

## 传统 Spar 平台垂荡-纵摇耦合内共振响应

赵晶瑞, 唐立志, 唐友刚, 王文杰

(天津大学建筑工程学院, 天津 300072)

**摘 要:** 本文中研究规则波浪下经典 Spar 平台垂荡-纵摇耦合运动内共振动力特性. 考虑垂荡频率与纵摇频率的 2:1 的内共振关系, 在无系泊状态下建立了平台非线性耦合运动微分方程. 应用 MOSES 软件建立了平台模型, 计算了不同波浪周期下的一阶波浪激励力. 采用多尺度方法求解垂荡-纵摇耦合运动响应的定常解并进行数值验证. 计算结果表明, 当波浪频率接近垂荡固有频率且波高达到某一极限时, 平台垂荡运动的能量达到饱和; 当波高继续增加时, 垂荡能量开始向纵摇运动转移, 导致平台发生大幅纵摇运动.

**关键词:** Spar 平台; 耦合运动; 非线性耦合方程; 内共振

中图分类号: P751

文献标志码: A

文章编号: 0493-2137(2009)03-0201-07

### Internal Resonant Responses of Heave-Pitch Coupled Motions of Classic Spar Platform

ZHAO Jing-rui, TANG Li-zhi, TANG You-gang, WANG Wen-jie

(School of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** We focus on the internal resonant characteristic of heave-pitch coupled motions of a classic Spar platform in regular seas. The nonlinear coupling equations for heave and pitch without mooring lines were established under the condition of internal resonance in which the ratio of heave natural frequency to pitch natural frequency is 2:1. A model of a classic spar was founded by using MOSES software and the first-order wave exciting forces were calculated in different wave periods. The method of multiple scales was used to determine the steady-state response which was verified by the numerical calculations when the wave frequency was near the heave resonant frequency. Results show that the energy of heave mode is saturated when the wave height arrives at a certain value, and as the wave height increases further, the extra energy of heave mode is transferred to the pitch mode and large-amplitude pitch response is induced.

**Keywords:** Spar platform; coupled motion; nonlinear coupling equation; internal resonance

Spar 平台是 20 世纪 80 年代出现的一种顺应式深海采油平台<sup>[1]</sup>. 传统 Spar 平台主体是一个大直径、大吃水的具有规则外形的圆柱式浮桶结构, 可用来开采、生产、处理加工和储存石油. 传统 Spar 平台具有较长的垂荡自然周期, 通常在 25~30 s 内, 而纵(横)摇固有周期则在 50~60 s 之间, 垂荡纵摇固有频率比接近 2:1. 在大多数海况下, 固有频率远离波浪频率范围, 垂荡纵摇运动并不明显<sup>[2]</sup>. 然而, 在某些海洋环境下(例如西非), 一年中的长涌工况占据了一定比

例, 这些涌浪的周期峰值可以达到 30 s. 在长周期涌浪条件下, 将产生一个线性激励垂荡共振运动, 使得一阶波浪力比二阶差频波浪力更为重要. 在共振的情况下, 垂荡响应会急剧地增大, 并会产生纵摇耦合运动, 增大了对平台响应进行准确预测的难度, 因此在设计时必须考虑到 Spar 平台在长周期涌浪下产生非线性共振的可能性.

Rho 等人<sup>[3]</sup>对有垂荡板的 Spar 平台模型在规则波作用下的垂荡和纵摇运动进行了试验模拟. 试验验证

收稿日期: 2008-06-19; 修回日期: 2008-10-06.

基金项目: 国家“863”高技术研究发展计划资助项目(2007AA09Z30); 国家自然科学基金重点资助项目(50639030); 国家自然科学基金资助项目(50679051).

作者简介: 赵晶瑞(1983—), 男, 博士研究生, peterzhaojr@126.com.

通讯作者: 唐友刚, tangyougang\_td@163.com.

实,当纵摇固有周期为垂荡固有周期的 2 倍时,Spar 平台发生垂荡和纵摇耦合非线性运动,在此过程中,垂荡模态能量向纵摇模态传递.Rho 等人<sup>[4]</sup>从理论和试验角度研究了系泊缆索对平台稳定性的影响,用多尺度法分析了规则波中 Spar 模型的垂荡和纵摇非线性耦合运动.试验结果指出,系泊系统几乎不影响 Spar 平台的非线性运动稳定性<sup>[4]</sup>.文献[5]中对规则波中经典式 Spar 平台的马休类型不稳定性进行了研究.研究发现,阻尼装置能增加阻尼,减小平台垂荡运动,改善平台运动稳定性,但并不能改变垂荡固有周期和纵摇固有周期的比例关系.其数值分析和试验结果表明,当调整模型的重力参数使纵摇固有周期与垂荡固有周期为 2:1 比例关系或近似为这种比例关系时,即使波高较小,也将发生纵摇不稳定运动.

