

基于运动模型的振动浮子式波浪能发电装置研究

摘要

本文针对波浪能发电功率问题, 基于线性化 PTO 模型、牛顿第二定律, 建立起浮子和振子在波浪作用下的运动模型。为解决实际问题, 建立目标优化模型求解最优阻尼, 运用遍历搜索和粒子群算法, 得出波浪能发电的最大功率。

针对问题一, 要求建立垂荡运动中浮子振子的竖向运动模型, 求解装置的最大输出功率与最优阻尼系数。对浮子受力分析, 仅考虑由 4 力合成的总波浪力, 及 PTO 系统产生的阻力, 此时振子所受合力即为 PTO 系统的作用力。整理后的模型是个二阶二维微分方程组, 最终通过降阶的方式求解得, 浮子和振子位移图像的振幅分别为 0.4396 和 0.4569, 速度图像的振幅分别为 0.61156 和 0.6433。此处只展示部分结果: 第一小问 10s 时, 浮子位移为-0.1906m, 速度为-0.6406m/s; 第二小问 20s 时, 振子位移-0.6341m, 速度-0.2723 m/s。

针对问题二, 要求区间内的最大平均功率和最优阻尼系数。第一问已得浮子振子的运动模型, 经分析平均功率与直线阻尼系数和浮子振子的相对速度有关, 而在入射波频率为常数时, 相对速度大小取决于给定的阻尼系数。故阻尼系数在 [0,100000] 范围内遍历求取相对速度, 进而求出平均功率, 寻找最大值。当阻尼系数为 37280 N·s/m 时, 最大平均输出功率为 120.044W。第二小问中, 反过来相对速度决定阻尼系数, 需要求解该幂指数和系数的大小, 则将运动方程组中所有阻尼系数替换成位移一阶导的幂公式, 进而借助粒子群算法求解即可。解得, 比例系数为 97620.4538、幂指数为 0.4037 时, 最大平均输出功率为 120.2202W。

针对问题三, 在原垂荡的基础上增加纵摇, 若同时考虑两个自由度上的运动较为复杂, 本文将两者拆开分别讨论其运动模型。经分析知, 纵摇时绕质心轴转动, 该系统为非严格惯性系, 因此对振子力矩分析时, 需要考虑到科氏力引起的力矩对旋转的影响。后计算出浮子、振子纵摇时的转动惯量, 即可列出纵摇的运动方程。只考虑垂荡时, 质心则在垂线上运动, 这里采用问题一建立的模型。此处只展示部分结果: 第一小问 40s 时, 浮子的垂荡位移为 0.3694m, 垂荡速度为 0.7576m/s; 纵摇角位移为-0.03176rad, 纵摇角速度-0.0229rad/s。

针对问题四, 要求在指定区间内找出最优直线阻尼系数、旋转阻尼系数以及对应的最大平均功率。在第三问中, 垂荡和纵摇是分开单独建立的运动模型, 但实际求解中仍然存在某种相互影响, 在本问求两者和运动下产生的最大平均功率时, 也将其等价看为两平均功率和。但求准确性, 同时搜寻垂荡和纵摇上的最优阻尼系数组合, 以使 PTO 系统总平均功率最大。运用粒子群算法求解这样的双变量优化模型, 最终确定直线阻尼系数 61280.4355N·s/m、旋转阻尼系数 42790.4894 N·m·s 时, 存在最大平均输出功率 150.2886W。

关键词: 线性化 PTO 模型 运动模型 优化模型 遍历搜索 粒子群算法

一、 问题重述

1.1 问题背景

近年来，科学技术迅猛发展，环境污染日益加重，能源危机阴影笼罩全球。我国并不是产油大国，为解决环境污染和能源需求问题，尽早摆脱美国的石油霸权主义，积极寻找发展可再生能源将是一个长期具有重大意义的事。

海洋占据地球表面积的 71%，蕴藏着丰厚的矿产、能源资源。波浪能含量丰富，应用前景广阔，被列入重点发展项目其中之一。为实现波浪能更高效、更节约成本的规模化利用，波浪能装置的能量转换效率具有重要的研究意义。

1.2 问题提出

浮子、振子、中轴和能量输出系统构成波浪能装置。波浪作用下，浮子运动推进振子运动，阻尼器在浮子和振子的相对运动下做功，并以能量形式输出。

建立模型解决下列问题：

(1) 波浪作用下，仅考虑浮子做垂荡运动，对浮子、振子分别建立运动模型。针对下述两种情况，分别计算在波浪激励力作用下，前 40 个波浪周期内，浮子和振子每隔 0.2s 的垂荡位移和速度：I.对直线阻尼器而言，已知其阻尼系数为 $10000N \cdot s/m$ ；II.依靠直线阻尼器输出能量，已知它的阻尼系数和浮子、振子速度绝对值的幂存在正比关系。阐述在第10s, 20s, 40s, 60s, 100s，浮子、振子的速度与垂荡位移。

(2) 在第一问的条件下，基于下述两种情形，针对直线阻尼器，建立模型求解满足 PTO 系统输出功率均值最大的阻尼系数的最优值：I.阻尼系数是常数，在 $[0, 100000]$ 的区间里取值；II.阻尼系数和浮子、振子速度绝对值的幂呈现正比关系，其比例系数位于 $[0, 100000]$ 的区间里，幂指数从 $[0, 1]$ 里取值。求解输出功率的最大值和阻尼系数的最优解。

(3) 同时考虑浮子的垂荡与纵摇，确定浮子、振子运动模型。在问题一的基础上增设旋转阻尼器，其阻尼系数与直线阻尼器阻尼系数都设为常量，计算在波浪激励力（矩）作用下，前 40 个波浪周期内，浮子、振子每隔 0.2s 的速度、垂荡位移及纵摇角速度、角位移。阐述在第10s, 20s, 40s, 60s, 100s，浮子、振子的速度、垂荡位移及纵摇角速度、角位移。

(4) 在第三问的条件下，建立模型以求解直线阻尼器与旋转阻尼器阻尼系数的最优解，两者阻尼系数都位于 $[0, 100000]$ 的区间内，并计算输出功率的最大值。

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

问题一已知浮子在波浪中仅进行垂荡运动,为求解装置的最大输出功率和最优阻尼系数,建立浮子运动的数学模型。装置所受作用力由总波浪外力和内部 PTO 系统作用力共同构成。依据题意,浮子受到的波浪力由波浪激励力、附加惯性力、兴波阻尼力和静水恢复力共同构成。为求解内部 PTO 系统带来的阻力,对总波浪外力表达式进行傅里叶变换,运用牛顿第二定理得出运动方程。将线性化 PTO 系统与弹簧质量阻尼系统等效,表示出 PTO 系统的作用力。用复指数法对式求出位移响应的表达式,结合 PTO 系统作用力方程求出响应速度。对系统整体进行受力分析,得到浮子和振子运动的加速度。通过浮体没入水中排除水的重量求得吃水深度。利用附件 3、4 所给数据进行遍历搜索,求出浮子、振子的垂荡位移和速度,进而求得最大输出功率与最优阻尼系数。

2.2 问题二的分析

问题二要求在确定区间内给出最大功率和最优阻尼系数。利用问题一已建模型,将弹簧阻尼系统等效为谐振电路,定义出机械系统力的阻抗。利用电路功率计算得出系统的平均发电功率。由线性 PTO 模型推知,输出功率可以利用浮子振子运动速度的差的平方计算。要使输出功率最大,差的平方也应最大。同时,当阻尼系数为 0 或 ∞ 时,功率总为 0;因而阻尼系数需在 0 到 ∞ 的区间内。可以推知,只有当功率和阻尼系数的偏微分为 0 时,平均功率最大。且浮子在正常工作时总处于欠阻尼状态下。因此,建立以浮子振子运动速度的差值的平方最大为目标函数,以功率和阻尼系数的偏微分为 0、浮子处于欠阻尼情形下为约束条件建立目标优化模型,求解出两种不同情形下发电装置输出的最大功率以及与其相对应的阻尼系数的最优解。

2.3 问题三的分析

问题三在浮子进行垂荡运动的基础上增设纵摇运动,要求建立浮子运动的数学模型以求解最大输出功率和最优阻尼系数。浮体在波浪力的作用下,运动形式总共可以分成垂荡、横荡、纵荡、纵摇、横摇、水平旋转共 6 种自由运动。本问仅考虑浮体发生垂直振荡和纵向摇晃的情况,这属于浮体多自由度问题,为将该复杂多方向、多物体问题简化,这里分开讨论垂荡、纵摇的情况,并分别对浮子和振子的进行分析,最后组成运动微分方程组求解。经分析只考虑摇荡时,浮子和振子将绕各自的质心轴转动,该转动过程中需要考虑科氏力产生的力矩对旋转的影响;而只考虑垂荡时,质心则在垂线上运动,与问题一中所建立的运动方程相同,直接代入即可。由于初始时刻,浮子和振子是平衡在净水中的,则可知初

