

分类号_____

学 号 0507220744

西安建筑科技大学

学 位 论 文

Duffing 方程非线性振动

特性的计算与分析

作者 王海波

指导教师姓名 张小龙 教授

申请学位级别 硕 士 专 业 名 称 机械设计及理论

论文提交日期 2009.05 论文答辩日期 2009.06

学位授予单位 西安建筑科技大学

答辩委员会主席

评 阅 人

声 明

本人郑重声明我所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中已经标明引用的内容外，本论文不包含其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果，也不包含本人或其他人在其它单位已申请学位或为其它用途使用过的成果。与我一同工作的同志对本研究所做的所有贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了致谢。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

论文作者签名：王海波

日期：2009.6.5

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解西安建筑科技大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅；学校可以公布学位论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或者其它复制手段保存学位论文。

（保密的论文在论文解密后应遵守此规定）

论文作者签名：王海波

导师签名：王海波

日期：2009.6.5

本人授权中国科学技术信息研究所、中国学术期刊（光盘版）杂志社等单位将本学位论文收录到有关“学位论文数据库”之中，并通过网络向社会公众提供信息服务。同意论文提交后滞后：☐半年；☐一年；☐二年发布。

论文作者签名：王海波

导师签名：王海波

日期：2009.6.5

注：请将此页附在论文首页。

Duffing 方程非线性振动特性的计算与分析

专 业：机械设计及理论

硕 士 生：王海波

指导教师：张小龙 教授

摘 要

Duffing 方程是非线性振动系统中的一类典型方程，工程实际中的许多非线性振动问题的数学模型都可以转化为该方程来研究，其模型具有代表性。从某种角度来说，对非线性 Duffing 系统的研究是研究许多复杂动力学系统的基础。本文采用慢变参数谐波平衡法，将假设解代入 Duffing 方程，导出微分方程式，并对其进行稳定性分析，将分析非线性振动的平均法的慢变参数思想用于谐波平衡法中，使得谐波平衡法也可以分析受迫振动的稳定性。分别用理论解析法（谐波平衡法、平均法）和数值积分法求出方程的自由振动、强迫振动、混沌振动，求出时间响应和频谱分析，画出幅频特性曲线，做出稳定性分析，并进行比较和验证。在此基础上，再分析计算其中存在的混沌现象，解释振动现象和规律。

本文共分为四章，主要内容如下：

第一章，介绍了研究非线性振动系统的重要意义，在非线性振动理论研究中几种常见的方程及求解方法，并重点阐述了 Duffing 方程的产生过程、研究意义，介绍了一些重要的研究成果。

第二章，通过数值计算分别研究了 Duffing 系统的自由振动、受迫振动的主共振、受迫振动的分数谐波共振以及受迫振动的混沌振动，并绘制相应的数值计算结果图和波形图等。

第三章，分别用谐波平衡法、平均法对 Duffing 方程进行解析求解，判定解的稳定性，同时将所得结果与第二章数值计算的结果进行比较和验证，通过验证，证明了理论计算结果与数值计算结果基本一致，说明上述理论分析是正确的。

第四章，结论。

关键词：duffing 方程；数值计算；谐波平衡法；平均法；混沌振动

The Calculation and Analysis of Nonlinear Vibration

Characteristics with Duffing Equation

Specialty: Mechanical design and theory

Name: Wang Haibo

Instructor: Prof. Zhang Xiaolong

Abstract

Duffing equation is a typical class of equations in nonlinear vibration system, many practical non-linear mathematical model of the vibration problem can be transformed into the representative equation to study. In some ways, the study of non-linear Duffing system is the foundation to research into many complex dynamic systems. In this paper, the harmonic balance method of slow-varying parameters was adopted. The hypothetical solution was incorporated into the Duffing equation, then differential equations was derived and its stability was analyzed. Nonlinear vibration analysis of the average method of the slow-varying parameters way was applied to harmonic balance method, in order to analyze the stability of forced vibrations with the harmonic balance method. Theory of analytic method (harmonic balance method, average method) and numerical integration method were used to obtain equations of free vibration, forced vibration, chaotic vibration, calculate the time response and spectral analysis, draw the amplitude-frequency characteristic curve to make the analysis of stability, comparison and verification. On this basis, we analyzed the existence of chaos phenomenon and explained the phenomena and laws of vibration.

This article is divided into four chapters as follows:

The first chapter introduced the importance of study on nonlinear vibration system, several common equations and solving methods of theoretical research in nonlinear vibration, focused on the production of Duffing equation and the significance of research on Duffing equation, and introduced a number of important research results.

Chapter II, we studied free vibration, forced vibration of the main resonance, the forced fraction harmonic resonance vibration and forced vibration resonance of the chaotic vibrations through the numerical calculation, and drawn the corresponding

numerical results map and waveform chart ,etc.

Chapter III, using harmonic balance method and average method to obtain analytic solution of Duffing equation to determine the stability of solution respectively, at the same time, compare and verify the results with the results of second chapter. Validated to prove that the theoretical results and numerical calculation results are basically the same, which notes the above theoretical analysis is correct.

Chapter IV, conclusions.

Keywords: Duffing Equation; Numerical Calculation; Harmonic Balance Method; Average Method; Chaotic Vibration

目 录

1 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 非线性振动理论研究中的几种常见方程及求解方法	2
1.2.1 非线性振动理论研究中的几种常见方程	2
1.2.2 非线性微分方程的求解方法	4
1.3 Duffing 方程的研究现状	5
1.4 本论文的主要工作	7
1.5 章节设置	8
2 Duffing 方程的数值计算	9
2.1 Duffing 系统的自由振动	9
2.2 Duffing 系统的受迫振动的主共振	11
2.3 Duffing 系统的受迫振动的分数谐波共振	17
2.4 Duffing 系统的受迫振动的混沌振动	22
3 Duffing 方程的解析求解	26
3.1 非线性振动方程的无量纲化	26
3.2 非线性振动方程的两种解析方法	27
3.2.1 谐波平衡法的基本思路	27
3.2.2 平均法 (method of averaging) 求解的基本思路	29
3.3 自由振动的解法	31
3.4 强迫振动的解	33
3.4.1 主共振	33
3.4.2 1/3 分数谐波共振	36
4 结论	41
致谢	42
参考文献	43



1 绪论

1.1 引言

振动在人类生活的物质世界中普遍存在,例如:脉搏的跳动,各种机械设备的振动,地震以及声、光、磁的波动等等,数不胜数。近几十年来,随着科学技术的不断进步,振动的研究及利用技术也得到了很大的发展。振动也已经成为人类工农业生产中不可缺少的环节和必要的机制。例如,一些作物的种子采用射线适当处理,可以提高产量;在医疗方面,利用超声可诊断和治疗多种疾病;在工程地质领域,利用振动可以对地下资源进行勘探,在石油开采工作中,利用振动可提高原油产量;在土建工程中,振动也得到了广泛利用,如振动沉拔桩、振动夯土、筑路机械的振动压实与振动摊铺,以及浇灌混凝土时的振动捣实等;在冶金、煤炭、化工、轻工、机械、电力、食品加工等部门,广泛应用振动給料、振动输送、振动筛分、振动冷却、振动烘干、振动破碎、振动粉磨和振动脱水等作业过程。类似的例子还有很多,从这些例子不难看出,振动对人类的生产和生活的重要性。

振动按其特性可大致分为两类:线性振动与非线性振动。严格地说,绝大多数振动都是非线性的。在非线性因素较弱的情况下,非线性振动系统可按线性振动系统近似处理。但是,工程当中的不少非线性振动问题在忽略非线性因素的情况下进行分析与计算,所得结果却与实际情况相差很大,甚至会得出错误的结论,这是因为两种振动之间存在着许多本质的区别,因此只有利用非线性振动的理论和方法,才能解决非线性振动的问题。

上述所列举的问题绝大多数都属于非线性振动的范畴,非线性振动已从经典的分析方法逐渐走向数值分析和理论利用之路。目前机械、能源、交通、化工、生物、生命、航空航天等领域中提出了大量的非线性振动问题,特别是强非线性、大振动问题、多自由度振动问题、系统的全局分析问题等,仍有待进一步深入研究和解决。

因此,研究非线性系统的振动,发展预测非线性系统响应的方法,探索非线性振动系统中求解非线性方程的有效办法,并有效的判定其稳定性,研究非线性振动系统的振动特性,揭示非线性系统在扰动下可能发生的现象,具有十分重要

的意义。

1.2 非线性振动理论研究中的几种常见方程及求解方法

1.2.1 非线性振动理论研究中的几种常见方程

非线性振动问题的研究通常包括定性研究与定量研究。定性研究的主要内容
包括方程解的存在性、唯一性、周期性和稳定性的研究等。

在非线性振动理论研究中,常用的代表性微分方程式有 Rayleigh 方程、Van del
Pol 方程及 Duffing 方程等。Rayleigh 方程是 J.W.S. Rayleigh (1842-1919) 在潜心
对声音进行实验与理论研究的过程中,在表示自由振动的微分方程式中,将恢复
力项不看成与位移成正比,而看成与位移的平方或立方成正比所得到的方程式。
例如

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + \alpha x^2 = 0 \text{ 或 } \frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + \alpha x^3 = 0$$

进而他还考察了在以上两个方程式的右边加上谐波量 $E \cos pt$ 、 $F \cos(qt - \varepsilon)$ 的强
制项,研究了由于非线性恢复力引发的高频振动(例如 $2p$) 等振动。他导出的方
程式被 Poincaré (1854-1912) 用于建立非线性力学的许多概念,例如平衡点、极
限环等。Van del Pol 方程是 1928 年荷兰的范德波尔(Van der Pol)为描述 LC 回路
的电子管振荡器建立的,方程的常见形式如下:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Van del Pol 方程在自激振荡理论中有着重要的意义,一直作为数学物理方程中的
一个基本方程。这是一个具有可变非线性阻尼的微分方程,代表了一类极为典型
的非线性问题。该方程揭示了由于系统受到非线性阻尼作用而导致系统出现孤立
周期振荡行为。有许多工程实际问题,都可用 van der Pol 方程来描述,如气动弹
性力、滑动轴承的油膜力、机翼的颤振和蒸汽机的工况等。Van der Pol 方程无论
在电子学还是数学动力系统研究中都占有重要地位。

G.Duffing 在电工学领域对具有非线性恢复力项的受迫振动系统进行了细致的
研究,引进了具有立方恢复力项的非线性振子方程来描述力学问题中所观察到的硬
弹簧的效应,并发现了许多非线性振动的奇妙现象,它的标准化动力学方程就是著
名的 Duffing 系统^[1]。“Duffing 方程是描述共振现象、调和振动、次调和振动、拟
周期振动、概周期振动、奇异吸引子和混沌现象(或随机过程)的简单数学模型。因

此，在非线性振动理论中研究 Duffing 方程具有解剖一只麻雀的作用^[2]。”它的标准形式为：

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + g(x) = f(x,t)$$

其中 $\delta > 0$ 为阻尼系数， $g(x)$ 是含有三次方项的非线性函数， $f(x,t)$ 为一周期函数。
Duffing 方程通常作如下分类：

(1)假设 $g(x)$ 满足超线性条件

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$$

则称 Duffing 方程是超线性的；

(2)假设 $g(x)$ 满足次线性条件

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

则称 Duffing 方程是次线性的；

(2)假设 $g(t)$ 满足半线性条件

$$0 < \liminf_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} \leq \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} < +\infty ,$$

则称 Duffing 方程是半线性的。

若将 Duffing 方程规范化，有以下四种基本类型：

类型 I	$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$	$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 = f \cos(\omega t)$
类型 II	$\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$	$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha_1 x - \alpha_2 x^3 = f \cos(\omega t)$
类型 III	$\alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0$	$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha_2 x^3 = f \cos(\omega t)$
类型 IV	$\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$	$\ddot{x} + \delta \dot{x} - \alpha_1 x + \alpha_2 x^3 = f \cos(\omega t)$

其中，类型 I 为硬特性 Duffing 方程；类型 II，类型 IV 称为软特性 Duffing 方程；类型 III 称为日本型，日本学者上田(Y.Ueda)研究较多，并发现了日本吸引子，也称为 Ueda 吸引子；美国数学家 P.Holmes 对类型 IV 的 Duffing 方程进行了深入的研究，因此类型 IV 也称为 Holmes 型 Duffing 方程^[3]。

Duffing 系统是一个典型的非线性振动系统，尽管是从简单物理模型中得出来的非线性振动模型，但是其模型具有代表性。工程实际中的许多非线性振动问题的数学模型都可以转化为该方程来研究，如船的横摇运动、结构振动、化学键的破坏等，横向波动方程的轴向张力扰动模型，转子轴承的动力学方程也与 Duffing 系统基本相似，另外 Duffing 系统也非常广泛地被应用到实际工程中，例如尖锐

碰摩转子的故障检测、微弱周期信号检测、电力系统周期振荡分析、周期电路系统的模拟与控制等。关于 Duffing 系统还有许多问题尚未彻底研究清楚,如 Duffing 方程的分数谐波振动、超谐波振动、组合振动等等,而且研究结果中规律性的成果可以推广到其他类似系统。因此从某种角度来说,对非线性 Duffing 系统的研究是研究许多复杂动力学系统的基础。

1.2.2 非线性微分方程的求解方法

非线性振动理论的研究目的是基于非线性振动系统的数学模型,在不同参数和初始条件下,确定系统运动的定性特征和定量规律。非线性振动系统的数学模型为非线性微分方程。对于工程中的实际非线性振动问题,除采用实验方法进行研究外,常用的理论研究方法为:几何方法、解析方法和数值方法。

几何方法是研究非线性振动的一种定性分析方法。传统的几何方法是利用相平面内的相轨迹作为对运动过程的直观描述。在常微分方程定性理论的基础上,根据相轨迹的几何性质判断微分方程解的性质。利用相平面内的奇点和极限环作为平衡状态和孤立周期运动的几何表述。因此,关于奇点的类型和稳定性的研究,关于极限环的存在性和稳定性的研究,以及稳定性随参数变化的研究,是传统几何方法讨论的主要内容。几何方法的局限性是不能得到非线性振动的定量规律,而且传统的几何方法通常难以推广到高维时变系统。尽管如此,几何方法仍在非线性振动研究中起着重要作用。几何方法不仅能得到直观的定性结果,而且可为其他研究方法提供理论依据。

解析方法是研究非线性振动的定量研究方法。即通过精确地或近似地寻求非线性微分方程的解析解,得到非线性系统的运动规律,以及对系统参数和初始条件的依赖关系。更常用的解析方法是近似解析方法。近似解析方法主要用于弱非线性系统,通常是以线性振动理论中得到的精确解为基础,将非线性作为一种摄动,求出近似的解析解。求近似解的方法有:小参数法,坐标变形法,多尺度法,慢变参数法,三级数法,等效线性化方法,谐波平衡法等。解析方法的局限性是应用范围十分有限,仅用于讨论可积和接近可积系统的平衡和周期运动。而且解析方法得到的解未必具有稳定性,因此可能不是实际问题中出现的运动。解析方法的优点是不仅能确定非线性系统的运动随时间变化的规律,而且能得到运动特性与系统参数之间的依赖关系,因此是非线性振动问题研究的重要方法。

数值方法是研究非线性振动系统的数值计算方法。数值方法通过数值求解非线性微分方程,得到非线性系统在特定的参数条件和初始条件下的运动规律。数

值方法的基础是常微分方程组的初值问题的数值解法。数值方法既可以计算特定非线性系统的各种运动的时间历程,包括平衡、周期运动和非周期运动等,也可以通过数值计算确定参数对系统运动的影响,以及通过吸引盆及其边界的计算确定初始条件对系统运动的影响。由于处理非线性振动问题的数学工具尚不完备,数值方法起着非常重要甚至是不可替代的作用。数值方法在非线性振动中的突出作用是发现新现象,这已成为非线性振动现代发展的突出特点。数值方法还可以补充理论研究结果,使一些理论结果定量化,或揭示有关条件不成立时可能发生的情况。数值方法得到的直观的结果可为理论研究提供启示,激发灵感。此外,数值方法还具有检验理论结果的作用,在非线性振动问题研究中,数值计算和实验验证往往是理论分析的最终验证。^[4]

1.3 Duffing 方程的研究现状

对 Duffing 方程的研究一直在深入地进行,研究的内容主要包括对方称本身的研究、对方程的求解方法(主要是解析方法和数值方法)的研究以及对方称的振动特性方面的研究等。

对于方程本身,大多是关于方程的周期解的研究,且主要集中在数学领域,陈红斌、虞烈、袁小阳^[5]对一类具有 2π 周期的 Duffing 方程完整地给出周期解的存在唯一性的充分与必要性条件;李鹏程^[6]用重合度理论研究 Duffing 型时滞微分方程 $x''(t) + f(x(t))x'(t) + g(x(t - \tau(t))) = p(t)$ 的 2π 周期解存在性;唐美兰、刘心歌、郭水霞^[7]利用三角级数理论及压缩映射原理研究了时滞 Duffing 型方程 $ax''(t) + bx(t) + g(x(t - \tau)) = p(t)$, 给出了此类 Duffing 型方程存在唯一周期解的几个充分条件;姚志健^[8]运用 Liapunov 泛函研究了一类具有时滞的 Duffing 型方程的概周期解的存在唯一性;伊贺达贲^[9]利用 Lipschitz 选择定理,给出了广义 Duffing 方程存在无穷多周期解的充分条件;张燕^[10]利用不动点定理及不等式分析技巧,证明了一类 Duffing 方程在较弱条件下的 2π 周期解的存在性,并且利用极坐标分析方法,进一步估计了周期 T 的大小;许敏、周伟灿^[11]考虑带有阻尼项的 Duffing 型方程的边值问题,在 Banach 空间上运用 Leray-Schauder 度理论证明了其周期解的存在性;杨丽伟^[12]对 Duffing 方程周期解存在唯一性的充分条件进行了讨论,并给出了一种有效地数值解法。

在 Duffing 方程的求解方面,1989 年,倪振华^[13]介绍了对于一般的 Duffing 方程,当右侧的项分别是简单的形式以及特殊形式时解析解的计算方法;1998

