

14.11.2016

2η ΑΣΚΗΣΗ

Υποχρεωτικό τμήμα (Θεωρία-Εφαρμογές)

2.1 Άμεσοι μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$.

α) Να βρεθεί ο A^{-1} με τη μέθοδο απαλοιφής

(i) Gauss με μερική οδήγηση

(ii) Jordan με μερική οδήγηση

β) Να υπολογιστεί ο αριθμός συνθήκης $\kappa(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty}$.

γ) Να υπολογιστεί ο A^{-1} με τη χρήση συνάρτησης της MatLab.

δ) Ποιά μέθοδος παράγει καλύτερα αποτελέσματα; Να δικαιολογήσετε με βάση τη θεωρία.

2.2 Επαναληπτικές μέθοδοι για την Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων.

Δίνεται το γραμμικό σύστημα: $\begin{bmatrix} 4 & -k & -1 \\ -k & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k+5 \\ -k-4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad k \in R$

α) Να δοθούν οι επαναληπτικές μέθοδοι (i) Jacobi(J) και (ii) Gauss-Seidel (GS) υπό μορφή συνιστωσών για την επίλυση του ανωτέρω γραμμικού συστήματος.

β) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη (διάστημα τιμών του k) έτσι ώστε η ε.μ. GS να συγκλίνει.

γ) Υπάρχουν τιμές του k έτσι ώστε η μέθοδος J να συγκλίνει ταχύτερα από τη μέθοδο GS.

2.3 Αριθμητικός Υπολογισμός των Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα με τη μέθοδο των δυνάμεων.

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

α) Εφαρμόστε δύο βήματα του αλγορίθμου της κανονικοποιημένης μεθόδου των δυνάμεων για την εύρεση προσεγγιστικής τιμής της μέγιστης κατά μέτρο ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος του πίνακα A. Λάβετε ως αρχικό διάνυσμα το $[1, 1, 1]^T$ και επιθυμητή ακρίβεια $\epsilon = 0.0001$.

β) Να υπολογιστεί η μέγιστη κατά μέτρο ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A με τη χρήση συνάρτησης της MatLab.

Προαιρετικό τμήμα (Υλοποίηση Αλγορίθμων - Αποτελέσματα)

2.4 Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος και υπολογισμός του αντιστρόφου ενός πίνακα

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbf{x} = (x_i)$, $\mathbf{b} = (b_i) \in \mathbb{R}^n$, όπου ο \mathbf{A} είναι μεγάλος και πυκνός πίνακας.

2.4.1 Να υλοποιήσετε σε γλώσσα C (ή C++) τον αλγόριθμο της μεθόδου απαλοιφής του **Gauss με μερική οδήγηση** για την επίλυση του γραμμικού συστήματος και να εκτιμηθεί το σχετικό σφάλμα της λύσης \mathbf{x} με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

α) $\frac{\|\delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$, όπου $\|\delta\mathbf{x}\|_\infty = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_\infty$ το απόλυτο σφάλμα

β) $\frac{\|\delta\mathbf{r}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$, όπου $\|\delta\mathbf{r}\|_\infty = \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\|_\infty$ το υπόλοιπο

και $\hat{\mathbf{x}}$: η υπολογιζόμενη λύση από την εφαρμογή του αλγορίθμου.

Υπόδειξη : Για πειραματικούς λόγους συνήθως δίνεται το διάνυσμα \mathbf{x} (ως προκαθοριζόμενη λύση) και στη συνέχεια υπολογίζεται το $\mathbf{b} = \mathbf{A} * \mathbf{x}$. (Για παράδειγμα, αν $\mathbf{x} = (1, 1, \dots, 1)^T$, τότε $b_i = (\mathbf{A} * \mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, n$).

2.4.2 Με κατάλληλη τροποποίηση του προγράμματος που χρησιμοποιήσατε στο 2.4.1

α) να υπολογίσετε τον αντίστροφο \mathbf{A}^{-1} του πίνακα \mathbf{A}

β) να υπολογίσετε τον **αριθμό συνθήκης**: $\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty$.

Τα προγράμματά σας σε όλες τις ανωτέρω περιπτώσεις πρέπει να δίνουν στο χρήστη τις ακόλουθες δυνατότητες επιλογής :

(i) να εισάγει τα απαραίτητα δεδομένα

(ii) να δημιουργεί ένα συγκεκριμένο γραμμικό σύστημα (με τη βοήθεια τύπων)

(iii) να δημιουργεί ένα τυχαίο γραμμικό σύστημα (με τη βοήθεια της συνάρτησης rand για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών)

2.4.3 Στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη πινακοποίηση των αποτελεσμάτων σας (βλ. παρακάτω πίνακα 2.4). Συμπεράσματα – Αιτιολογήσεις.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1 : $n = 4$,
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