始时刻的浮子、振子的速度加速度均为 0。又因为在计算转动惯量时需要计算组合体质心的位置，故本问应在圆锥顶点处建立坐标系。

2.4 问题四的分析

问题四要求当阻尼系数在固定区间内时，阻尼系数的最优解和输出功率的最大值。在问题三中为简化问题，将垂荡和纵摇分成独立的情况，分析求解出浮子、振子对应的位移、速度，故在本问计算输出功率时，也可以先分别计算出两者功率后相加成总功率，即求解总功率最大等价于求直线 PTO 系统产生功率的最大值、及旋转 PTO 系统产生功率的最大值。可运用问题 2 中的公式求直线 PTO 系统的最大平均功率，旋转 PTO 系统旋转时改变的是角度，故功率的计算公式也与角度又关，可类比问题 2 中的公式得出旋转 PTO 功率的计算公式。

三、 模型假设

- 1、本文所涉及到的流体均为理想流体，无粘无旋，分布均匀，不可压缩。
- 2、入射波均为规则波。
- 3、海平面所受大气压力恒定，忽略风阻影响。
- 4、系统中各铰接点处的摩擦均可忽略不记。
- 5、波浪激励力垂直，且在水平方向上，波浪激励力只提供垂直力矩。

四、 符号说明

表 1 符号说明表

符号	符号说明
F_{pto}	弹簧和阻尼器间的作用力
F_w	浮子所受总波浪力
F_0	波浪激励力
F_i	附加惯性力
F_r	兴波阻尼力
F_{hs}	静水恢复力
c	阻尼系数
k	弹簧刚度
m	浮子质量
m_p	振子质量
m_a	附加质量

z_1	浮子垂荡时的竖向位移
z_2	振子垂荡时的竖向位移
h_{11}	吃水深度
k_h	静水恢复力刚度系数
A	水线面面积

五、模型的建立与求解

5.1 问题一

题目已知浮子振子在水波推动下仅进行垂荡运动，建立浮子振子运动的相关力学模型。

5.1.1 模型预处理：线性化 PTO 模型

线性化 *PTO* 建模有两种方式，即位移激励建模和力激励建模。当研究仅仅针对于浮子内部 *PTO* 系统的情况时，往往采用位移激励建模，检测 *PTO* 系统是否可行。已知内部 *PTO* 系统负载具有可调节性，对于每个确定的负载，*PTO* 系统都会产生与之相应的 *PTO* 作用力，该作用力迫使浮子发生位移变换。为使结果与实际情况相符，此时往往采用力激励建模。

将上述建模方式应用到本文中，为了与海浪作用的实际情况相符，选用力激励建模。对浮子内部 *PTO* 系统进行受力分析，运用线性波浪理论，分析出 *PTO* 系统受力方程，

$$F_{pto} = c\dot{z}_1 + kz_1 - c\dot{z}_2 + kz_2$$

其中， F_{pto} 为弹簧与阻尼器之间的作用力， c 为阻尼系数， k 为弹簧刚度。

5.1.2 模型的建立：浮子的运动模型

1、总波浪外力分析

波浪作用下，浮子运动。由牛顿第二定理可知，工作状态下，浮子运动方程为：

$$m\ddot{z} = F_w$$

其中， m 表示浮子质量， z_1 表示垂荡时浮子的竖向位移， F_w 表示浮子受到的总波浪力。

题中考虑到海水的无粘无旋性，在线性周期微幅波的作用下，浮子受到的总波浪力由波浪激励力、附加惯性力、兴波阻尼力和静水恢复力四组分共同构成。

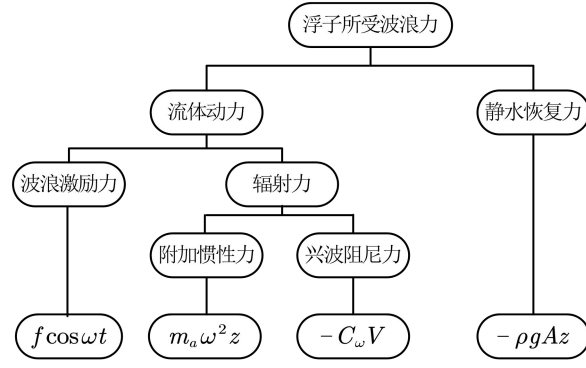


图 1 浮子所受波浪力

问题中已知波浪激励力为

$$F_0 = f \cos \omega t$$

式中， f 表示波浪激励力振幅，即垂荡兴波阻尼系数($N \cdot S/m$)； ω 表示入射波浪频率(S^{-1})。

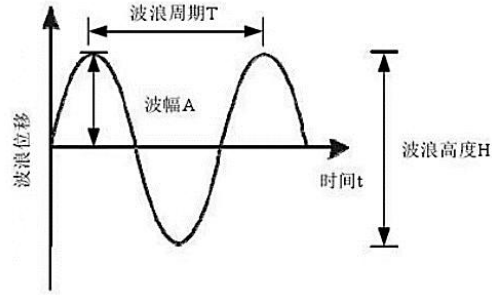


图 2 规则波浪曲线示意图

浮子运动时总是带动周围流体共同运动。当浮子在海水中运动时，为使浮子得到加速度，需额外施加一定的外力，即附加惯性力。与之对应产生的虚拟质量称为附加质量。附加惯性力为

$$F_i = m_a \omega^2 z_1$$

式中， m_a 为附加质量。

在海水中，当浮体摇荡时易掀起波浪，因而形成对浮体运动的阻力，即兴波阻尼力。兴波阻尼力的方向与摇荡运动的方向相反，速度呈现正比关系，比例系数为兴波阻尼系数。则易得，兴波阻尼力为

$$F_r = -C_\omega V$$

式中， C_ω 为兴波阻尼系数， V 为浮子摇荡运动的速度。

波浪作用下，浮子除受流体动力作用，还受到静水恢复力作用。当浮体在海水中进行垂荡运动时，将受到努力使浮体回到静水平衡位置的作用力称为静水恢复力。其实质是由于浮体做垂荡运动时，所受浮力不断变化，因而形成静水恢复力。其表达式如下：

$$F_{hs} = -\rho g A z_1$$

式中， ρ 表示水的密度， g 表示重力加速度， A 表示浮子和水的接触面积。

结合上述表达式，得出浮子受到的总波浪力为：

$$F_w = F_0 + F_i + F_r + F_{hs} \quad (1)$$

2、内部 PTO 系统作用力分析

在实际工作过程中，波浪能发电装置不仅受到波浪力的作用，同时也受到内部 PTO 系统力的作用。因而，在对浮子进行受力分析时还需考虑内部 PTO 系统带来的阻力。

对式（1）做傅里叶变换，加上内部 PTO 系统的作用力 F_{pto} ，得出最终满足牛顿第二定律的运动方程为

$$(m + m_a)\ddot{z}_1 + \rho g A z_1 = F_0 + F_{pto} \quad (2)$$

针对浮子，内部 PTO 系统作用力为阻力。由线性 PTO 理论可知，可将线性化 PTO 系统与弹簧质量阻尼系统等效，则 F_{pto} 即可表示为

$$F_{pto} = -m_p \ddot{z}_1 - c_p \dot{z}_1 - k_p z_1$$

式中， m_p 为振子质量， c_p 为阻尼系数， k_p 为劲度系数。

将上式代入（2）式，化简可得，

$$(m + m_a + m_p)\ddot{z}_1 + (c_p + c_w) \dot{z}_1 + (\rho g A + k_p) z_1 = F_0$$

为使表达式凝练，将 m_e 设为等效质量， c_e 设为等效阻尼， k_e 设为等效刚度。则表达式变为，

$$m_e \ddot{z}_1 + c_e \dot{z}_1 + k_e z_1 = F_0 \quad (3)$$

其中， c_w 为垂荡兴波阻尼系数

$$m_e = m + m_a + m_p$$

$$c_e = c_p + c_w$$

$$k_e = \rho g A + k_p$$

3、整体受力分析

对振动浮子式波浪能发电装置进行整体受力分析，绘出如下受力分析图。

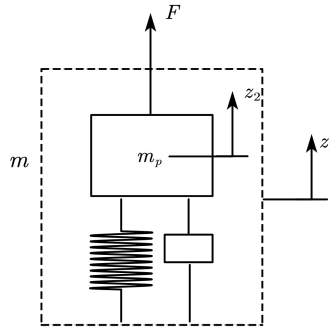


图3 波浪能装置整体受力分析图

依照整体受力模型，运用牛顿第二定律，不难得出以下平衡方程：

$$\text{浮子: } k(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - F = -m\ddot{z}_1$$

$$\text{振子: } k(z_1 - z_2) + c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - F = m_p \ddot{z}_2$$

联立方程组并化简，得，

$$\begin{cases} m_p \ddot{z}_2 + c \dot{z}_2 + k z_2 - c \dot{z}_1 - k z_1 = 0 \\ m \ddot{z}_1 + c \dot{z}_1 + k z_1 - c \dot{z}_2 - k z_2 = F \end{cases}$$

其中， m 为浮子质量， z_1 为浮子位移； m_p 为振子质量， z_2 为振子位移； F 为合外力。

将上文中求得的总波浪外力表达式、内部 PTO 作用力表达式代入上述方程组，得出

总波浪力为

$$F_w = f \cos \omega t - m_a \ddot{z}_1 - c_\omega \dot{z}_1 - \rho g A z_1$$

方程组转变为

$$\begin{cases} \text{浮子: } m \ddot{z}_1 = F_w + c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k(z_2 - z_1) \\ \text{振子: } m_p \ddot{z}_2 = c(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k(z_1 - z_2) \end{cases}$$