Spar 的壳体设计通常由最大纵摇(横摇)角决定,通常要求在百年一遇的风暴中,Spar 的最大纵摇(横摇)角小于  $10^\circ(0.175 \text{ rad})$ <sup>[6]</sup>.然而以上的研究均侧重于应用试验方法发现大幅值纵摇现象,都未从方程的非线性机理上对该现象进行深入研究,也未把平台在恶劣海况下受到的波浪激励力同具体的波浪参数联系起来.本文中,笔者将以一座试验平台作为算例,应用 MOSES 软件计算该平台受到的线性化波浪激励力;同时,考虑垂荡-纵摇耦合作用,根据非线性动力学的相关理论,应用多尺度法得出耦合方程的一阶摄动解并进行数值验证.从理论上预测当涌浪周期接近平台垂荡固有周期时该平台发生大幅值纵摇运动的可能性.

## 1 运动方程的建立

平台坐标系如图 1 所示,用两个坐标系表示平台的运动, $Oxyz$  是空间固定坐标系,原点位于静水面与平台轴线的交点处, $z$  轴沿平台轴线向上, $x$  轴向右, $G\xi_1\xi_2\xi_3$  为平台固定坐标系,原点位于平台重心处, $\xi_3$  轴竖直向上.

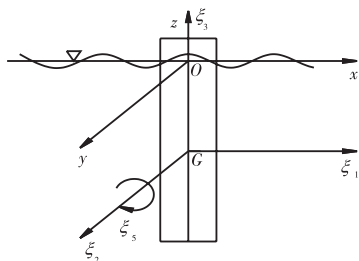


图 1 平台坐标系示意图

Fig.1 Geometry of the Spar

在不考虑风力、流力、系泊力和低频漂移力,仅考虑一阶波浪激励力作用时,平台垂荡-纵摇耦合运动方程可以表示为

$$\begin{cases} (m + m_{33})\ddot{\xi}_3(t) + 2C_3\dot{\xi}_3(t) + \rho g A_w \xi_3(t) - \\ \quad \frac{1}{2} \rho g A_w H_g \xi_5^2(t) = F_3(\Omega t + \theta_1) \\ (I + I_{55})\ddot{\xi}_5(t) + 2C_5\dot{\xi}_5(t) + \rho g \nabla \overline{GM} \xi_5(t) - \\ \quad \frac{1}{2} \rho g (\nabla + 2A_w \overline{GM}) \xi_3(t) \xi_5(t) = F_5(\Omega t + \theta_2) \end{cases} \quad (1)$$

式中: $m$  为平台质量; $m_{33}$  为垂荡附加质量; $I$  为平台纵摇转动惯量; $I_{55}$  为纵摇附加转动惯量; $C_3$  和  $C_5$  分别为垂荡和纵摇线性辐射阻尼系数; $A_w$  为平台横截面积; $H_g$  为平台重心距静水面高度; $\overline{GM}$  为纵摇初稳性高度; $F_3$  和  $F_5$  分别为垂荡、纵摇一阶波浪激励力幅值; $\Omega$  为波浪频率; $\theta_1$  和  $\theta_2$  为波浪激励力相对于波面的相位角.

## 2 波浪力计算

本文中应用基于三维绕射理论开发的 MOSES 软件建立平台模型并计算波浪力.根据文献[7]中平台的具体尺寸建立模型,其主要技术参数见表 1.

表 1 平台参数

Tab.1 Main particulars of the Spar model

长度/m	直径/m	吃水/m	排水量/m <sup>3</sup>	KB/m	KG/m
212.9	37.2	198.1	215 872.2	99.1	89
GM/m	水深/m	垂荡固有周期/s	纵摇固有周期/s	垂荡阻尼比	纵摇阻尼比
10.08	1 018	29.3	58.6	0.012	0.019

计算得到在规则波作用下、波浪周期 4~40 s 内,该平台在单位波幅作用下所受到的一阶垂荡波浪力  $K_3$  和一阶纵摇波浪力矩  $K_5$  如图 2 和图 3 所示.

