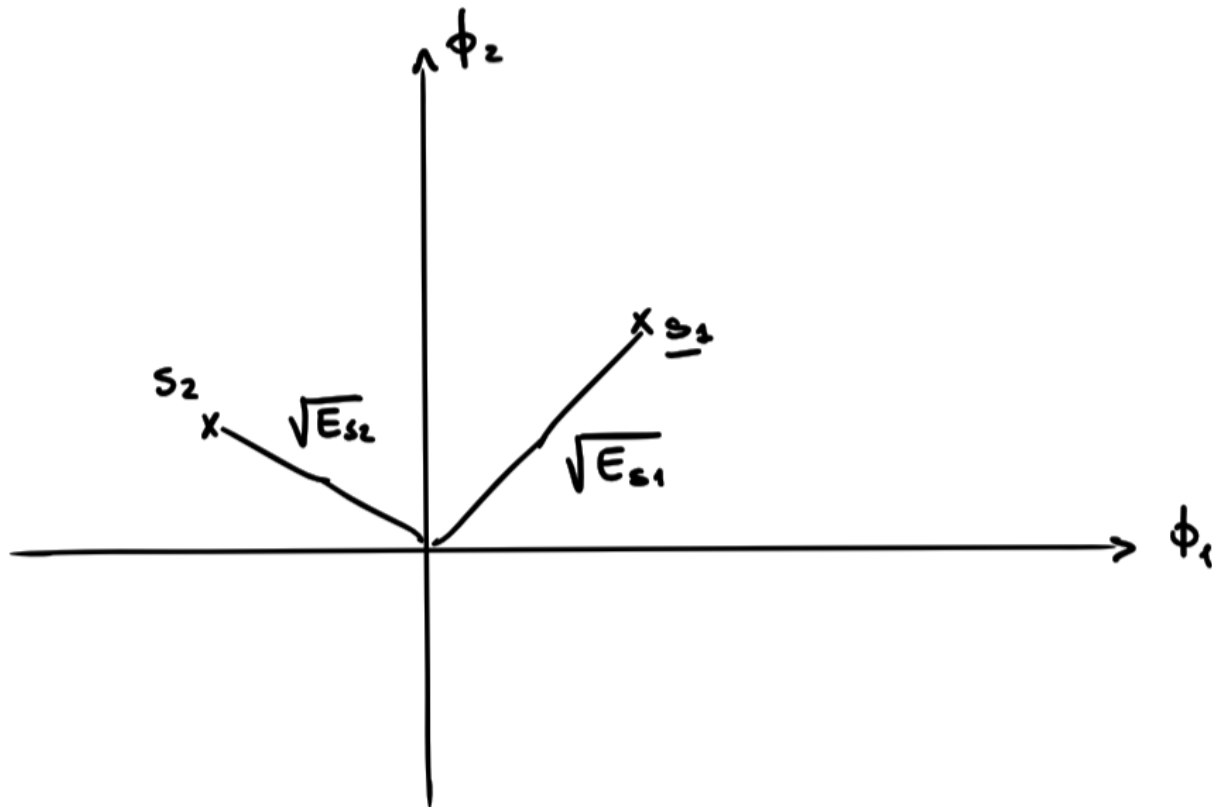
Abbiamo a che fare con $s_1(t)$ e $s_2(t)$.

$I \leq 2$:

Se $I = 1$:



Se $I = 2$:



🔗 Coordinate segnalazione in base binaria

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} \langle s_1(t), \phi_1(t) \rangle, \langle s_1(t), \phi_2(t) \rangle \end{bmatrix}$$
$$\underline{s}_2 = \begin{bmatrix} \langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle, \langle s_2(t), \phi_2(t) \rangle \end{bmatrix}$$

DISTANZA TRA S1 E S2 AL QUADRATO

$$d^2 = \langle \underline{s}_1 - \underline{s}_2, \underline{s}_1 - \underline{s}_2 \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^I \left(s_{1,i} - s_{2,i} \right)^2$$