年,周纪卿、朱因远^[14]介绍了分别用逐次逼近法、谐波平衡法计算无阻尼达芬方程和有阻尼达芬方程的周期解;王大钧,王泉,陈德成^[15]介绍了从增量的谐波平衡法入手,辅以稳定性理论,计算一类 Duffing 方程的次谐波解(在一定的参数区域中);何吉欢^[16]用变分迭代算法给出了一种求解 Duffing 型方程的方法,这种方法的基本特点是:给定一个近似解(可以包含待定常数),然后用拉氏乘子来校正其近似解,拉氏乘子可用变分的概念最佳确定;林建国^[17]由参数迭代法得到非线性 Duffing 方程的高精度近似解;李银山、张善元、董青田、曹俊灵^[18]提出了用两项谐波法求解强非线性 Duffing 方程,通过实例证明,两项谐波法方法简单,具有较高的精度,两项谐波法将谐波平衡法与等效线性化方法相结合,克服了二者的缺点吸取了二者的优点,取较少的谐波数目就可以达到比较高的精度;陈艳锋、郑建华、吴新跃、王基^[19]对非线性振动中的无阻尼 Duffing 方程自由振动频率的求解方法进行了探讨,应用 Gauss-Chebyshev 求积公式计算了 Duffing 方程的自由振动频率,得到了精确解析解表达式,为深入研究 Duffing 方程的特性提供了一种新的方法。

在 Duffing 方程振动特性的研究方面,徐红兵、吕炳朝、陈光^[20]研究了基于 Duffing 方程不确定性模型的混沌控制,在 Lyapunov 控制律中引入控制补偿,能使控制稳定且具有一定的鲁棒性;李芳、徐振源^[21]研究了软弹簧 Duffing 振子的混沌控制,通过线性状态法、时间延迟法和凹槽滤波法 3 种反馈控制方法,在不改变原动力系统参数的前提下,引导系统由混沌运动转为期望的低周期运动;胡艳、赵雪平、秦树洪等^[22]对经典 Duffing 方程在周期激励和限带白噪同时作用下的混沌性质进行了分析。田春红^[23]主要研究了具有非完全参数的 Duffing 方程的时变反馈控制问题及其分岔行为。杨国海、夏清华等^[24]利用非线性动力学的原理和方法,分析了无阻尼 Duffing 方程在软非线性和硬非线性情况下的多值共振解的稳定性,并通过数值模拟,给出范德波尔平面上的相图,证实了所给方程的多值共振解稳定性的结论。

另外,自 Duffing 系统提出以来,随着分岔、混沌理论的不断进步发展和计算机应用得到广泛的研究,建立了许多试验模型来描述这个方程,许多新颖的、解决实际工程和力学现象的其它形式的 Duffing 方程也逐渐立并得到了广泛的研究,譬如二自由度和多自由度 Duffing 系统^[25、26]、 φ^4 和 φ^6 型耦合 Duffing-Van der Pol 系统^[27、28]、Duffing-Lorenz 系统^[29]、时滞型 Duffing 系统^[30]以及时滞型耦合 Duffing-Van der Pol 系统^[31]、随机型 Duffing 系统^[32]、复周期激励 Duffing 系统^[33]

等。在电路系统中常常是通过研究其非线性特征来研究混沌现象。目前,有关时间序列混沌判定的主要方法有 Poincaré 映射、Poincaré 截面、分岔图、分数维数、功率谱法、Lyapunov 指数法、测度熵或 Kolmogorov 熵^[34]等。在进行实际的时间序列混沌特性判定研究时,可以根据时间序列数据的来源及分析研究的目的,选用不同的分析判定方法。一般要综合利用时间序列 Lyapunov 指数谱和全局分岔图、Poincaré 截面图及混沌吸引子的分数维数等来分析系统的混沌特性。

1.4 本论文的主要工作

谐波平衡法是将非线性方程的解假设为各次谐波叠加的形式,然后将方程的解代入非线性方程中,消去方程中的正弦与余弦项,即可得到能求出含有位置系数的相应多个代数方程,进而可求得方程的解。

设有非线性方程 $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$, 若 $f(x, \dot{x}, t)$ 是 t 的周期为 T 的函数, 并且方程存在着周期等于 T 或 T 的整数倍的周期解的情形, 方程右边 $f(x, \dot{x}, t)$ 在 x, \dot{x} 的有限区域内分别满足莱布尼茨条件, 方程的解是唯一的, 而且是分段可微的, 因此有可能展成为傅氏级数, 所以可设方程的解为

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

将它代入等式的两边, 等式两边的常数项 a_0 及 $\cos n\varphi$ 、 $\sin n\varphi$ 的系数必然分别相等, 如果只取到 n 次谐波, 则可得 $2n+1$ 个方程, 由此可求出包含有 n 次谐波的近似解。这一方法称为谐波平衡法。^[35]

谐波平衡法的求解过程简洁明了, 相对规范, 容易描述, 是各种解析方法中最简便的近似方法。不仅用于弱非线性系统, 同样可以用于一些强非线性系统。过去运用谐波平衡法进行的研究有很多, 但大都无法判定方程的稳定性。本文采用慢变参数谐波平衡法, 将假设解代入 Duffing 方程, 导出微分方程式, 并对其稳定性分析, 将分析非线性振动的平均法的慢变参数思想用于谐波平衡法中, 使得谐波平衡法也可以分析受迫振动的稳定性。该方法也能用于分析超谐波共振、亚谐波共振及多自由度非线性振动系统。分别用理论解析法(谐波平衡法、平均法)和数值积分法求出方程的自由振动、强迫振动(超谐波和分数谐波振动)、混沌振动, 求出时间响应和频谱分析, 画出幅频特性曲线, 做出稳定性分析。在此基础上, 再分析计算其中存在的混沌和分岔现象, 解释振动现象和规律。

1.5 章节设置

本文共分为四章，主要内容如下：

第一章，介绍了研究非线性振动系统的重要意义，在非线性振动理论研究中几种常见的方程及求解方法，并重点阐述了 Duffing 方程的产生过程、研究意义，介绍了一些重要的研究成果。

第二章，通过数值计算分别研究了 Duffing 系统的自由振动、受迫振动的主共振、受迫振动的分数谐波共振以及受迫振动的混沌振动，并绘制相应的数值计算结果图和波形图等。

第三章，分别用谐波平衡法、平均法对 Duffing 方程进行解析求解，判定解的稳定性，同时将所得结果与第二章数值计算的结果进行比较和验证，通过验证，证明了理论计算结果与数值计算结果基本一致，说明上述理论分析是正确的。

第四章，对全文进行了总结，并介绍本论文所取得的成果以及在非线性系统中的研究意义。

2 Duffing 方程的数值计算

2.1 Duffing 系统的自由振动

如果不考虑阻尼的影响，Duffing 系统的自由振动方程的表达形式为

$$\ddot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0 \tag{2.1}$$

这里 $\sqrt{\alpha}$ 是由 $\beta = 0$ 时得到的线性系统的固有频率，下面以此式为基础，通过数值计算来研究 Duffing 系统的自由振动。

给定不同的初始条件，即 $t = 0$ 时不同的 x, \dot{x} ，进行数值积分，计算得到图 2.1、2.2 所示振动波形。计算时取 $\alpha = 1, \beta = 0.1$ 。

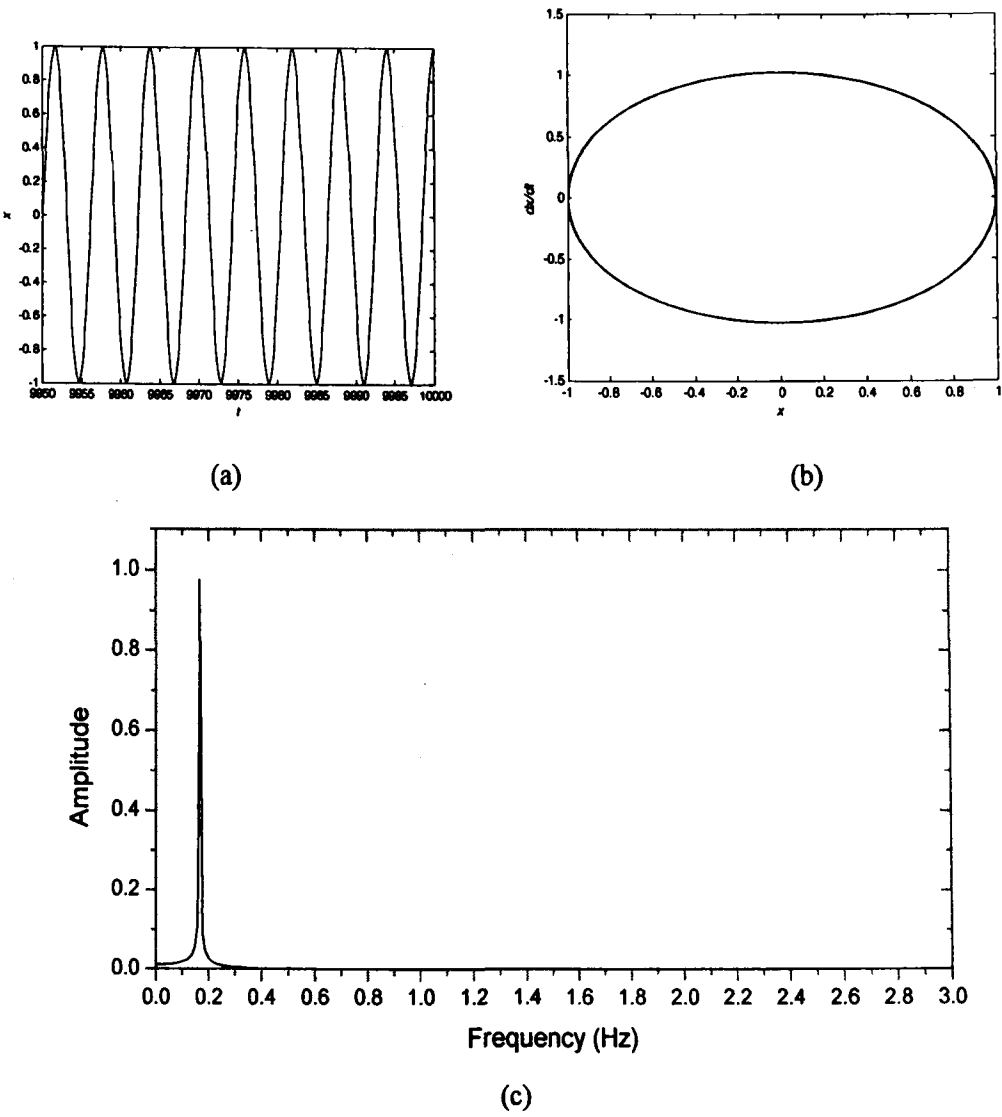


图 2.1 $t = 0$ 时 $x = 1, \dot{x} = 0$ 的振动波形、相轨迹和频谱图

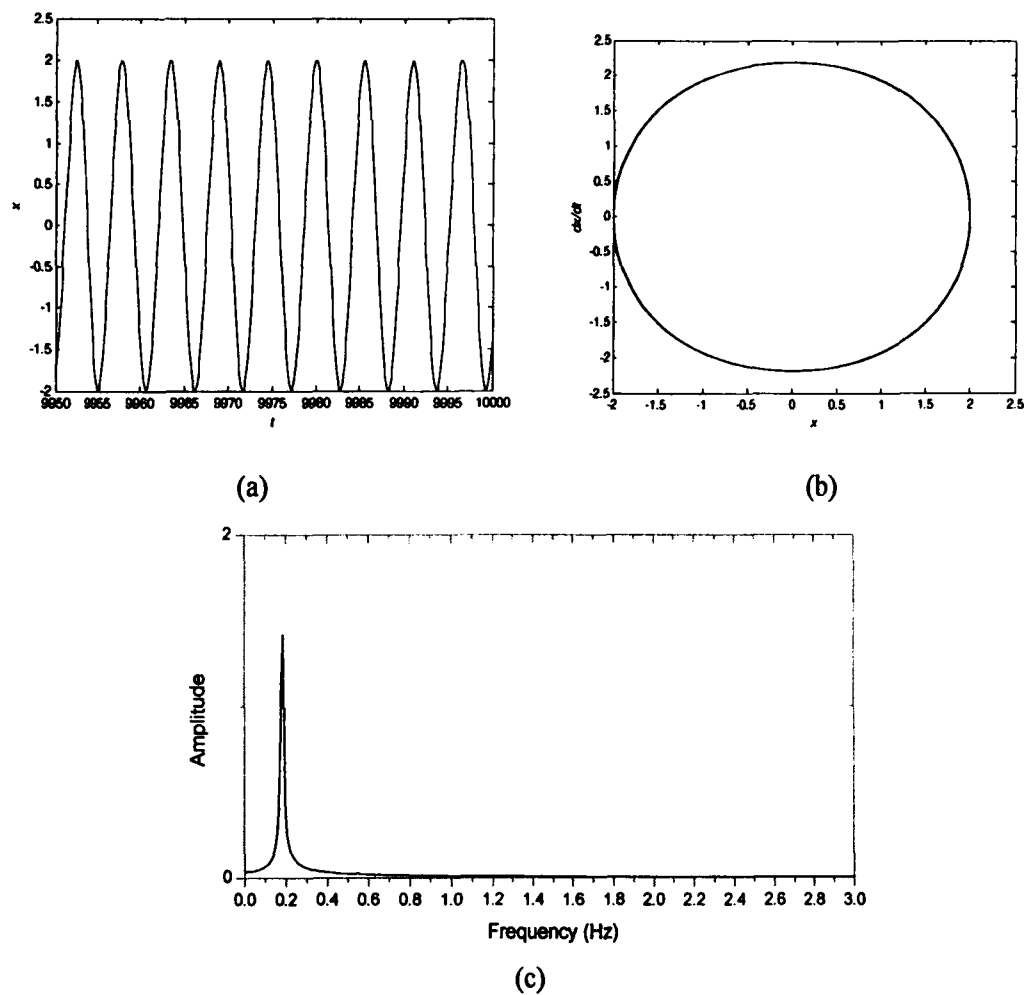


图 2.2 $t = 0$ 时 $x = 2, \dot{x} = 0$ 的振动波形、相轨迹和频谱图

从上述计算结果可以看出，由于 Duffing 系统中出现非线性项，自由振动的频率与线性系统不同，频率与初始值有很大的关系，初始值不同，频率不同。两者的对比如图 2.3 所示。因此可以说，Duffing 系统的自由振动频率与振幅有关。

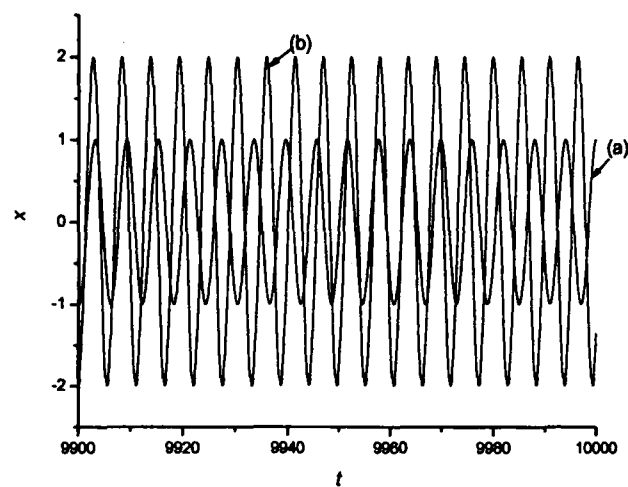


图 2.3 (a) $t = 0$ 时 $x = 1, \dot{x} = 0$, (b) $t = 0$ 时 $x = 2, \dot{x} = 0$

由于系统作自由振动，又不考虑阻尼，系统没有能量的输入与输出，在一定的初始条件下将作等幅振动。所以选取不同的初始位移值，并使 $t=0$ 时的 $\dot{x}=0$ ，求出振动响应值，然后进行 FFT 变换求出振动频率，即可得出振幅与振动频率之间的关系，如下图 2.4 所示。