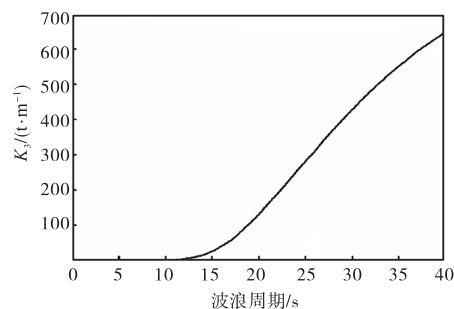


图 2 单位波幅垂荡激励力

Fig.2 Heave wave exciting force

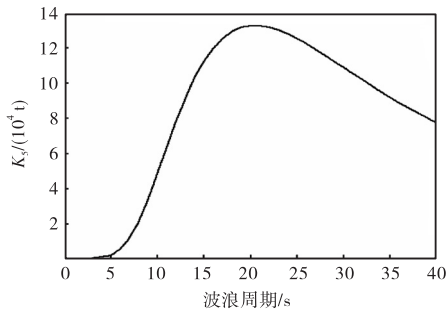


图3 单位波幅纵摇激励力矩  
Fig.3 Pitch wave exciting moment

### 3 垂荡主共振时平台运动响应计算

对式(1)进行简化,得到

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_3(t) + \omega_3^2 \xi_3(t) = -2\bar{c}_3 \dot{\xi}_3(t) + \mu_3 \xi_5^2(t) + \bar{F}_3 \cos(\Omega t + \theta_1) \\ \ddot{\xi}_5(t) + \omega_5^2 \xi_5(t) = -2\bar{c}_5 \dot{\xi}_5(t) + \mu_5 \xi_3(t) \xi_5(t) + \bar{F}_5 \cos(\Omega t + \theta_2) \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{c}_3 &= \frac{C_3}{m + m_{33}}, \omega_3^2 = \frac{\rho g A_w}{m + m_{33}} \\ \mu_3 &= \frac{\rho g A_w H_g}{2(m + m_{33})}, \bar{F}_3 = \frac{F_3}{m + m_{33}} \\ \bar{c}_5 &= \frac{C_5}{I + I_{55}}, \omega_5^2 = \frac{\rho g \nabla \overline{GM}}{I + I_{55}} \\ \mu_5 &= \frac{\rho g (\nabla + 2A_w \overline{GM})}{2(I + I_{55})}, \bar{F}_5 = \frac{F_5}{I + I_{55}} \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} \xi_3(t) = \frac{1}{\mu_5} x_3 \\ \xi_5(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_3 \mu_5}} x_5 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \bar{F}_3 = \frac{\bar{f}_3}{\mu_5} \\ \bar{F}_5 = \frac{\bar{f}_5}{\sqrt{\mu_3 \mu_5}} \end{cases} \quad (4)$$

将式(3)和式(4)代入式(2),得

$$\begin{cases} \ddot{x}_3(t) + \omega_3^2 x_3(t) = -2\bar{c}_3 \dot{x}_3(t) + x_5^2 + \bar{f}_3 \cos(\Omega t + \theta_1) \\ \ddot{x}_5(t) + \omega_5^2 x_5(t) = -2\bar{c}_5 \dot{x}_5(t) + x_3 x_5 + \bar{f}_5 \cos(\Omega t + \theta_2) \end{cases} \quad (5)$$

由于  $\bar{c}_3$ 、 $\bar{c}_5$ 、 $\bar{f}_3$  和  $\bar{f}_5$  均较小, 因此, 令

$$\begin{cases} \bar{c}_3 = \varepsilon c_3 \\ \bar{c}_5 = \varepsilon c_5 \\ \bar{f}_3 = \varepsilon^2 f_3 \\ \bar{f}_5 = \varepsilon f_5 \end{cases} \quad (6)$$

式中  $\varepsilon$  为小参数. 将式(6)代入式(5), 得

$$\begin{cases} \ddot{x}_3(t) + \omega_3^2 x_3(t) = -2\varepsilon c_3 \dot{x}_3(t) + x_5^2 + \varepsilon^2 f_3 \cos(\Omega t + \theta_1) \\ \ddot{x}_5(t) + \omega_5^2 x_5(t) = -2\varepsilon c_5 \dot{x}_5(t) + x_3 x_5 + \varepsilon f_5 \cos(\Omega t + \theta_2) \end{cases} \quad (7)$$

采用多尺度法求式(7)的近似解析解<sup>[8]</sup>. 设解的形式为

$$\begin{cases} x_3 = \varepsilon x_{31}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 x_{32}(T_0, T_1) \\ x_5 = \varepsilon x_{51}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 x_{52}(T_0, T_1) \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $T_0 = t$ ,  $T_1 = \varepsilon t$ . 将式(8)代入式(7)中, 比较  $\varepsilon$  的同次项, 可得

$$\begin{cases} D_0^2 x_{31} + \omega_3^2 x_{31} = 0 \\ D_0^2 x_{51} + \omega_5^2 x_{51} = \frac{1}{2} f_5 \exp[i(\Omega T_0 + \theta_2)] + \frac{1}{2} f_5 \exp[-i(\Omega T_0 + \theta_2)] \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} D_0^2 x_{32} + \omega_3^2 x_{32} = -2D_1 D_0 x_{31} - 2c_3 D_0 x_{31} + x_{51}^2 + \frac{1}{2} f_3 \exp[i(\Omega T_0 + \theta_1)] + \frac{1}{2} f_3 \exp[-i(\Omega T_0 + \theta_1)] \\ D_0^2 x_{52} + \omega_5^2 x_{52} = -2D_1 D_0 x_{51} - 2c_5 D_0 x_{51} + x_{31} x_{51} \end{cases} \quad (10)$$

式(9)解的形式为

$$\begin{cases} x_{31} = A_3(T_1) \exp(i\omega_3 T_0) + \text{cc} \\ x_{51} = A_5(T_1) \exp(i\omega_5 T_0) + B \exp[i(\Omega T_0 + \theta_2)] + \text{cc} \end{cases} \quad (11)$$

式中  $B = \frac{f_5}{2(\omega_5^2 - \Omega^2)}$ .