🔗 Distanza tra segnali

$$d^2 = \sum_{i \times 1}^I \left(s_{1,i} - s_{2,i} \right)^2$$

PROBABILITA' D'ERRORE

$P(E)$: Probabilità d'errore sul simbolo

$$P(E) = 1 - P(C)$$

$P(C)$ probabilità di decisione corretta

P_{bit} : probabilità d'errore sul bit $P(E) = P_{bit}$

$$P(E) = 1 - P(C)$$

$$= *^1$$

$$P(C) = P\left(\hat{a}_0 = a_0\right)$$

$$= P\left(\hat{a}_0 = a_0 | a_0 = 1\right)P(1) + P\left(\hat{a}_0 = a_0 | a_0 = 2\right)P(2)$$

$$= P\left(\hat{a}_0 = 1 | a_0 = 1\right)\frac{1}{2} + P\left(\hat{a}_0 = 2 | a_0 = 2\right)\frac{1}{2}$$

$$= *^2$$

$$\begin{aligned}
P(\hat{a}_0 = 1 | a_0 = 1) &= P\left(\|\underline{r} - \underline{s}_1\|^2 < \|\underline{r} - \underline{s}_2\|^2 | a_0 = 1\right) \\
&= P\left(\|\underline{s}_1 + \underline{w} - \underline{s}_1\|^2 < \|\underline{s}_1 + \underline{w} - \underline{s}_2\|^2\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^I w_i^2 < \sum_{i=1}^I \left[(s_{1,i} - s_{2,i}) + w_i\right]^2\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^I w_i^2 < \sum_{i=1}^I \left[(s_{1,i} - s_{2,i})^2 + 2(s_{1,i} - s_{2,i})w_i + w_i^2\right]\right) \\
&= P\left(0 < \sum_{i=1}^I (s_{1,i} - s_{2,i})^2 + 2 \sum_{i=1}^I (s_{1,i} - s_{2,i})w_i\right) \\
&= P\left(-\langle \underline{s}_1, \underline{w} \rangle < \frac{1}{2}d^2\right) \\
&= P\left(\langle \underline{s}_2 - \underline{s}_1, \underline{w} \rangle < \frac{1}{2}d^2\right) \\
&= *^3
\end{aligned}$$

$$\langle \underline{s}_2 - \underline{s}_1, \underline{w} \rangle = \sum_{i=1}^I (s_{2,i} - s_{1,i})w_i \sim N\left(0, \sigma_I^2 d^2\right)$$

Dim:

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_i (s_{2,i} - s_{1,i})w_i\right)^2\right] &= E\left[\left(\sum_i (s_{2,i} - s_{1,i})w_i\right)\right] E\left[\left(\sum_j (s_{2,j} - s_{1,j})w_j\right)\right] \\
&= \sum_i \sum_j (s_{2,i} - s_{1,i})(s_{2,j} - s_{1,j}) E(w_i w_j) \\
&= \sum_{i=1}^I (s_{2,i} - s_{1,i})^2 \sigma_I^2 \\
&= \sigma_I^2 \sum_{i=1}^I (s_{2,i} - s_{1,i})^2 \\
&= \sigma_I^2 d^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *^3 \quad P(\hat{a}_0 = 1 | a_0 = 1) &= P\left(\langle \underline{s}_2 - \underline{s}_1, \underline{w} \rangle < \frac{1}{2}d^2\right) \\
 &= 1 - Q\left(\frac{\frac{1}{2}d^2 - m_z}{\sigma_z}\right) \\
 &= 1 - Q\left(\frac{\frac{1}{2}d^2}{\sigma_I d}\right) \\
 &= 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right)
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda $P(\hat{a}_0 = 2 | a_0 = 2)$, siccome il risultato dipende solo dalla distanza tra i due simboli, troviamo la stessa cosa.

