

Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα

Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018

Εργασία 1

1. Η Par Inc. είναι μια μικρή επιχείρηση παραγωγής εξοπλισμού γκολφ. Η διεύθυνσή της αποφάσισε την είσοδο στην αγορά συμβατικών και πολυτελών τσαντών γκολφ. Ο διανομέας των προϊόντων της Par Inc. αποφάσισε την αγορά του συνόλου των τσαντών που θα παραχθούν για τους επόμενους 3 μήνες.

Υστερα από ενδελεχή έρευνα, η διεύθυνση προσδιόρισε τα ακόλουθα στάδια κατασκευής μιας τσάντας γκολφ:

- (α) Κοπή και βαφή υλικών
- (β) Ραφή
- (γ) Φινίρισμα (εισαγωγή θήκης ομπρέλας, διαχωριστές μπαστούνιων κλπ.)
- (δ) Έλεγχος και συσκευασία

Ο διευθυντής παραγωγής ανέλυσε κάθε στάδιο και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι για κάθε συμβατική τσάντα απαιτούνται 7/10 ώρες εργασίας στο τμήμα κοπής και βαφής υλικών, 1/2 ώρες στο τμήμα ραφής, 1 ώρα στο τμήμα φινιρίσματος και 1/10 ώρες στο τμήμα ελέγχου και συσκευασίας. Μία πολυτελής τσάντα απαιτεί 1 ώρα στο τμήμα κοπής και βαφής υλικών, 5/6 ώρες στο τμήμα ραφής, 2/3 ώρες στο τμήμα φινιρίσματος και 1/4 ώρες στο τμήμα ελέγχου και συσκευασίας. Οι πληροφορίες αυτές αποτυπώνονται στον παρακάτω πίνακα:

Τμήμα	Χρόνος παραγωγής (ώρες)	
	Συμβατική τσάντα	Πολυτελής τσάντα
Κοπή και βαφή	7/10	1
Ραφή	1/2	5/6
Φινίρισμα	1	2/3
Έλεγχος και Συσκευασία	1/10	1/4

Η παραγωγή της Par Inc. χαρακτηρίζεται από περιορισμένο αριθμό διαθέσιμων ωρών εργασίας για κάθε τμήμα. Σύμφωνα με υπολογισμούς του διευθυντή παραγωγής, για την κατασκευή τσαντών γκολφ (και για το διάστημα των τριών μηνών) υπάρχουν 630 διαθέσιμες ώρες εργασίας για το τμήμα κοπής και βαφής, 600 ώρες για το τμήμα ραφής, 708 ώρες για το τμήμα φινιρίσματος και 135 ώρες για το τμήμα ελέγχου και συσκευασίας.

Το τμήμα λογιστηρίου της εταιρείας, επιμερίζοντας όλα τα μεταβλητά είδη κόστους, όρισε τιμές για τα δύο είδη τσαντών, οι οποίες αντιστοιχούν σε συνεισφορά στο κέρδος ύψους 10€ για κάθε συμβατική και 9€ για κάθε πολυτελή τσάντα που παράγεται και πωλείται.

- (α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
- (β) Να επιλυθεί γραφικά το πρόβλημα.

2. Η M & D Chemicals παράγει δύο προϊόντα τα οποία πωλούνται ως πρώτη ύλη σε βιομηχανίες παρασκευής σαπουνιών και απορρυπαντικών. Η διοίκηση της εταιρείας, βασισμένη σε μια ανάλυση των τρεχόντων αποθεμάτων και της αναμενόμενης ζήτησης για τον επόμενο μήνα, εκτιμά ότι συνολικά η παραγωγή των προϊόντων Α και Β πρέπει να ανέρχεται κατ' ελάχιστο σε 350 λίτρα. Επιπλέον, η παραγωγή οφείλει να καλύψει μία συγκεκριμένη παραγγελία ύψους 125 λίτρων προϊόντος Α. Το προϊόν Α απαιτεί χρόνο επεξεργασίας 2 ωρών ανά λίτρο, ενώ το προϊόν Β απαιτεί 1 ώρα ανά λίτρο. Αναφορικά με τον επερχόμενο μήνα, οι διαθέσιμες ώρες επεξεργασίας ανέρχονται σε 600. Στόχος της M & D είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους παραγωγής, ενώ παράλληλα θα ικανοποιούνται οι προαναφερθέντες περιορισμοί. Το κόστος παραγωγής ανά λίτρο ανέρχεται σε 2€ για το προϊόν Α και 3€ για το προϊόν Β.

- (α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
 (β) Να επιλυθεί γραφικά το πρόβλημα.
3. Έστω το ακόλουθο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με δύο μεταβλητές απόφασης x και y :

$$\begin{array}{ll}\text{maximize} & Z = 20x + 10y \\ \text{subject to} & x \geq 2 \\ & y \leq 5 \\ & x, y \geq 0\end{array}$$

Να αναπαραστήσετε γραφικά την εφικτή περιοχή. Τι συμπεραίνετε για τη λύση του προβλήματος;

4. Ένας μικροπωλητής πουλάει κάλτσες στις λαϊκές αγορές και στις μεγάλες εμπορικές εταιρείες. Η πελατεία του τον περιορίζει να μη χρησιμοποιεί παρά μόνο μια γκάμα ιδιαίτερα περιορισμένων, προϊόντων φθηνών. Πράγματι, δεν πουλάει παρά μόνο κάλτσες δύο τύπων: κάλτσες βαμβακερές και κάλτσες μάλλινες.

