Εργασία 1η - Αριθμητική Ανάλυση - Ζαπολίδη Ιωάννα
sdi 1400044

1.1 |

Γενικά έχουμε $P(x) = x^2 + 111.11x + 1.2121$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 12345.4321 - 1 \cdot 4.8484 = 12340.5837$

και $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12340.5837} = 111.08818$

Για το (I) είναι:

$$\xi_{\pm} = \frac{-111.11 \pm \sqrt{12340.5837}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{-0.02182}{2} = -0.01091 \quad (=\xi_+) \\ \frac{-222.19818}{2} = -111.09909 \quad (=\xi_-) \end{cases}$$

Για το (II) είναι:

$$\xi_+ = \frac{-2 \cdot 1.2121}{111.11 + 111.08818} = -0.010910 0804 = 0.010910 \text{ (ακρίβεια 5 σημ. ψηφίων)}$$

$$\xi_- = \frac{1.2121}{-1 \cdot 0.01091} = -111.09990$$

(α). (I) Είναι:

- $|\xi_+ - \bar{\xi}_+| = |-0.0109100 8036948 - (-0.01091)| = |0.000000080369481|$
$= 0.000000080369$ (ακρίβεια 5 ψηφίων)
- $|\xi_- - \bar{\xi}_-| = |-111.09908991963051 - (-111.09909)| = 0.000000080369 49$
$= 0.000000080369$

(II) • $|\xi_+ - \bar{\xi}_+| = |-0.0109100 8036948 - (0.01091)| = 0.000000080369$
$|\xi_- - \bar{\xi}_-| = |-111.09908991963051 - (-111.09990)| = 0.000810080369 5$
$= 0.00081008$ (ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων).

(β). (I) Είναι:

$$k = \frac{|\xi_+ - \bar{\xi}_+|}{|\xi_+|} = \frac{0.000000080369}{0.01091008036948} = 0.0000073664 9019 = 0.0000073664$$

$$\ell = \frac{|\xi_- - \bar{\xi}_-|}{|\xi_-|} = \frac{0.000000080369}{111.09908991963051} = 0.00000000072339927 = 0.00000000072339$$

(II). $$m = \frac{|\xi_+ - \bar{\xi}_+|}{|\xi_+|} = \frac{0.000000080369}{0.01091008036948} = 0.0000073664$$

$$n = \frac{|\xi_- - \bar{\xi}_-|}{|\xi_-|} = \frac{0.00081008}{111.09908991963051} = 0.0000072915$$

(γ). Για το (α):

Γνωρίζουμε ότι το απόλυτο σφάλμα δεν αποτελεί επαρκές μέτρο αξιολόγησης της ακρίβειας. Όμως, γίνεται εμφανές ότι:

- για το (I) τα σφάλματα και των δύο ριζών είναι ίσα με $8{,}0369 \cdot 10^{-8}$, άρα θεωρητικά είναι σχετικά μικρά, άρα η ακρίβεια ανάλογως μεγάλη.
- για το (II), για την ρίζα ξ_+, το σφάλμα είναι ίδιο με τον τύπο (I). Όμως, για τη ρίζα ξ_-, παρατηρείται ότι το απόλυτο σφάλμα είναι μεγαλύτερο, $8{,}1008 \cdot 10^{-4}$. Αφού μάλιστα η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, το σφάλμα αυτό δηλώνει προβληματική την ρίζα ξ_- που βρήκαμε.

Για το (β):

Πλέον εξάγουμε συμπεράσματα ως προς το απόλυτο σχετικό σφάλμα των προσεγγίσεων των ριζών, οπότε έχουμε σαφέστερη άποψη για την επίπτωση του στην εύρεση ριζών.

- Για το (I), παρατηρώ ότι εξίσου το k και το ℓ είναι αριθμοί μικροί (της τάξης του 10^{-5}, 10^{-7} αντιστοίχως). Το σφάλμα της ρίζας ξ_- είναι αμελητέο σε σχέση με αυτό της ξ_+. Το $k > \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ όμως, άρα ενδεχομένως αποτελεί κίνδυνο για μετέπειτα πράξεις.
- Για το (II), παρατηρώ ότι $m = k$ οπότε τα συμπεράσματα είναι ανάλογα. Για το $n = 7{,}2915 \cdot 10^{-5} > \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ ισχύει η υπόθεση που κάναμε πριν για το μέγεθος του σφάλματος.