Για την πειραματική επαλήθευση στο **2.4.1** θεωρήστε ότι η λύση του γρ. συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (1, -2, 2, -1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Στη συνέχεια εφαρμόστε το **2.4.2** για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Εφαρμογή 2 : $n = 8$,
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -1 & 2 & 3 & 1 & -4 & 7 \\ 5 & 11 & 3 & 10 & -3 & 3 & 3 & -4 \\ 7 & 12 & 1 & 5 & 3 & -12 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & -2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -13 & -1 & 1 & 4 & -1 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 12 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -7 & -1 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 & 1 & 3 & -4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Για την πειραματική επαλήθευση στο **2.4.1** θεωρήστε ότι η λύση του γρ. συστήματος είναι η $\mathbf{x} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)^T$, υπολογίστε το $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ και επιλύστε το γραμμικό σύστημα $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Στη συνέχεια εφαρμόστε το **2.4.2** για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Εφαρμογή 3 : $n = 10$,
$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

όπου προκαθορίζετε εκ των προτέρων τη λύση (παρόμοια με την εφαρμογή 2).

Στη συνέχεια εφαρμόστε το **2.4.2** για τον υπολογισμό του αντιστρόφου.

Αποτελέσματα

Πίνακας 2.4

Επίλυση του $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ και υπολογισμός του \mathbf{A}^{-1} (μέθοδος Gauss)			
Εφαρμογή	Σχ. Σφάλμα	Σχ. Υπόλοιπο	Αριθμός Συνθήκης $\kappa(A)$
	$\frac{\ \delta \mathbf{x}\ _{\infty}}{\ \mathbf{x}\ _{\infty}}$	$\frac{\ \delta \mathbf{r}\ _{\infty}}{\ \mathbf{x}\ _{\infty}}$	
1			
2			
3			

Οδηγίες για την παράδοση της 2ης Άσκησης

Προσοχή : Η άσκηση είναι **ατομική**(δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης:

Η **2η Άσκηση** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά στην **e-class** του μαθήματος μέχρι και την **Παρασκευή 2/12/2016** και **ώρα 23:55**.

Για το **Υποχρεωτικό** τμήμα της 2ης Άσκησης (δηλ. τα ερωτήματα 2.1, 2.2 και 2.3) θα πρέπει να επισυνάψετε **ΜΟΝΟ** ένα Φάκελο (συμπίεσμένο) με όνομα **ASK2_XXXXXXX.zip** ή **(.rar)** , όπου XXXXXXX τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχονται τα ακόλουθα:

1. το αρχείο με όνομα **ask2_2.1.3_INVA_XXXXXXX** που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο(source) κώδικα (σε MatLab) για την εύρεση του αντιστρόφου A^{-1} .
2. το αρχείο με όνομα **ask2_2.3.2_MAX_EIGENV_XXXXXXX** που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο(source) κώδικα (σε MatLab) για την εύρεση της μέγιστης κατά μέτρο ιδιοτιμής και του αντιστοίχου ιδιοδιανύσματος του πίνακα **A** και
3. ένα **αρχείο κειμένου**(.doc σε word ή σε pdf) με όνομα **ask2_YPOXR_Apanthseis_XXXXXXX**, το οποίο θα περιέχει τις απαντήσεις σας.

Για το **Προαιρετικό** τμήμα της 2ης Άσκησης (δηλ. το ερώτημα 2.4) θα πρέπει επιπλέον να συμπεριλάβετε στον Φάκελο **ASK2_XXXXXXX.zip** ή **(.rar)** τα ακόλουθα:

1. το αρχείο με όνομα **ask2_2.4.1_GAUSS_XXXXXXX** που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο(source) κώδικα (σε C ή C++ ή και MatLab) για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο Gauss,
2. το αρχείο με όνομα **ask2_2.4.2_TropGAUSS_XXXXXXX** που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο(source) κώδικα (σε C ή C++ ή και MatLab) για την εύρεση του αντιστρόφου με τη μέθοδο Gauss και
3. ένα **αρχείο κειμένου** με όνομα **ask2_2.4.3_apotel_XXXXXXX** που θα περιέχει τους πίνακες αποτελεσμάτων, τα σχόλια και τα συμπεράσματά σας.

ΠΡΟΣΟΧΗ

1. Η Άσκηση είναι ατομική και σε περίπτωση αντιγραφής δεν βαθμολογείται.
2. Η Άσκηση θα πρέπει να λυθεί με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.
3. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης η άσκηση δεν θα γίνεται δεκτή.
4. Θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την ιστοσελίδα (στην e-class) του μαθήματος και να ενημερώνετε με το σχετικό υλικό(Ασκήσεις, Ανακοινώσεις, Βαθμολογίες κ.α.).