代入求解化简得，

$$\begin{cases} \ddot{z}_1 = \frac{t \cos \omega t - c_\omega \dot{z} - \rho g A z_1 + c_p(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + k(z_2 - z_1)}{m + m_p} \\ \ddot{z}_2 = \frac{c_p(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + k(z_1 - z_2)}{m_p} \end{cases} \quad (4)$$

4、确定吃水深度

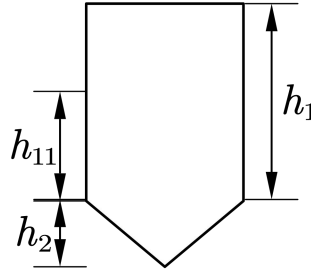


图 4 装置吃水示意图

已知吃水体积排出水的重量与物体重量相等，又浮子与振子重量已知，则可列出表达式

$$Mg = \rho \left(\frac{1}{3} \pi r^2 h_2 + \pi r^2 h_{11} \right) \cdot g$$

其中， M 为浮子与振子质量之和， g 为重力加速度， r 为圆柱底面半径， h_2 为锥形高度， h_{11} 为装置吃水深度。

化简上式，得，

$$h_{11} = \frac{M}{\rho \pi r^2} - \frac{1}{3} h_2 = 2.0m \quad (5)$$

5.1.3 模型的求解

1、已知直线阻尼系数计算速度位移

对于第一小问，直线阻尼系数为一固定值，采用如下算法。

表 2 位移速度求解步骤

算法流程	
Step1	计算出初始时刻，浮体稳定在水面时的吃水深度。
Step2	计算出不同 z_1 时的水线面积，进而计算出静水恢复力 F_{hs} 。
Step3	引入直线阻尼系数等一系列参数，计算出附加惯性力 F_i 、兴波阻尼力 F_r 、激励力 F_e 。
Step4	上述 4 个力相加得到浮子所受外部波浪力 F_w ，代入已转换而成的二阶微分方程组中。
Step5	对二阶方程组进行降阶处理，设定自变量 t 的范围，并以 0.2s 间隔取离散点，找到初始条件，通过 MATLAB 中 ode45 函数对新的微分方程组进行求解。
Step6	输出各离散时间数据点的浮子和振子的位移 z_1 、 z_2 以及速度 v_1, v_2 ，并保存在 result1-1.xlsx 中。

接着，进行微分方程组的降阶处理。根据方程组转化后的形式，也就是左边等式分别为浮子和振子位移的二阶导的方程组，通过进一步降阶处理得：

$$u_1 = z_1, u_2 = \dot{z}_1, u_3 = z_2, u_4 = \dot{z}_2$$

推知，

$$\begin{cases} du_1 = u_2 \\ du_2 = \frac{f \cos \omega t - c_w u_2 - f_g A u_1 + c_p (u_4 - u_2) + k(u_3 - u_1)}{m + m_p} \\ du_3 = u_4 \\ du_4 = \frac{c_p (u_2 - u_4) + k(u_1 - u_3)}{m_p} \end{cases} \quad (6)$$

接着利用 MATLAB 中的 ode45 函数即可对以上微分方程组进行求解，求解出的矩阵中包含 4 个向量，分别代表垂荡时浮子的位移和速度、振子的位移和速度。

5.1.4 模型的结果

当直线阻尼器的阻尼系数确定为 $10000N \cdot s/m$ 时，第10s, 20s, 40s, 60s, 100s，求得浮子、振子在垂荡运动中的速度和位移如下表所示：

表 3 定直线阻尼系数作用下浮体垂荡速度和位移

时间 (s)	浮子		振子	
	位移 (m)	速度 (m/s)	位移 (m)	速度 (m/s)
10	-0.1906	-0.6406	-0.2115	-0.6936
20	-0.5905	-0.2405	-0.6341	-0.2723

40	0.2855	0.3134	0.2966	0.3332
60	-0.3144	-0.4791	-0.3314	-0.5156
100	-0.0836	-0.6041	-0.0840	-0.6430

下图分别为第一小问情形下浮子和振子的速度位移示意图。

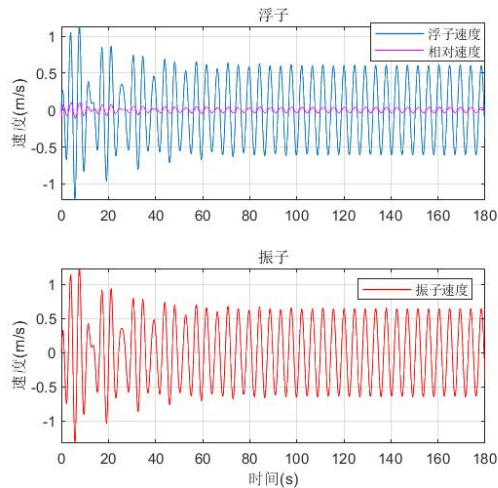


图 5 浮子、振子相对运动速度示意图

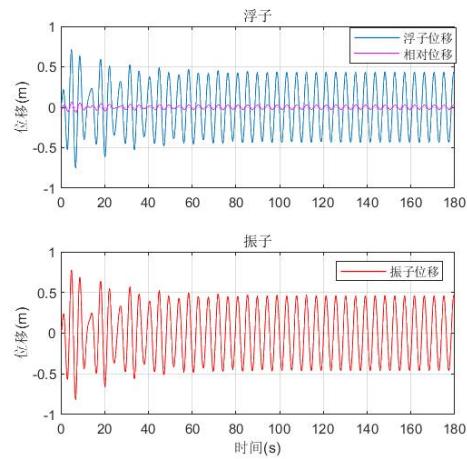


图 6 浮子、振子相对运动位移示意图

在阻尼系数与浮子、振子速度绝对值的幂呈现正比，且比例系数固定为 10000 的情形下，当处于第 10s, 20s, 40s, 60s, 100s 时，求得浮子、振子在垂荡运动中的速度和位移如下表所示：

表 4 不定直线阻尼系数作用下浮体垂荡速度和位移

时间 (s)	浮子		振子	
	位移 (m)	速度 (m/s)	位移 (m)	速度 (m/s)
10	-0.2058	-0.6528	-0.2346	-0.6982
20	-0.6113	-0.2542	-0.6608	-0.2759
40	0.2687	0.2958	0.2803	0.3139
60	-0.3272	-0.4912	-0.3493	-0.5241
100	-0.0883	-0.6097	-0.0938	-0.6496

下图分别为第一小问情形下浮子和振子的速度位移示意图。

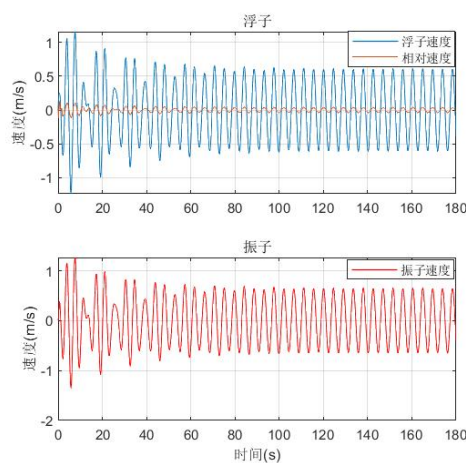


图 7 浮子、振子相对运动速度示意图

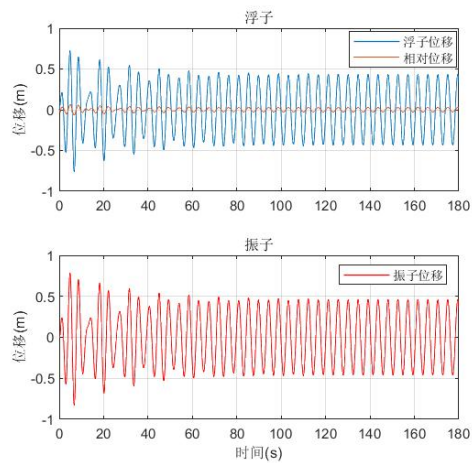


图 8 浮子、振子相对运动位移示意图

5.2 问题二

问题二仍要求只考虑浮子的垂荡运动，所建模型与问题一相似。与问题一有所不同的是，相较于问题一给出确切的阻尼系数求解速度位移，问题二更侧重于提供阻尼系数的置信区间，要求在该区间内确定功率和阻尼系数的最优解。

5.2.1 模型的建立：目标优化模型的建立

将弹簧阻尼的机械系统等效为电阻、电容、电感的谐振电路，如图所示。

图中，质量 m_e 等效于电路中的电感 L ，阻尼系数 c_e 等效于电路中的电阻 R ， $1/K_e$ 为弹簧刚度系数的倒数等效于电路中的电容 C ，速度 u_0 等效于电路中的电流 I ，激励力 F_0 等效于电压电源 E 。

