ΕΡΓΑΣΙΑ 2 - Απολογήσεις

Σαπαλίδη Ιωάννα
ΑΜ: 1115201400044.

Για $\alpha=\beta=4$, $\gamma=\delta=0$, το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\Sigma = \begin{cases} 11x + 12y + 9z = 0 \\ 11x + y + 7z = 0 \\ x + 2y + 23z = 0 \\ 12x + 3y + 30z = 0. \end{cases}$$

Οπότε οι πίνακες είναι:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 9 \\ 11 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 23 \\ 12 & 3 & 30 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 11 & 12 & 9 \\ 11 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 23 \end{pmatrix}.$$

α). $\dim X_\Gamma = 3$

<u>Αιτιολόγηση</u>: Ψάχνω τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα του A.
Με γραμμοπράξεις, έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 11 & 12 & 9 \\ 11 & 1 & 7 \\ 12 & 3 & 30 \end{pmatrix}$$

στη θέση της $2^{ης}$ γραμμής (Γ_2): $\Gamma_2 - 11\Gamma_1$
στη θέση της $3^{ης}$: $\Gamma_3 - 11\Gamma_1$
στη θέση της $4^{ης}$: $\Gamma_4 - 12\Gamma_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 0 & -10 & -244 \\ 0 & -21 & -246 \\ 0 & -21 & -246 \end{pmatrix}$$

στη θέση της Γ_4: $\Gamma_4 - \Gamma_3$.
και στη θέση της Γ_2 την $-\Gamma_2/10$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & \frac{244}{10} \\ 0 & -21 & -246 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

η $Γ_4$ ως μηδενική μπορεί να παραλειφθεί.
Στη θέση της $Γ_3$ βάζω την $Γ_3 + 21 \cdot Γ_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & \frac{244}{10} \\ 0 & 0 & \frac{2664}{10} \end{pmatrix}$$

στη θέση της $Γ_3$ βάζω την $\frac{10}{2664} \cdot Γ_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & \frac{244}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

στη θέση της $Γ_1$ βάζω την $Γ_1 - 23 \cdot Γ_3$.
και στη θέση της $Γ_2$ την $Γ_2 - \frac{244}{10} \cdot Γ_3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τέλος, στη θέση της $Γ_1$ βάζω $Γ_1 - 2Γ_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Εφ' όσον οι γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, η διάσταση του χώρου γραμμών ισούται με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών. Άρα

$\dim X_Γ = 3.$

β) $\dim X_Σ = 3$

Αιτιολόγηση:
Για τον χώρο στηλών έχουμε:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 23 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} 11x + 12y + 9z &= 0 \\ 11x + y + 7z &= 0 \\ x + 2y + 23z &= 0 \\ 12x + 3y + 30z &= 0. \end{aligned}$$

Με τις ίδιες πράξεις προκύπτει πάλι ότι $\dim X_I = 3$.

γ). Σωστές απαντήσεις: (i) Η γραμμική απεικόνιση θ είναι "1-1".

(iii) Ο πυρήνας $\ker\theta$ της θ είναι το σύνολο των λύσεων του αρχικού συστήματος

Αιτιολογήσεις:

(i). Για να είναι η θ "1-1", αρκεί $\ker\theta = \{0\}$.

$$\theta\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left\{\begin{aligned} 11x + 12y + 9z &= 0 \\ 11x + y + 7z &= 0 \\ x + 2y + 23z &= 0 \\ 12x + 3y + 30z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Συνεπώς $\ker\theta = \Lambda(\Sigma)$.

Όμως $\Lambda(\Sigma) = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \setminus \begin{aligned} 11x + 12y + 9z &= 0 \\ 11x + y + 7z &= 0 \\ x + 2y + 23z &= 0 \\ 12x + 3y + 30z &= 0 \end{aligned} \right\}$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(0,0,0)$ από ερ. 1, εφόσον προκύπτει ο συγκεκριμένος ανηγμένος κλιμακωτός.

Άρα $\ker\theta = \{0\}$ άρα η θ είναι "1-1".

iii) Για να είναι επί πρέπει

$$\begin{aligned} 11x + 12y + 9z &= k \\ 11x + y + 7z &= \lambda \\ x + 2y + 23z &= \mu \\ \cancel{12x + 3y + 30z} &\cancel{= \nu} \end{aligned}$$

να έχει πάντα λύση.