将式(11)代入式(10)中, 可得

$$\begin{cases} D_0^2 x_{32} + \omega_3^2 x_{32} = (-2i\omega_3)(D_1 A_3 + c_3 A_3) \exp(i\omega_3 T_0) + A_5^2 \exp(2i\omega_5 T_0) + A_5 \bar{A}_5 + 2A_5 B \exp[i(\Omega T_0 + \omega_5 T_0 + \theta_2)] + \frac{1}{2} f_3 \exp[i(\Omega T_0 + \theta_1)] + \frac{1}{2} f_3 \exp[-i(\Omega T_0 + \theta_1)] + 2B \bar{A}_5 \exp[i(\Omega T_0 - \omega_5 T_0 + \theta_2)] + B^2 \exp[2i(\Omega T_0 + \theta_2)] + B^2 + \text{cc} \\ D_0^2 x_{52} + \omega_5^2 x_{52} = (-2i\omega_5)(D_1 A_5 + c_5 A_5) \exp(i\omega_5 T_0) - 2c_5 B(i\Omega) \exp[i(\Omega T_0 + \theta_2)] + A_3 A_5 \exp[i(\omega_3 + \omega_5) T_0] + A_3 \bar{A}_5 \exp[i(\omega_3 - \omega_5) T_0] + A_3 B \exp[i(\omega_3 T_0 + \Omega T_0 + \theta_2)] + B \bar{A}_3 \exp[i(\Omega T_0 - \omega_3 T_0 + \theta_2)] + \text{cc} \end{cases} \quad (12)$$

根据平台实际结构的特征, 平台升沉和纵摇固有频率比约为 2:1, 当平台处于垂荡主共振状态时, 波浪频率接近或等于平台垂荡固有频率, 因此, 令

$$\begin{cases} \Omega = \omega_3 + \varepsilon \sigma_1 \\ \omega_3 = 2\omega_5 - \varepsilon \sigma_2 \end{cases} \quad (13)$$

式中  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  分别为垂荡和纵摇调谐参数. 式(13)中第一式表示波浪频率与垂荡频率接近的程度, 第二式表示垂荡频率与纵摇频率接近的程度. 将式(13)代入式(12)中, 得到消除永年项的条件为

$$\begin{cases} (-2i\omega_3)(D_1A_3 + c_3A_3) + A_3^2 \exp(i\sigma_2T_1) + \\ \frac{1}{2}f_3 \exp[i(\sigma_1T_1 + \theta_1)] = 0 \\ (-2i\omega_5)(D_1A_5 + c_5A_5) + A_5\bar{A}_5 \exp(-i\sigma_2T_1) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{令} \begin{cases} A_3 = \frac{1}{2}a_3(T_1) \exp[i\beta_3(T_1)] \\ A_5 = \frac{1}{2}a_5(T_1) \exp[i\beta_5(T_1)] \end{cases} \quad (15)$$

将式(15)代入式(14), 令实部虚部均为零, 可得

$$\begin{cases} D_1a_3\omega_3 + a_3c_3\omega_3 + \frac{1}{4}a_5^2 \sin \gamma_2 - \frac{1}{2}f_3 \sin \gamma_1 = 0 \\ a_3\omega_3D_1\beta_3 + \frac{1}{4}a_5^2 \cos \gamma_2 + \frac{1}{2}f_3 \cos \gamma_1 = 0 \\ D_1a_5\omega_5 + a_5c_5\omega_5 - \frac{1}{4}a_3a_5 \sin \gamma_2 = 0 \\ a_5\omega_5D_1\beta_5 + \frac{1}{4}a_3a_5 \cos \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

式中:  $\gamma_1 = \sigma_1T_1 + \theta_1 - \beta_3$ ;  $\gamma_2 = \beta_3 - 2\beta_5 - \sigma_2T_1$ .