$$\begin{aligned}
 *^2 \quad P(C) &= P(\hat{a}_0 = 1 | a_0 = 1) \frac{1}{2} + P(\hat{a}_0 = 2 | a_0 = 2) \frac{1}{2} \\
 &= 1 - Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right) \\
 *^1 \quad P(E) &= Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right)
 \end{aligned}$$

🔗 Probabilità d'errore

$$P(E) = Q\left(\frac{d}{2\sigma_I}\right)$$

(La funzione $Q(A)$ mi rappresenta l'area della gaussiana per i valori $> A$)

Se l'argomento di Q è grande, Q è piccola

Per diminuire la probabilità d'errore devo aumentare la distanza tra i segnali
 σ_I è la varianza del rumore, ovviamente maggiore è la varianza del rumore,
 maggiore è la probabilità d'errore

ENERGIA MEDIA DELLA MODULAZIONE

$$\begin{aligned}
 E_s &= E\left[E_{s_i}\right] \\
 &= \sum_{i=1}^I E_{s_i} P_{a_0}(i)
 \end{aligned}$$

Ci interessa l'energia in trasmissione

$s_i(t)$ segnali ricevuti

Qui assumo un canale AWGN che non introduce attenuazione

$$r(t) = s_{TX}(t) + w(t)$$

(senza attenuazione)

$$\begin{aligned} E_s &= E_{s_1} P_{a_0}(1) + E_{s_2} P_{a_0}(2) \\ &= \frac{1}{2} E_{s_1} + \frac{1}{2} E_{s_2} \end{aligned}$$

per segnali equiprobabili

🔥 Energia media

$$E_s = E_{s_1} P_{a_0}(1) + E_{s_2} P_{a_0}(2)$$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE TRA DUE VETTORI

🔥 Coefficiente di correlazione

$$\rho = \frac{\langle \underline{s}_1, \underline{s}_2 \rangle}{\sqrt{E_{s_1} E_{s_2}}}$$

Se $\rho = 0$ il prodotto interno è nullo, quindi i vettori sono **ortogonali**

Se $\rho = -1$ i due vettori potrebbero essere uno l'opposto dell'altro rispetto all'origine e i segnali sono detti **antipodali**

Non avrebbe senso avere $\rho = 1$ in quanto non riesco a distinguere i due segnali...

Se $E_{s_1} = E_{s_2}$:

$$\rho = \frac{\langle s_1(t), s_2(t) \rangle}{\sqrt{E_s^2}} = \frac{\langle s_1(t), s_2(t) \rangle}{E_s}$$

E_s energia media.

A partire da $s_1(t)$ e $s_2(t)$ scelgo $s_1(t) \neq 0$

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_{s_1}}}$$

supponendo che $E_{s_1} = E_{s_2}$:

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_s}} \quad \underline{s}_1 = \left[\sqrt{E_s}, 0 \right]$$

$$\begin{aligned} \langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle &= \frac{\langle s_2(t), s_1(t) \rangle}{\sqrt{E_s}} \\ &= \rho \sqrt{E_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2'(t) &= s_2(t) - \langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle \phi_1(t) \\ &= s_2(t) - \frac{\langle s_2(t), s_1(t) \rangle}{\sqrt{E_s}} \phi_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{s}_2 &= \left[\langle s_2(t), \phi_1(t) \rangle, \langle s_2(t), \phi_2(t) \rangle \right] \\ &= \left[\rho \sqrt{E_s}, \sqrt{E_s - \rho^2 E_s} \right] \end{aligned}$$

$$\underline{s}_1 = \left[\sqrt{E_s}, 0 \right]$$

$$\underline{s}_2 = \left[\rho \sqrt{E_s}, \sqrt{E_s} \sqrt{1 - \rho^2} \right]$$

1. Segnali ortogonali, $\rho = 0$:

$$\underline{s}_1 = \left[\sqrt{E_s}, 0 \right] \quad \underline{s}_2 = \left[0, \sqrt{E_s} \right]$$

2. Segnali antipodali, $\rho = -1$:

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{E_s}, 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{E_s}, 0 \end{bmatrix}$$