Εργασία 1 - Γραμμική Άλγεβρα Ζαραλίδη Ιωάννα

Αριθμός Μητρώου: 1115-2014-00044

$\alpha = \beta = 4$
$\gamma = \delta = 0.$

Συνεπώς το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$(\Sigma)\begin{cases} 11x + 12y + 9z + 11\omega = 0 \\ 11x + y + 7z + 2\omega = 0 \\ x + 2y + 23z + \omega = 0 \\ 12x + 3y + 30z + 3\omega = 0 \end{cases}$$

Γνωρίζουμε όμως ότι μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των εξισώσεων χωρίς να αλλοιωθεί το σύνολο Λ(Σ) των λύσεων του συστήματος, δηλαδή έχουμε:

$$(\Sigma)\begin{cases} x + 2y + 23z + \omega = 0 \\ 11x + 12y + 9z + 11\omega = 0 \\ 11x + y + 7z + 2\omega = 0 \\ 12x + 3y + 30z + 3\omega = 0. \end{cases}$$

1) $\Lambda(\Sigma) = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \setminus (x+2y+23z+\omega=0)$ και $(11x+12y+9z+11\omega=0)$ και $(11x+y+7z+2\omega=0)$ και $(12x+3y+30z+3\omega=$

Παρατηρώ ότι η $(0,0,0,0)$ αποτελεί λύση του συστήματος, δηλαδή $(0,0,0,0) \in \Lambda(\Sigma)$ άρα $\Lambda(\Sigma) \neq \emptyset$.

2) Εξ ορισμού, για να είναι ένα σύνολο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ πρέπει

i) Να υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $0=(0,0,0,0)\in\mathbb{R}^4$
ii) Να υπάρχουν $x,y\in\mathbb{R}^4$ τέτοια ώστε $(x+y)\in\mathbb{R}^4$
iii) Να υπάρχουν $x\in\mathbb{R}^4$, $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda\cdot x\in\mathbb{R}^4$

Πράγματι, έχουμε:

i) $0=(0,0,0,0)\in\mathbb{R}^4$
ii) Για $x=y=(0,0,0,0)$, $x+y=(0,0,0,0)+(0,0,0,0)=(0,0,0,0)$.
iii) $x=(0,0,0,0)\in\mathbb{R}^4$ και $\lambda\in\mathbb{R}$ τότε
$\lambda x = \lambda\cdot(0,0,0,0) = (0\cdot\lambda,\ 0\cdot\lambda,\ 0\cdot\lambda,\ 0\cdot\lambda)=(0,0,0,0)\in\mathbb{R}^4$

Συνεπώς $N(J)\leq\mathbb{R}^4$

3) Ο πίνακας του συστήματος είναι:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 23 & 1 & 0 \\ 11 & 12 & 9 & 11 & 0 \\ 11 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 12 & 3 & 30 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Αν $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$ οι σειρές του πίνακα τότε εκτελώ τις εξής τροποποιήσεις:

- στη θέση της Γ_2 βάζω $\Gamma_2-11\Gamma_1$
- στη θέση της Γ_3 βάζω $\Gamma_3-11\Gamma_1$
- στη θέση της Γ_4 βάζω $\Gamma_4-12\Gamma_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 23 & 1 \\ 0 & -10 & -244 & 0 \\ 0 & -21 & -246 & -9 \\ 0 & -21 & -246 & -9 \end{bmatrix}$$

Στη θέση της Γ_4 βάζω $\Gamma_4-\Gamma_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 23 & 1 \\ 0 & -10 & -244 & 0 \\ 0 & -21 & -246 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρώ ότι η $Γ_4$ είναι η $[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ οπότε μπορεί να παραλειφθεί. Επιπλέον στη θέση της $Γ_2$ βάζω $-\frac{Γ_2}{10}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 23 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{244}{10} & 0 \\ 0 & -21 & -246 & -9 \end{bmatrix}$$

Στη θέση της $Γ_3$ βάζω $Γ_3+21 \cdot Γ_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 23 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{244}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2664}{10} & -9 \end{bmatrix}$$

Στη θέση της $Γ_3$ βάζω $\frac{10}{2664} \cdot Γ_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 23 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{244}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{148} \end{bmatrix}$$

Στη θέση της $Γ_1$ βάζω $Γ_1-23Γ_3$ και στη θέση της $Γ_2$ βάζω $Γ_2 - \frac{244}{10} \cdot Γ_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{263}{148} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{61}{74} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{148} \end{bmatrix}$$

Στη θέση της $Γ_1$ βάζω $Γ_1-2Γ_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{148} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{61}{74} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{148} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας στον οποίο καταλήξαμε είναι ο συνηγμένος κλιμακωτός του αρχικού, από τον οποίο προκύπτει το εξής συνηγμένο κλιμακωτό σύστημα:

$$\begin{cases} x + \frac{19}{148}\omega = 0 \\ y + \frac{61}{74}\omega = 0 \\ z - \frac{5}{148}\omega = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{19}{148}\omega \\ y = -\frac{61}{74}\omega \\ z = \frac{5}{148}\omega \end{cases}$$

Οι λύσεις του συστήματος, συνεπώς, είναι της μορφής

$$(x, y, z, \omega) = \left(-\frac{19}{148}a, -\frac{61}{74}a, \frac{5}{148}a, a\right)$$

με $a \in \mathbb{R}$.

Μια βάση του υπόχωρου Λ είναι η:

$$\left\langle \left(-\frac{19}{148}, -\frac{61}{74}, \frac{5}{148}, 1\right) \right\rangle.$$

Συνεπώς, εφ' όσον διάσταση ενός χώρου V ($\dim V$) λέγεται το πλήθος των στοιχείων μιας βάσης του, ισχύει ότι

$$\dim \Lambda = 1.$$

4) Όπως αποδείξαμε πιο πάνω, ο συνηγμένος κλιμακωτός πίνακας του πίνακα του συστήματος είναι ο εξής

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{19}{148} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{61}{74} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{148} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

5) Όπως δείξαμε πιο πάνω, μια βάση του υπόχωρου Λ είναι η

$$\left\langle \left(-\frac{19}{148},\ -\frac{61}{74},\ \frac{5}{148},\ 1 \right) \right\rangle.$$

Μια άλλη είναι η $\langle (-19, -122, 5, 148) \rangle$

Έστω η βάση:

$\langle (-19, -122, 5, 148), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$.

Έχουμε:

$$x(-19, -122, 5, 148) + y \cdot (1,0,0,0) + z(0,1,0,0) + w(0,0,1,0) = \vec{0}$$

Άρα

$$\left.\begin{array}{r} -19x + y = 0 \\ -122x + z = 0 \\ 5x + w = 0 \\ 148x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -19x + y = 0 \\ -122x + z = 0 \\ 5x + w = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

Άρα τα στοιχεία αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^4$.

Απάντηση

$\langle (-19, -122, 5, 148), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$

βάση του $\mathbb{R}^4$ και

$\langle (-19, -122, 5, 148) \rangle$ βάση του Λ.