



# 基于 MATLAB 的强迫振动达芬方程的非线性幅频响应分析\*

陈赵江 陈 敏

(浙江师范大学数理与信息工程学院 浙江 金华 321004)

(收稿日期:2016-03-08)

**摘要:**利用 MATLAB 研究了强迫振动达芬(Duffing)方程的非线性幅频响应特性,分析了达芬方程非线性幅频响应近似解析求解和数值求解的方法和步骤,给出了相应的 MATLAB 求解程序,并将解析解与数值解结果进行了比较.仿真程序和结果能够加深学生对非线性振动相关知识的理解,提高大学物理及相关力学课程的课堂教学效果.

**关键词:**达芬方程 非线性振动 非线性幅频响应 跳跃现象 MATLAB

强迫振动达芬方程(Duffing equation)在非线性振动领域是一个非常经典的实例,被广泛用来说明跳跃现象(Jumping phenomena)、频响曲线弯曲和其他非线性行为.理解这个简单的低阶非线性方程的振动特性是学习更为复杂的非线性系统的基础.达芬方程解的跳跃现象与其非线性频响特性有直接的关系,因此对频响特性的研究非常重要.在目前大学物理以及相关力学课程的教学中,学生对非线性振动知识了解甚少,一知半解.如果能利用软件程序帮助学生了解掌握晦涩难懂的非线性振动知识,这将大大有益于相关教学工作的开展.目前已往文献对达芬方程非线性幅频响应的分析大多利用 MAPLE 和 MATHEMATICA 数学软件且缺少数值解和解析解的比较分析.本文给出了达芬方程非线性幅频响应近似解析求解和数值求解的方法和步骤,利用 MATLAB 的强大计算功能编写了相应的求解程序,并将解析解与数值解结果进行了比较分析,以满足学生对非线性振动知识的进一步理解.

## 1 达芬方程非线性幅频响应的理论分析

含阻尼和外部驱动力的无量纲达芬方程一般具

有如下形式<sup>[1]</sup>

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + u + \gamma u^3 = F \cos \Omega t \quad (1)$$

其中  $u$  是位移,  $t$  是时间,  $\zeta$  是阻尼比,  $\gamma$  是立方刚度系数,  $F$  和  $\Omega$  分别为激励幅值和激励频率.需注意的是,式(1) 中所有物理量均为无量纲量,因此  $\Omega$  其实是激励频率和系统固有频率之比,即

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

式(1)不存在闭合解析解,但在系统为弱非线性和弱阻尼情况下,则可以利用摄动方法得到其近似解析解.为便于非线性分析,引入一个小参数  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll 1$ ) 且将阻尼比  $\zeta$  和立方刚度系数  $\gamma$  分别表示为  $\zeta = \epsilon\bar{\zeta}$  和  $\gamma = \epsilon\bar{\gamma}$ ,其中  $\bar{\zeta}$  和  $\bar{\gamma}$  均为  $O(1)$  阶量.在本文中考虑系统接近主共振( $\Omega \approx 1$ )时的受迫振动,因此需重新规定激励的阶数使  $F = \epsilon\bar{F}$ ,其中  $\bar{F}$  为  $O(1)$  阶量.此外,我们引进一个解谐参数  $\sigma$  来描述激励频率与系统固有频率之间的接近程度

$$\Omega = 1 + \epsilon\sigma \quad (2)$$

则式(1)可改写为

$$\ddot{u} + 2\epsilon\bar{\zeta}\dot{u} + u + \epsilon\bar{\gamma}u^3 = \epsilon\bar{F} \cos(1 + \epsilon\sigma)t \quad (3)$$

我们采用多尺度法<sup>[1]</sup>对上式进行近似解析求

\* 浙江师范大学“十二五”省级实验教学示范中心重点建设项目和 2015 年度浙江师范大学教改项目资助.

作者简介:陈赵江(1980-),男,博士,主要从事大学物理教学和研究.