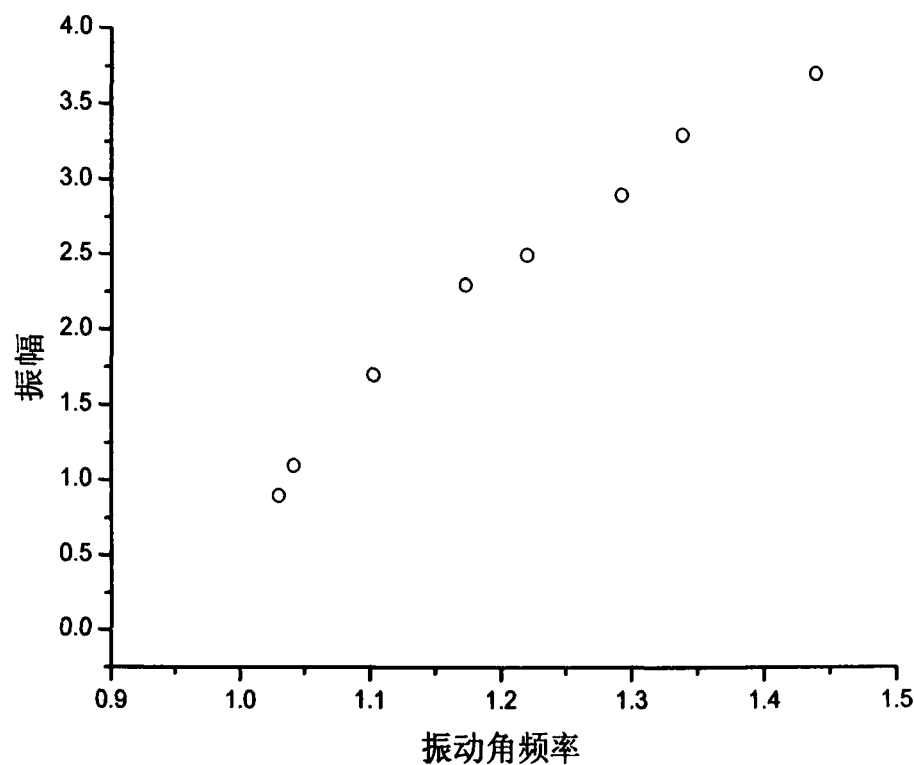


图 2.4 自由振动振幅与振动频率之间的数值计算结果

由图可以看出，在硬弹簧情况下（ $\beta = 0.1 > 0$ ），自由振动的频率随着振幅的增大而增大。

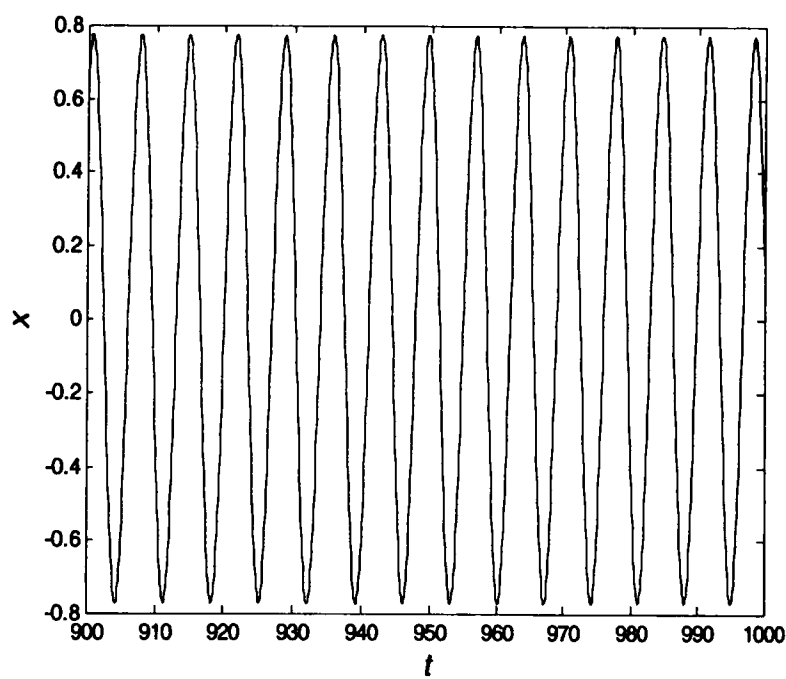
2.2 Duffing 系统的受迫振动的主共振

在 (2.1) 式中考虑阻尼的影响和谐波外力，则得到如下所述的强迫振动系统的运动微分方程

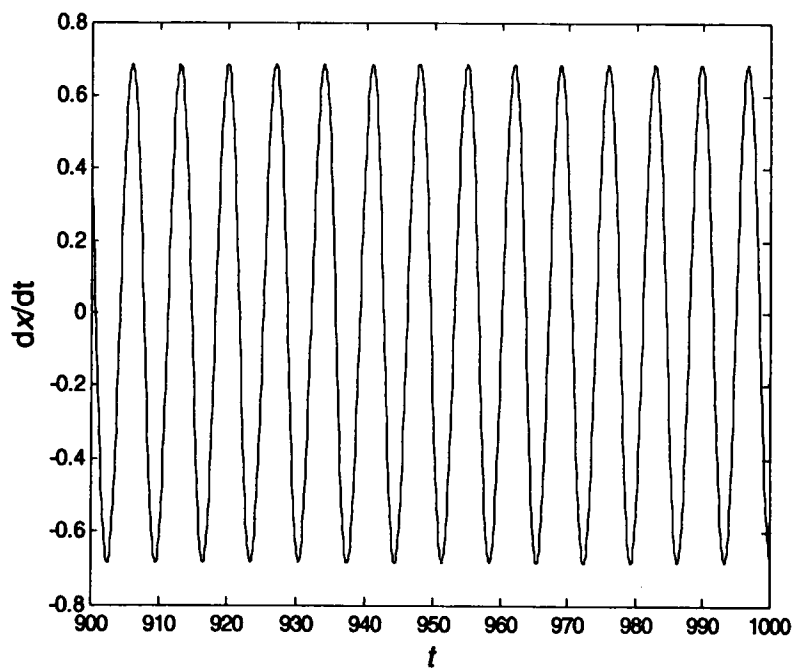
$$\ddot{x} + c\dot{x} + ax + \beta x^3 = F \cos \omega t \tag{2.2}$$

在该方程式中，取不同的参数值 c, a, β, F 和初始条件 x_0, \dot{x}_0 值，通过数值计算，在充分长的时间后就可以得到系统的强迫振动响应（消除了暂态振动）。计算结果如下图 2.5 至 2.9 所示。

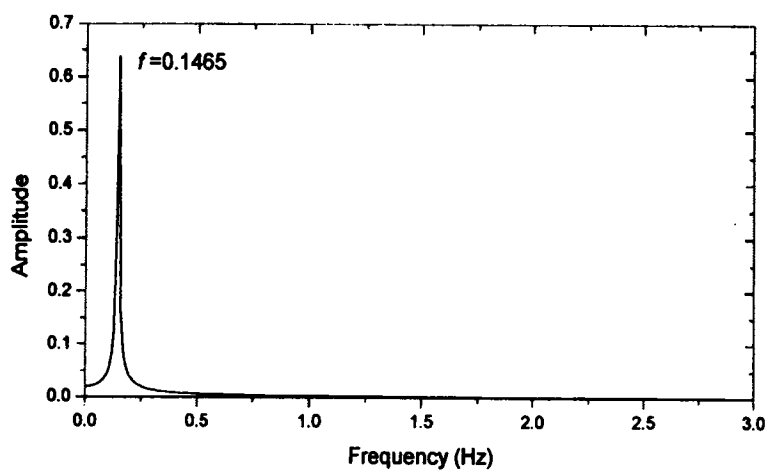
首先取 $c = 0.04, a = 1, \beta = 0.15, F = 0.2$ ，当 $\omega = 0.9$ 时，取不同的初始值，得到的时间响应曲线如图 2.5 所示，振动的角频率接近于激励的频率。



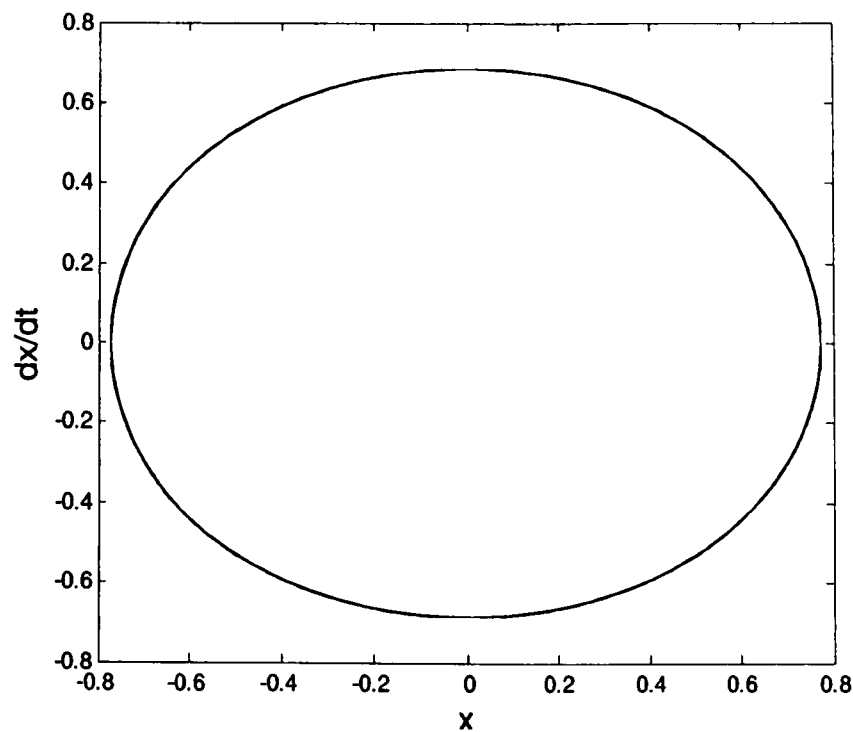
(a) 位移 x 随时间 t 的变化规律



(b) 速度 \dot{x} 随时间 t 的变化规律



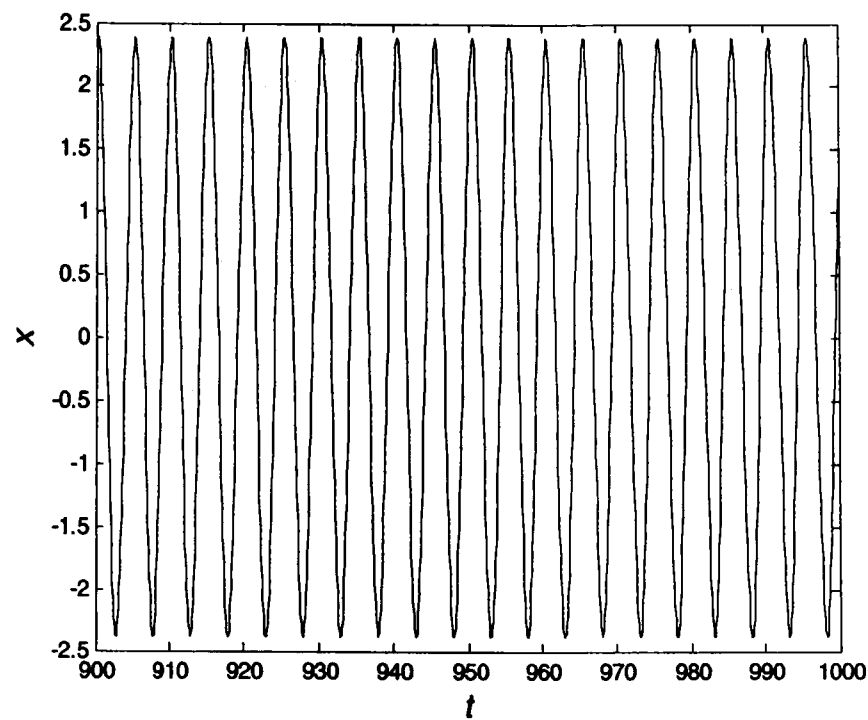
(c) FFT 图



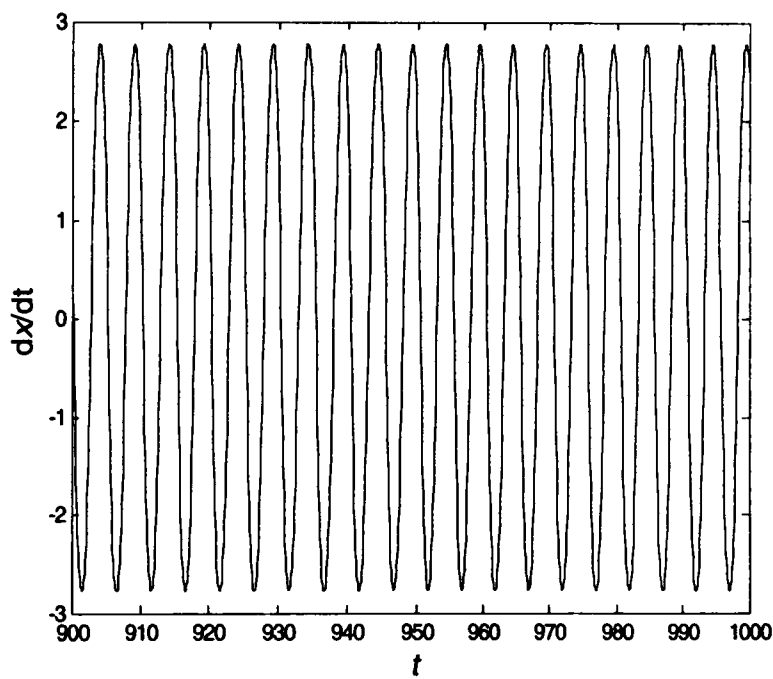
(d) 相轨迹

图 2.5 $c = 0.04, a = 1, \beta = 0.15, F = 0.2, \omega = 0.9$

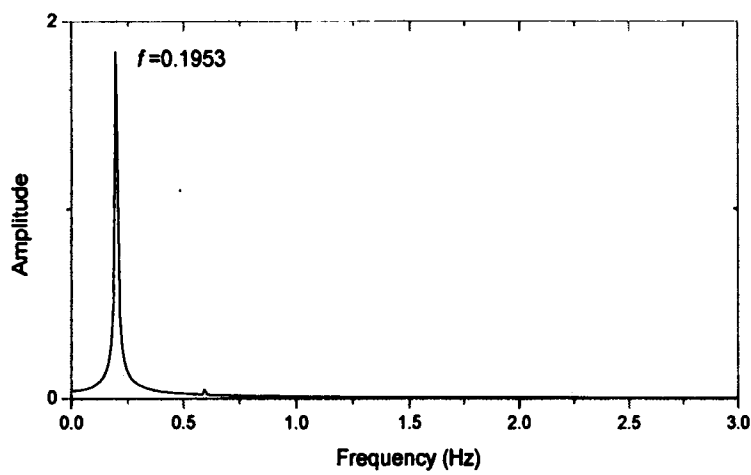
当 $\omega = 1.25$ 时，取初始值 $x_0 = 2.9, \dot{x}_0 = 0$ ，时间响应曲线如图 2.6 所示，振动的角频率接近于激励的频率。



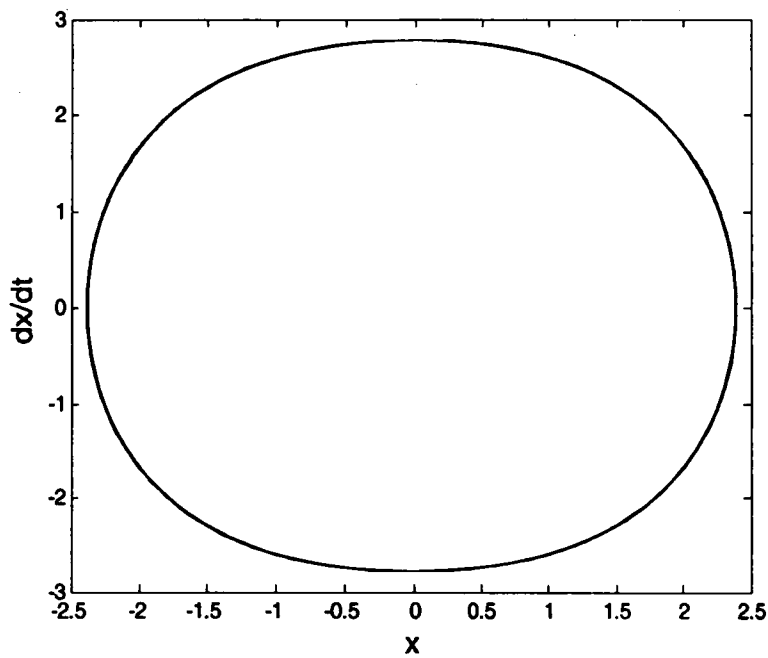
(a) 位移 x 随时间 t 的变化规律



(b) 速度 \dot{x} 随时间 t 的变化规律



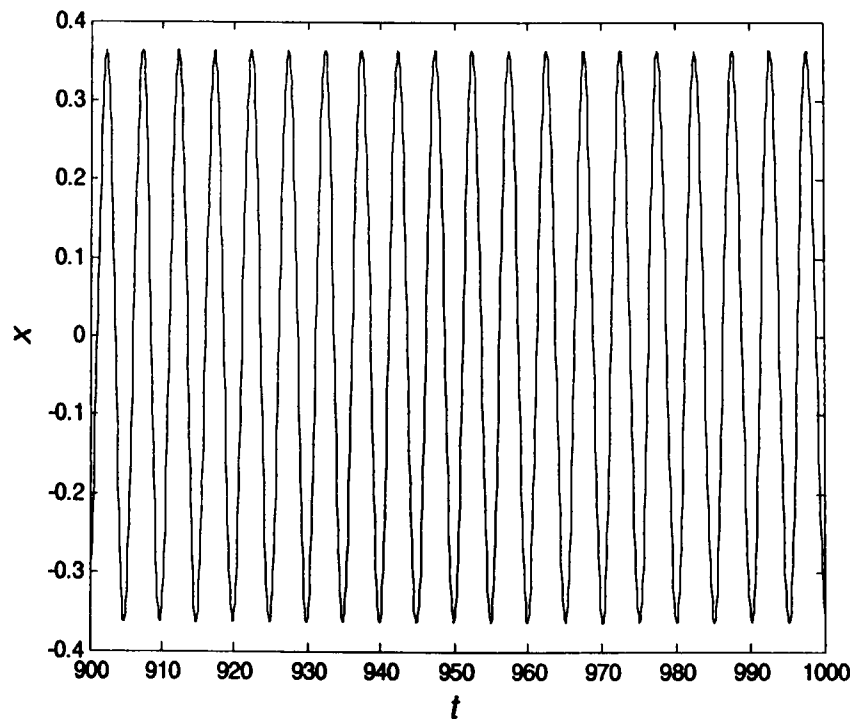
(c) FFT 图



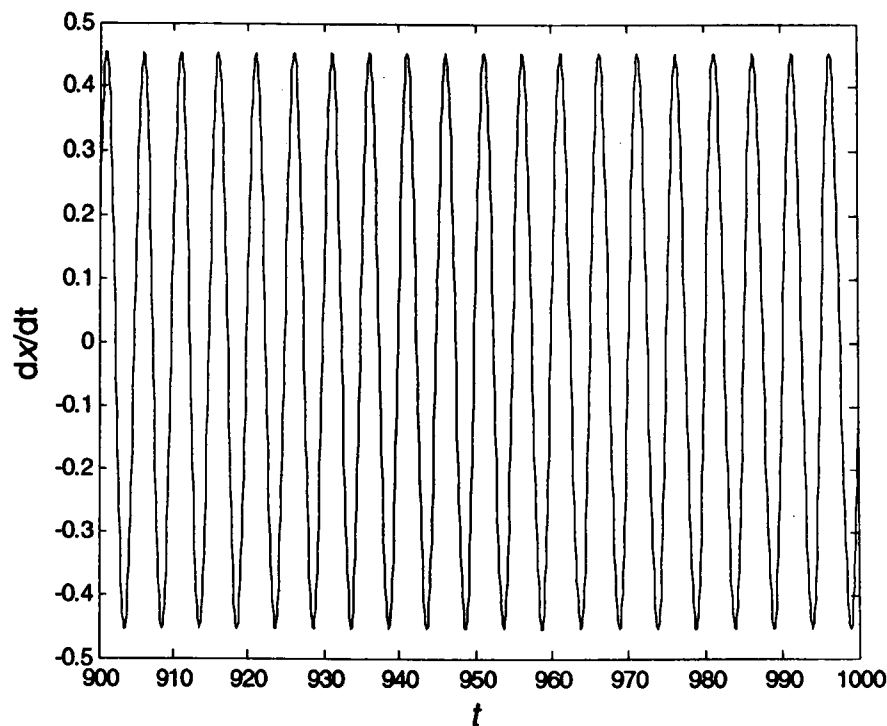
(d) 相轨迹

图 2.6 $c = 0.04, a = 1, \beta = 0.15, F = 0.2, \omega = 1.25, x_0 = 2.9, \dot{x}_0 = 0$