对于定常响应, 令  $D_1a_3 = D_1a_5 = D_1\gamma_1 = D_1\gamma_2 = 0$ , 解式(16), 有两种可能, 即

$$\begin{cases} a_3 = \frac{f_3}{2\omega_3\sqrt{c_3^2 + \sigma_1^2}} \\ a_5 = 0 \\ \sin \gamma_1 = \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + \sigma_1^2}} \\ \cos \gamma_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{c_3^2 + \sigma_1^2}} \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} a_3 = 2\omega_5\sqrt{4c_5^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2} \\ a_5 = 2\sqrt{G_1 \pm \left(\frac{1}{4}f_3 - G_2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \sin \gamma_2 = \frac{2c_5}{\sqrt{4c_5^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}} \\ \cos \gamma_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sqrt{4c_5^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2}} \\ \sin \gamma_1 = \frac{2[a_3^3c_3\omega_3 - a_5^2c_5\omega_5]}{a_3f_3} \\ \cos \gamma_2 = -\frac{[2a_3^3\omega_3\sigma_1 - a_5^2\omega_5(\sigma_2 - \sigma_1)]}{a_3f_3} \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\begin{cases} G_1 = 2\omega_3\omega_5[2c_3c_5 + \sigma_1(\sigma_2 - \sigma_1)] \\ G_2 = 2\omega_3\omega_5[2\sigma_1c_5 - c_3(\sigma_2 - \sigma_1)] \end{cases} \quad (19)$$

由式(17)和式(18)即可得到关于式(7)的一阶近似解析解. 第一种可能的解为

$$\begin{cases} x_3 = \frac{\varepsilon f_3}{2\omega_3\sqrt{c_3^2 + \sigma_1^2}} \cos(\Omega t + \theta_1 - \gamma_0) + O(\varepsilon^2) \\ x_5 = \frac{\varepsilon f_5}{\omega_5^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \theta_2) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (20)$$

其中  $\gamma_0 = \arctan(c_3 / \sigma_1)$ .

第二种可能的解为

$$\begin{cases} x_3 = 2\varepsilon\omega_5\sqrt{4c_5^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2} \cos(\Omega t + \theta_1 - \gamma_1) + O(\varepsilon^2) \\ x_5 = \frac{\varepsilon f_5}{\omega_5^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \theta_2) + \\ 2\varepsilon[-G_1 \pm \left(\frac{1}{4}f_3^2 - G_2^2\right)^{\frac{1}{2}}] \cdot \\ \cos\left[\frac{1}{2}(\Omega t + \theta_1 - \gamma_1 - \gamma_2)\right] + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (21)$$

第二种解是否成立, 取决于垂荡力  $f_3$  的大小, 首先确定  $f_3$  的两个临界值, 即

$$\begin{cases} \zeta_1 = 2|G_2| \\ \zeta_2 = 2\sqrt{(G_1^2 + G_2^2)} \end{cases} \quad (22)$$

若  $G_1 \geq 0$ , 当  $0 < f_3 \leq \zeta_2$  时, 响应只能是式(20); 当  $f_3 > \zeta_2$  时, 响应可能是式(20)或式(21)两式中的一个, 方程的初值将决定响应是哪一个.

若  $G_1 < 0$ , 当  $0 < f_3 < \zeta_1$  时, 运动响应只能是式(20); 当  $\zeta_1 \leq f_3 < \zeta_2$  时, 响应可能是式(20)或式(21)两式中的一个; 当  $f_3 \geq \zeta_2$  时, 响应可能是式(20)或式(21)两式中的一个. 方程初值将决定响应是哪一个.

则式(2)的一阶近似解析解第一种可能的解为

$$\begin{cases} \xi_3(t) = \frac{\bar{F}_3}{2\varepsilon\omega_3\sqrt{c_3^2 + \sigma_1^2}} \cos(\Omega t + \theta_1 - \gamma_0) + O(\varepsilon^2) \\ \xi_5(t) = \frac{\bar{F}_5}{\omega_5^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \theta_2) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (23)$$

第二种可能的解为

$$\begin{cases} \xi_3(t) = \frac{2\varepsilon\omega_5}{\mu_5} \sqrt{4c_5^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2} \cdot \\ \cos(\Omega t + \theta_1 - \gamma_1) + O(\varepsilon^2) \\ \xi_5(t) = \frac{\bar{F}_5}{\omega_5^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t + \theta_2) + \\ \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\mu_3\mu_5}} [-G_1 \pm \left(\frac{1}{4}f_3^2 - G_2^2\right)^{\frac{1}{2}}] \cdot \\ \cos\left[\frac{1}{2}(\Omega t + \theta_1 - \gamma_1 - \gamma_2)\right] + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (24)$$

由式 (24) 可知, 平台纵摇可能出现多频运动, 即纵摇运动出现  $1/2$  波频成分, 称为亚谐运动。此外, 垂荡运动的一阶解析解中没有垂荡激励力, 表明垂荡幅值大致保持不变, 纵摇运动受升沉波浪力的影响, 会随波浪力增大而不断增加, 表明垂荡能量向纵摇的转移过程, 这种现象将导致纵摇发生失稳。