解,引入尺度  $T_0 = t$  和  $T_1 = \varepsilon t$

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \quad (4)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots \quad (5)$$

进行变换,式中  $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$ . 寻找形式为

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) \quad (6)$$

的式(3)的解. 把式(4)~(6)代入式(3), 并令  $\varepsilon$  的同次幂的系数相等, 我们得到

$$D_0^2 u_0 + u_0 = 0 \quad (7)$$

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\bar{\zeta} D_0 u_0 - \bar{\gamma} u_0^3 + \bar{F} \cos(T_0 + \sigma T_1) \quad (8)$$

式(7)的通解可以表示为

$$u_0 = A(T_1) e^{iT_0} + A^*(T_1) e^{-iT_0} \quad (9)$$

其中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $A$  为复数且  $A^*$  为其共轭量. 将式(9)代入式(8)并消去产生长期项的那些项, 得出

$$2iA' + 2i\bar{\zeta}A + 3\bar{\gamma}A^2A^* - \frac{1}{2}\bar{F}e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (10)$$

把  $A$  表示成如下的级数形式

$$A(T_1) = \frac{1}{2}a(T_1)e^{i\beta(T_1)} \quad (11)$$

则式(10)改写成

$$ia'e^{i\beta} - a\beta'e^{i\beta} + i\bar{\zeta}ae^{i\beta} + \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^3e^{i\beta} - \frac{1}{2}\bar{F}e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (12)$$

或

$$ia' - a\beta' + i\bar{\zeta}a + \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^3 - \frac{1}{2}\bar{F}\cos(\sigma T_1 - \beta) - \frac{1}{2}i\bar{F}\sin(\sigma T_1 - \beta) = 0 \quad (13)$$

将式(13)分成实部和虚部, 得出

$$a' = -\bar{\zeta}a + \frac{1}{2}\bar{F}\sin(\sigma T_1 - \beta) \quad (14)$$

$$a\beta' = \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^3 - \frac{1}{2}\bar{F}\cos(\sigma T_1 - \beta) \quad (15)$$

式中  $a$  和  $\beta$  都是实数, 引进变换

$$\varphi = (\sigma T_1 - \beta) \quad (16)$$

把式(14)和(15)化为自治系统, 由式(16)

$$\varphi' = \sigma - \beta' \quad (17)$$

把式(16)代入式(14)和(15), 并利用式(17)可得

$$a' = -\bar{\zeta}a + \frac{1}{2}\bar{F}\sin\varphi \quad (18)$$

$$a\varphi' = \sigma a - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^3 + \frac{1}{2}\bar{F}\cos\varphi \quad (19)$$

由于我们考虑稳态运动, 即  $a$  和  $\varphi$  为常数值, 设  $a' = 0$  和  $\varphi' = 0$ , 可得到

$$\bar{\zeta}a = \frac{1}{2}\bar{F}\sin\varphi \quad (20)$$

$$-\sigma a + \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^3 = +\frac{1}{2}\bar{F}\cos\varphi \quad (21)$$

对式(20)和(21)取平方, 将结果相加, 得出

$$\xi^2 a^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^2\right)^2 a^2 = \frac{1}{4}\bar{F}^2 \quad (22)$$

通常称之为频率响应方程. 利用式(2)我们将上式改写为  $\Omega$  关于  $a$  的形式, 得到

$$\Omega = 1 + \frac{3\bar{\gamma}}{8}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\bar{F}}{2a}\right)^2 - (\varepsilon\bar{\zeta})^2} \quad (23)$$

从式(23)可知, 对于某一幅值响应  $a$ , 其对应两个激励频率  $\Omega_{1,2}$ , 但这两个频率所对应的响应  $a$  可能是不稳定的. 为了表征解的稳定性, 考虑如下的动力学系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (24)$$

其中,  $x_1$  和  $x_2$  为状态量. 则上述系统的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

根据式(18)和式(19), 在本系统中状态向量分别为  $a$  和  $\varphi$ ,  $f_1$  和  $f_2$  的表达式如下

$$\begin{cases} f_1 = -\bar{\zeta}a + \frac{1}{2}\bar{F}\sin\varphi \\ f_2 = \sigma a - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^3 + \frac{1}{2}\bar{F}\cos\varphi \end{cases} \quad (26)$$

因而可得系统的雅可比矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -\bar{\zeta} & -a\left(\sigma - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^2\right) \\ \frac{1}{a}\left(\sigma - \frac{9}{8}\bar{\gamma}a^2\right) & -\bar{\zeta} \end{bmatrix} \quad (27)$$