Απόδειξη:

Έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 12 & 9 & k \\ 11 & 1 & 7 & \lambda \\ 1 & 2 & 23 & \mu \\ 12 & 3 & 30 & \nu \end{array}\right)$$

Αντικαθιστώ την Γ_1 με την Γ_3 κι αντίστροφα.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 23 & \mu \\ 11 & 1 & 7 & \lambda \\ 11 & 12 & 9 & k \\ 12 & 3 & 30 & \nu \end{array}\right)$$

Στη ~~θέση~~ της Γ_2 βάζω $\Gamma_2 - 11\Gamma_1$
της Γ_3 βάζω $\Gamma_3 - 11\Gamma_1$
της Γ_4 βάζω $\Gamma_4 - 12\Gamma_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 23 & \mu \\ 0 & -21 & -246 & \lambda - 11\mu \\ 0 & -10 & -244 & k - 11\mu \\ 0 & -21 & -246 & \nu - 12\mu \end{array}\right)$$

Στη θέση της Γ_4 βάζω $\Gamma_4 - \Gamma_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 23 & \mu \\ 0 & -21 & -246 & \lambda - 14\mu \\ 0 & -10 & -244 & k - 11\mu \\ 0 & 0 & 0 & \nu - \lambda - \mu \end{array}\right)$$

Όμως μπορεί $\nu - \lambda - \mu \neq 0$ άρα το σύστημα δεν έχει πάντα λύση. Άρα η Θ δεν είναι επί.

(iii) Ο πυρήνας $\ker\theta$ της θ έχει διάσταση 4.
Απιολόγηση:
Λάθος, διότι $\ker\theta = N(\Sigma)$ από (3i) και $N(\Sigma) = (0,0,0)$.

iv) Ο πυρήνας $\ker\theta$ της θ είναι το σύνολο λύσεων του αρχικού συστήματος.
Αιτιολόγηση:
Σωστό από (3i).

v) Υπάρχει η απεικόνιση f.
Αιτιολόγηση:
Λάθος. Η f θα έπρεπε να είναι η αντίστροφη της θ. Όμως η θ δεν είναι επί άρα ούτε αντιστρέψιμη.

δ) i) Ο ΓB αντιστρέψιμος
Λάθος γιατί είναι $\Gamma B \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ άρα ο ΓB δεν είναι τετραγωνικός άρα δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμος.

ii) $\text{rank}(\Gamma B) = 0$.
Θα ίσχυε για $\Gamma = 0$, .. όχι για κάθε Γ.

iii) $\text{rank}(\Gamma B) = 4$.
Λάθος, γιατί $\dim \mathcal{X}_{r(\Gamma B)} \leq 3$ άρα $\text{rank}(\Gamma B) \leq 3$. και $4 > 3$.

iv) Ισχύει $\Gamma B = A$ για κάποιον πίνακα Γ.
Σωστό γιατί ο B αντιστρέψιμος (εφ' όσον ο ανηγμένος κλιμακωτός του είναι ο I_3). Δηλαδή υπάρχει B^{-1}.

Άρα $\Gamma = A \cdot B^{-1} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$.

v) $\text{rank}(\Gamma B) = 3$ γιατί $\Gamma B = A$ και $\text{rank} A = 3$ από ερ. 1.

ε) Είναι $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ από ερ. 1.

i) $rank(K) = 3$ Σωστό από ερ 1

ii) Λάθος, γιατί ο ΔΚ είναι πίνακας (3×3) κι όχι (4×4).

iii) Ισχύει το θεώρημα:
Αν X ένας πίνακας μ γραμμών και ν στηλών
Αν Y ένας πίνακας ν γραμμών και μ στηλών
ο $X \cdot Y$ έχει μ γραμμές και μ στήλες, που προέρχεται από 2 μη τετραγωνικούς πίνακες
Αν $k = rank(X)$ και $\lambda = rank(Y)$, τότε
$rank(X \cdot Y) \leq \min(k, \lambda)$.

Συνεπώς πρέπει $rank(KE) = 4 \leq 3 = rank(K)$ άτοπο.

iv) Λάθος, γιατί ο ZA είναι πίνακας (3×3) κι όχι (4×4)

v) Από το ίδιο θεώρημα, προκύπτει άτοπο.