(δ). Παρατηρώ ότι:

(II) $\xi_+ = \dfrac{-2 \cdot c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$ (1). Αν θέσω $\Delta = b^2 - 4ac$ (2) έχουμε:

$$\xi_- = \frac{c}{a\xi_+} \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{c}{a \cdot \left(-\frac{2c}{b+\sqrt{\Delta}}\right)} = \frac{-(b+\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Το ξ_- ανάγεται στο ξ_- του τύπου (I) μέσω πράξεων. Παρ' όλα αυτά, παρατηρώ σαφώς μικρότερα σφάλματα με την εφαρμογή του τύπου (I). Αυτό συμβαίνει διότι, ως γνωστόν, οι πράξεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης με μεγάλο διαιρετέο και μικρό διαιρέτη αυξάνουν το σφάλμα εν τέλει, οπότε επιθυμούμε να αποφεύγονται. Δηλαδή, η αύξηση του σφάλματος στην περίπτωση (II) οφείλεται στην μετάδοση του σφάλματος από τον υπολογισμό της ρίζας ξ_+ στον υπολογισμό την ξ_-.

1.2| α). Η $f(x)=x^3-2x^2-3$ συνεχής στο $[2,3]\subseteq\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση

$f(2)=2^3-2\cdot 2^2-3=-3<0$.

$f(3)=3^3-2\cdot 3^2-3=6>0$.

Άρα από Θ. Bolzano η $f(x)$ έχει ρίζα στο $[2,3]$.

Μάλιστα η ρίζα αυτή είναι μοναδική διότι: η $f(x)$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με $f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)>0$ $\forall x\in[2,3]$ αφού $x>0$ και $3x-4>0 \Leftrightarrow 3x>4 \Leftrightarrow x>\frac{4}{3}$ που ισχύει. Άρα $f'(x)>0$ $x\in[2,3]$, συνεπώς η f γνησίως αύξουσα στο $[2,3]$ άρα μονότονη άρα η ρίζα μοναδική.

β). Αρχικά είναι $a=2$, $f(a)=-3$, $b=3$, $f(b)=6$.

- $\dfrac{y-f(b_0)}{x-b_0}=\dfrac{f(a_0)-f(b_0)}{a_0-b_0} \xLeftrightarrow[x=x_0]{y=0} x_0=3-6\cdot\dfrac{3-2}{6-(-3)}=3-6\cdot\dfrac{1}{9}=2.333333$ (ακρίβεια 6 ψηφίων).

$f(x_0)=(2.333333)^3-2\cdot(2.333333)^2-3=12.7036982593-2\cdot 5.4444428889-3$
$=-1.18518751854\simeq -1.18518<0$

$f(x_0)\cdot f(a)>0$ άρα η ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[a_1,b_1]=[x_0,b]$.

- (1η επανάληψη). $a_1=x_0=2.333333$, $f(a_1)=-1.18518$, $b_1=3$, $f(b_1)=6$.

$x_1=3-6\cdot\dfrac{3-2.333333}{6-(-1.18518)}=2.4432982889\approx 2.44329$.

$f(x_1)=-0.35370674817\simeq -0.353706<0$. Άρα η ρίζα $\rho\in[a_2,b_2]=[x_1,b]$.

- (2η επανάληψη) $a_2=x_1=+2.44329$, $f(a_2)=-0.353706$, $b_2=3$, $f(b_2)=6$

$x_2=3-6\dfrac{3-2.44329}{6-(-0{,}353706)}=2{,}4742816\ldots\simeq 2{,}474281$.

γ). Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2-3=0 \Leftrightarrow x^3=2x^2+3 \xLeftrightarrow[x^2>0]{x>0} x=\dfrac{2x^2+3}{x^2} \Leftrightarrow g(x)=2+\dfrac{3}{x^2}$.

Έχουμε $g'(x)=-\dfrac{6}{x^3}<0$ $\forall x\in[2,3]$ άρα η g μονότονη άρα το σταθερό της σημείο είναι μοναδικό.

$g(2) = 2,75$ και $g(3) = \frac{7}{3} \simeq 2,333333$. Παρατηρώ ότι $2 \leq g(2), g(3) \leq 3$.
Άρα για $I=[2,3]$, $g(x) \in [2,3]$ άρα η $g(x)$ δεκτή.
Επιπλέον $g''(x) = \frac{18}{x^4} > 0$ $\forall x \in [2,3] \Rightarrow g' \uparrow [2,3]$ κι αφού $|g'(2)| = 0,75 < 1$ και

$|g'(3)| = 0,\bar{2} < 1$, η $|g'(x)| \leq L < 1$ για $x \in [2,3]$. Άρα από θεωρία, η
$x_{n+1} = g(x_n) = 2 + \frac{3}{x_n^2}$ συγκλίνει στο ξ σταθ. σημείο της $g(x)$, άρα η $g(x)$

συγκλίνει καθολικά.
(1η επανάληψη, $x_0 = 2$): $x_1 = 2 + \frac{3}{x_0^2} = 2 + \frac{3}{2^2} = 2,75$.
(2η επανάληψη) $x_2 = 2 + \frac{3}{(2,75)^2} = 2,39669421 \simeq 2.396694$.