稳态运动的稳定性依赖于雅可比矩阵的特征值,式

(27) 所对应的特征方程如下

$$\begin{vmatrix} -\bar{\zeta} - \lambda & -a\left(\sigma - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^2\right) \\ \frac{1}{a}\left(\sigma - \frac{9}{8}\bar{\gamma}a^2\right) & -\bar{\zeta} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

展开此行列式,可得

$$\lambda^2 + 2\bar{\zeta}\lambda + \bar{\zeta}^2 + \left(\sigma - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^2\right)\left(\sigma - \frac{9}{8}\bar{\gamma}a^2\right) = 0 \quad (29)$$

本系统的本征值如下

$$\lambda_{1,2} = -\bar{\zeta} \pm \sqrt{-\left(\sigma - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^2\right)\left(\sigma - \frac{9}{8}\bar{\gamma}a^2\right)} \quad (30)$$

对于一个阻尼系统,雅可比矩阵本征值的和为负,因此至少有一个本征值有负实数部分,如果另一个本征值也有负实数部分,则固定点  $(a, \varphi)$  是稳定节点.根据上述讨论,当满足如下条件时,则运动是不稳定的

$$\Gamma = \left(\sigma - \frac{3}{8}\bar{\gamma}a^2\right)\left(\sigma - \frac{9}{8}\bar{\gamma}a^2\right) + (\bar{\zeta})^2 < 0 \quad (31)$$

其中

$$\sigma = \frac{\Omega - 1}{\epsilon}$$

## 2 达芬振动方程非线性幅频响应分析的 MATLAB 实现

在本节我们编写相应的 MATLAB 程序对达芬振动方程非线性幅频响应进行分析.在求解时参数设定如下(如没有特别指出):小参数  $\epsilon = 0.2$ , 激励幅值  $\bar{F} = 0.5$ , 阻尼参数  $\bar{\zeta} = 0.25$ , 非线性参数  $\bar{\gamma}$  分别为 0, 2 和 4.

### 2.1 MATLAB 解析求解程序

从式(22)可以看出为了得到频率响应曲线,可解出  $a^2$  关于  $\sigma$  的函数,或者可以解出  $\sigma$  关于  $a$  的函数.显然,后一种方法比较简单.因此,在编程时根据式(23)进行计算.以下为 MATLAB 求解程序:

% 强迫振动达芬方程幅频响应曲线的解析求解

% 参数设定

epsilon = 0.2; % 小参数

— 90 —

gamma1 = 4; % 非线性参数

F1 = 0.5; % 激励幅值

zeta1 = 0.25; % 阻尼项

a = linspace(0.1, 2.0, 100); % 计算响应幅值范围

for ii = 1:length(a)

% 根据(23)式,对应一个响应幅值,可能存在两个激励频率值;

% Omegal 为较小的激励频率值

Omegal(ii) = (1 + 3 \* epsilon \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2 - sqrt((epsilon \* F1 / (2 \* a(ii)))^2 - (epsilon \* zeta1)^2));

% Omegal 对应的本征函数值

lamOmega11 = sqrt(-((Omegal(ii) - 1) / epsilon - 3 \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2) \* ((Omegal(ii) - 1) / epsilon - 9 \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2)) - zeta1;

lamOmega12 = -sqrt(-((Omegal(ii) - 1) / epsilon - 3 \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2) \* ((Omegal(ii) - 1) / epsilon - 9 \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2)) - zeta1;

% Omega2 为较大的激励频率值

Omega2(ii) = (1 + 3 \* epsilon \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2 + sqrt((epsilon \* F1 / (2 \* a(ii)))^2 - (epsilon \* zeta1)^2));

% Omega2 对应的本征函数值

lamOmega21 = sqrt(-((Omega2(ii) - 1) / epsilon - 3 \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2) \* ((Omega2(ii) - 1) / epsilon - 9 \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2)) - zeta1;

lamOmega22 = -sqrt(-((Omega2(ii) - 1) / epsilon - 3 \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2) \* ((Omega2(ii) - 1) / epsilon - 9 \* gamma1 / 8 \* a(ii)^2)) - zeta1;

if lamOmega11 == conj(lamOmega21)

