Εργασία 2η - Αριθμητική Ανάλυση - Ζαπαλίδη Ιωάννα

sdi1400044

1.1 a) i) Έχουμε

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to R_3]{R_3 \to R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 = R_3 - \frac{1}{3}R_1]{R_2 = R_2 - \frac{2}{3}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 = R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$-3x_3 = (1, 1, -1) \Rightarrow x_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

2η γραμμή: $\frac{2}{3}x_2 - x_3 = \left(0, 1, -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow \frac{2}{3}x_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$

1η γραμμή: $3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = (0,0,1) \Rightarrow 3x_1 = (0,0,1) - 5\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) - 9\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow x_1 = \left(\frac{11}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$

Άρα $A^{-1} = \begin{bmatrix} 11/6 & -2/3 & 1/6 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

ii)

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2]{R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 = R_3 - \frac{1}{3}R_1]{R_2 = R_2 - \frac{2}{3}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & -1 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & -2 & 1 & 0 & -1/3 \end{array}\right] \xrightarrow[m_{23} = -1]{m_{12} = -\frac{15}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 33/2 & 0 & 0 & -49/6 \\ 0 & 2/3 & -1 & 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 11/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{διαιρ.}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/6 & -2/3 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

Άρα ο $A^{-1} = \begin{bmatrix} 11/6 & -2/3 & 1/6 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

β) $\kappa(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$

$\|A\|_\infty = \max\{3+5+9,\ 2+4+5,\ 1+1+1\} = 17$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max\{\frac{11}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}+1+\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\} = 8/3$

Άρα $\kappa(A) = \frac{136}{3}$

γ) (βλ. inverse.m)

δ) Ενώ και με τις δύο μεθόδους βρίσκεται τελικά ο ίδιος A^{-1}, προτιμάται η μέθοδος Jordan, καθώς αυτή ενδείκνυται για την εύρεση αντίστροφου πίνακα, ενώ η μέθοδος Gauss για την επίλυση γραμμικών συστημάτων.

2.2) Αρχικοί υπολογισμοί:

$A = \begin{bmatrix} 4 & -k & -1 \\ -k & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} k+5 \\ -k-4 \\ -5 \end{bmatrix}$

$A = D - C_L - C_U$ όπου $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C_U = \begin{bmatrix} 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$D^{-1}A = I - L - U$ όπου:

$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$, $L = D^{-1}C_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $U = D^{-1}C_U = \begin{bmatrix} 0 & k/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

α) i) $x_1^{(k+1)} = \frac{k}{4} x_2^{(k)} + \frac{1}{4} x_3^{(k)} + \frac{k+5}{4}$

$x_2^{(k+1)} = \frac{k}{4} x_1^{(k)} + \frac{(-k-4)}{4}$

$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4} x_1^{(k)} - \frac{5}{4}$ με αντικατάσταση στον τύπο.

ii) $x_1^{(k+1)} = \frac{k}{4} x_2^{(k)} + \frac{1}{4} x_3^{(k)} + \frac{(k+5)}{4}$

$x_2^{(k+1)} = \frac{k}{4} x_1^{(k+1)} + \frac{(-k-4)}{4}$

$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4} x_1^{(k+1)} - \frac{5}{4}$

β). $\mathcal{L}_1 = (I-L)^{-1} U$

$$(I-L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (I-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ άρα } \mathcal{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & k/4 & 1/4 \\ 0 & k^2/16 & k/16 \\ 0 & k/16 & 1/16 \end{bmatrix}$$

Για να επιτευχθεί σύγκλιση της μεθόδου πρέπει $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$

Βρίσκω τις ιδιοτιμές λ_i του πίνακα $\mathcal{L}_1$:

$\det(\mathcal{L}_1 - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ ή $\lambda_2 = 0$ ή $\lambda_3 = \frac{k^2+1}{16}$.

Άρα πρέπει $\frac{k^2+1}{16} < 1$ ή $k^2+1 < 16$ ή $k^2 < 15$ ή $k \in (-\sqrt{15}, \sqrt{15})$

γ). $B = L+U = \begin{bmatrix} 0 & k/4 & 1/4 \\ k/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ όπου με όμοιο τρόπο προκύπτουν οι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{k^2+1}}{4}$.

Για να συγκλίνει ταχύτερα η μέθοδος J από την GS πρέπει:

$\rho(B) < \rho(\mathcal{L}_1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{k^2+1}}{4} < \frac{k^2+1}{16} \Leftrightarrow 4\sqrt{k^2+1} < k^2+1 \Leftrightarrow 16 < k^2+1$

$\Leftrightarrow k > \sqrt{15}$ ή $k < -\sqrt{15}$ άτοπο γιατί για να συγκλίνει η GS πρέπει $-\sqrt{15} < k < \sqrt{15}$ οπότε δεν υπάρχει επιθυμητό k.

2.31 Έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$y^{(0)} = [1,1,1]^T$

Για $\underline{m=0}$, $y_{J_0}^{(0)} = \|y^{(0)}\|_\infty = \max(1,1,1) = 1 \Rightarrow J_0 = 1$ και $z^{(0)} = \frac{y^{(0)}}{y_1^{(0)}} = 1\,[1,1,1]^T$

Άρα $y^{(1)} = A \cdot z^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = [10,8,1]^T$

$\lambda_1 = y_{J_0}^{(1)} = y_1^{(1)} = 10$, $J = 1$. άρα η 1^{η} προσέγγιση είναι 10

Για $\underline{m=1}$

$y_{J_1}^{(1)} = \|y^{(1)}\|_\infty = \max(10,8,1) = 10$, $J_1 = 1$

$z^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{y_2^{(1)}} = \frac{1}{y_2^{(1)}} \cdot [10,8,1]^T = [1, 0.8, 0.1]^T$

$y^{(2)} = A \cdot z^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 5.4 \\ -0.8 \end{bmatrix}$ άρα $\lambda_2 = 7.2$ η

επόμενη προσέγγιση ιδιοτιμής και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι...

$z^{(2)} = \frac{1}{y_1^{(2)}}\, y^{(2)} = \frac{1}{7.2} \begin{bmatrix} 7.2 \\ 5.4 \\ -0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.1111 \end{bmatrix}$ (ακρίβεια $\varepsilon = 10^{-4}$).

β) (Βλ. eigenvals.m).