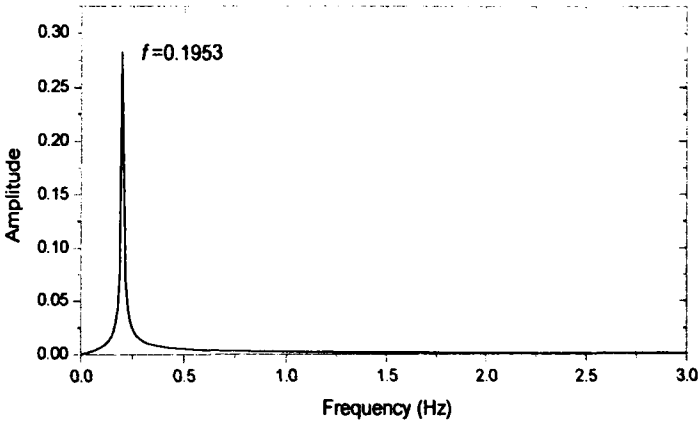
当取初始值为 $x_0 = 0.9, \dot{x}_0 = 0$ 时，时间响应曲线如图 2.7 所示，虽然振动的角频率也接近于激励的频率，但是这时候振动的幅值显然与图 2.6 不同，说明此时系统存在两个稳定解。



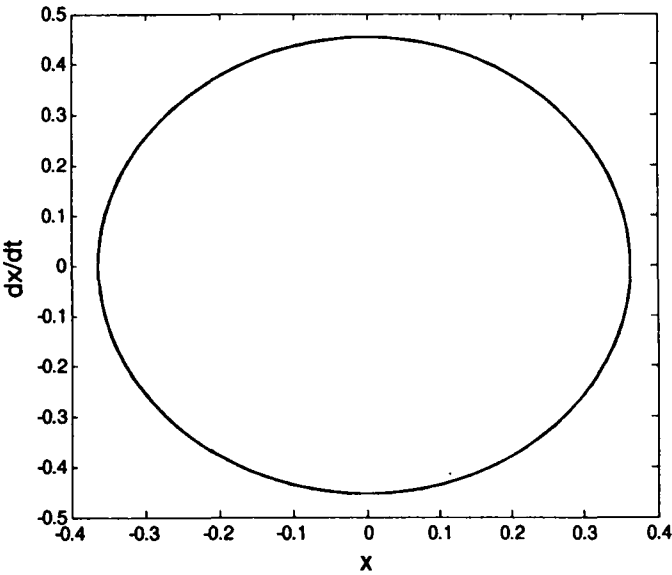
(a) 位移 x 随时间 t 的变化规律



(b) 速度 \dot{x} 随时间 t 的变化规律



(c) FFT 图



(d) 相轨迹

图 2.7 $c = 0.04, a = 1, \beta = 0.15, F = 0.2, \omega = 1.25, x_0 = 0.9, \dot{x}_0 = 0$

图 2.8 为 $c = 0.04, a = 1, \beta = 0.15, F = 0.2$ 时数值计算得到系统幅频特性曲线。

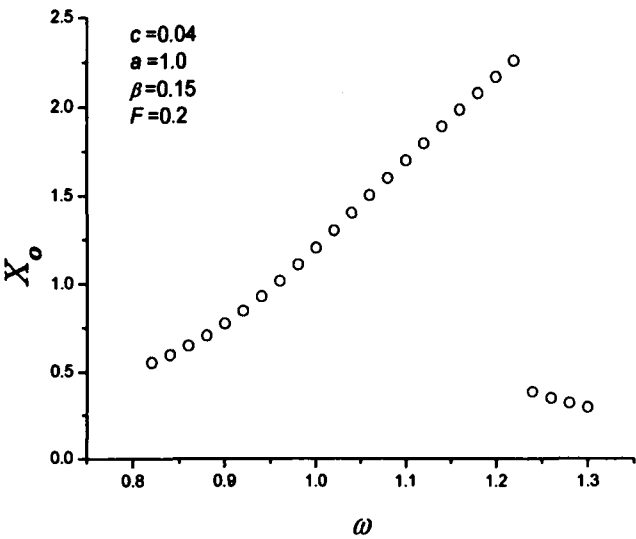


图 2.8 强迫振动振幅与振动频率之间的数值计算结果

另外取一组参数值 $c = 0.04, a = 1, \beta = 0.2, F = 0.1$ 时，进行一系列的数值计算，得到的系统幅频特性曲线如图 2.9 所示。

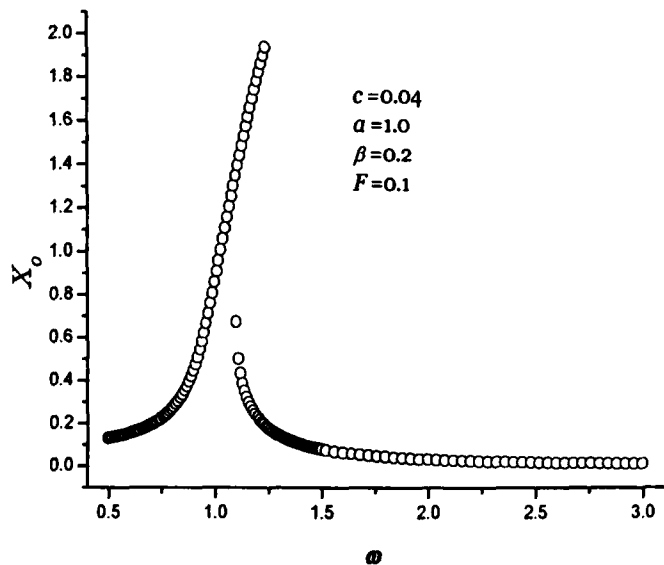


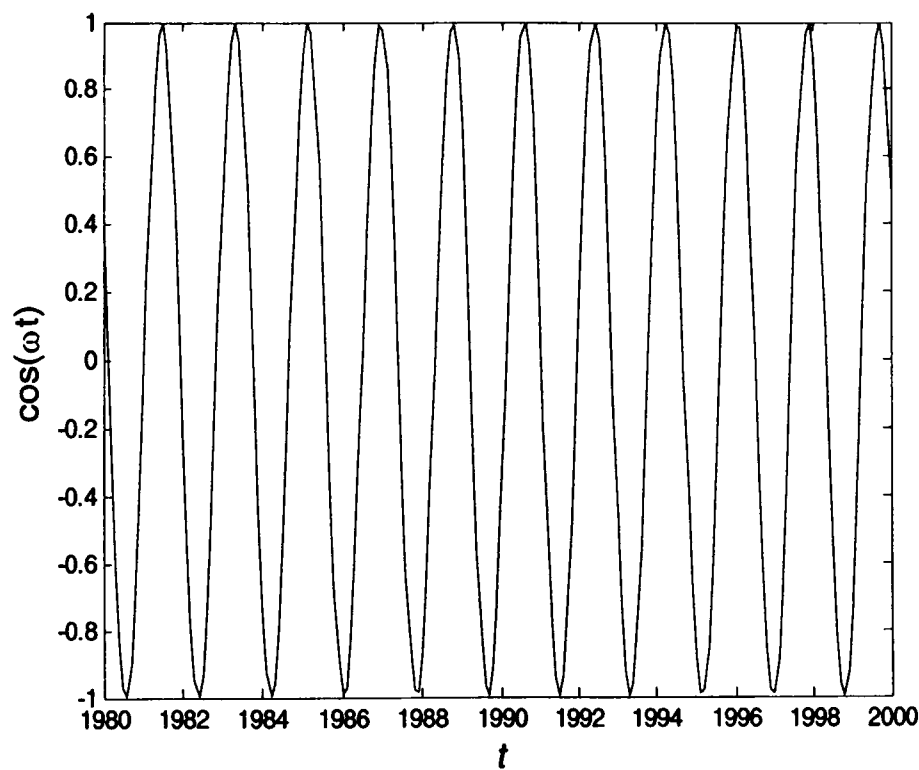
图 2.9 强迫振动振幅与振动频率之间的数值计算结果

根据计算结果会得出相同的结论：在激励频率较低和较高的时候，系统只有一个稳定的解，但是在 $\omega = 1$ 的附近，系统存在两个稳定的解。计算时，根据初始条件的不同，会收敛于不同的稳定解。

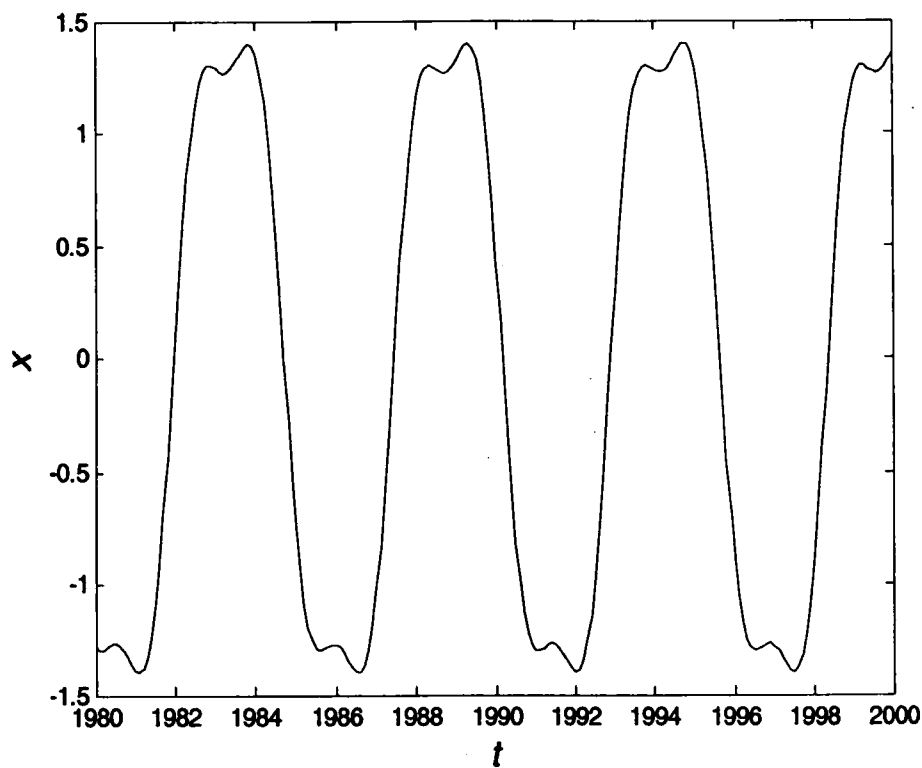
2.3 Duffing 系统的受迫振动的分数谐波共振

由前面的数值计算可以看出，与线性系统相同，在非线性受迫振动系统中，当外激励力的角频率接近于系统的固有频率时（ ω 接近于 \sqrt{a} ），也会发生共振，出现较大的振幅。但是在线性系统中，由于受迫振动响应的解析式是可以求出的，例如对于单自由度系统，只有在激励力频率接近于系统固有频率时会发生较大的共振，其它频率时不会发生共振。而对于单自由度的 Duffing 非线性振动系统，除了主共振以外，在其它频率附近也会发生较大的振动。下面以数值计算来说明此现象。

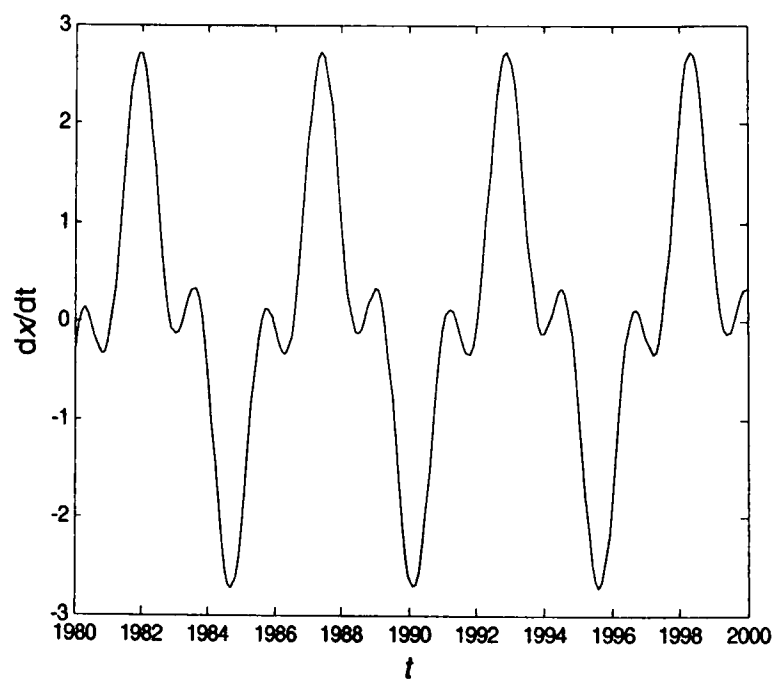
在方程式 (2.2) 中，参数取值为 $c = 0.01, a = 1, \beta = 0.2, F = 3, \omega = 3.45$ 时，数值计算得到的算例的波形图如图 2.10 所示。由该算例的图形可以看出，发生振动时响应中主要成分的周期基本上是外激励力周期的 3 倍，即响应中主要成分的频率为外激励力的三分之一。所以，此时系统发生 1/3 次分数谐波共振（sub harmonic resonance of order 1/3）。