#### 4 数值模拟

采用数值方法进行验证耦合运动方程的解析解。在一阶波浪力作用下, 平台所受到的垂荡波浪激励力幅值与纵摇波浪激励力矩幅值可表示为

$$\begin{cases} \bar{F}_3 = k_3 h \\ \bar{F}_5 = k_5 h \end{cases} \quad (25)$$

式中  $h$  为波浪幅值。其中,  $k_3$  和  $k_5$  的表达式为

$$k_3 = \frac{9800K_3}{m + m_{33}}$$

$$k_5 = \frac{9800K_5}{I + I_{55}}$$

于是, 式 (2) 可转化为

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_3(t) + \omega_3^2 \xi_3(t) = -2\bar{c}_3 \dot{\xi}_3(t) + \mu_3 \xi_5^2(t) + k_3 h \cos(\Omega t + \theta_1) \\ \ddot{\xi}_5(t) + \omega_5^2 \xi_5(t) = -2\bar{c}_5 \dot{\xi}_5(t) + \mu_5 \xi_3(t) \xi_5(t) + k_5 h \cos(\Omega t + \theta_2) \end{cases} \quad (26)$$

对式 (26) 进行数值模拟, 选取的波浪周期如表 2 所示, 式中其他参数根据表 1 中的数据选取。

表 2 不同波浪周期下  $k_3$  和  $k_5$  计算结果

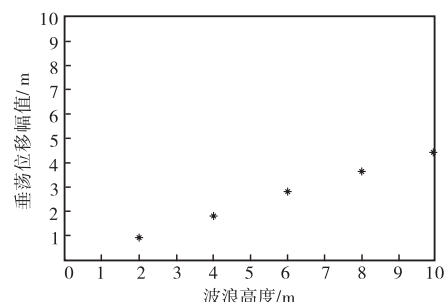
Tab.2 Calculation results of  $k_3$  and  $k_5$  under different wave periods

计算状态	波浪周期/s	$k_3 / \text{s}^{-2}$	$k_5 / (\text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-1})$
1	25	0.011 64	0.000 738
2	28	0.015 36	0.000 709
3	29.3	0.016 88	0.000 692

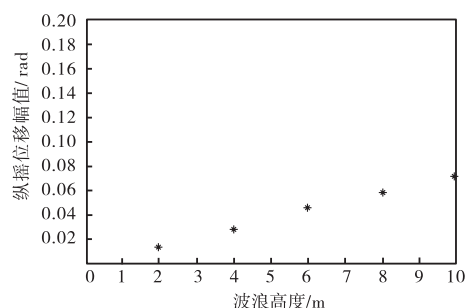
图 4~图 6 分别为计算状态 1~3 时不同波高下平台垂荡和纵摇幅值曲线。

从以上的计算中可以发现, 当波浪频率远离平台垂荡固有频率时, 平台垂荡、纵摇幅值随波浪幅值线性增加, 且增速较缓, 非线性现象并不明显。而当波浪频率接近或等于平台垂荡固有频率时, 在波浪幅值较小时, 垂荡纵摇幅值随波浪幅值线性增加, 表明此时根据式 (23) 得到的解是稳定的。而在波浪幅值超过某一临界值时, 式 (23) 代表的解失去稳定性, 通过数值模拟发现, 当给方程一个较小的初值时, 经过一段

时间后幅值将会稳定在式 (24) 代表的幅值曲线上, 这种现象表明平台垂荡模态能量将接近饱和, 当波浪幅值进一步增大时, 平台垂荡模态的能量会向纵摇模态渗透, 使纵摇幅值迅速增大, 导致平台出现大幅纵摇运动。