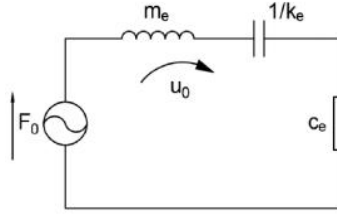


图 9 弹簧阻尼机械系统等效电路图

分析上述电路系统，将机械系统力的阻抗定义为：

$$Z = c_e + i(m_e \omega - k_e / \omega) = R + iX$$

其中， R 为力阻， X 为力抗。

根据电路功率的计算方法，可以得出波浪能发电系统的平均功率为：

$$P = \frac{c_e}{2} |u|^2$$

依据 Falnes 线性 PTO 理论，线性化 PTO 系统可等效视为弹簧质量阻尼系统，其弹簧系数存在与否由实际工作系统决定。针对本文建立的线性 PTO 模型，输出功率可以运用浮子和振子运动相对速度的差的平方计算。即输出功率可记为：

$$P_o = c(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)^2$$

其中， \dot{x}_1 、 \dot{x}_2 分别为浮子和振子的运动速度。

查阅相关资料得知，当入射波频率确定后，波浪能转化为可用能量效率的高低，主要取决于 PTO 系统的阻尼系数，又由于 $c_p = 0$ 或 ∞ 时， $P(\omega) = 0$ 。故当且仅当 $0 < c_p < \infty$ 时， $P(\omega) > 0$ ，即当 $\partial P(\omega) / \partial c_p = 0$ 时，

$$c_p = \left[c^2 + \left(\omega m + \omega m_a - \frac{k_h}{\omega} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = c_{p,opt}$$

$$k_h = \rho g A$$

其中， k_h 为静水恢复力刚度系数， A 为水线面面积。此时， c_p 恰好为浮子在

一个周期内，固定入射波频率 ω ，所能获得最大平均功率时， PTO 的阻尼系数。

为使振荡浮子正常工作，则需使其处于欠阻尼条件下进行工作。因而，求解 PTO 的最优阻尼也需满足条件

$$c_{p,opt} \leq 2\sqrt{k_h(m+m_a)-c}$$

综上，建立的目标优化模型为：

$$\begin{aligned} \max P &= \frac{1}{2} c_p (\dot{z}_1 - \ddot{z}_2)^2 \\ s.t. &\begin{cases} \partial P(\omega)/\partial c_p = 0 \\ c_{p,opt} \leq 2\sqrt{k_h(m+m_a)-c} \end{cases} \end{aligned}$$

5.2.2 模型的求解

1、定直线阻尼系数的最大平均功率选优

对于第一小问，要求找出的最优直线阻尼系数是一个常量，它可作为问一模型中的唯一自变量代入求解出对应的各个时刻的浮子和振子的速度，此时 PTO 系统的平均输出功率也可唯一确定。因此，这里采用遍历搜索找出最大平均输出功率所对应的唯一最优阻尼系数。

表 5 遍历搜索算法流程

算法流程	
Step1	给定初始的阻尼系数 c_p 为 1，最大平均功率 P_{\max} 为 0。
Step2	将该阻尼系数代入问一模型中求解出浮子和振子各自离散时间点处的速度。
Step3	将浮子和振子各个时刻的速度代入平均功率计算式中，计算出该阻尼系数下的平均功率 P。
Step4	将 P 与 P_{\max} 进行比较，若前者大于后者，则将 P 赋值于 P_{\max} ，并记录此时的阻尼系数 c_p 值为 c_{pbest} 。
Step5	c_p 增加一步长 $\Delta=1$ 。
Step6	判断 c_p 是否超出允许值 100000，若未超过，则返回 Step2 重复操作；若超出，则进行 Step7。
Step7	输出最优阻尼系数 c_{pbest} 和最大平均功率 P_{\max} 。

2、最大平均功率下阻尼系数的幂指数和系数的寻找

对于第二小问，要找的阻尼系数并不是一个随时间恒定不变的量，其值与浮子和振子的相对速度有关，可表示为 $\alpha|\dot{z}_1 - \dot{z}_2|^\beta$ ，其中比例系数 α 在 $[0, 100000]$ 内取值，幂指数 β 在 $[0, 1]$ 取值，两者共同影响直线阻尼系数的确定，因此为双变量优化问题。考虑到求解的方程组为二元二阶微分方程组，且比例系数取值范围较大，为使快速搜索的同时保证结果的准确性，这里采用粒子

群算法。

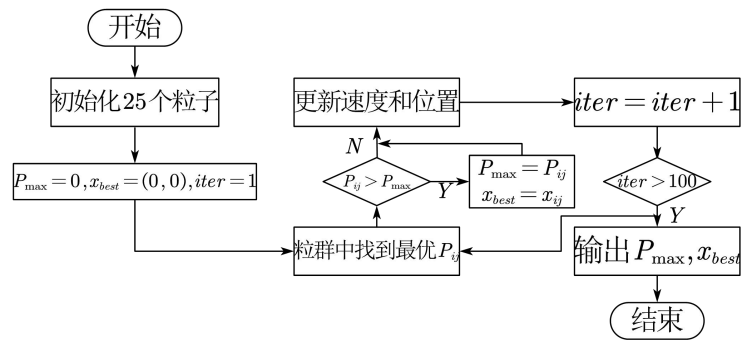


图 10 粒子群算法流程图

惯性权重 $W = 0.7$ ，自我学习因子 $\eta_1 = 2$ ，群体学习因子 $\eta_2 = 2$ 。当最大迭代次数 $ger=100$ 时则停止迭代，此时输出最大平均功率 P_{\max} 以及对应的比例系数和幂指数。取 5 次最终最大平均功率收敛的运行结果，并从中选择一个合适的比例系数和幂指数值。

5.2.3 模型的结果

1、对于第一小问，

在阻尼系数是常数，且阻尼系数取值范围位于 $[0, 100000]$ 区间内时，求得阻尼系数为 37280 时，最大平均输出功率为 120.044W。

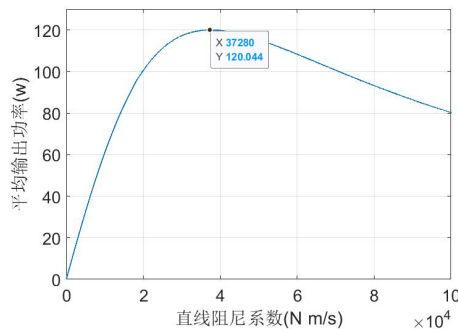


图 11 直线阻尼系数与平均输出功率关系图

2、对于第二小问，

在阻尼系数和浮子、振子速度绝对值的幂呈现正比关系，其比例系数位于 $[0, 100000]$ 的区间里时，比例系数为 97620.4538，幂指数为 0.403669838 时最大平均输出功率为 120.2202W。

表 6 粒子群 5 次最大值收敛时的运行结果

NO.	P_{\max}	α	β
1	120.1695	98570.3676	0.4156
2	120.1848	95862.8685	0.3981
3	120.1809	99568.4403	0.4148
4	120.2202	97620.4538	0.4037
5	120.1890	95432.4916	0.3988

表中， α 为比例系数， β 为幂指数。

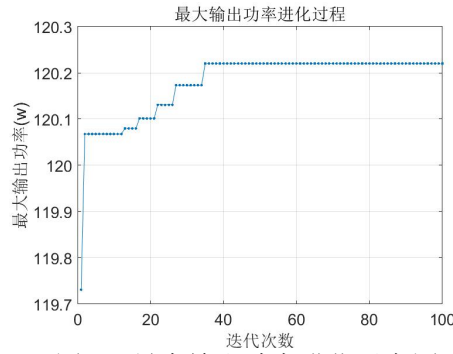


图 12 最大输出功率进化示意图

最终选取最大的平均功率及其对应的比例系数和幂指数作为最优搜索解。结果相近证明粒子群算法搜索成功。

5.2.4 模型的检验：灵敏度分析

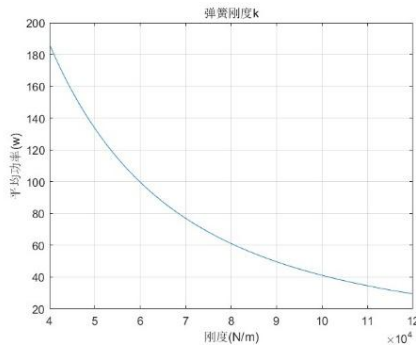


图 13 弹簧刚度变化示意图

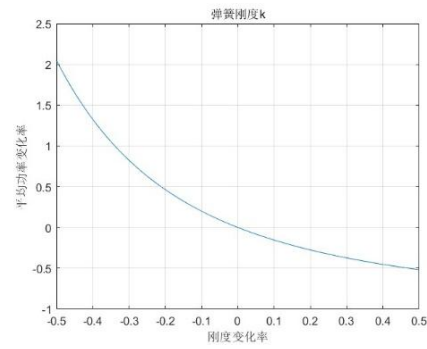


图 14 弹簧刚度变化率示意图

在问题二第一小问的已知物理量的条件基础上，选用直线阻尼系数为 $10000\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ，此时代入模型中求得 PTO 系统的平均功率为 61.0973W 。保持其他物理量不变，仅改变弹簧的刚度，使其数值在变化率在 $(-50\%, +50\%)$ 内变动，求得不同变化率所对应的 PTO 系统的平均功率。如图 13 所示，其他物理量保持不变时，系统平均功率随着弹簧刚度的增大而减小，且随着刚度的逐渐增大，这种趋势越来越缓；再如图 14 所示，可以看出刚度的变化朝减小变化时对平均功率的影响更显著，因此在浮子和振子间起连接作用的弹簧的刚度貌似越小越好，从能量角度来看，可能是刚度小时弹簧自身所消耗的较少，更多的能量被阻尼器所用，才有着系统功率上升的现象。但实际来说，弹簧刚度太小可能无法支撑起上部的振子，给阻尼器造成一定破坏甚至系统失衡，因此选取最优弹簧刚度时还需根据多种实际情况而定。