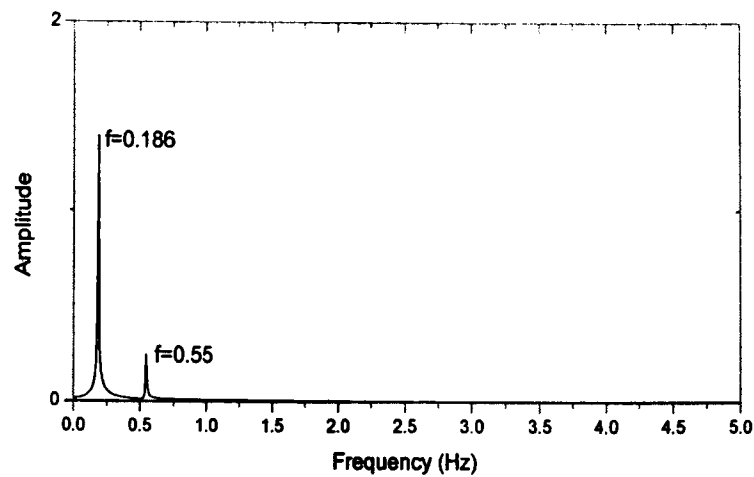
(a) 外激励力的变化波形图



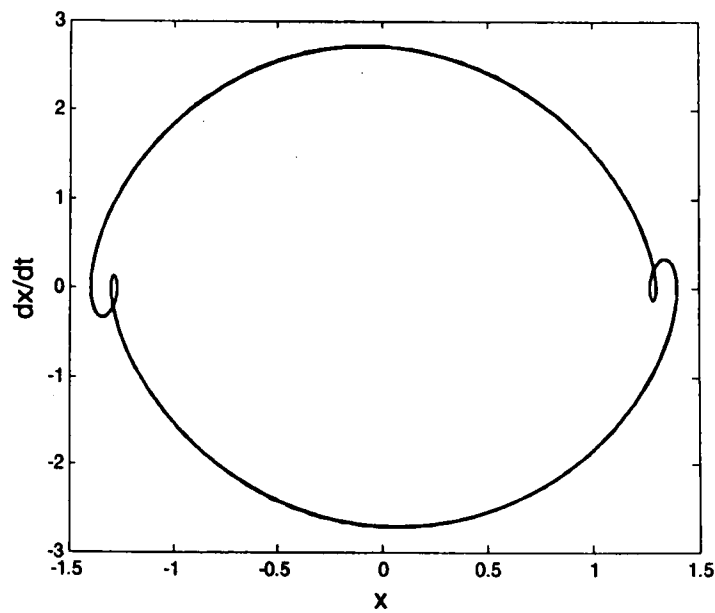
(b) 振动位移的波形图



(c) 振动速度的波形图

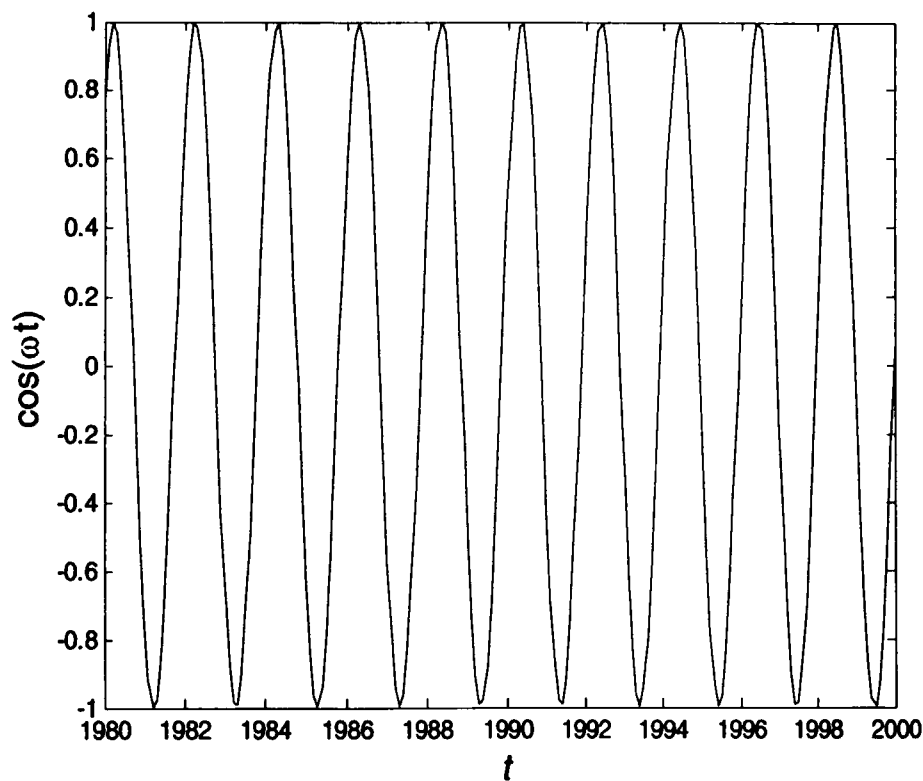


(d) FFT 图

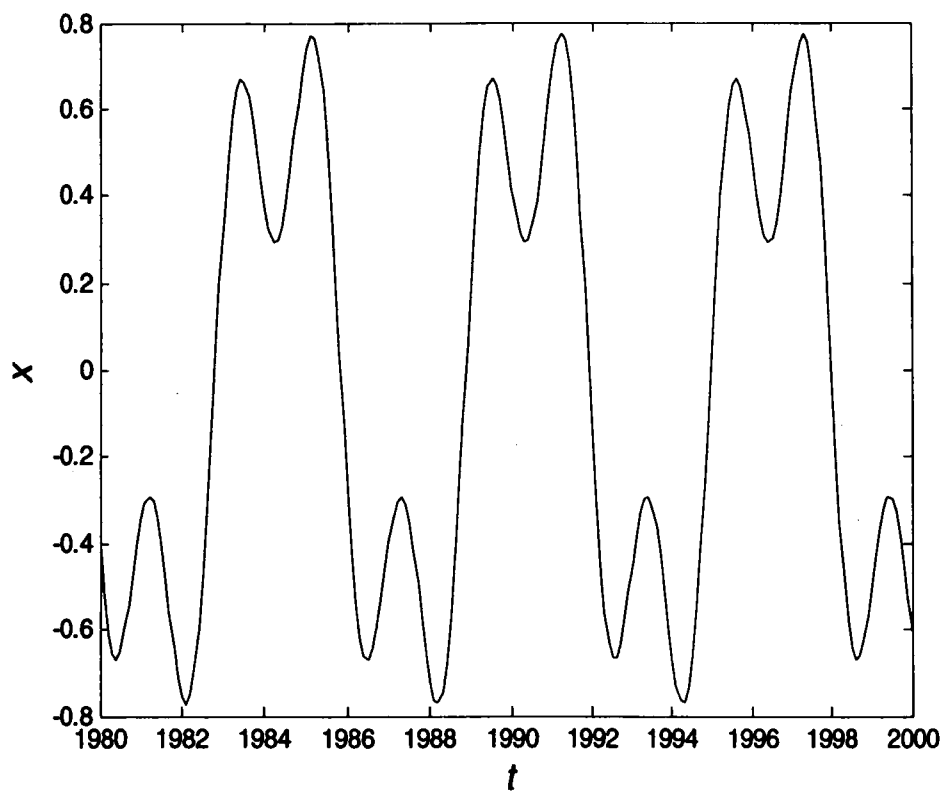


(e) 相轨迹图

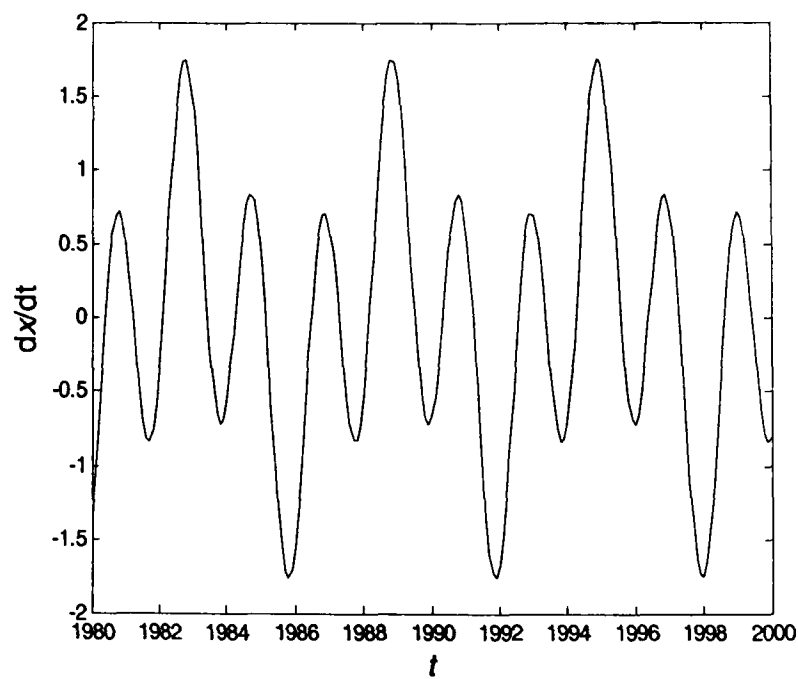
图 2.10 $\omega = 3.45$ 时分数谐波共振的振动波形图



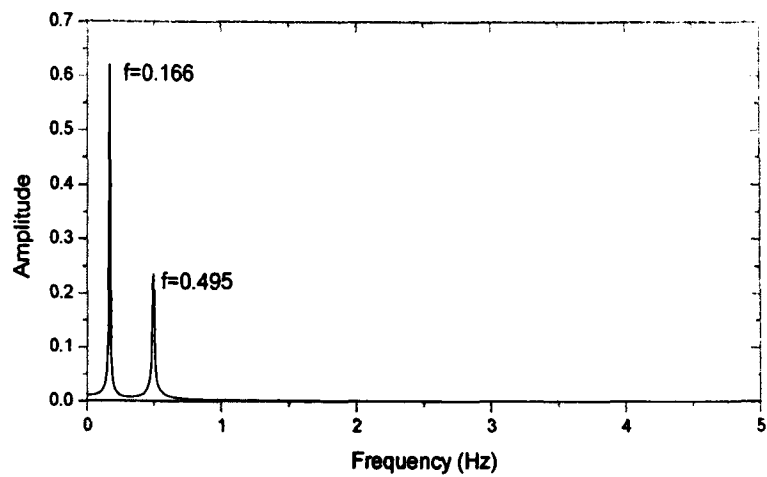
(a) 外激励力的变化波形图



(b) 振动位移的波形图



(c) 振动速度的波形图



(d) FFT 图

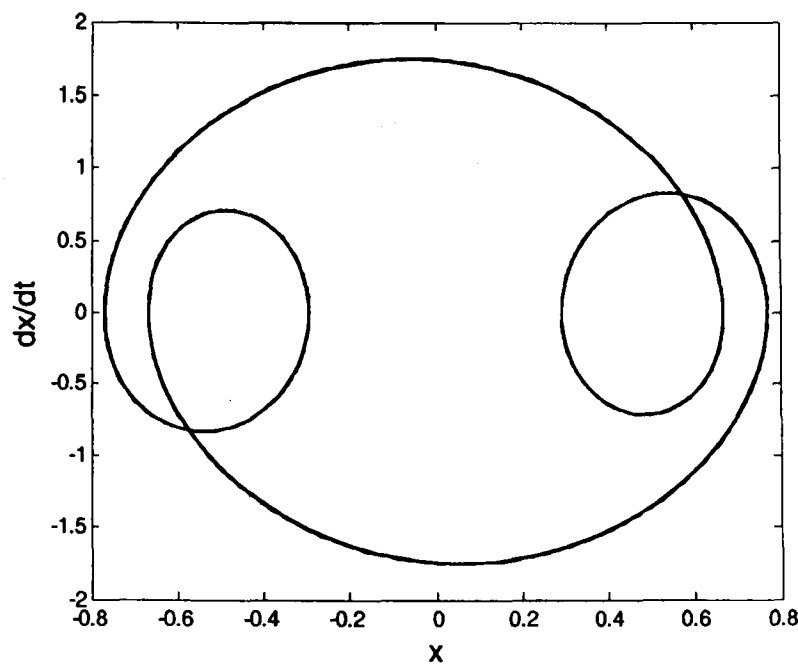


图 2.11 $\omega = 3.1$ 时分数谐波共振的振动波形图

其它参数值不变仅仅改变外激励力的频率，当 $\omega = 3.1$ 时，计算的系列结果如图 2.11 所示，同样可以得出相同的结论。

选取参数 $c = 0.04, a = 1, \beta = 0.2, F = 3$ ，改变外激励频率 ω ，当系统仅出现频率为 ω 响应时与同时出现 ω 、 $\omega/3$ 两种频率响应时，计算其响应的最大值，数值计算结果如图 2.12 所示。从图中可以看出，当激励频率在系统固有频率 3 倍以上时，由于初始条件的不同，振动响应中的频率成分不同，可以只有 ω 频率成分，也可能同时 ω 和 $\omega/3$ 两种频率成分，且随着 ω 的增大而增大，所以此时系统发生 $\omega/3$ 分数谐波共振。

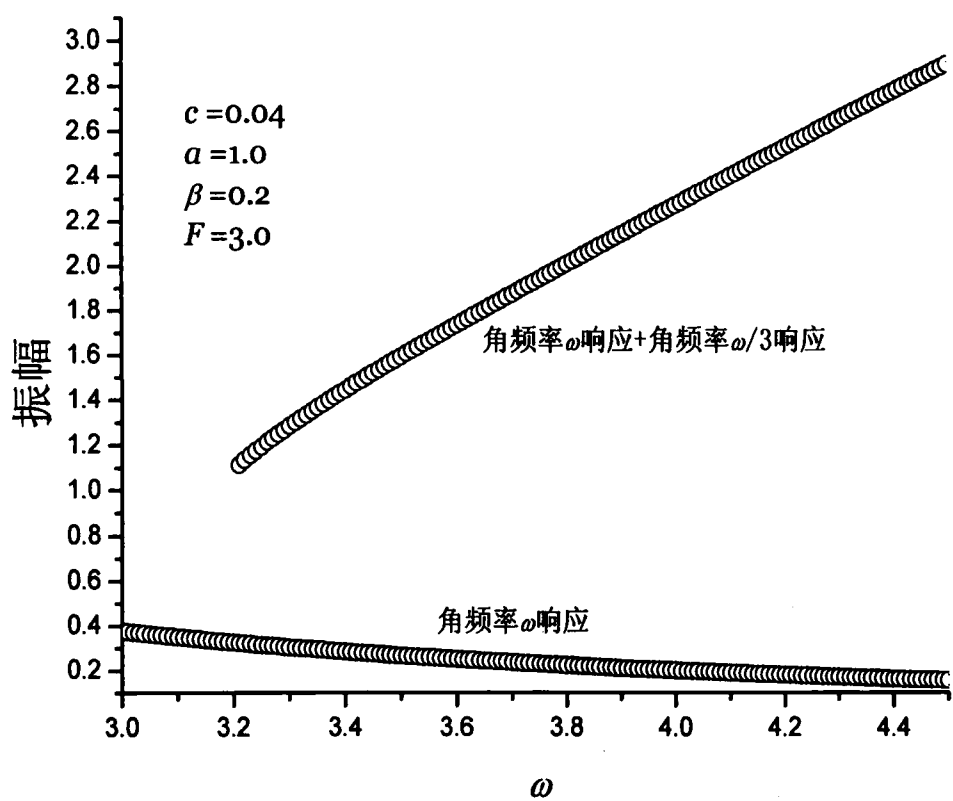
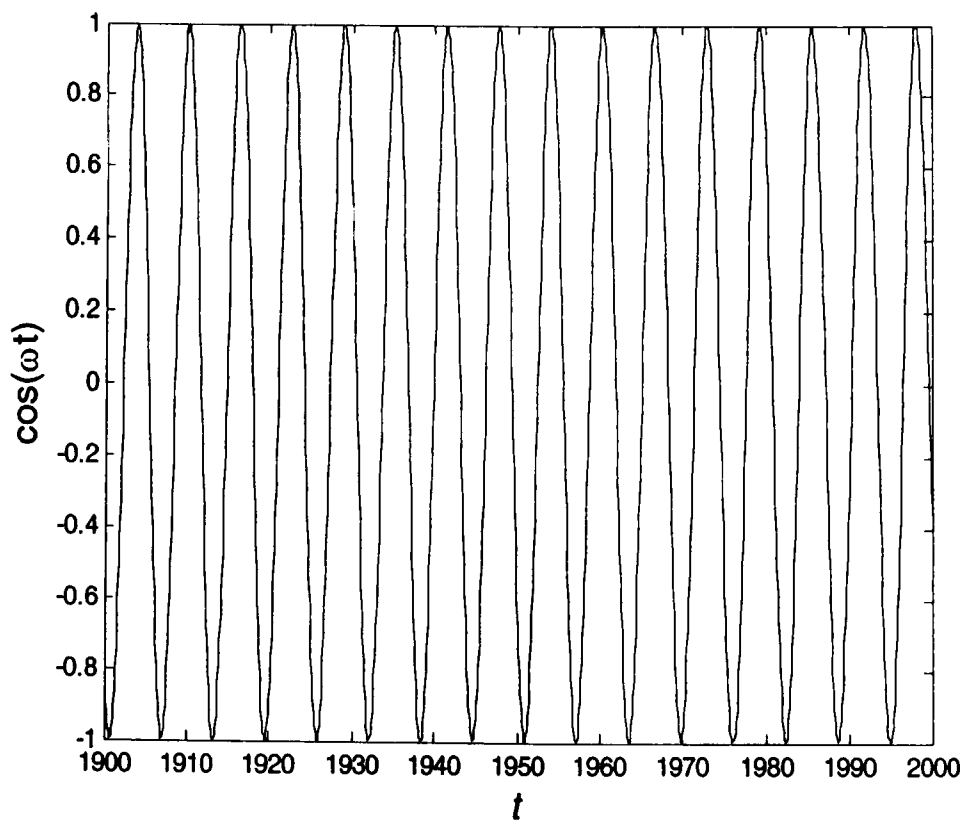


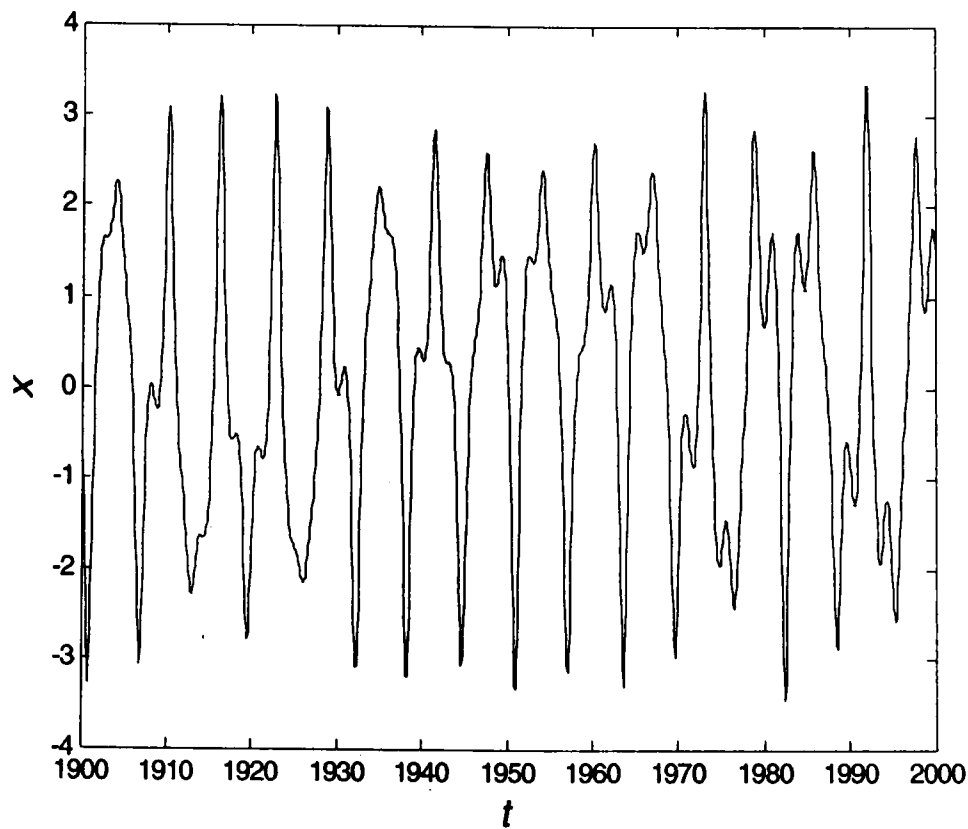
图 2.12

2.4 Duffing 系统的受迫振动的混沌振动

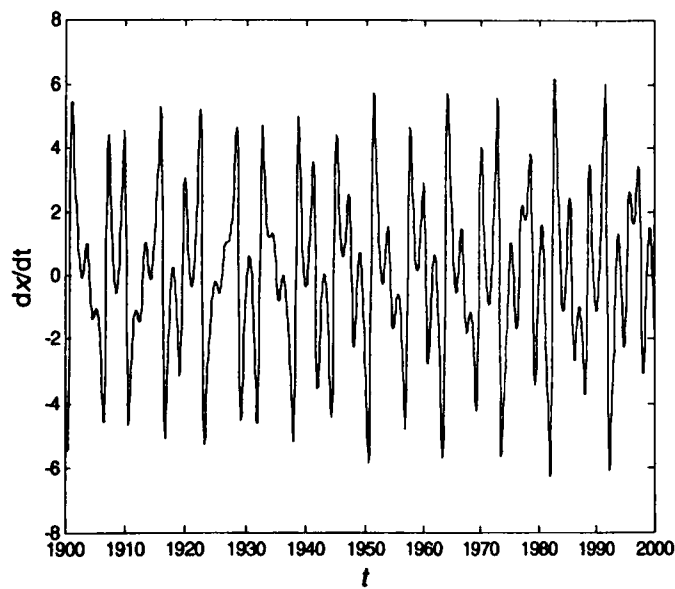
同样在方程式 (2.2) 中，也可以发生混沌振动，给系统某一组参数值，对该方程式进行较长时间的数值积分，以消除初始条件的影响。取参数值为 $c = 0.05, a = 0.01, \beta = 1.0, F = 8, \omega = 1$ 时，计算的结果如图 2.13 所示。