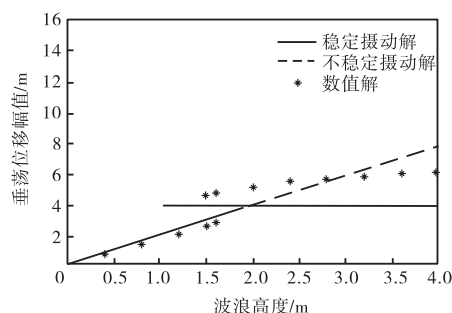
(a) 垂荡位移幅值



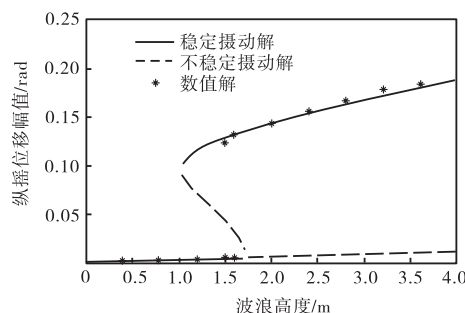
(b) 纵摇位移幅值

图 4 计算状态 1 平台垂荡-纵摇位移幅值随波高变化情况

Fig.4 Variation of amplitudes of heave and pitch with wave height in case 1



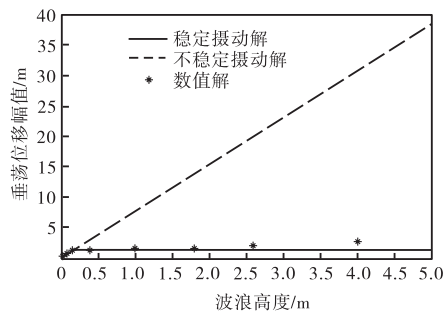
(a) 垂荡位移幅值



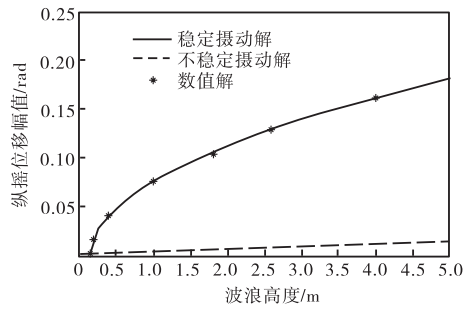
(b) 纵摇位移幅值

图 5 计算状态 2 平台垂荡-纵摇位移幅值随波高变化情况

Fig.5 Variation of amplitudes of heave and pitch with wave height in case 2



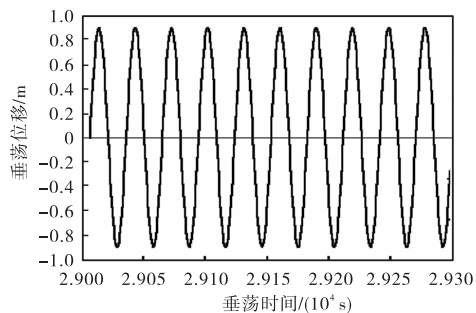
(a) 垂荡位移幅值



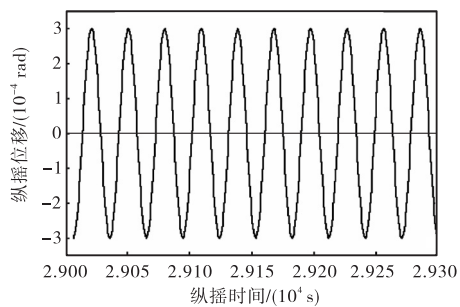
(b) 纵摇位移幅值

图6 计算状态3平台垂荡-纵摇位移幅值随波高变化情况  
Fig.6 Variation of amplitudes of heave and pitch with wave height in case 3

为了获得平台运动响应的详细情况,图7~图9给出了计算状态3不同波高下平台升沉和纵摇位移的时间历程图,图10为波高等于0.175 m时纵摇运动的相图和位移频谱图。

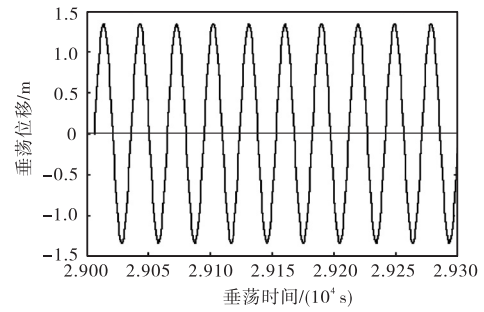


(a) 垂荡位移

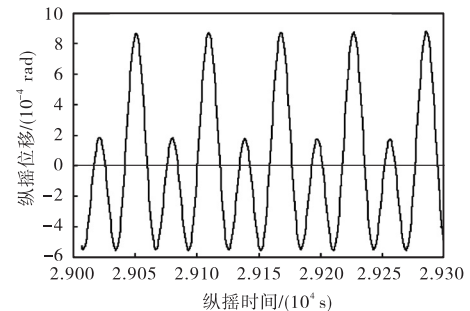


(b) 纵摇位移

图7 波高为0.1 m时垂荡与纵摇位移时间历程  
Fig.7 Time histories of heave and pitch when wave height is 0.1 m

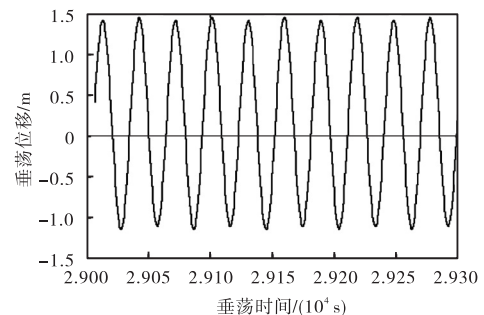


(a) 垂荡位移

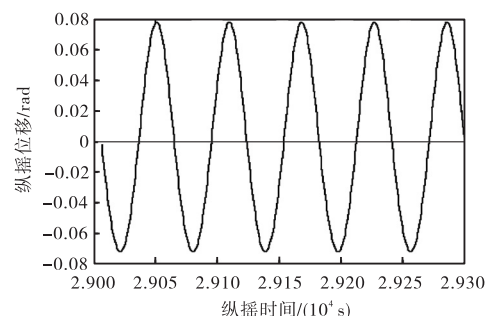


(b) 纵摇位移

图8 波高为0.175 m时垂荡与纵摇位移时间历程  
Fig.8 Time histories of heave and pitch when wave height is 0.175 m