% 如果两个本征值相等退出计算(即此时计算到频响曲线最高点)

plot(Omegal(ii), a(ii), 'k.', 'MarkerSize', 15)

hold on

break

else

FG = ((Omegal(ii) - 1) / epsilon - 3 \* gamma1 /

```

8*a(ii)^2*((Omega1(ii)-1)/epsilon - 9*
gamma1/8*a(ii)^2 + zeta1^2; % 对应上文中的
(31) 式
if FG < 0
plot(Omega1(ii),a(ii),color, [.5 .5 .5],
MarkerSize',15) % 不稳定点
else
plot(Omega1(ii),a(ii),'k.',MarkerSize',15)%
稳定点
hold on
end
GF = ((Omega2(ii)-1)/epsilon - 3*gamma1/
8*a(ii)^2*((Omega2(ii)-1)/epsilon - 9*
gamma1/8*a(ii)^2 + zeta1^2; % 对应上文中的
(31) 式
if GF < 0
plot(Omega2(ii),a(ii),color, [.5 .5 .5],
MarkerSize',15) % 不稳定点
else
plot(Omega2(ii),a(ii),'k.',MarkerSize',15)%
稳定点
hold on
end
xlabel('Omega') % x 轴标题
ylabel('a') % y 轴标题
xlim([0.5,1.5]); % x 轴范围
ylim([0,2]);% y 轴范围
end % 满足条件退出循环(计算到幅频响应曲
线顶点)
end % 结束对不同 a 值的计算

```

## 2.2 MATLAB 数值求解程序

基本思路如下: 我们设想一个数值试验, 试验中激励幅值保持不变, 但激励频率缓慢地从小到大(正向扫频)或从大到小(反向扫频)变化经过线性固有频率值, 然后计算不同激励频率的简谐响应的稳态振幅并画出频响曲线。首先, 考虑一阶近似微分式(18)和(19). 为了能够利用 MATLAB 的微分方程求解指令 `ode45[2]` 进行计算, 我们定义解向量为  $Y =$

$[y_1 \ y_2]^T = [a \ \varphi]^T$  并将方程改写为如下形式

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\bar{\zeta}y_1 + \frac{1}{2}\bar{F}\sin y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = \sigma - \frac{3}{8}\bar{\gamma}y_1^2 + \frac{1}{2y_1}\bar{F}\cos y_2 \end{cases} \quad (32)$$

在 MATLAB 中定义如下函数并保存为 `duffing.m`

```

function dy = duffing(t,y)
global epsilon gamma1 F1 zeta1 Omega
dy = zeros(2,1);
dy(1) = -zeta1 * y(1) + F1/2 * sin(y(2));
dy(2) = (Omega - 1)/epsilon - 3 * gamma1/
8 * y(1)^2 + F1/(2 * y(1)) * cos(y(2));
end

```

此外, 我们再定义解向量  $Y = [y_1 \ y_2]^T = [u \ \dot{u}]^T$  并将式(3) 改写为如下形式

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -2\epsilon\bar{\zeta}y_2 - y_1 - \epsilon\bar{\gamma}y_1^3 + \epsilon\bar{F}\cos\Omega t \end{cases} \quad (33)$$

在 MATLAB 中定义如下函数并保存为 `duffing1.m`

```

function dydt = duffing1(t,y)
global epsilon gamma1 F1 zeta1 Omega
dydt = zeros(2,1);
dydt(1) = y(2);
dydt(2) = -2 * epsilon * zeta1 * y(2) - y(1) -
epsilon * gamma1 * y(1)^3 + epsilon * F1 * cos
(Omega * t);
end

```

达芬方程幅频响应数值求解主程序 `main.m` 如下:

```

clc
%close all
clear all
global epsilon gamma1 F1 zeta1 Omega
% 定义全局变量
% 参数设定
epsilon = 0.2; % 小参数
gamma1 = 4; % 非线性参数

