ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ : ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

14.12.2016

3η ΑΣΚΗΣΗ

Προαιρετικό τμήμα : Υλοποίηση του αλγορίθμου της μεθόδου EGS - Εφαρμογές

3.1 Δίνεται το ακόλουθο *τριδιαγώνιο* $n \times n$ γραμμικό σύστημα $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{d}$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & 0 & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

και η επαναληπτική μέθοδος **EGS**

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (1-\tau)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k+1)} + (\tau - 1)\,\mathbf{L}\mathbf{x}^{(k)} + \tau\mathbf{U}\mathbf{x}^{(k)} + \tau\mathbf{D}^{-1}\mathbf{d}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

όπου ο $\mathbf{D}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι τα ίδια με τα διαγώνια στοιχεία του $\mathbf{A}$, $\mathbf{L} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C_L}$, $\mathbf{U} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C_U}$ και οι πίνακες $-\mathbf{C_L}$, $-\mathbf{C_U}$ είναι τα αυστηρά κάτω και άνω τριγωνικά μέρη του $\mathbf{A}$.

3.1.1 Να δοθεί η επαναληπτική μέθοδος (2) υπό μορφή συνιστωσών για την αριθμητική επίλυση του γραμμικού συστήματος (1), λαμβάνοντας υπόψη την *ειδική δομή* του πίνακα $\mathbf{A}$.

3.1.2 Να υλοποιήσετε σε γλώσσα C ή C++ ή και MatLab την επαναληπτική μέθοδο (2)για την επίλυση ενός τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος. Λάβετε $\tau = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.9$, αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{d}$ και επιθυμητή ακρίβεια $\epsilon = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{10^{-6}}$.

Υλοποίηση - Πειραματική μελέτη

1. Για την πειραματική επαλήθευση της ορθότητας του αλγορίθμου σας για την επίλυση του γραμμικού συστήματος (1) θεωρήστε ότι το διάνυσμα $\mathbf{x}$ είναι γνωστό (προσχεδιασμένη λύση), υπολογίστε το $\mathbf{d}$ από την $\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ και στη συνέχεια επιλύστε το γραμμικό σύστημα. Για παράδειγμα, αν $\mathbf{x} = (1, 1, \cdots, 1)^T$, τότε $d_i = a_i + b_i + c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ (όπου $a_1 = c_n = 0$).

2. Για την πειραματική μελέτη σύγκλισης της ανωτέρω επαναληπτικής μεθόδου (2) να θεωρήσετε ότι $\tau = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.9$, $(a_i = -\alpha,\ i = 2, 3, \ldots, n)$, $(b_i = 4,\ i = 1, 2, \ldots, n)$, $(c_i = -\beta,\ i = 1(1)n-1))$, όπου

(i) $\alpha = 1,\ \beta = 3$, **(ii)** $\alpha = 3,\ \beta = 1$, **(ii)** $\alpha = 2,\ \beta = 2$ και $n = 10,\ n = 10^2,\ n = 10^3$.

Στη συνέχεια για ένα στιγμιότυπο των δεδομένων εισόδου

α) να δοθεί η γραφική παράσταση του πλήθους των επαναλήψεων της μεθόδου (2) συναρτήσει της παραμέτρου τ και στη συνέχεια να υπολογιστούν

β) η βέλτιστη τιμή τ_b της παραμέτρου τ με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων,

γ) το πλήθος των επαναλήψεων (itcount) (για $\tau = \tau_b$).

3. Να γίνει κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας (βλ. όπως παρακάτω πίνακας) και να σχολιάσετε τα συμπεράσματά σας.

***Πίνακας Αποτελεσμάτων* (Εφαρμογές)**

Επίλυση του $\mathrm{Ax} = \mathrm{d}$ με την επαναλ. μέθοδο (2)

Διάσταση A	**Παράμετροι** α	β	**Βέλτιστη τιμή** τ_b	**Πλήθος επαναλήψεων** *itcount*
$n = 10$	1	3		
	3	1		
	2	2		
$n = 10^2$	1	3		
	3	1		
	2	2		
$n = 10^3$	1	3		
	3	1		
	2	2		

(Ενδεικτικές) Εφαρμογές

Επίλυση ενός ***τριδιαγώνιου*** γραμμικού συστήματος $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$

Εφαρμογή 1 $\quad n = 10, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 3$

$$
\begin{bmatrix}
4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{d} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$.

Εφαρμογή 2 (*Γενίκευση της εφαρμογής 1*) Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι $n \times n$ *τριδιαγώνιος*, όπου $n = 10^2$ (ή $n = 10^3$) με στοιχεία

$$
a_{ij} = \begin{cases} 4, & \text{αν} \quad i = j \\ -\alpha, & \text{αν} \quad i = j+1 \\ -\beta, & \text{αν} \quad i = j-1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}
$$

Για την πειραματική επαλήθευση θεωρήστε ότι η λύση του γραμμικού συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{d} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{d}$.