5.3 问题三

题目要求在同时考虑到垂荡、纵摇运动的条件下，建立浮子振子相对运动的数学模型。与前两问相比，本问在垂荡的基础上增设纵摇运动；除单一的直线阻尼器输出能量外，本问增设旋转阻尼器与之协调工作。

5.3.1 模型的建立

任意时刻，浮子受到波浪的作用力发生摇荡。题目要求在仅考虑浮子做垂荡和纵摇运动的情形下，建立浮子、振子运动模型求解垂荡速度、位移和纵摇角速度、角位移。在问题一中，已给出浮子垂荡运动时的数学模型。在此，先对浮子的纵摇运动进行分析。

为求解纵摇情形下浮子和振子的角位移，绘出随机时刻装置整体位置示意图。如下图所示，将顺时针方向设为正方向。

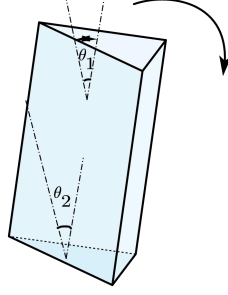


图 15 浮子、振子角位移示意图

上图中， θ_1 表示浮子的角位移， θ_2 表示振子的角位移。

直线弹簧、扭转弹簧、直线阻尼器、旋转阻尼器在浮子与振子之间具有相同作用，对浮子和振子的运动状态具有链接作用，故这里暂时将浮子与振子分别进行讨论。

1、浮子分析

当浮子进行转动后，惯性矩公式为

$$(J_1 + J_{\text{附}})\ddot{\theta}_1$$

静水恢复力矩公式为

$$c_{\text{恢}} \cdot \theta_1$$

摇荡兴波阻尼力矩公式为

$$c_{\text{摇兴}} \cdot \theta_1$$

其中，可以假设顺时针旋转时旋转角为正，该惯性矩方向与旋转方向相反； J_1 表示浮子自身的转动惯量， $J_{\text{附}}$ 表示附加转动惯量；浮子的摇荡阻尼系数 $c_{\text{摇兴}}$ 和静水恢复力系数 $c_{\text{恢}}$ 已知。

在摇荡过程中，外部浮子和内部的振子会互相影响，产生相对作用力。

其扭转弹簧力矩为

$$\mu_s = K_{\text{扭}}(\theta_1 - \theta_2)$$

旋转阻尼力矩为

$$\mu_{\text{阻}} = c_{\text{旋}}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

分析浮子振子受力，易知，外力矩为

$$\mu_{\text{水}} = L \cos(\omega t)$$

综上，浮子摇荡受力总方程为

$$(J_1 + J_{\text{附}})\ddot{\theta}_1 + C_{\text{恢}}\theta_1 + C_{\text{摇兴}}\dot{\theta}_1 + C_{\text{旋}}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = L \cos(\omega t) \quad (7)$$

2、振子分析

当振子进行转动后，惯性矩公式为：

$$\mu_z = J_2 \ddot{\theta}_2$$

其中，顺时针旋转时旋转角为正，该惯性矩方向与旋转方向相反； J_2 表示在这一时刻振子相对于点 O 的转动惯量。

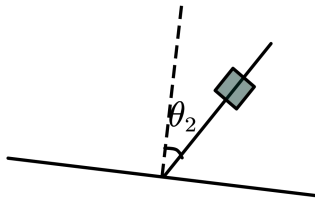


图 16 振子转动示意图

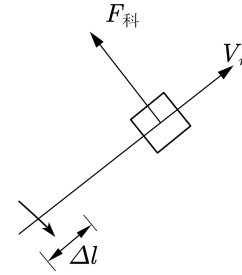


图 17 振子科氏力分析示意图

当浮体发生摇荡时，浮子、振子一定绕质心轴转动。但振子不是严格惯性系，在分析力矩的过程中，需要考虑到非真实存在的科氏力引起的力矩。故对振子的科氏力进行分析。

图中， Δl 表示弹簧伸长后振子的高度，相对中轴的速度为 $v_r = \dot{z}_2 - \dot{z}_1$ 。

振子所受科氏力 $F_{\text{科}}$ 为：

$$\begin{aligned} F_{\text{科}} &= 2m_p \cdot \vec{v}_r \times \vec{\theta}_2 \\ &= 2m_p (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

因而，可求得由科氏力产生的力矩，其公式可记为：

$$\begin{aligned} \mu_{\text{科}} &= F_{\text{科}} \cdot \Delta l \\ &= F_{\text{科}} (l_0 + z_2 - z_1) \end{aligned}$$

式中， l_0 表示振子的初始高度。

综上，可以求出振子转动的微分方程为：

$$J_2 \ddot{\theta}_2 + K_{\text{扭}}(\theta_2 - \theta_1) + c_{\text{旋}}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + 2m_p(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)\dot{\theta}_2(l_0 + z_2 - z_1) = 0 \quad (8)$$

3、浮子质心转动惯量

文章上述已经分别对浮子与振子的转动过程进行分析，但此时浮子自身的转动惯量 J_1 ，以及振子在 Δl 处相对 O 点的转动惯量 J_2 仍未知，因而继续求解两未知量。

为简化模型，假设浮体质地均匀，则各点密度保持一致，忽略厚度，可得密度公式为：

$$\rho = \frac{M}{S_a + S_b + S_c}$$

其中， M 表示浮子的总体质量， S_a 、 S_b 、 S_c 分别表示该组合浮子的圆锥侧面积、圆柱侧面积和上圆面面积。

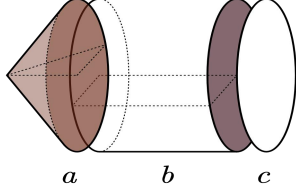


图 18 浮子模型分解示意图

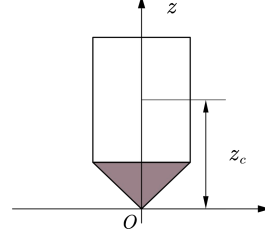


图 19 坐标系示意图

以组合体底面圆锥顶点为坐标系原点，建立二维平面直角坐标系，分别计算 a、b、c 三部分单独的质心高度。圆锥质心高度为 $h_a = (2/3) \times 0.8m$ ，圆柱质心高度为 $h_b = 2.3m$ ，圆盘质心高度为 $h_c = 3.8m$ 。

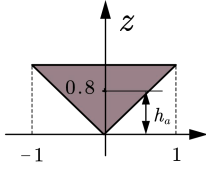


图 20 圆锥质心高度示意图

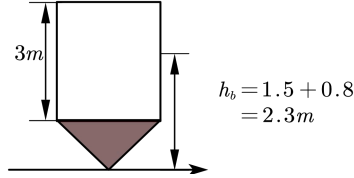


图 21 圆柱质心高度示意图

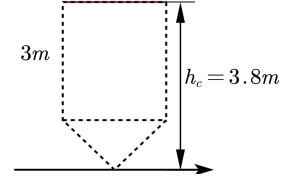


图 22 圆盘质心高度示意图

因为

$$m_a h_a + m_b h_b + m_c h_c = (m_a + m_b + m_c) \cdot z_c$$

所以组合体质心高度为：

$$z_c \approx 2.2079m$$

4、浮子绕质心轴转动时的转动惯量

经分析，浮子应绕质心轴转动。

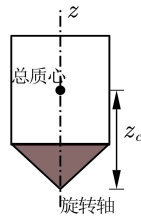


图 23 绕轴旋转主视图

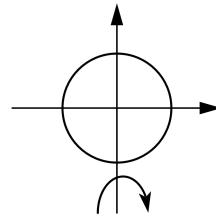


图 24 绕轴旋转俯视图

计算该转动惯量可分成 a、b、c 三部分计算，公式整理如下：

$$\begin{cases} J_1 = J_a + J_b + J_c \\ J_a = \rho \iint_{\{x,y|x^2+y^2 \leq 1\}} (y^2 + 0.8(x^2 + y^2)) \sqrt{1 + 0.8^2} dx dy \\ J_b = 100\rho \int_{0.8}^{3.8} \left(\frac{1}{2} \times 100^2 + z^2 - 2z_c + z_c^2 \right) d\theta dz \\ J_c = \iint (y^2 + (3.8 - z_c)^2) \rho ds \end{cases} \quad (8)$$

5、求振子对 O 点的转动惯量：

当振子向上运动的位移为 x_2 时，弹簧的伸长量为 $(z_2 - z_1)$ ，因而，

$$\Delta l = l_0 + z_2 - z_1$$

则转动惯量公式为：

$$\begin{aligned} J_2 &= \Delta l^2 \cdot m_2 \\ &= (l_0 + z_2 - z_1)^2 m_2 \end{aligned}$$

综上所述，联立浮子和振子的微分方程为：

$$\begin{cases} (J_1 + J_{\text{附}})\ddot{\theta}_1 + c_{\text{恢}}\theta_1 + c_{\text{摇兴}}\dot{\theta}_1 + c_{\text{旋}}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = L \cos(\omega t) \\ J_2\ddot{\theta}_2 + K_{\text{扭}}(\theta_2 - \theta_1) + c_{\text{旋}}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + 2m_p(\dot{z}_2 - \dot{z}_1)\dot{\theta}_2(l_0 + z_2 - z_1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