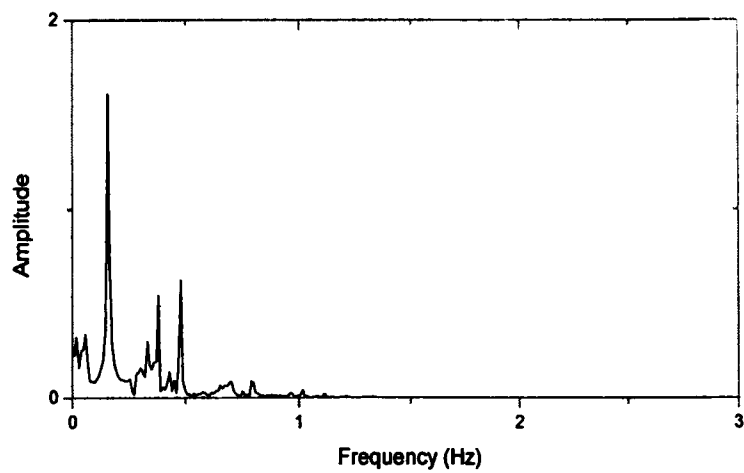
(a) 外激励力的变化波形图



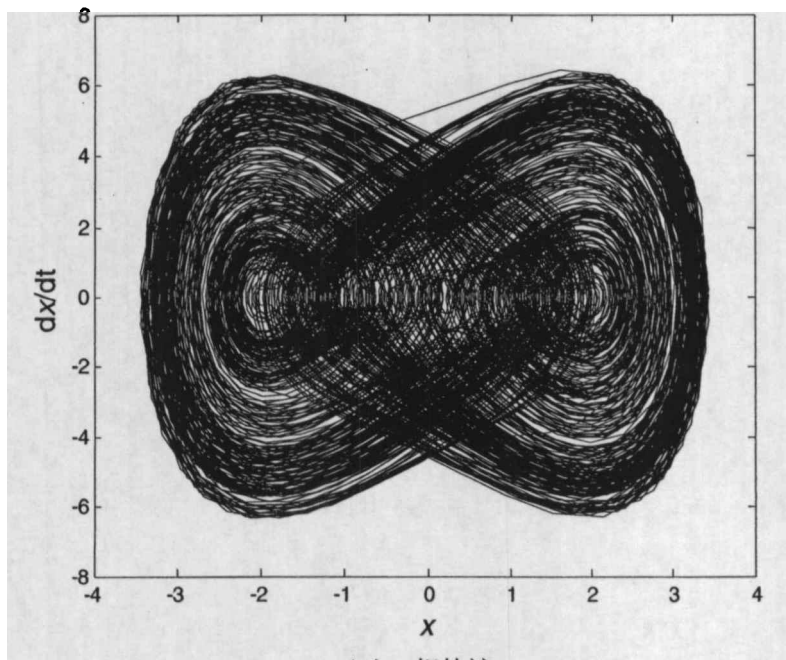
(b) 振动位移的波形图



(c) 振动速度的波形图



(d) FFT 图



(e) 相轨迹

图 2.13 混沌振动波形图

由计算结果可以看出，尽管外激励力周期变化，但振动响应的变化很复杂，

从不重复，象是随机振动一样。即在确定性系统中发生的振动却是随机的。此即为混沌振动。从频率来看，虽然外激励力为单一频率成分，但是振动响应却是由连续的角频率成分构成的。

3 Duffing 方程的解析求解

对于非线性振动的微分方程，一般要求解出其严密解是相当困难的，所以大部分情况下我们都只能求解其近似解。当然，关于非线性振动的解析方法已经有很多，如摄动法、多尺度法、平均法、谐波平衡法等^[36-39]。摄动法(perturbation method)把解 x 看成是时间 t 和小参数 μ 的函数 $x(t, \mu)$ ，将解展开为小参数 μ 的幂级数，即进行摄动展开，代入方程后按照每个 μ 同次幂的系数相等顺次求得周期解。但是如果系统上作用有较大的外激励力时，摄动法不能很好地求出主共振区域的近似解。多尺度法(method of multiple scales)可以看成是一般化的摄动法，比摄动法相比较，计算的规则性高，不仅可以求周期解、过渡响应，还可以求解不同频率外激励作用时的解。由于多尺度法的基本概念与摄动法相同，所以也存在同样的问题。平均法(method of averaging)是将非线性系统线性化后的解作为母解(generating solution)，再假设振幅和相位是时间的慢变函数，在一个周期内进行平均处理。平进法能求解过渡响应和概周期响应。谐波平衡法(method of harmonic balance)的数学基础解释明确，计算的程序和规则性很好，能够利用计算机进行高精度的计算，还能够求解多自由度强非线性系统的任意精度的周期解。但是，谐波平衡法只能求解周期解^[40-43]。

这里主要针对 Duffing 非线性振动方程，应用平均法和谐波平衡法进行近似解析求解，同时对现有的谐波平衡解析方法也做了些改进。

3.1 非线性振动方程的无量纲化

对非线性振动进行解析求解时，通过比较各个物理量的相对大小，以及忽略高阶微小量来进行简化。判断某个物理量是大还是小，有一个基准，在判断之前首先要进行运动方程式的无量纲化。

对于具有对称非线性（回复力曲线关于原点对称）回复力的质量、弹簧、阻尼系统的振动，如图 3.1 所示。

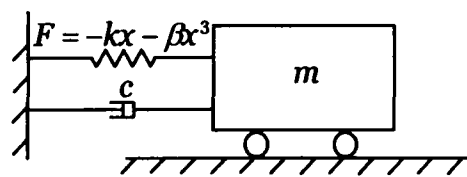


图 3.1 非线性弹簧、质量、阻尼振动系统

其运动方程式为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \beta x^3 = F \cos \omega t \tag{3.1}$$

对该方程两边用质量 m 去除, 然后再用 $p_1^2 = k/m$ 去除, 得

$$\frac{1}{p_1^2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{c}{mp_1^2} \frac{dx}{dt} + x + \frac{\beta}{mp_1^2} x^3 = \frac{F}{mp_1^2} \cos\left(\frac{\omega}{p_1} p_1 t\right) \tag{3.2}$$

定义下面无量纲量

$$\hat{x} = \frac{x}{x_0}, \quad p_1 t = \hat{t}, \quad \hat{c} = \frac{c}{mp_1^2}, \quad \hat{F} = \frac{F}{mp_1^2}, \quad \hat{\omega} = \frac{\omega}{p_1}, \quad \hat{\beta} = \frac{\beta x_0^2}{mp_1^2} \tag{3.3}$$

这里选用静变形量 x_0 作为代表量, 目的是使振动过程中的位移 \hat{x} 的大小程度为 1, 同时使固有角频率 $\hat{p} = 1$ 。再进行时间尺度的变换, 结果得到下列方程

$$\ddot{\hat{x}} + \hat{c}\dot{\hat{x}} + \hat{x} + \hat{\beta}\hat{x}^3 = \hat{F} \cos(\hat{\omega}\hat{t}) \tag{3.4}$$

为了计算表达方便, 对该无量纲方程, 省略“^”, 得到下式

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x + \beta x^3 = F \cos \omega t \tag{3.5}$$

3.2 非线性振动方程的两种解析方法

3.2.1 谐波平衡法的基本思路

下面以谐波外激振力的角频率 ω 接近于系统固有角频率 p 时, 系统所发生的振动为例来解析分析系统的主共振, 也即这时 ω 在 1 附近变化。因为对于线性系统的振动, 依据微分方程理论, 可以求出微分方程的通解, 该通解对于任意的角频率 ω 都是成立的。然而对于非线性振动系统, 在某个角频率附近求出的解, 只在该频率附近成立, 如果频率取该频率值以外的值, 解的形式就会变为其它形式。在进行解析求解时, 假设微小参数为 μ , 方程中参数 c, β, F 的大小是和微小量 μ 同等程度的量, 其大小计为 $O(\mu)$ 。这样, 无量纲化后, 就能用记号 μ 指定方程中各量的大小。

系统的主共振在外激励的频率 $\omega \approx 1$ 的附近发生, 假设其谐波解为

$$x(t) = X(t) \cos(\omega t + \varphi(t)) \tag{3.6}$$

或者

$$x(t) = X_c(t) \cos \omega t + X_s(t) \sin \omega t \tag{3.7}$$

$$\text{其中 } X_c = X \cos \varphi, \quad X_s = -X \sin \varphi \quad (3.8)$$

为了研究系统在周期解附近的动力学特性, 同时为了能够进行稳定性判定, 假设振幅不定而为时间的函数。假设式中 $X(t), \varphi(t)$ 或者 $X_c(t), X_s(t)$ 为随时间缓慢变化的量。也可以用数学表达式来表达, 例如, 如果 $X(t)$ 是 $O(\mu^0)$ 大小的量时, 其对时间导数 \dot{X}, \ddot{X} 则分别为 $O(\mu), O(\mu^2)$ 大小的量。所以, 如前所述, 设 c, β, F 是 $O(\mu)$ 大小的量。以此假设为基础, 将假设解 (3.6) 或者 (3.7) 代入运动方程式 (3.5), 考虑方程式两边角频率为 ω 的项。如果用假设解 (3.7), 则

$$\dot{x}(t) = (\dot{X}_s - \omega X_c) \sin \omega t + (\dot{X}_c + \omega X_s) \cos \omega t \quad (3.9)$$

$$\ddot{x}(t) = (2\omega \dot{X}_s - \omega^2 X_c) \cos \omega t - (2\omega \dot{X}_c + \omega^2 X_s) \sin \omega t + O(\mu^2) \quad (3.10)$$

按照 $O(\mu)$ 精度代入方程式 (3.5), 得

$$\begin{aligned} & (2\omega \dot{X}_s - \omega^2 X_c) \cos \omega t - (2\omega \dot{X}_c + \omega^2 X_s) \sin \omega t \\ & + c(-\omega X_c \sin \omega t + \omega X_s \cos \omega t) + X_c \cos \omega t + X_s \sin \omega t \\ & + \frac{3}{4} \beta X_s (X_c^2 + X_s^2) \sin \omega t + \frac{3}{4} \beta X_c (X_c^2 + X_s^2) \cos \omega t = F \cos \omega t \end{aligned} \quad (3.11)$$

比较上述方程式两边 $\cos \omega t, \sin \omega t$ 的系数, 得

$$\begin{aligned} 2\omega \dot{X}_s &= -c\omega X_s + (\omega^2 - 1)X_c - \frac{3}{4} \beta X_c (X_c^2 + X_s^2) + F \\ 2\omega \dot{X}_c &= -c\omega X_c + (1 - \omega^2)X_s + \frac{3}{4} \beta X_s (X_c^2 + X_s^2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

由此式就可以求出周期解, 进而判定解的稳定性。该方法直观易理解, 但是如果假设解不正确, 就不能得到正确的解。

如果将 (3.8) 代入上式, 可以得到下式

$$\begin{cases} -2\omega \dot{X} \sin \varphi - 2\omega X \dot{\varphi} \cos \varphi = c\omega X \sin \varphi + (\omega^2 - 1)X \cos \varphi - \frac{3}{4} \beta X^3 \cos \varphi + F \\ 2\omega \dot{X} \cos \varphi - 2\omega X \dot{\varphi} \sin \varphi = -c\omega X \cos \varphi - (1 - \omega^2)X \sin \varphi - \frac{3}{4} \beta X^3 \sin \varphi \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} -2\omega \dot{X} = c\omega X + F \sin \varphi \\ -2\omega X \dot{\varphi} = (\omega^2 - 1)X - \frac{3}{4} \beta X^3 + F \cos \varphi \end{cases} \quad (3.13)$$

3.2.2 平均法 (method of averaging) 求解的基本思路

如前所述, 设 c, β, F 是 $O(\mu)$ 大小的量, 用参数 μ 进行下列变换

$$c = \mu c', \quad \beta = \mu \beta', \quad F = \mu F' \quad (3.14)$$

这里 c', β', F' 是 $O(\mu^0) = O(1)$ 大小的量, 考虑主共振附近的振动, 设

$$\sigma = \omega^2 - 1, \quad \sigma = \mu \sigma' \quad (3.15)$$

将以上代入方程式 (3.5) 得

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \mu(\sigma' x - c' \dot{x} - \beta' x^3 + F' \cos \omega t) \quad (3.16)$$

这里称 σ 为调谐参数。首先, 考虑 $\mu = 0$ 的情况, 根据无阻尼自由振动的解, 假设上式的解为

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi), \quad \dot{x}(t) = -X\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.17)$$

这里 X, φ 是定值。

当 $\mu \neq 0$ 时, 在用平均法解析时, 假设所求方程式 (3.16) 的解 x, \dot{x} 在形式上与 (3.17) 式相同, 只是此时假设变量 X, φ 并非定数, 而是时间 t 的缓慢变化的未知函数。这里所谓缓慢变化, 例如对 $X(t)$, 是指在 $x(t)$ 变化的一个周期内, 振幅 $X(t)$ 的增加量相对于 X 比较非常小。如果将 $X(t)$ 泰勒展开

$$X(t_0 + T) = X(t_0) + \dot{X}T + \ddot{X}T^2/2 + \dots$$

这里, $T = 2\pi/\omega$, 且

$$\begin{aligned} \Delta X &= X(t_0 + T) - X(t_0) \\ &= \dot{X}T + \ddot{X}T^2/2 + \dots \ll X \end{aligned}$$

或者 $\dot{X}T \ll X$, 由于 $T = 2\pi/\omega$, 所以 $\dot{X} \ll X\omega$ 。进一步, 可得 $\ddot{X}T \ll \dot{X}$, 或者 $\ddot{X} \ll \dot{X}\omega, \ddot{X} \ll X\omega^2$ 。

将 (3.17) 式变为

$$x(t) = X(t) \cos(\omega t + \varphi(t)), \quad \dot{x}(t) = -X(t)\omega \sin(\omega t + \varphi(t)) \quad (3.18)$$

由上式的第 1 式, 得

$$\dot{x} = \dot{X} \cos(\omega t + \varphi) - X(\omega + \dot{\varphi}) \sin(\omega t + \varphi) \quad (3.19)$$

这时, 比较式 (3.18) 中第 2 式与上式, 令两式相同, 得

$$\dot{X} \cos(\omega t + \varphi) - X\dot{\varphi} \sin(\omega t + \varphi) = 0 \quad (3.20)$$

又将 (3.18) 的第 2 式求导, 得

$$\ddot{x} = -\dot{X}\omega \sin(\omega t + \varphi) - X\omega(\omega + \dot{\varphi})\cos(\omega t + \varphi) \quad (3.21)$$

将 (3.18) 和 (3.21) 式代入式 (3.16) 得

$$\begin{aligned} & -\dot{X}\omega \sin(\omega t + \varphi) - X\omega\dot{\varphi}\cos(\omega t + \varphi) \\ & = \mu\sigma'X \cos(\omega t + \varphi) + \mu c'X\omega \sin(\omega t + \varphi) - \mu\beta'X^3 \cos^3(\omega t + \varphi) + \mu F' \cos \omega t \end{aligned}$$

进一步变换, 得

$$\begin{aligned} & -\dot{X}\omega \sin(\omega t + \varphi) - X\omega\dot{\varphi}\cos(\omega t + \varphi) \\ & = \mu\sigma'X \cos(\omega t + \varphi) + \mu c'X\omega \sin(\omega t + \varphi) \\ & \quad - \mu\beta'X^3 \frac{1}{4}[3\cos(\omega t + \varphi) + \cos 3(\omega t + \varphi)] \\ & \quad + \mu F' \cos(\omega t + \varphi)\cos \varphi + \mu F' \sin(\omega t + \varphi)\sin \varphi \end{aligned}$$

整理, 得

$$\begin{aligned} & \omega\dot{X} \sin(\omega t + \varphi) + \omega X\dot{\varphi}\cos(\omega t + \varphi) \\ & = (-\mu c'\omega X - \mu F' \sin \varphi)\sin(\omega t + \varphi) \\ & \quad + \left(-\mu\sigma'X + \frac{3}{4}\mu\beta'X^3 - \mu F' \cos \varphi\right)\cos(\omega t + \varphi) \\ & \quad + \frac{1}{4}\mu\beta'X^3 \cos 3(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (3.22)$$

所以, (3.20) 和 (3.22) 两式作为确定 $\dot{X}, \dot{\varphi}$ 的关系式, 联立求解 $\dot{X}, \dot{\varphi}$, 得

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= \mu \left\{ -\frac{1}{2\omega}(\omega c'X + F' \sin \varphi) + [\text{角频率为 } \omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega \text{ 的项}] \right\} \\ \dot{\varphi} &= \mu \left\{ \frac{1}{2\omega X}(-\sigma'X + \frac{3}{4}\beta'X^3 - F' \cos \varphi) + [\text{角频率为 } \omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega \text{ 的项}] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

可以认为通过式 (3.18), 把变量 x, \dot{x} 变换为 X, φ , 所以, 微分方程 (3.23) 与原微分方程 (3.16) 等价。如果能够解出上式, 代入 (3.18) 式, 就可以得到原问题的严密解。

上式右边的量级大小为 $O(\mu)$, 所以振幅 X 和相位 φ 缓慢变化。从上式可以看出, 式中右边括号中除了常数项外, 就是角频率为 $\omega, 2\omega, \dots$ 的周期变化项。右边虽然包含周期性变化的项, 但长期来看, 可以不考虑其影响, 认为振幅 X 和相位 φ 的变化是由非周期项支配的, 即认为右边随时间变化的各项对 X 和 φ 影响很小。因此, 忽视右边的周期项, 并在一个周期 $2\pi/\omega$ 区间内积分, 将右边平均化。具体结果为

$$\begin{cases} \dot{X} = -\frac{\mu}{2\omega}(\omega c'X + F' \sin \varphi) \\ \dot{\varphi} = \frac{\mu}{2\omega X}(-\sigma'X + \frac{3}{4}\beta'X^3 - F' \cos \varphi) \end{cases} \quad (3.24)$$

此即为平均化方程式。此结果与前面用改进的谐波平衡法解析得到结果 (3.13) 一致, 说明前述的谐波平衡法的解析过程是正确的。

3.3 自由振动的解法

在式 (3.5) 中, 令阻尼 $c = 0$ 和外力 $F = 0$, 得无阻尼自由振动系统的运动方程为

$$\ddot{x} + x + \beta x^3 = 0 \quad (3.25)$$

对该非线性自由振动方程, 用前述的哪种方法都可以求解。这里用谐波平衡法求解。由于此时系统没有阻尼, 即没有能量的损失与输入, 所以将按一定的振幅自由振动。假设其解为

$$x = A(t)\sin \omega t + B(t)\cos \omega t \quad (3.26)$$

将 (3.26) 式按精度 $O(\mu)$ 求导, 得

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{A}\sin \omega t + A\omega \cos \omega t + \dot{B}\cos \omega t - B\omega \sin \omega t \\ \ddot{x} = 2\dot{A}\omega \cos \omega t - A\omega^2 \sin \omega t - 2\dot{B}\omega \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t \end{cases} \quad (3.27)$$