```

```

F1 = 0.5; % 激励幅值
zeta1 = 0.25; % 阻尼项
np = 400; % 计算的频率数目
Omega1 = linspace(.5,1.5,np); % 正向扫频
时的频率
Omega2 = linspace(1.5,.5,np); % 反向扫频
时的频率
yy = [];
Y0 = [0.1 0.1]; % 初始值
for i = 1:1:length(Omega1)
    Omega = Omega1(i);
    [T, Y] = ode45(@duffing,[0 400],Y0);
    % [T, Y] = ode45(@duffing1,[0 400],Y0);
    nn = length(Y(:,1));
    ymax = max(Y(nn-round(nn/2):nn,1)); %
取稳态幅值

```

```

ymax1 = max(Y(nn-round(nn/2):nn,2));
Y0 = [ymax1 ymax1]; % 下一次计算的初始值
yy = [yy; ymax]; % 保存计算结果到 yy 向量
end
plot(Omega1,yy,'k',LineWidth,1.5) % 正向

```

扫频曲线用黑色表示

```

hold on
% 反向扫频
yy1 = [];
ymax1 = max(Y(nn-round(nn/2):nn,1));
% 反向扫频的初始值
ymax2 = max(Y(nn-round(nn/2):nn,2));
% 反向扫频的初始值
for j = 1:1:length(Omega2)
    Omega = Omega2(j)
    [T, Y1] = ode45(@duffing,[0 400],[ymax1
    ymax2]);
    % [T, Y] = ode45(@duffing1,[0 400],Y0);
    nn1 = length(Y1(:,1));
    ymax1 = max(Y1(nn1-round(nn1/2):nn1,
    1));

```

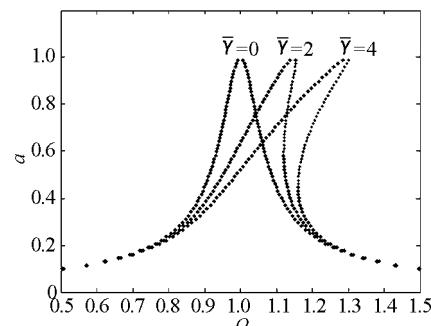
```

ymax2 = max(Y1(nn1-round(nn1/2):nn1,
2));
yy1 = [yy1; ymax1];
end
plot(Omega2,yy1,color',[.5 .5 .5],
LineWidth,1.5) % 反向扫频曲线用灰色表示
xlabel('Omega') % x 轴标题
ylabel('a') % y 轴标题
xlim([0.5,1.5]); % x 轴范围
ylim([0,2]); % y 轴范围

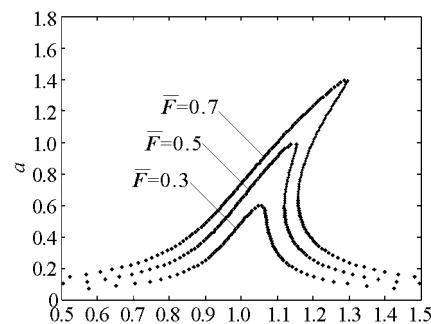
```

### 3 求解结果分析

首先利用 2.1 节的幅频响应解析求解程序对强迫振动达芬方程的幅频响应进行求解分析。图 1 给出了幅频响应曲线随非线性参数  $\bar{\gamma}$  和激励幅值  $\bar{F}$  的变化情况, 其中黑色点代表稳态响应点, 灰色点代表不稳定点。从图 1(a) 可知, 当  $\bar{\gamma} = 0$  时就是线性振动情况下频响曲线, 即当  $\Omega = 1$  时振动幅值最大且频响曲线是对称的。当  $\bar{\gamma} > 0$  时频响曲线将向右产生弯曲, 即硬弹簧情况。此外, 随着  $\bar{\gamma}$  值的增大, 弯曲程度越高。



(a) 随非线性参数  $\bar{\gamma}$  的变化



(b) 随激励幅值  $\bar{F}$  的变化

图 1 强迫振动达芬方程的幅频响应解析解

从图1(b)也可知当激励幅值  $F$  增加时,频响曲线弯曲程度也越高。从图中也可知由于非线性导致的频响曲线的弯曲,在上述图中都存在多值区域,这也是引起跳跃现象的原因。