(a) 垂荡位移



(b) 纵摇位移

图9 波高为1 m时垂荡与纵摇时间历程  
Fig.9 Time histories of heave and pitch when wave height is 1 m

从图10中可以发现,随着波高的增加,纵摇运动中的倍周期成分比例逐渐增加,频率主要成分由原先的强迫运动频率逐渐变为1/2倍的亚谐运动频率。



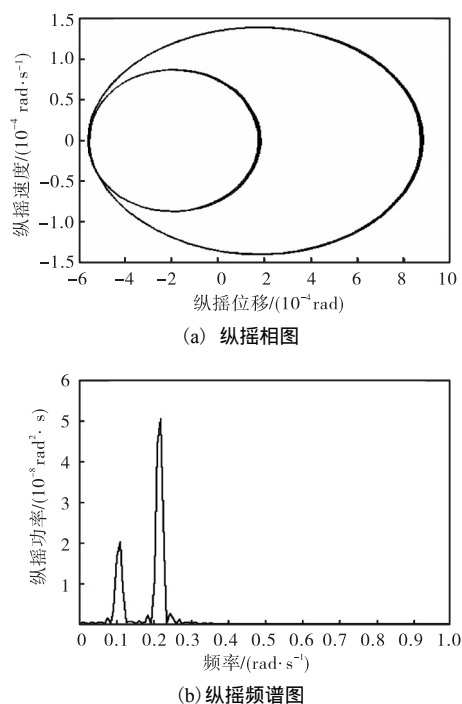


图 10 波高为 0.175 m 时纵摇相图与纵摇频谱图

Fig.10 Phase and spectrograph of pitch when wave height is 0.175 m

## 5 结 论

(1) 当波浪频率远离平台垂荡固有频率时,随着波高的线性增加,平台运动响应非线性作用并不明显,垂荡与纵摇幅值都较小,表明 Spar 平台在常规海况下具有良好的运动特性。

(2) 当波浪频率接近平台垂荡固有频率时,在波高较小时,垂荡、纵摇幅值随波高线性增加,当波高超过某一临界值时,垂荡幅值大致保持不变,而纵摇幅值曲线出现跳跃现象,表明平台垂荡模态能量将接近饱和;当波高进一步增大时,平台垂荡模态的能量会向纵摇模态渗透,使纵摇幅值迅速增大,导致平台出现大幅纵摇运动,且波浪频率越接近平台垂荡固有频率,响应幅值发生跳跃时的临界波浪高度值越小,平台越容易出现能量渗透现象。

(3) 随着波高的增加,垂荡运动频率保持不变,纵摇运动中的倍周期成分比例逐渐增加,频率主要成分由原先的强迫运动频率逐渐变为  $1/2$  倍的亚谐运动频率。

## 参考文献:

- [1] 董艳秋. 深水采油平台波浪载荷及响应[M]. 天津:天津大学出版社,2005.  
Dong Yanqiu. *Wave Loads and Response of the Oil-Extraction Platform in Deep Ocean* [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2005 (in Chinese).
- [2] 张帆,杨建民,李润培. Spar 平台的发展趋势及其关键技术[J]. 中国海洋平台,2005,20(2):6-11,24.  
Zhang Fan, Yang Jianmin, Li Runpei. A review on the technical development of Spar platform [J]. *China Offshore Platform*, 2005, 20(2):6-11,24 (in Chinese).
- [3] Rho J B, Choi H S, Lee W C, et al. Heave and pitch motions of a Spar platform with damping plate [C]// *Proceedings of the 12th International Offshore and Polar Engineering Conference*. Kitakyushu, Japan, 2002:198-201.
- [4] Rho J B, Choi H S, Shin H S, et al. An experimental study for mooring effects on the stability of Spar platform [C]// *Proceedings of the 13th International Offshore and Polar Engineering Conference*. Hawaii, USA, 2003:285-288.
- [5] Rho J B, Choi H S, Shin H S, et al. A study on mathieu-type instability of conventional Spar platform in regular waves [J]. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 2005, 15(2):104-108.
- [6] 徐琦. Truss Spar 平台简介[J]. 中国造船,2002,43(增):126-131.  
Xu Qi. An introduction of Truss Spar platform [J]. *Shipbuilding of China*, 2002, 43(Suppl):126-131 (in Chinese).
- [7] Hong Y P, Lee D Y, Choi Y H, et al. An experimental study on the extreme motion responses of a Spar platform in the heave resonant waves [C]// *Proceedings of the 15th International Offshore and Polar Engineering Conference*. Seoul, South Korea, 2005:225-232.
- [8] 王海期. 非线性振动[M]. 北京:高等教育出版社,1992.  
Wang Haiqi. *Nonlinear Vibration* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1992 (in Chinese).