5.3.2 模型的求解

该模型与问一模型同样为二阶微分方程组，但这里还增加了纵摇方面的角位移和角速度，同样可以用降阶的方法进行求解：

$$u_1 = z_1, u_2 = \dot{z}_1, u_3 = z_2, u_4 = \dot{z}_2, u_5 = \theta_1, u_6 = \dot{\theta}_1, u_7 = \theta_2, u_8 = \dot{\theta}_2$$

$$\begin{cases} du_1 = u_2 \\ du_2 = \frac{f \cos \omega t - c_w u_2 - \rho g A u_1 + c_p(u_4 - u_2) + k(u_3 - u_1)}{m_1 + m_a} \\ du_3 = u_4 \\ du_4 = \frac{c_p(u_2 - u_4) + k(u_1 - u_3)}{m_p} \\ du_5 = \frac{L \cos \omega t - [c_h u_5 + c_2 u_6 + k_2(u_5 - u_7) + c_{p_2}(u_6 - u_8)]}{J_1 + J_a} \\ du_6 = u_7 \\ du_7 = u_8 \\ du_8 = \frac{-[k_2(u_7 - u_8) + c_{p_2}(u_8 - u_6) + 2m_2(u_4 - u_2)u_8(l_0 + u_3 - u_1)]}{J_2} \end{cases}$$

初始条件为

$$[u_1(0), u_2(0), \dots, u_7(0), u_8(0)] = [0, 0, \dots, 0, 0]$$

自变量 t 的范围为 $t \in [0, 180]$ ，单位为 s 。

接着利用 MATLAB 中的 ode45 函数即可对以上微分方程组进行求解，求解出的矩阵中包含 8 个向量，分别代表垂荡时浮子的位移和速度、振子的位移和速度、浮子的角位移和角速度、振子的角位移和角速度。

5.3.3 模型的结果

求解得出，浮子在垂荡运动下的位移和速度，在纵摇作用下的角位移与角速

度结果如下。

表 5 浮子摇荡相关数据计算结果一览表

时间 (s)	浮子			
	垂荡位移 (m)	垂荡速度 (m/s)	纵摇角位 移	纵摇角速度 (s ⁻¹)
10.0000	-0.5283	0.9699	0.0133	-0.1064
20.0000	-0.7048	-0.2693	0.0190	0.0065
40.0000	0.3694	0.7576	-0.0318	-0.0229
60.0000	-0.3207	-0.7218	0.0355	0.0429
100.0000	-0.0502	-0.9467	0.0203	0.0731

运动相关数据变化示意图如下：

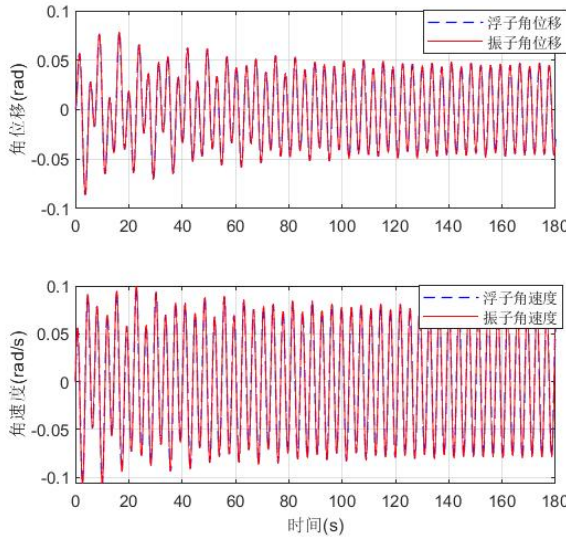


图 25 浮子角速度、角位移示意图

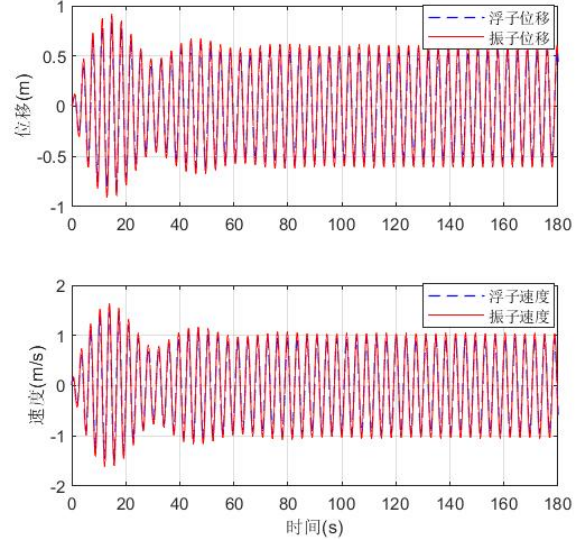


图 26 浮子速度、位移示意图

5.4 问题四

在问题三建立模型的基础上，问题四要求求解阻尼系数定区间内最大平均输出功率。

5.4.1 模型的建立

由于浮子和振子在纵摇过程中绕质心轴转动，故两者的相对转动角用 $\theta_1 - \theta_2$ 表示。

纵向摇晃产生相对角位移，旋转 PTO 系统的瞬时吸收的能量公式为：

$$P_{\text{吸}} = c_{\text{旋}} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2$$

考虑一个波浪周期内旋转 PTO 系统吸收的能量的为：

$$P_{\text{纵}} = \frac{1}{T} \int_0^T c_{\text{旋}} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 dt$$

对上式进行傅里叶变换，可得：

$$P_{\text{纵}} = \frac{1}{2} c_{\text{旋}} (\theta_1 - \theta_2)^2$$

综合模型二，可建立以输出功率最大为目标函数的优化模型如下：

$$\begin{aligned} \max P_{\text{总}} &= P_{\text{垂}} + P_{\text{纵}} \\ s.t. \begin{cases} P_{\text{垂}} = \frac{1}{2} c_p (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 \\ P_{\text{纵}} = \frac{1}{2} c_{\text{旋}} (\theta_1 - \theta_2)^2 \end{cases} \end{aligned}$$

5.4.2 模型的求解

该问模型与问二第二小问的求解方法类似，因为都同属于双变量优化问题，故为提高效率，这里采用粒子群优化算法。但由于该问模型含有 8 个向量待解，即垂荡方面浮子的位移和速度、振子的位移和速度，纵摇时浮子的角位移和角速度、振子的角位移和角速度，又很大程度上提高了计算复杂度，因此此处初始粒子个体数量选为 $N=5$ 个，最大迭代次数选为 $\text{ger}=50$ 次，惯性权重 $W=0.6$ ，自我学习因子 $\eta_1=2$ ，群体学习因子 $\eta_2=2$ 。同样统计 5 次迭代结果，选择平均输出功率最大的一项。

5.4.3 模型的结果

求解得直线阻尼系数为 61280.4355，旋转阻尼系数为 42790.4894 时，最大平均输出功率为 150.2886W。

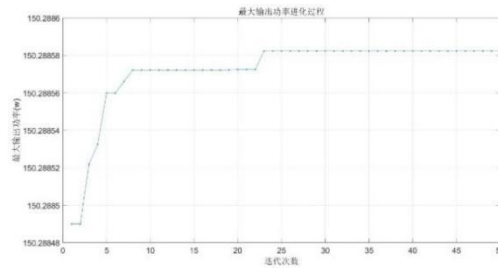


图 27 装置最大输出功率进化过程图

六、 模型评价与推广

6.1 模型的优点

- 1、通过查阅大量相关文献，依靠题目和附件所给信息，从多维度建立相关模型。同时，在建模过程中进行反复检验、多角度多层次分析，得以确保所建模型的科学性、准确性、严谨性。
- 2、本文提供的浮子振子运动学模型，旨在提高波浪能发电装置的功率、优化

系统阻尼，为解决实际生活中波浪能的推广问题提供可行方案。

3、通过对模型的不断优化，使计算更加准确，结果更加完善，能较好地保证模型的完整性。

6.2 模型的缺点

- 1、在建立完运动模型后，运行算法时发现数据难以运行，总是得不出理想解。
- 2、模型建立求解过程中存在过多假设，实际情况中不存在质地绝对均匀且无摩擦力的物体，因而可能对本文求解结果造成一定影响。

6.3 模型的改进

- 1、就实际问题而言，本文虽然给出了相关运动模型和规划模型，且进行了相应的定量计算，但其精确程度有待考究，对误差因素的消除方面仍然需要改进。
- 2、模型仍然需要从不同角度、考虑更多因素做进一步研究。

6.4 模型的推广

- 1、浮体运动模型除运用到波浪发电装置外，更广泛应用于船舶系统。船舶在波浪中运动的过程中，其运动形式正确与否是决定结构物经济安全的重要条件。建立运动预报的弱非线性时域耦合数值模型并进行验证比对，极大改进了船舶的运动形式。
- 2、目标规划模型是线性模型中尤为特殊的一类，广泛应用于经济、军事等各个领域。企业在确定所需达成目标后，考虑到实际情况约束，得出相对较好的达成方式。

七、 参考文献

- [1]Falnes J.Ocean Waves and Oscillating Systems[J].2002
- [2]杨岩松. 机械整流式波浪能发电装置设计与性能分析[D]. 哈尔滨工程大学, 2021.
- [3]施金雷. 惯性驱动的波浪能发电装置研究[D]. 南京信息工程大学, 2022.
- [4]郑明月. 振荡浮子式波浪能发电技术研究[D]. 华南理工大学, 2017.
- [5]陈中显. 双浮筒漂浮式波浪发电系统的优化设计和控制研究[D]. 东南大学, 2015.