将 (3.26) 和 (3.27) 式代入 (3.25) 式, 按精度 $O(\mu)$ 进行求解, 得下式

$$\begin{aligned} & 2\dot{A}\omega \cos \omega t - A\omega^2 \sin \omega t - 2\dot{B}\omega \sin \omega t - B\omega^2 \cos \omega t \\ & + A\sin \omega t + B\cos \omega t + \beta(A\sin \omega t + B\cos \omega t)^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

整理, 得

$$\begin{aligned} & (2\dot{A}\omega - B\omega^2)\cos \omega t - (A\omega^2 + 2\dot{B}\omega)\sin \omega t \\ & + A\sin \omega t + B\cos \omega t \\ & + \frac{3}{4}\beta B(A^2 + B^2)\cos \omega t + \frac{3}{4}\beta A(A^2 + B^2)\sin \omega t \\ & - \frac{1}{4}\beta A^3 \sin 3\omega t - \frac{3}{4}\beta A^2 B \cos 3\omega t + \frac{3}{4}\beta AB^2 \sin 3\omega t + \frac{1}{4}\beta B^3 \cos 3\omega t = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

使上述方程式两边 $\cos \omega t, \sin \omega t$ 的系数分别相等, 得

$$\begin{cases} 2\omega\dot{A} = [\omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\beta(A^2 + B^2)]B \\ 2\omega\dot{B} = [-\omega^2 + 1 + \frac{3}{4}\beta(A^2 + B^2)]A \end{cases} \quad (3.30)$$

当 (3.25) 为周期解时, 令 $\dot{A} = \dot{B} = 0, A = A_0, B = B_0$, 得

$$\begin{cases} [\omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\beta(A_0^2 + B_0^2)]B_0 = 0 \\ [-\omega^2 + 1 + \frac{3}{4}\beta(A_0^2 + B_0^2)]A_0 = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

由上式可知, 当 $A_0 = B_0 = 0$ 时, 系统静止不动, 因此除去该解后, 得到系统自由振动时频率与振幅之间的关系式, 具体为

$$\omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\beta(A_0^2 + B_0^2) = 0 \quad (3.32)$$

令 $A_0^2 + B_0^2 = X_0^2$, 得

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{3}{4}\beta X_0^2} \approx 1 + \frac{3}{8}\beta X_0^2 \quad (3.33)$$

将 (3.26) 式可以变换为 $x = A_0 \sin \omega t + B_0 \cos \omega t = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$, 所以数值法计算自由振动响应时, 根据初始条件就可以确定出振幅 X_0 和相位角 φ 。然而此时要按照上式由振幅 X_0 的大小来确定自由振动角频率 (即固有振动的角频率)。所以, 非线性系统自由振动的频率 (即固有频率) 与振幅有关, 理论与数值计算结果如图 3.2 所示。由该图可以看出, 理论分析结果与前一章的数值计算结果基本一致, 误差主要是进行 FFT 计算时产生的。图中 \circ 符号为数值计算, 实线为按照公式 (3.33) 的计算结果。

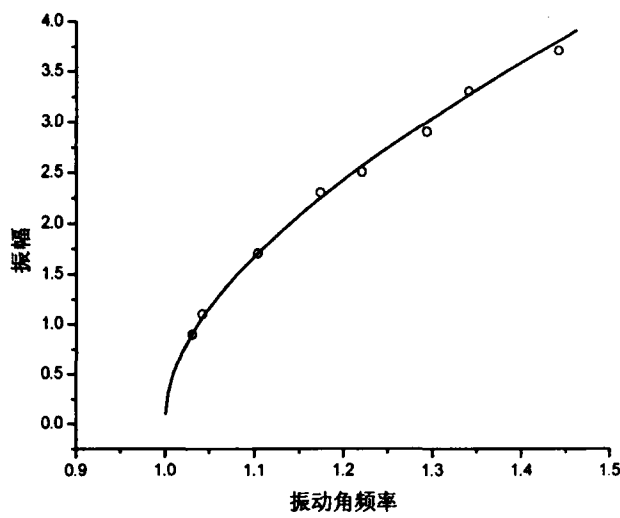


图 3.2 Duffing 系统振幅与固有频率的定性关系

3.4 强迫振动的解

这里通过解析方法研究强迫振动(3.5)式的解析解及其稳定性。研究内容分谐波主振动和1/3分数谐波振动。

3.4.1 主共振

当方程式(3.5)中激励外力的角频率 $\omega \approx 1$ 时,系统发生谐波主共振。根据前面的理论推导,此时解的基本表达式为(3.13)和(3.24)。

(a) 定常解

定常解也为周期解,即(3.6)表达式中振幅 X 和相位角 φ 不随时间变化的解。设定常解时对应于(3.7)的常数振幅为 $X_c = X_{co}, X_s = X_{so}$,在(3.12)式中令 $\dot{X}_c = 0, \dot{X}_s = 0$,得

$$\begin{cases} -c\omega X_{so} + (\omega^2 - 1)X_{co} - \frac{3}{4}\beta X_{co}(X_{co}^2 + X_{so}^2) + F = 0 \\ -c\omega X_{co} + (1 - \omega^2)X_{so} + \frac{3}{4}\beta X_{so}(X_{co}^2 + X_{so}^2) = 0 \end{cases} \tag{3.34}$$

变形,得

$$\begin{cases} (c\omega)^2 X_o^2 + [(1 - \omega^2) + \frac{3}{4}\beta X_o^2]^2 X_o^2 = F^2 \\ \tan \varphi_o = \frac{c\omega}{(\omega^2 - 1) - \frac{3}{4}\beta X_o^2} \end{cases} \tag{3.35}$$

将由此式确定的振幅 X_o 和相位角 φ_o 代入(3.6)式,即得到主振动的解。

(b) 定常解的稳定性判定

在线性振动理论中,解析求得的解一定是系统实际存在的解,这是由线性微分方程理论得出的。然而,在非线形振动中,解析求得的解,在系统实际振动中并不一定都能够实现,此即解的稳定性问题。所谓某一定常解稳定,是指该定常解是实际能够存在的。不稳定,是指该解实际不可能存在,只是理论上存在,满足运动方程式而已。

给上述定常解 X_{co}, X_{so} 加上一个小的扰动 ξ, η ,即

$$X_c(t) = X_{co} + \xi(t), \quad X_s(t) = X_{so} + \eta(t) \tag{3.36}$$

将此式代入(3.12)式,得

$$\begin{aligned} 2\omega\dot{\eta} &= -c\omega(X_{so} + \eta) + (\omega^2 - 1)(X_{co} + \xi) - \frac{3}{4}\beta(X_{co} + \xi)[(X_{co} + \xi)^2 + (X_{so} + \eta)^2] + F \\ 2\omega\dot{\xi} &= -c\omega(X_{co} + \xi) + (1 - \omega^2)(X_{so} + \eta) + \frac{3}{4}\beta(X_{so} + \eta)[(X_{co} + \xi)^2 + (X_{so} + \eta)^2] \end{aligned} \quad (3.37)$$

按照 $O(\mu)$ 精度进行化简, 并考虑定常解应满足的关系式 (3.34), 得

$$\begin{aligned} 2\omega\dot{\eta} &= -c\omega\eta + (\omega^2 - 1)\xi - \frac{3}{2}\beta X_{co}(X_{so}\eta + X_{co}\xi) \\ 2\omega\dot{\xi} &= -c\omega\xi + (1 - \omega^2)\eta + \frac{3}{2}\beta X_{so}(X_{co}\xi + X_{so}\eta) \end{aligned} \quad (3.38)$$

整理, 得线性微分方程式。

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a_{11}\xi + a_{12}\eta \\ \dot{\eta} = a_{21}\xi + a_{22}\eta \end{cases} \quad (3.39)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2\omega}(-c\omega + \frac{3}{2}\beta X_{so}X_{co}) \\ a_{12} &= \frac{1}{2\omega}[(1 - \omega^2) + \frac{3}{2}\beta X_{so}^2] \\ a_{21} &= \frac{1}{2\omega}[(\omega^2 - 1) - \frac{3}{2}\beta X_{co}^2] \\ a_{22} &= -\frac{1}{2\omega}[c\omega + \frac{3}{2}\beta X_{co}X_{so}] \end{aligned} \quad (3.40)$$

对应的特征方程式为

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad (3.41)$$

根据 Routh-Hurwitz 稳定性判定定理, 得

$$p = -(a_{11} + a_{22}) > 0 \text{ 及 } q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \quad (3.42)$$

将 (3.40) 式代入, 得

$$\begin{cases} p = c > 0 \\ q = \frac{1}{4\omega^2}[c^2\omega^2 - \frac{9}{4}(\beta X_{so}X_{co})^2] \\ \quad + \frac{1}{4\omega^2}[(1 - \omega^2)^2 + (1 - \omega^2)\frac{3}{2}\beta X_{co}^2 + (1 - \omega^2)\frac{3}{2}\beta X_{so}^2 + \frac{9}{4}\beta^2 X_{so}^2 X_{co}^2] > 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

该式中第 1 式是始终成立的, 所以可以只由第 2 式判断解的稳定性。

(c) 数值计算结果与理论分析结果的对比

可以根据 (3.35) 式计算 Duffing 系统的主共振曲线 (对于外激励不同的角频率 ω ，求解出振幅 X_0 。振幅 X_0 为正实数)，然后由上式判断解的稳定性，结果可以与数值计算结果进行比较，结果如图 3.3 所示。图中圆圈 \circ 代表数值计算的结果，实线代表式 (3.35) 中稳定的谐波主共振解，虚线代表式 (3.35) 中不稳定的谐波主共振解。由图可以看出，理论计算结果与数值计算结果基本一致，说明上述理论分析是正确的。

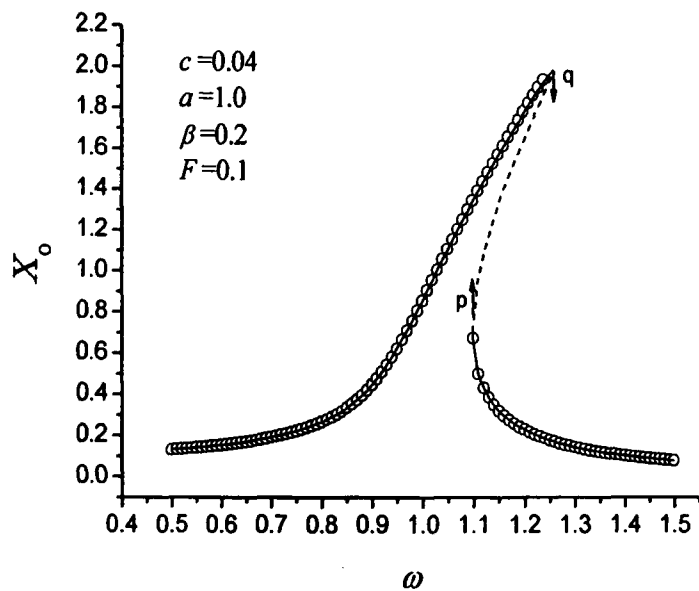


图 3.3 主共振的幅频特性曲线 (理论分析与数值计算的对比)

由上述理论与数值计算分析可以看出 Duffing 系统振动的一些特性。在角频率 $\omega \approx 1$ 的附近 (即激励频率接近于固有频率时)，振幅 X_0 达到较大值，这与线性系统的共振相似，称为主共振，因为非线性系统在其它频率点附近还会出现较大振幅的情况。在式 (3.35) 中，如果非线性项的系数 $\beta = 0$ ，则此时系统的振幅和相位角为

$$\begin{cases} X_0 = \frac{F}{\sqrt{(c\omega)^2 + (1 - \omega^2)^2}} \\ \tan \varphi_0 = \frac{c\omega}{\omega^2 - 1} \end{cases} \quad (3.44)$$

此式即为一般线性系统强迫振动的振幅与相位角的计算公式。图 3.3 中存在有阻尼项 c ，如果阻尼更小，则图形的峰顶会更向上延伸。如果阻尼 $c = 0$ ，同时外激励力 $F = 0$ ，则由式 (3.35) 得 $1 + 3\beta X_0^2 / 4 = \omega^2$ ，与前述的式 (3.33) 相同，这时的主共振曲线变成为一条通过 $\omega = 1$ 的曲线，称为骨架曲线 (backbone curve)。

与线性系统振动不同，该非线性振动系统在同一个角频率 ω 时，最多有三个

振幅值。根据稳定性分析,在该曲线上的 P 和 q 两点具有垂直切线,是稳定与不稳定解的分界点,即 p 和 q 区间的定常振动不稳定,现实中是不能实现和发生的。而在该区间内,实际振动时,究竟哪一个定常振动发生,是由初始条件等决定的。

与线性系统的共振相比较,在该非线性系统中,如果外力的角频率 ω 从一个小值缓慢增加,这时振幅会沿着曲线逐渐变大,当达到 q 点时,由于曲线不再继续延伸,所以振幅会急剧减小(下降跳跃,箭头所示)。反之,当外激励力的频率 ω 从较大值缓慢减小时,当到达 p 点时,振幅会急剧增大(上升跳跃,箭头所示)。所以在 p、q 点对应的角频率 ω 附近, ω 发生很小的变化时,系统振幅会发生剧烈的变化,这种振幅剧烈变化的现象称为突跳现象(jump phenomena)。同时,由于在频率增加和较小时,发生跳跃现象的角频率不同,这种现象称为滞后(hysteresis phenomenon)。跳跃和滞后现象是非线性受迫振动系统重要的特征之一。

3.4.2 1/3 分数谐波共振

为了确认第 2 章数值计算得出的有关 1/3 次分数谐波共振的有关结论,这里对方程式(3.5)进行解析分析,具体求解出其 1/3 次分数谐波响应。

由前面的数值计算和理论分析可以看出,当 Duffing 系统发生 1/3 次分数谐波振动时,外激励的频率较高,大于 3 倍的系统固有频率,这时候振动响应中的频率为外激励频率 ω 的分量相对较小,具体见图 2.8、2.9、2.10、2.11 和 3.3。所以在理论分析时,响应中的频率为 ω 的成分可以按照 $O(\mu^0)$ 精度先求出来,设其表达形式为

$$P \cos(\omega t + \alpha) \tag{3.45}$$

其中的振幅 P 和相位角 α 可由式(3.34)得

$$P = \frac{F}{\omega^2 - 1}, \quad \alpha = -\pi \tag{3.46}$$

为了验证上述分析结论(3.46)的正确性,数值计算与利用公式(3.46)计算结果的对比如图 3.4 所示。图中的小 o 代表频率为 ω 的响应的振幅,实线代表理论解(3.46)式。由图可以看出,公式(3.46)是正确的。

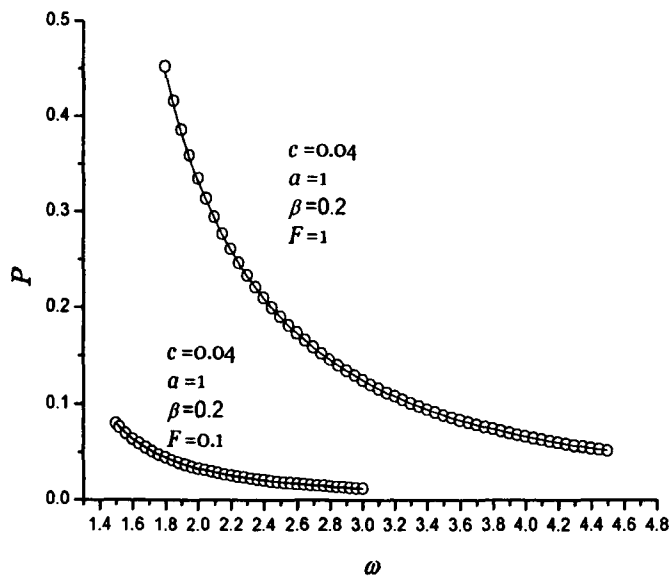


图 3.4 高频区中以频率 ω 振动分量的振幅变化

这样一来，1/3 次分数谐波响应的形式可以假设为如下形式

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos\left(\frac{1}{3}\omega t + \varphi\right) + P \cos(\omega t + \alpha) \\ &= X_c(t) \cos\frac{1}{3}\omega t + X_s(t) \sin\frac{1}{3}\omega t - P \cos \omega t \end{aligned} \tag{3.47}$$

其中

$$X_c = X \cos \varphi, \quad X_s = X \sin \varphi, \quad P = \frac{F}{\omega^2 - 1} \tag{3.48}$$

假设 X_c, X_s 是时间的缓慢变化函数，且大小为 $O(\mu^0)$ 精度。按照 $O(\mu)$ 精度对 (3.47) 求到，得

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{X}_c(t) \cos\frac{1}{3}\omega t - \frac{1}{3}\omega X_c(t) \sin\frac{1}{3}\omega t + \\ &\quad \dot{X}_s(t) \sin\frac{1}{3}\omega t + \frac{1}{3}\omega X_s(t) \cos\frac{1}{3}\omega t + \omega P \sin \omega t \\ \ddot{x} &= -\frac{1}{3}\omega \dot{X}_c(t) \sin\frac{1}{3}\omega t - \frac{1}{3}\omega \dot{X}_c(t) \sin\frac{1}{3}\omega t - \left(\frac{1}{3}\omega\right)^2 X_c(t) \cos\frac{1}{3}\omega t + \\ &\quad \frac{1}{3}\omega \dot{X}_s(t) \cos\frac{1}{3}\omega t + \frac{1}{3}\omega \dot{X}_s(t) \cos\frac{1}{3}\omega t - \left(\frac{1}{3}\omega\right)^2 X_s(t) \sin\frac{1}{3}\omega t + \omega^2 P \cos \omega t \end{aligned} \right. \tag{3.49}$$

