Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα

Προαιρετική άσκηση 3η

Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018

Να γραφτεί το δυϊκό του προβλήματος μεταφοράς

Απάντηση:

Έστω u_i, v_j οι δύο δυϊκές μεταβλητές των δύο κλάσεων των σταθερών. Εφόσον για κάθε στήλη του πίνακα των σταθερών του αρχικού προβλήματος, μόνο δύο στοιχεία δεν είναι μηδενικές, με τιμές +1 και -1, επί των γραμμών των δύο κλάσεων των σταθερών, για το δυϊκό πρόβλημα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&maxz = \sum_{j=1}^{n} b_j y_j + \sum_{i=1}^{m} d_i y_{n+i} \\
&s.t \qquad y_i + y_{n+j} = c_{ij}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \\
&\qquad\quad\; y_i \geq 0, i = 1, .., n+m
\end{aligned}
$$

Υποθέτουμε ότι η εταιρία παραγωγής A καλεί τον λογιστή της για να διαχειριστεί τις διαδικασίες με την εταιρία μεταφορών B. Η εταιρία αυτή αγοράζει όλα της τα προϊόντα από άλλα εργοστάσια, πληρώνοντας μοναδιαίο κόστος u_i, σε ευρώ φερ'ειπείν, για το i-εργοστάσιο. Έπειτα, πουλάει τα προϊόντα σε αποθήκες με μοναδιαίο κόστος v_j ευρώ ανά αποθήκη j. Ο στόχος της εταιρίας B είναι να μεγιστοποιήσει το κέρδος του δηλαδή:

$$\max - \sum_{i=1}^{m} b_i u_i + \sum_{j=1}^{n} d_j v_j$$

Η εταιρία B πρέπει να επιλέξει τιμές για τα u_i, v_j ώστε να μην είναι φθηνότερο για την εταιρία A το να πραγματοποιήσει την μεταφορά των προϊότων χωρίς να εμπλακεί η εταιρία B. Έτσι, υποθέτοντας ότι για κάθε ζεύγος i, j, οι τιμές είναι τέτοιες ώστε $u_i - v_j > c_{ij}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η εταιρία A θα προτιμήσει η μεταφορά του προϊόντος να πραγματοποιηθεί από την ίδια και όχι με τη βοήθεια της εταιρίας B. Συνεπώς, για κάθε ζεύγος i, j, πρέπει να ισχύει η εξής σχέση για τις τιμές: $u_i - v_j < c_{ij}$.

Παράδειγμα:

$$minw = x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 6x_{14} + 3x_{15} + 4x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 8x_{24} + 8x_{25} + 5x_{31} + 6x_{32} + 7x_{33} + 12x_{34} + 10x_{35}$$

$$\begin{aligned} s.t \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 11 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 12 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 7 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 6 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 3 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2 \\ & x_{15} + x_{25} + x_{35} = 13 \\ \\ & x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3, j = 1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

Ισχύει ότι:

$$c^T = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 12 \quad 10]$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b^T = [11 \quad 12 \quad 7 \quad 6 \quad 6 \quad 3 \quad 2 \quad 13]$$

Το δυϊκό πρόβλημα D είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} & maxz = b^T y \\ & s.t\ A^T x \geq c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

και τελικά γράφεται ως:

$$maxz = 11y_1 + 12y_2 + 7y_3 + 6y_4 + 6y_5 + 3y_6 + 2y_7 + 11y_8$$

s.t $y_1 + y_4$ =1
$y_1 + y_5$ =1
$y_1 + y_6$ =2
$y_1 + y_7$ =6
$y_1 + y_8$ =3
$y_2 + y_4$ =4
$y_2 + y_5$ =3
$y_2 + y_6$ =4
$y_2 + y_7$ =8
$y_2 + y_8$ =8
$y_3 + y_4$ =5
$y_3 + y_5$=6
$y_3 + y_6$ =7
$y_3 + y_7$ =12
$y_3 + y_8$ =10

$y_i \geq 0, i = 1,2,3,4,5,6,7,8$