八、 附录

MATLAB 程序代码

附件清单

1. 第一问第一小问: Q1_1
2. 第一问第二小问: Q1_2
3. 第二问第一小问: Q2_1
4. 第二问第二小问: Q2_2
5. 第三问: Q3
6. 第四问: Q4
7. 灵敏度分析: sensitivity

1. Q1_1

```
clear;clc;close all;
w=1.4005;
m_a=1335.535;
c=656.3616;
c_p=10000;
f=6250;
dt=0.2;
t0=0:dt:180;
z=Chui(w,m_a,c,c_p,f);
figure(1)
subplot(2,1,1);plot(t0,z(:,1),'LineWidth',0.8)
title('浮子');ylabel('位移(m)');hold on;
x=z(:,3)-z(:,1);          %相对位移(振子-浮子)
plot(t0,x,'m');legend('浮子位移','相对位移')
set(gcf,'Color','w');grid on
subplot(2,1,2);plot(t0,z(:,3),'r','LineWidth',0.8)
title('振子');xlabel('时间(s)');ylabel('位移(m)')
legend('振子位移');grid on
figure(2)
subplot(2,1,1);plot(t0,z(:,2),'LineWidth',0.8)
title('浮子');ylabel('速度(m/s)');hold on;
v=z(:,4)-z(:,2);          %相对速度(振子-浮子)
plot(t0,v,'m');legend('浮子速度','相对速度')
set(gcf,'Color','w');grid on
subplot(2,1,2);plot(t0,z(:,4),'r','LineWidth',0.8)
legend('振子速度');grid on
title('振子');xlabel('时间(s)');ylabel('速度(m/s)')
%result=[t0,z];
%xlswrite('result1-1.xlsx',result,'sheet1','A3:E903')
```

```

function z=Chui(w,m_a,c,c_p,f)
m1=4866;
m2=2433;
k=80000;
rou=1025;
g=9.8;
r=1.0;
A0=pi*r^2;
dt=0.2;
t0=0:dt:180;
[~,z]=ode45(@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-c*z(2)-rou*g*A0*z(1)+c_p*(z(4)-z(2))
)+k*(z(3)-z(1)))/(m1+m_a);...
    z(4);(c_p*(z(2)-z(4))+k*(z(1)-z(3)))/m2],t0,[0,0,0,0]);
end

```

2. Q1_2

```

clear;clc;close all;
f=6250;
w=1.4005;
m_a=1335.535;
m1=4866;
m2=2433;
c=656.3616;
k=80000;
rou=1025;
g=9.8;
r=1.0;
A0=pi*r^2;
dt=0.2;
t0=0:dt:180;
[t,z]=ode45(@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-c*z(2)-rou*g*A0*z(1)+10000*abs(z(2)
-z(4))^0.5*(z(4)-z(2))+k*(z(3)-z(1)))/(m1+m_a);...
    z(4);(10000*abs(z(2)-z(4))^0.5*(z(2)-z(4))+k*(z(1)-z(3)))/m2],t0,[0,0,0
,0]);
figure(1)
subplot(2,1,1);plot(t0,z(:,1),'LineWidth',0.8)
title('浮子');ylabel('位移(m)');hold on;
x=z(:,3)-z(:,1); %相对位移(振子-浮子)
plot(t0,x);legend('浮子位移','相对位移')
set(gcf,'Color','w');grid on
subplot(2,1,2);plot(t0,z(:,3),'r','LineWidth',0.8)
title('振子');xlabel('时间(s)');ylabel('位移(m)')

```

```

legend('振子位移');grid on;
figure(2)
subplot(2,1,1);plot(t0,z(:,2),'LineWidth',0.8);
title('浮子');ylabel('速度(m/s)');hold on;
v=z(:,4)-z(:,2) %相对速度(振子-浮子)
plot(t0,v);legend('浮子速度','相对速度')
set(gcf,'Color','w');grid on
subplot(2,1,2);plot(t0,z(:,4),'r','LineWidth',0.8)
legend('振子速度');grid on
title('振子');xlabel('时间(s)');ylabel('速度(m/s)')
% result=[t0',z];
% xlswrite('result1-2.xlsx',result,'sheet1','A3:E903')

```

3. Q2_1

```

clear;clc;close all;
m1=4866;
m2=2433;
m_a=1165.992;
w=2.2143;
c=167.8395;
f=4890;
dt=0.2;
t0=0:dt:180;
n=length(t0);
dc=10; %步长调整
X_c=0:dc:1e5;
ii=1;
for c_p=0:dc:1e5 %直线阻尼常数遍历搜索
    z=Chui(w,m_a,c,c_p,f);
    Dv=z(:,4)-z(:,2);%相对速度, 振子-浮子
    P(ii)=1/2*c_p*sum(Dv.^2)/n;
    ii=ii+1;
end
figure(1)
plot(X_c,P,'LineWidth',1.2)
set(gca,'FontSize',16,'Ylim',[0,130]);set(gcf,'Color','w');grid on
xlabel('直线阻尼系数(N m/s)');ylabel('平均输出功率(w)')
[P_max,q]=max(P);%最大平均输出功率
disp('最佳阻尼系数: ')
c_best=X_c(q)
disp('最大输出功率: ')
P_max
function z=Chui(w,m_a,c,c_p,f)

```



```

m1=4866;
m2=2433;
k=80000;
rou=1025;
g=9.8;
r=1.0;
A0=pi*r^2;
dt=0.2;
t0=0:dt:180;
[~,z]=ode45(@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-c*z(2)-rou*g*A0*z(1)+c_p*(z(4)-z(2)
)+k*(z(3)-z(1)))/(m1+m_a);...
    z(4);(c_p*(z(2)-z(4))+k*(z(1)-z(3)))/m2],t0,[0,0,0,0]);
end

```

4. Q2_2

```

clear;clc;close all;
N=25;
d=2;
ger=100;
lim_alpha=[0,1e5];
lim_a=[0,1];
vlimit=[-0.5,0.5];
w=0.7;
c1=2;
c2=2;
x(:,1)=lim_alpha(1)+(lim_alpha(2)-lim_alpha(1)).*rand(N,1);
x(:,2)=lim_a(1)+(lim_a(2)-lim_a(1)).*rand(N,1);
v=rand(N,d);
x_best=x;
xp_best=zeros(1,d);
fx_best=ones(N,1);
fxp_best=0;
P_best=[];
iter=1;
record=zeros(ger,1);
while iter<=ger
    for i=1:N
        fx(i)=f(x(i,1),x(i,2)) ;
    end
    for i=1:N
        if fx(i)>fx_best(i)
            fx_best(i)=fx(i);
            x_best(i,:)=x(i,:);
        end
    end
    fxp_best=fx_best';
    xp_best=x_best';
    P_best=[P_best;fxp_best];
    record(iter)=fxp_best;
    iter=iter+1;
end

```

```

        end
    end
    if max(fx_best)>fxp_best
        [fxp_best, n]=max(fx_best);
        xp_best=x_best(n, :);
    end
    v=v*w+c1*rand*(x_best-x)+c2*rand*( repmat(xp_best, N, 1)-x);
    v(v>vlimit(2))=vlimit(2);
    v(v<vlimit(1))=vlimit(1);
    x=x+v;% 位置更新
    a=x(:,1);b=x(:,2);
    a(a>lim_alpha(2))=lim_alpha(2);
    a(x<lim_alpha(1))=lim_alpha(1);
    b(b>lim_a(2))=lim_a(2);
    b(b<lim_a(1))=lim_a(1);
    record(iter)=fxp_best;%最大值记录
    iter=iter+1;
end
disp(['最大输出功率: ',num2str(fxp_best)]);
disp(['对应的比例系数和幂指数: ',num2str(xp_best)]);
figure(1)
plot(record,'.-');title('最大输出功率进化过程')
set(gca,'FontSize',16);set(gcf,'Color','w');grid on
xlabel('迭代次数');ylabel('最大输出功率(w)')
function P=f(alpha,a)
m_a=1165.992;
w=2.2143;
c=167.8395;
f=4890;
m1=4866;%浮子质量
m2=2433; %振子质量
k=80000; %弹簧系数
rou=1025;
g=9.8;
r=1.0;
A0=pi*r^2; %横截面积
dt=0.2;
t0=0:dt:180;
[t,z]=ode45(@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-c*z(2)-rou*g*A0*z(1)+alpha*abs(z(2)-z(4))^a*(z(4)-z(2))+k*(z(3)-z(1)))/(m1+m_a);...
z(4);(alpha*abs(z(2)-z(4))^a*(z(2)-z(4))+k*(z(1)-z(3)))/m2],t0,[0,0,0,0]);
n=length(t0);

```

```

Dv=z(:,4)-z(:,2);%相对速度，振子-浮子
c_p=alpha*abs(z(:,2)-z(:,4)).^a;
P=1/2*sum(c_p.*Dv.^2)/n;
end