将 (3.47) 和 (3.49) 式代入方程式 (3.5)，得

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3}\omega\dot{X}_c\sin\frac{1}{3}\omega t - \frac{1}{3}\omega\dot{X}_c\sin\frac{1}{3}\omega t - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 X_c\cos\frac{1}{3}\omega t \\
 & + \frac{1}{3}\omega\dot{X}_s\cos\frac{1}{3}\omega t + \frac{1}{3}\omega\dot{X}_s\cos\frac{1}{3}\omega t - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 X_s\sin\frac{1}{3}\omega t + \omega^2 P\cos\omega t \\
 & - \frac{1}{3}c\omega X_c\sin\frac{1}{3}\omega t + \frac{1}{3}c\omega X_s\cos\frac{1}{3}\omega t + c\omega P\sin\omega t \\
 & + X_c\cos\frac{1}{3}\omega t + X_s\sin\frac{1}{3}\omega t - P\cos\omega t \\
 & + \beta[X_c\cos\frac{1}{3}\omega t + X_s\sin\frac{1}{3}\omega t - P\cos\omega t]^3 = F\cos\omega t
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

进一步化简, 得

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{3}\omega\dot{X}_c\sin\frac{1}{3}\omega t - \frac{1}{3}\omega\dot{X}_c\sin\frac{1}{3}\omega t - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 X_c\cos\frac{1}{3}\omega t \\
 & + \frac{1}{3}\omega\dot{X}_s\cos\frac{1}{3}\omega t + \frac{1}{3}\omega\dot{X}_s\cos\frac{1}{3}\omega t - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2 X_s\sin\frac{1}{3}\omega t + \omega^2 P\cos\omega t \\
 & - \frac{1}{3}c\omega X_c\sin\frac{1}{3}\omega t + \frac{1}{3}c\omega X_s\cos\frac{1}{3}\omega t + c\omega P\sin\omega t] \\
 & + X_c\cos\frac{1}{3}\omega t + X_s\sin\frac{1}{3}\omega t - P\cos\omega t \\
 & + \beta[-\frac{3}{4}P^3\cos\omega t - \frac{1}{4}P^3\cos 3\omega t + \frac{3}{2}X_cP^2\cos\frac{1}{3}\omega t + \frac{3}{4}X_cP^2\cos\frac{5}{3}\omega t \\
 & + \frac{3}{4}X_cP^2\cos\frac{7}{3}\omega t - \frac{3}{4}X_c^2P\cos\frac{1}{3}\omega t - \frac{3}{2}X_c^2P\cos\omega t - \frac{3}{4}X_c^2P\cos\frac{5}{3}\omega t \\
 & + \frac{3}{4}X_c^3\cos\frac{1}{3}\omega t + \frac{1}{4}X_c^3\cos\omega t + \frac{3}{2}X_sP^2\sin\frac{1}{3}\omega t - \frac{3}{4}X_sP^2\sin\frac{5}{3}\omega t \\
 & + \frac{3}{4}X_sP^2\sin\frac{7}{3}\omega t + \frac{3}{2}X_cX_sP\sin\frac{1}{3}\omega t - \frac{3}{2}X_cX_sP\sin\frac{5}{3}\omega t + \frac{3}{4}X_c^2X_s\sin\frac{1}{3}\omega t \\
 & + \frac{3}{4}X_c^2X_s\sin\omega t + \frac{3}{4}X_s^2P\cos\frac{1}{3}\omega t - \frac{3}{2}X_s^2P\cos\omega t + \frac{3}{4}X_s^2P\cos\frac{5}{3}\omega t \\
 & + \frac{3}{4}X_s^2X_c\cos\frac{1}{3}\omega t - \frac{3}{4}X_s^2X_c\cos\omega t + \frac{3}{4}X_s^3\sin\frac{1}{3}\omega t - \frac{1}{4}X_s^3\sin\omega t] = F\cos\omega t
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

按照 $O(\mu)$ 精度比较两边频率为 $\omega/3$ 项的系数, 得

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\omega\dot{X}_s = -\left[1 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right]X_c - \frac{1}{3}c\omega X_s - \frac{3}{4}\beta[(X_c^2 + X_s^2 + 2P^2)X_c - (X_c^2 - X_s^2)P] \\ \frac{2}{3}\omega\dot{X}_c = \left[1 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right]X_s - \frac{1}{3}c\omega X_c + \frac{3}{4}\beta[(X_c^2 + X_s^2 + 2P^2)X_s + 2X_cX_sP] \end{cases}$$

(3.52)

定常解时 $\dot{X}_c = 0, \dot{X}_s = 0$, 此时令上式中

$X_c = X_{c0} = X_0 \cos \varphi_0, X_s = X_{s0} = X_0 \sin \varphi_0$, 得

$$\begin{cases} -\left[1 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right]X_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{3}c\omega X_0 \sin \varphi_0 - \frac{3}{4}\beta[(X_0^2 + 2P^2)X_0 \cos \varphi_0 - X_0^2(\cos^2 \varphi_0 - \sin^2 \varphi_0)P] = 0 \\ \left[1 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right]X_0 \sin \varphi_0 - \frac{1}{3}c\omega X_0 \cos \varphi_0 + \frac{3}{4}\beta[(X_0^2 + 2P^2)X_0 \sin \varphi_0 + 2X_0^2 \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 P] = 0 \end{cases}$$

化简该式, 得

$$\begin{cases} -\left[1 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right]X_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{3}c\omega X_0 \sin \varphi_0 - \frac{3}{4}\beta[(X_0^2 + 2P^2)X_0 \cos \varphi_0 - X_0^2 \cos 2\varphi_0 P] = 0 \\ \left[1 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right]X_0 \sin \varphi_0 - \frac{1}{3}c\omega X_0 \cos \varphi_0 + \frac{3}{4}\beta[(X_0^2 + 2P^2)X_0 \sin \varphi_0 + X_0^2 \sin 2\varphi_0 P] = 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\begin{cases} \left\{\left[1 - \left(\frac{\omega}{3}\right)^2\right] + \frac{3}{4}\beta(X_0^2 + 2P^2)\right\}X_0 = \frac{3}{4}\beta X_0^2 P \cos 3\varphi_0 \\ \frac{1}{3}c\omega X_0 = \frac{3}{4}\beta X_0^2 \sin 3\varphi_0 P \end{cases} \quad (3.54)$$

在上式中消去相位角 φ_0 , 即得到共振曲线方程为

$$\begin{cases} \left\{\left(1 - \frac{1}{9}\omega^2\right) + \frac{3}{4}\beta(X_0^2 + 2P^2)\right\}^2 + \left(\frac{1}{3}c\omega\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\beta X_0 P\right)^2 \\ X_0 = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

关于此周期解的稳定性, 与前面同理可以进行分析。设给该周期解一摄动 $\xi(t), \eta(t)$, 则

$$\begin{cases} X_c(t) = X_{c0} + \xi(t) \\ X_s(t) = X_{s0} + \eta(t) \end{cases} \quad (3.56)$$

与主共振进行相类似的分析, 计算结果如下图所示。图中实线为稳定振幅, 虚线为不稳定振幅。

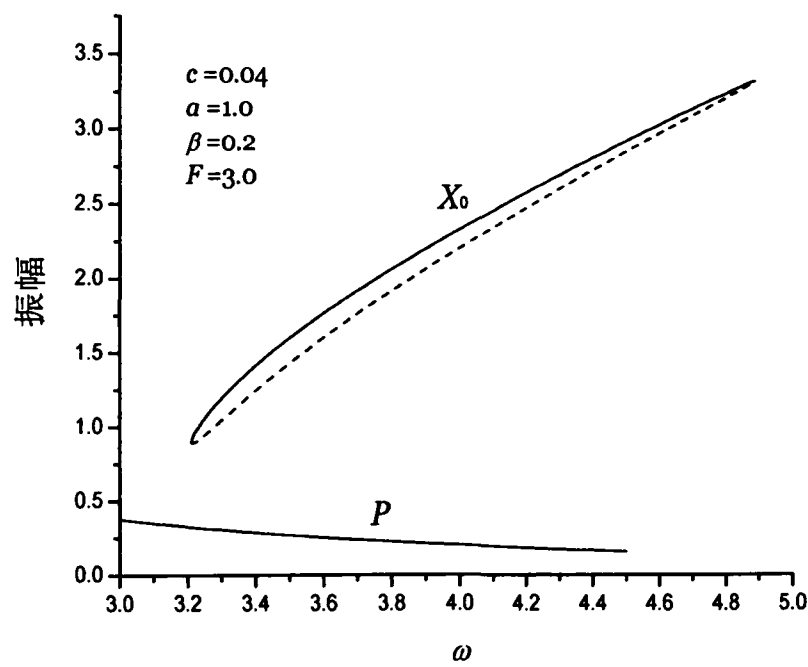


图 3.5 1/3 次分数谐波共振振幅

由 1/3 分数谐波振动的数值计算和理论解析可以看出，当系统外激励的频率大于系统固有频率的三倍时，系统不但发生频率为 ω 的振动，同时还出现频率为 $\omega/3$ 的振动，而且此时当两种频率成分的振动同时出现时，振动较大，即发生所谓 1/3 分数谐波共振。频率为 ω 的振动成分的理论解析结果与数值计算结果一致。

4 结论

Duffing 方程是非线性振动研究中的一个典型方程, 工程中许多问题都可以归结为类似的系统, 所以对 Duffing 系统振动特性的研究具有重要的理论和现实意义。

关于 Duffing 系统非线性振动特性的研究, 已经有许多研究成果。包括 Duffing 系统的小摄动解、无阻尼 Duffing 系统的周期解、高频强迫振动的大、小振幅谐波解、有阻尼 Duffing 系统的近似解、分段 Duffing 系统的近似解和含有单个、两个慢变参数的 Duffing 系统的解析解等。Duffing 系统的数值解也得到了较大程度上的发展。但是对于这个系统与其演化系统的深入研究依旧是国内外学者的前沿课题之一。

本文通过对一个有非线性弹性恢复力作用的单自由度振动系统的建模, 得到了无量纲的非线性振动方程式, 即 Duffing 方程。通过数值计算研究了 Duffing 系统的自由振动、受迫振动的主共振、受迫振动的 $1/3$ 次分数谐波共振以及受迫振动的混沌振动, 并绘制相应的数值计算结果图和波形图等。然后, 根据数值计算结果, 采用慢变参数的谐波平衡法, 将假设解代入 Duffing 方程, 推导出系统周期解(定常解)方程式, 即幅频和相频特性方程式, 并运用 Routh-Hurwitz 稳定性判定定理对其进行稳定性分析。将非线性振动解析的平均法的慢变参数思想用于谐波平衡法中, 使得谐波平衡法也可以分析受迫振动的稳定性。理论分析结果与数值计算的结果基本一致, 说明理论分析是正确的。

本文的理论成果为进一步分析 Duffing 系统的非线性振动特性提供了切实可行的研究方法和理论依据, 文中所采用的理论解析方法亦为其他非线性系统的研究提供了新的思路和方法, 具有一定的借鉴意义。

致谢

本文是在导师张小龙教授的精心指导和热情关怀下完成的。恩师学识渊博、治学严谨、品德高尚、平易近人。他的辛勤教诲和指导，热情关怀和鼓励，使作者受益终身、没齿难忘；不但增长了知识，提高了能力，并且得以顺利完成学业，并学有所成。在此谨向恩师表示衷心的感谢和深深的敬意。

同时，感谢西安建筑科技大学为我提供了良好的学习机会和我的工作单位机电工程学院给予的大力支持。尤其是学院有关领导和办公室同事们的支持和帮助，为我分担工作，留出更多的时间撰写和修改论文，特别提出感谢。

最后向参加论文审阅、论文答辩的有关教授与专家及关心、鼓励、支持和帮助过我的所有亲属、老师、朋友和同学表示由衷的感谢！祝你们生活幸福，身体健康，工作顺利！

致谢人：王海波

2009年6月

参考文献

- [1] Duffing G. Erzwungene Schwingung bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Vieweg : Braunschweig, 1918.
- [2] 丁同仁. 常微分方程定性方法的应用[M], 第一版. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] 李险峰. 时滞状态反馈控制下的 Duffing 系统的分岔及混沌控制[D]. 兰州交通大学, 2007.
- [4] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 高等教育出版社, 2001.
- [5] 陈红斌, 虞烈, 袁小阳. 关于 Duffing 方程周期解的存在与唯一性[J]. 数学研究与评论, 2002.
- [6] 李鹏程. 一类 Duffing 型时滞微分方程的周期解[D]. 四川大学学报, 2003.
- [7] 唐美兰, 刘心歌, 郭水霞. 时滞 Duffing 型微分方程周期解的存在唯一性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2005.
- [8] 姚志健. 一类时滞 Duffing 型方程周期解的存在唯一性[J]. 科学技术与工程, 2005.
- [9] 伊贺达贵. 广义 Duffing 方程周期解的存在性[J]. 吉林大学学报, 2006.
- [10] 张燕. 一类 Duffing 方程周期解的存在性[J]. 黑龙江科技学院学报, 2007.
- [11] 许敏, 周伟灿. 一类带阻尼项 Duffing 型方程周期解的存在性[J]. 南京气象学院学报, 2007.
- [12] 杨丽伟. Duffing 型方程的周期解的存在唯一性和数值解法[D]. 汕头大学, 2008.
- [13] 倪振华. 振动力学[M]. 西安交通大学出版社, 1989.
- [14] 周纪卿, 朱因远. 非线性振动[M]. 西安交通大学出版社, 1998.
- [15] 王大钧, 王泉, 陈德成. 关于 Duffing 方程计算的一个方法[J]. 科学出版社, 1992.
- [16] 何吉欢. Duffing 方程的变分迭代解法[J]. 计算物理, 1999, 16(2): 121-127.
- [17] 林建国. 非线性 Duffing 方程的高精度近似解[J]. 力学与实践, 1999.
- [18] 李银山, 张善元, 董青田, 曹俊灵. 用两项谐波法求解强非线性 Duffing 方程[J]. 太原理工大学学报, 2005.
- [19] 陈艳锋, 郑建华, 吴新跃, 王基. 无阻尼 Duffing 方程高精度近似解研究[J]. 机械科学与技术, 2008.
- [20] 徐红兵, 吕炳朝, 陈光. 基于 Duffing 方程不确定性模型的混沌控制[J]. 系统工程与电子技术, 2000.
- [21] 李芳, 徐振源. 具有异宿轨道 Duffing 方程的混沌控制[J]. 江南大学学报, 2005.

- [22] 胡艳, 赵雪平, 秦树洪. 复杂策动力项对 Duffing 方程混沌系统相态的影响[J]. 吉林大学学报, 2005.
- [23] 田春红. 具有控制参数的 Duffing 方程的时变分岔[J]. 科学技术与工程, 2007.
- [24] 杨国海, 夏清华. 无阻尼 Duffing 方程的多值共振解的稳定性研究[J]. 湖北大学学报, 2008.
- [25] Raj S P, Rajasekar S. Migration control in two coupled Duffing oscillator. Phys. Rev. Lett. 1997.
- [26] Musielak D E, Musielak Z E, Benner J W. Chaos and routes in coupled Duffing oscillators with multiple degrees of freedom. Chaos, Solitons & Fractals. 2005.
- [27] Sanjuan M A F. Symmetry-restoring crises, period-adding and chaotic transitions in the cubic Van der Pol Oscillator. Journal of Sound and Vibration. 1996.
- [28] Siewe Siewe M, F M Moukam Kakmeni, C Tchawoua. Resonant oscillation and homoclinic bifurcation in a ϕ^6 -Van der Pol oscillator. Chaos, Solitons and Fractals. 2004.
- [29] Unin K, Chen G R. Controlling the Duffing oscillator to the Lorenz system and generalizations. IEEE Xplore. 2000.
- [30] Hu H Y, Dowell E H, Virgin L N. Resonance of a harmonically forced doffing oscillator with time delay staefeedback. Nonlinear Dynamics. 1998.
- [31] 徐鉴, 陆启韶, 王乘. Van der Pol-Duffing 时滞系统的稳定性和 Hopf 分岔[J]. 力学学报, 2000.
- [32] Xu W, He Qn, Rong H W, et al. Global analysis of stochastic bifurcation in doffing system. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2003.
- [33] 龚靖, 王超, 李新民. 周期激励复数 Duffing 振荡系统的混沌特性和控制研究[J]. 西安交通大学学报, 2003.
- [34] 闻邦椿, 武新华, 丁千等. 故障旋转机械非线性动力学的理论与试验[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [35] 闻邦椿, 李以农, 徐培民, 韩清凯. 非线性振动理论中的解析方法及工程应用[M]. 东北大学出版社, 2001.
- [36] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学. 高等教育出版社, 2004.
- [37] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动. 高等教育出版社, 2001.
- [38] 安田仁彦. 振動工学—応用編 (Vibration Engineering-A Second Course). コロナ

- ナ社,2005.
- [39] 藪野浩司.工学のための非線形解析入門 システムのダイナミクスを正しく理解するために.サイエンス社,2004.
- [40] 石田幸男,井上剛志.機械振動工学.培風館,2008.
- [41] 国枝正春.实用機械振動学.理工学社,2001.
- [42] 井上順吉,末岡淳男.機械工学基礎講座 機械力学Ⅱ—非線形振動論.理工学社,2002.
- [43] 日本機械学会.非線形系のダイナミクス—非線形現象の解析入門.コロナ社,2007.
- [44] Ioannis M. Kyprianidis, Physics Department, Aristotle University of Thessaloniki Thessaloniki, Greece.
- [45] 张孟.Duffing 方程的分支和混沌[D].湖南师范大学,2007.
- [46] 蔡美香.Duffing 方程的谐波解和谐波解分支及混沌[D].湖南师范大学,2006.
- [47] 李响.带阻尼的非线性 Duffing 方程的概周期解[D].中国海洋大学,2005.
- [48] 林建国.非线性 Duffing 方程的高精度近似解[J].力学与实践,1999,21(5): 39-41.
- [49] 李鹏松,孜愔.达芬-谐波振子的改进解析逼近解[J].振动与冲击,2004,23(3): 113-116.
- [50] 高阳,王三民,刘晓宁.一种改进的增量谐波平衡法及其在非线性振动中的应用[J].机械科学与技术,2005,24(6):663-665.
- [51] 李银山,郝黎明,树学锋.强非线性 Duffing 方程的摄动解[J].太原理工大学学报,2000,31(5):516-520.
- [52] 李建利,申建华.具脉冲时滞的 Duffing 型方程的周期解[J].应用数学学报,2005,28(1):124-13.