δ). Ξέρουμε ότι $L = \max\{|g'(x)| : x \in [a,b] = [2,3]\} = |-0,75| = 0,75$.
Άρα η σχέση δίνει:

$$\frac{(0,75)^n}{1-0,75}|2,75-2| \leq \varepsilon \iff 4(0,75)^{n+1} \leq \frac{1}{2}\cdot 10^{-6}$$

$$\iff (0,75)^{n+1} \leq 0.125 \cdot 10^{-6} \overset{\ln\uparrow}{\iff} \ln(0,75)^{n+1} \leq \ln(0.125\cdot 10^{-6})$$

$$\iff (n+1)\cdot \ln(0.75) \leq \ln(0.125\cdot 10^{-6}) \iff (n+1)\cdot(-0.287682072) \leq -15.89495209996$$

$$\overset{-1<0}{\iff} n+1 \geq 55.2517992836 \iff n \geq 54.2517992836 \simeq 54.2517$$

Άρα αφού $n \in \mathbb{N}$, το κάτω φράγμα που ζητείται είναι $n = 55$.

1.3

α). Δίνεται ότι $f(x) = (x+1)^3(x-2)$, με ρίζα $\xi = -1$, όπου συγκλίνει η μέθοδος N-R.
Έχουμε:
- $f(\xi) = f(-1) = 0$.
- $f'(x) = (x+1)^2(4x-5)$, $f'(\xi) = f'(-1) = 0$.
- $f''(x) = 6(2x^2+x-1)$, $f''(-1) = 0$.
- $f'''(x) = 24x+6$, $f'''(\xi) = f'''(-1) = -18 \neq 0$.

Άρα, από γνωστό θεώρημα, αφού η $f(x) \in C^2[a,b]$ ως πολυωνυμική και $\xi \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ η ρίζα της $f(x)=0$, δηλ. $\xi = -1$, με βαθμό πολλ/τας $k = 3 > 1$, η τάξη σύγκλισης της μεθόδου N-R είναι γραμμική.

β). Έχουμε $k=3$, $f(x) = (x+1)^3(x-2)$, $f'(x) = (x+1)^2(4x-5)$.
Θεωρώ τη βελτιωμένη μορφή της N-R: $x_n = x_{n-1} + 3 \cdot \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, $x_0 = 0$.

• $x_1 = x_0 - 3\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - 3\cdot\frac{f(0)}{f'(0)} = -3\cdot\frac{-2}{-5} = -1,2$

$f(x_1) = f(-1,2) = (-1,2+1)^3(-1,2-2) = 0,0256.$

$f'(x_1) = f'(1,2) = (-1,2+1)^2\,(4\cdot(-1,2)-5) = -0,392.$

• $x_2 = x_1 - 3\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1,2 - 3\frac{0,0256}{-0,392} = -1,004082.$

$f(x_2) = (-1,004082+1)^3\,(-1,004082-2) = 2,041791\cdot 10^{-7}.$

$f'(x_2) = (-1,004082+1)^2\,(4\cdot(-1,004082)-5) = -0,00015023654889216 \simeq -0,00015.$

• $x_3 = x_2 - 3\frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1,004082 - 3\,\frac{2,041791\cdot 10^{-7}}{-1,5\cdot 10^{-4}} = -1,004082 + 4,083582\cdot 10^{-3}$

$= -0,999998418.$

γ). Έχουμε $g(x) = x - 3\frac{f(x)}{f'(x)} = x - 3\frac{(x+1)^3(x-2)}{(x+1)^2(4x-5)} = x - \frac{3(x+1)(x-2)}{4x-5}$ και

$g'(x) = \frac{4x^2-10x-14}{16x^2-40+25}$ με $g'(-1)=0$.

$g''(x) = \frac{162}{(4x-5)^3} \neq 0$ άρα και $g''(-1)\neq 0$.

Ισχύει ότι $g(x)\in C^2[a,b]$ ως πολυωνυμικές άρα η νέα μορφή της μεθόδου NR έχει τάξη σύγκλισης τετραγωνική.