Υποχρεωτικό τμήμα : Παρεμβολή, Αριθμητική Παραγώγιση, Αριθμητική Ολοκλήρωση

3.2 Δίνονται στον παρακάτω πίνακα τα ζεύγη τιμών $(x_i, f_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots n$ μιας συνάρτησης f $\left(f(x) = \dfrac{60}{x+1}\right)$ όπου $x_i \in [1, 5],\quad f_i = f(x_i)$.

i	0	1	2	3	4
x_i	1	2	3	4	5
f_i	30	20	15	12	10

α) Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή της $f(2.5)$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παρεμβολής με προς τα εμπρός διαφορές του Newton

(i) στα σημεία $(x_i,\ f_i),\ i = 0, 1, 2, 3$

(ii) σε όλα τα σημεία.

β) Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή της $f(2.5)$ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο παρεμβολής του Newton με διηρημένες διαφορές

(i) στα σημεία $(x_i,\ f_i),\ i = 0, 2, 3$

(ii) στα σημεία $(x_i,\ f_i),\ i = 0, 2, 3, 4$.

γ) Σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις στα α) και β) να βρεθούν

(i) το απόλυτο σφάλμα

(ii) το άνω φράγμα του απολύτου σφάλματος με βάση τη θεωρία.

δ) Συγκρίνατε σε κάθε περίπτωση το άνω φράγμα του απολύτου σφάλματος με το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα. Σχολιάσατε τα συμπεράσματά σας.

3.3 Χρησιμοποιώντας τα 4 πρώτα σημεία $(x_i,\ f_i),\ i = 0, 1, 2, 3$ που δίνονται στον πίνακα στο ερώτημα **3.2**

α) να βρεθούν οι προσεγγιστικές τιμές των παραγώγων : **(i)** $f'(2)$, **(ii)** $f'(2.5)$, **(iii)** $f''(2)$ και **(iv)** $f''(2.5)$

β) να βρεθεί το αριθμητικό σφάλμα στα **(i)**, **(ii)**, **(iii)** και **(iv)**.

3.4 Να υπολογιστεί προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος $I = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x+3}dx$ με την εφαρμογή σε τέσσερα υποδιαστήματα ($n = 4$)

α) **(i)** του σύνθετου κανόνα του Τραπεζίου

(ii) του σύνθετου κανόνα του Simpson

(iii) του σύνθετου κανόνα του Μέσου

(iv) να βρεθεί το αριθμητικό σφάλμα στα **(i)**, **(ii)** και **(iii)**.

β) Για τον καθένα από τους ανωτέρω σύνθετους κανόνες να βρεθεί η μικρότερη τιμή του n προκειμένου η προσέγγιση της τιμής του I να έχει ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων.

3.5 Δίνεται ο ακόλουθος τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$I(f) = \int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{1}{2}f(x_0) + c_1 f(x_1)$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του συντελεστή c_1 και των σημείων $x_0,\ x_1$ έτσι ώστε ο ανωτέρω τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης να είναι όσο το δυνατόν πιό ακριβής.

β) Να βρεθεί το σφάλμα του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης στο **α)**.

γ) Ποιός είναι ο βαθμός ακρίβειας του τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης στο **α)**;

Οδηγίες για την παράδοση της 3ης Άσκησης

.

Προσοχή : Η άσκηση είναι **ατομική**(δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης:

Η **3η Άσκηση** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά στην **e-class** του μαθήματος μέχρι και την **Δευτέρα 16/1/2017** και **ώρα 23:55**.

Για την υποβολή στην **e_class** πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο με winzip) με όνομα **ASK3_xxxxxxx.zip** ή **(.rar)**, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό πρέπει να περιέχονται:

Για το **Προαιρετικό** τμήμα της 3ης Άσκησης (δηλ. το ερώτημα 3.1) τα ακόλουθα:

1. το αρχείο με όνομα **ask3_1_EGS_xxxxxxx**(σε C ή C++ ή και MatLab) το οποίο θα περιέχει μόνο τον πηγαίο (source) κώδικα για την επαναληπτική μέθοδο (2) και

2. ένα μόνο αρχείο με όνομα **ask3_1_apotel_xxxxxxx** (.pdf) που θα περιέχει τους τύπους της επαναληπτικής μεθόδου (2) υπό μορφή συνιστωσών (ερώτημα 3.1.1) και στη συνέχεια την παρουσίαση των αποτελεσμάτων(γραφική παράσταση, πίνακας), των σχολίων σας και των συμπερασμάτων σας.

Για το **Υποχρεωτικό** τμήμα της 3ης Άσκησης (δηλ. τα ερωτήματα 3.2, 3.3, 3.4 και 3.5) θα πρέπει να περιέχεται ένα μόνο αρχείο με όνομα **ask3_2345apanthseis_xxxxxxx** (.pdf), το οποίο θα περιέχει τις απαντήσεις σας.

ΠΡΟΣΟΧΗ

1. Η Άσκηση είναι ατομική και σε περίπτωση αντιγραφής δεν βαθμολογείται.

2. Η Άσκηση θα πρέπει να λυθεί με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.

3. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης η άσκηση δεν θα γίνεται δεκτή.

4. Θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την ιστοσελίδα (στην e-class) του μαθήματος και να ενημερώνεστε με το σχετικό υλικό(Ασκήσεις, Ανακοινώσεις, Βαθμολογίες κ.α.).