```

5. Q3

```

clear;clc;close all;
global m1 m2 m_a w c c2 c_p c_p2 f L J1 J_a k_h k2 k L0 V0 g
m1=4866;%浮子质量
m2=2433; %振子质量
m_a=1028.876;
w=1.7152; %波浪频率
c=683.4558;
c2=654.3383;%纵摇兴波阻尼系数
c_p=10000;
c_p2=1000;% 旋转阻尼系数
f=3640;
L=1690; %激励力矩振幅
J1=8.3988e+03;%纵摇惯量
J_a=7001.914;%附加转动惯量
k_h=8890.7;%静水恢复力矩系数
k2=250000;%弹簧抗扭刚度
k=80000;
L0=0.5;
rou=1025;
g=9.8;
r=1.0;
A0=pi*r^2; %横截面积
V0=rou*g*A0;
dt=0.2;
t0=0:dt:180;
[t,u]=ode45(@fun,t0,[0,0,0,0,0,0,0,0]);
figure(1)
subplot(2,1,1);plot(t0,u(:,1),'b--','LineWidth',0.8)
hold on;plot(t0,u(:,3),'r-','LineWidth',0.2)
legend('浮子位移','振子位移');grid on
set(gcf,'Color','w')
ylabel('位移(m)')
subplot(2,1,2);plot(t0,u(:,2),'b--','LineWidth',0.8)
hold on;plot(t0,u(:,4),'r-','LineWidth',0.2)
legend('浮子速度','振子速度');grid on
set(gcf,'Color','w')
xlabel('时间(s)');ylabel('速度(m/s)')

```

```

figure(2)
subplot(2,1,1);plot(t0,u(:,5),'b--','LineWidth',0.8)
hold on;plot(t0,u(:,7),'r-','LineWidth',0.2)
legend('浮子角位移','振子角位移');grid on
set(gcf,'Color','w')
ylabel('角位移(rad)')
subplot(2,1,2);plot(t0,u(:,6),'b--','LineWidth',0.8)
hold on;plot(t0,u(:,8),'r-','LineWidth',0.2)
legend('浮子角速度','振子角速度');grid on
set(gcf,'Color','w')
xlabel('时间(s)');ylabel('角速度(rad/s)')
result=[t0',u(:,1),u(:,2),u(:,5),u(:,6),u(:,3),u(:,4),u(:,7),u(:,8)];
xlswrite('result3.xlsx',result,'sheet1','A3:I903')
function du=fun(t,u)
global m1 m2 m_a w c c2 c_p c_p2 f L J1 J_a k_h k2 k L0 V0 g
du=zeros(8,1);
du(1)=u(2);
du(2)=(-c*u(2)-(V0*u(1)*(u(1)>=-1)+V0*(-1)*(u(1)<-1))-c_p*(u(2)-u(4))-k*(u(1)-u(3))+f*cos(w*t))/(m1+m_a);
du(3)=u(4);
du(4)=-c_p/m2*(u(4)-u(2))-k/m2*(u(3)-u(1));
du(5)=u(6);
du(6)=(L*cos(w*t)-(k_h*u(5)+c2*u(6)+k2*(u(5)-u(7))+c_p2*(u(6)-u(8))))/(J1+J_a);
du(7)=u(8);
J2=(0.5-m2*g/k+u(3)-u(1))^2*m2;
du(8)=-(k2*(u(7)-u(5))+c_p2*(u(8)-u(6))+2*m2*(u(4)-u(2))*u(8)*(L0-m2*g/k+u(3)-u(1)))/J2;
end

```

6. Q4

```

%运行时间大约为 10 分钟
clear;clc;close all;
global m1 m2 m_a w c c2 f L J1 J_a k_h k2 k L0 V0 g
m1=4866;%浮子质量
m2=2433; %振子质量
m_a=1091.099;
w=1.9806; %波浪频率
c=528.5018;
c2=1655.909;
f=1760;
L=2140; %激励力矩振幅
J1=8.3988e+03;%纵摇惯量

```

```

J_a=7142.493;%附加转动惯量
k_h=8890.7;%静水恢复力矩系数
k2=250000;%弹簧抗扭刚度
k=80000;
L0=0.5;
rou=1025;
g=9.8;
r=1.0;
A0=pi*r^2; %横截面积
V0=rou*g*A0;
N=5;
d=2;
ger=50;
lim_cp1=[0,1e5];
lim_cp2=[0,1e5];
vlimit=[-0.5,0.5];
weight=0.6;
cc1=2;
cc2=2;
x(:,1)=lim_cp1(1)+(lim_cp1(2)-lim_cp1(1)).*rand(N,1);
x(:,2)=lim_cp2(1)+(lim_cp2(2)-lim_cp2(1)).*rand(N,1);
v=rand(N,d);
x_best=x;
xp_best=zeros(1,d);
fx_best=ones(N,1);
fxp_best=0;

%% 群体更新
iter=1;
record=zeros(ger,1);
while iter<=ger
    for i=1:N
        fx(i)=ff(x(i,1),x(i,2));
    end
    for i=1:N
        if fx(i)>fx_best(i)
            fx_best(i)=fx(i);
            x_best(i,:)=x(i,:);
        end
    end
    if max(fx_best)>fxp_best
        [fxp_best, n]=max(fx_best);
        xp_best=x_best(n, :);
    end
end

```

```

v=v*weight+cc1*rand*(x_best-x)+cc2*rand*( repmat(xp_best, N, 1)-x);
v(v>vlimit(2))=vlimit(2);
v(v<vlimit(1))=vlimit(1);
x=x+v;% 位置更新
a=x(:,1);b=x(:,2);
a(a>lim_cp1(2))=lim_cp1(2);
a(x<lim_cp1(1))=lim_cp1(1);
b(b>lim_cp2(2))=lim_cp2(2);
b(b<lim_cp2(1))=lim_cp2(1);
record(iter)=fxp_best;%最大值记录
iter=iter+1;
end
disp(['最大输出功率: ',num2str(fxp_best)]);
disp(['对应的最优直线和旋转阻尼系数: ',num2str(xp_best)]);
figure(1)
plot(record,'.-');grid on
title('最大输出功率进化过程')
set(gca,'FontSize',16);set(gcf,'Color','w')
xlabel('迭代次数');ylabel('最大输出功率(w)')
function P=ff(cp1,cp2)
global w
dt=0.2;
t0=0:dt:180;
[~,u]=ode45(@(t,u)fun(t,u,cp1,cp2),t0,[0,0,0,0,0,0,0,0]);
n=length(t0);
Dv=u(:,4)-u(:,2);%相对速度, 振子-浮子
Dw=u(:,8)-u(:,6);%相对角速度, 振子-浮子
P=(1/2*cp1*sum(Dv.^2)+1/2*cp2*sum(Dw.^2))/n;
end
function du=fun(t,u,c_p,c_p2)
global m1 m2 m_a w c c2 f L J1 J_a k_h k2 k L0 V0 g
du=zeros(8,1);
du(1)=u(2);
du(2)=(-c*u(2)-(V0*u(1)*(u(1)>=-1)+V0*(-1)*(u(1)<-1))-c_p*(u(2)-u(4))-k*(u(1)-u(3))+f*cos(w*t))/(m1+m_a);
du(3)=u(4);
du(4)=-c_p/m2*(u(4)-u(2))-k/m2*(u(3)-u(1));
du(5)=u(6);
du(6)=(L*cos(w*t)-(k_h*u(5)+c2*u(6)+k2*(u(5)-u(7))+c_p2*(u(6)-u(8))))/(J1+J_a);
du(7)=u(8);
du(8)=-(k2*(u(7)-u(5))+c_p2*(u(8)-u(6))+2*m2*(u(4)-u(2))*u(8)*(L0-m2*g/(k+u(3)-u(1))))/((0.5-m2*g/k+u(3)-u(1))^2*m2);
end

```

7. sensitivity

```
clear;clc;close all;
global w m_a c rou g A0 t0 m1 m2 c_p f
m1=4866;%浮子质量
m2=2433; %振子质量
m_a=1165.992;
c=167.8395;%兴波阻尼系数
k=80000; %弹簧系数
w=2.2143;
f=4890;
rou=1025;
g=9.8;
r=1.0;
A0=pi*r^2; %横截面积
dt=0.2;
t0=0:dt:180;
c_p=10000;% 直线阻尼系数
q=0.5:0.01:1.5;
x_k=k*q;
z=lin(k);
y0=P(z);
for ii=1:length(q)
    z=lin(x_k(ii));
    y_k1(ii)=P(z);
    y_k2(ii)=P(z)/y0-1;
end
figure(1)
plot(q*k,y_k1)
title('弹簧刚度 k')
xlabel('刚度(N/m)');ylabel('平均功率(w)')
set(gca,'FontSize',10);set(gcf,'Color','w');grid on
figure(2)
plot(q-1,y_k2)
title('弹簧刚度 k')
xlabel('刚度变化率');ylabel('平均功率变化率')
set(gca,'FontSize',10);set(gcf,'Color','w');grid on
function p=P(z)
n=901;
cp=10000;
Dv=z(:,4)-z(:,2);
p=1/2*cp*sum(Dv.^2)/n;
end
```

```

function z=lin(k)
global m_a c rou g A0 t0 m1 m2 c_p w f
[t,z]=ode45(@(t,z)[z(2);(f*cos(w*t)-c*z(2)-rou*g*A0*z(1)+c_p*(z(4)-z(2)
)+k*(z(3)-z(1)))/(m1+m_a);...
z(4);(c_p*(z(2)-z(4))+k*(z(1)-z(3)))/m2],t0,[0,0,0,0]);
end

```