Δυνατός οικονομολόγος, ο φίλος μας είναι προικισμένος όπως όλοι οι καλοί έμποροι, με μία λεπτότατη ψυχολογία. Η μακρά εμπειρία του μικροπωλητή δείχνει ότι η πελατεία του έδειχνε την επιλογή της αδιάφορα σε:

- ένα πακέτο των 6€ περιέχον 2 ζευγάρια βαμβακερές κάλτσες και 2 ζευγάρια μάλλινες,
- ένα πακέτο των 8€ περιέχον 2 ζευγάρια βαμβακερές κάλτσες και 8 ζευγάρια μάλλινες.

Ο μικροπωλητής διαθέτει συνολικά 24 ζευγάρια βαμβακερές κάλτσες και 84 ζευγάρια μάλλινες κάλτσες και διερωτάται ποια πακέτα πρέπει να παρουσιάσει στους πελάτες του για να πραγματοποιήσει τη μέγιστη είσπραξη.

- (α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
 (β) Να επιλυθεί γραφικά το πρόβλημα.
 (γ) Να επιλυθεί το γραμμικό πρόγραμμα με τη μέθοδο Simplex.
5. Για να διασφαλίσει τη ραδιοφωνική της διαφήμιση, μία εταιρεία απορρυπαντικών επιθυμεί να προωθήσει στους ραδιοφωνικούς σταθμούς μια εμπορική εκστρατεία διαφήμισης της νέας της σύνθεσης. Το διαφημιστικό της κεφάλαιο είναι 65.000€ ημερησίως. Έχει την επιλογή ανάμεσα σε τρεις ραδιοφωνικούς σταθμούς.
- Ο υπεύθυνος διαφημίσεων της εταιρείας εκτίμησε την απόδοση ενός περάσματος ημερησίως της διαφημιστικής της εκστρατείας σε κάθε ένα από τους ραδιοφωνικούς σταθμούς (σε μία κλίμακα από 1 έως 10):

Ραδιοφωνικός Σταθμός 1: 9 Ραδιοφωνικός Σταθμός 2: 7 Ραδιοφωνικός Σταθμός 3: 4

Κάθε ραδιοφωνικός σταθμός τον ενημερώνει ότι:

- Η τιμή του κάθε περάσματος (σε Euro):
 - Ραδιοφωνικός Σταθμός 1: 3.000€
 - Ραδιοφωνικός Σταθμός 2: 2.500€
 - Ραδιοφωνικός Σταθμός 3: 1.500€
- Ο μέγιστος αριθμός δυνατών περασμάτων της διαφήμισης ημερησίως είναι:
 - Ραδιοφωνικός Σταθμός 1: 5
 - Ραδιοφωνικός Σταθμός 2: 10
 - Ραδιοφωνικός Σταθμός 3: 20

Ζητείται να βρούμε μία ημερήσια κατανομή του αριθμού των περασμάτων της διαφήμισης στους διάφορους ραδιοφωνικούς σταθμούς που να διασφαλίζει τη μέγιστη ολική απόδοση. Αν επιτυγχάνουμε μια απόδοση από 1 σε κάθε ένα σταθμό η ολική απόδοση θα είναι 3.

- (α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόγραμμα γραμμικού προγραμματισμού.
 (β) Δώστε με ένα απλό υπολογισμό, ένα πάνω φράγμα της δυνατής απόδοσης. Να δικαιολογήσετε τον υπολογισμό.

6. Μια αεροπορική εταιρεία προτείνει στους πελάτες της δύο εδέσματα E_1 και E_2 . Κάθε έδεσμα εμπεριέχει 3 βασικά στοιχεία μετρήσιμα σε βιταμίνες (v), θερμίδες (c) και γραμμάρια πρωτεϊνών (p.) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει την περιεκτικότητα των θρεπτικών στοιχείων ανά μονάδα εδέσματος:

Έδεσμα	Στοιχεία		
	v	c	p
E_1	1	1	3
E_2	5	2	2

Ένα μενού πρέπει να εμπεριέχει το λιγότερο 5 μονάδες βιταμινών, 4 μονάδες θερμίδων και 6 μονάδες πρωτεϊνών. Το κόστος ανά μονάδα εδέσματος είναι 20 λεπτά για το X_1 και 25 λεπτά για το X_2 . Η εταιρεία θέλει να συνθέσει το μενού της ημέρας, το οποίο να εμπεριέχει τον ελάχιστο αριθμό θρεπτικών στοιχείων και ταυτόχρονα να κοστίζει το λιγότερο δυνατό.

- (α) Να μοντελοποιηθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
 (β) Να επιλυθεί γραφικά το πρόβλημα.

7. Να επιλυθεί με τη μέθοδο Simplex (με πίνακες) το παρακάτω στιγμιότυπο γραμμικού προγραμματισμού. Να δοθεί το πολύεδρο των λύσεων και να σχεδιασθεί η μετακίνηση μέσω των βάσεων στους αντίστοιχους κόμβους του πολύεδρου.

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & 20x_1 + 15x_2 + 18x_3 \\
 \text{subject to} & 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 80 \\
 & 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \leq 120 \\
 & 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \leq 84 \\
 & x_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \geq 0
 \end{array}$$