其次,我们利用2.2节的幅频响应数值求解程序对强迫振动达芬方程的一阶近似幅频响应进行求解分析,其中使用的MATLAB子函数为duffing.m。图2中黑色和灰色曲线分别为正向和反向扫频计算结果。从图2可以发现当正向扫频(即频率比  $\Omega$  增大)时,响应幅值一直增加。当进一步增加时,就发生从A点到B点的跳跃并伴随着响应幅值的突然减小。随后,响应幅值随  $\Omega$  的增大而减小。对应着A点的最大振幅只有从较低的频率开始增加才可能达到。在另一方面,反向扫频(即频率比  $\Omega$  减小)时,响应幅值也增加。当  $\Omega$  进一步减小时就发生从C点到D点的跳跃并伴随着响应幅值的突然增加。随后,响应幅值随  $\Omega$  的减小而减小。从图中也可发现解析解中的不稳定区域(从A点到C点)在数值求解时是无法得到的,幅频响应一阶近似解析解和一阶近似数值解结果符合很好。

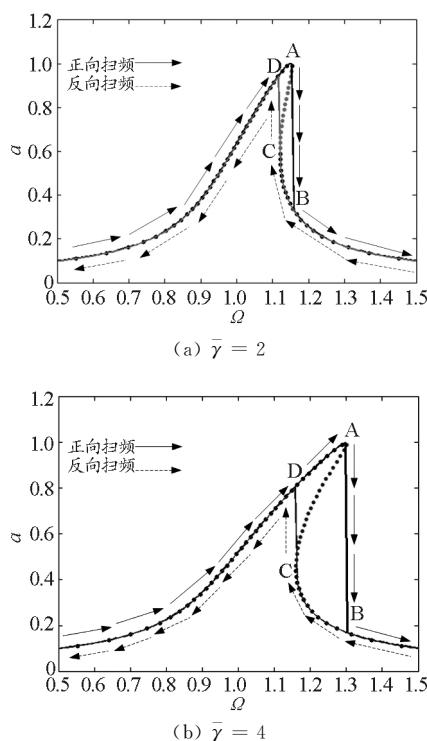


图2 强迫振动达芬方程的幅频响应数值与解析解的比较

最后,我们对强迫振动达芬方程的幅频响应做进一步的数值分析,其中使用的MATLAB子函数为duffing1.m。计算结果如图3所示,从图中可以发现数值解与近似解析解存在一定差异,且偏离  $\Omega=1$  越大两者的差别越大。这是因为这里数值求解的是最初的不包含近似的微分方程式(3),而解析解是满足  $\Omega \approx 1$  的一阶近似解。因此,当  $\Omega$  越接近1时,两者解的结果越接近。从上述分析也可知近似解析解式(22)是在弱阻尼、弱非线性系数并接近共振时得出的结果,并不适用于所有的情况,这一点在学习的时候要特别注意。

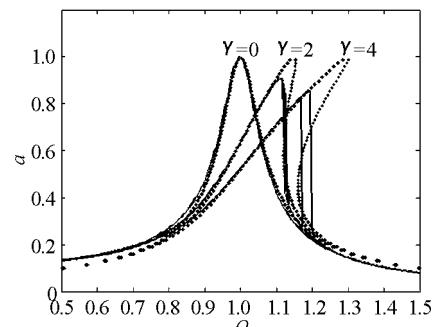


图3 强迫振动达芬方程的幅频响应数值与解析解的比较

#### 4 总结

本文对强迫振动达芬方程的非线性幅频响应特性进行了研究,分析了达芬方程非线性幅频响应解析求解和数值求解的方法和步骤,给出了相应的MATLAB求解程序,并将解析解与数值解结果进行了比较分析。仿真程序和结果能够加深学生对非线性振动的理解,提高大学物理以及相关力学课程的教学效果。此外,虽然本文只讨论了达芬方程的非线性幅频响应特性,但仿照本文的求解步骤和程序也容易对达芬方程的非线性相频特性进行分析。

#### 参 考 文 献

- 1 A·H·奈弗, D·T·穆克著. 非线性振动. 宋家骥, 罗惟德, 陈守吉译. 北京:高等教育出版社, 1980
- 2 张志涌. 精通 MATLAB R2011a. 北京:北京航空航天大学出版社, 2011