

## Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα

Χειμερινό Εξάμηνο 2017-2018

### Εργασία 2

1. Η Foster Generators κατέχει τρία εργοστάσια, στο Cleveland, στο Bedford και στο York. Η δυναμικότητα παραγωγής ως προς ένα συγκεκριμένο τύπο γεννήτριας για το προσεχές τρίμηνο είναι η εξής:

Πηγή	Εργοστάσιο	Δυναμικότητα παραγωγής (μονάδες)
1	Cleveland	5000
2	Bedford	6000
3	York	2500
Σύνολο		13500

Η διανομή των γεννητριών πραγματοποιείται από τέσσερα περιφερειακά κέντρα διανομής (Boston, Chicago, St. Louis και Lexington). Εκτιμάται ότι η ζήτηση ανά κέντρο διανομής για το προσεχές τρίμηνο θα είναι:

Προορισμός	Κέντρο Διανομής	Εκτίμηση ζήτησης (μονάδες)
1	Boston	6000
2	Chicago	4000
3	St. Louis	2000
4	Lexington	1500
Σύνολο		13500

Η διοίκηση της εταιρείας επιθυμεί να προσδιορίσει τον αριθμό των μονάδων που θα μεταφερθούν από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής. Το ανά μονάδα κόστος μεταφοράς για κάθε διαδρομή παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Πηγή	Boston	Chicago	Προορισμός St. Louis	Lexington
Cleveland	3	2	7	6
Bedford	7	5	2	3
York	7	5	4	5

(α) Απεικονίστε γραφικά το δίκτυο του προβλήματος.

(β) Δώστε τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

2. Μια εταιρεία χρησιμοποιεί φορτηγά για τη διακίνηση φορτίων δημητριακών από τρία σιλό σε τέσσερις μύλους. Η προσφορά και η ζήτηση (σε φορτία φορτηγών) μαζί με τα κόστη μεταφοράς ανά φορτίο για τις τέσσερις αυτές διαδρομές, συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα. Τα κόστη μεταφοράς  $c_{ij}$  αναφέρονται σε εκατοντάδες δολάρια. Το μοντέλο επιδιώκει το ελαχίστου κόστους πρόγραμμα μεταφοράς φορτίων ανάμεσα στα σιλό και στους μύλους.

	Μύλος 1	Μύλος 2	Μύλος 3	Μύλος 4	Προσφορά
Σιλό 1	10	2	20	11	15
Σιλό 2	12	7	9	20	25
Σιλό 3	4	14	16	18	10
Ζήτηση	5	15	15	15	

(α) Να λυθεί το πρόβλημα με την μέθοδο της Βορειοδυτικής Γωνίας.

(β) Να λυθεί το πρόβλημα με την μέθοδο Reduced Costs.

(γ) Να λυθεί το πρόβλημα με την μέθοδο Vogel.

3. Μια μεγάλη μεταλλευτική εταιρεία εξορύσσει το βασικό προϊόν που εμπορεύεται από τρία λατομεία, έστω Λ1, Λ2 και Λ3. Η εβδομαδιαία παραγωγή του κάθε λατομείου είναι 75, 150 και 75 τόνοι χαλκιού αντίστοιχα. Η πρώτη ύλη που εξορύσσεται πρέπει να μεταφερθεί σε πέντε κύριους καταναλωτές, έστω Κ1, Κ2, Κ3, Κ4 και Κ5, οι οποίοι χρειάζονται για τις ανάγκες τους 100, 60, 40, 75 και 25 τόνους χαλκιού ανά εβδομάδα αντίστοιχα. Το πρόβλημα που απασχολεί αυτή την περίοδο τη διοίκηση της εταιρείας είναι ο κατά το δυνατό περιορισμός του απαιτούμενου κόστους για τη μεταφορά της ποσότητας του προϊόντος στους καταναλωτές. Για το σκοπό αυτό έγινε αναλυτική κοστολόγηση, η οποία έδωσε τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα (τα αριθμητικά δεδομένα συμβολίζουν το κόστος μεταφοράς ανά τόνο χαλκιού σε ευρώ).

		Καταναλωτές				
		Κ1	Κ2	Κ3	Κ4	Κ5
Λατομεία	Λ1	3	2	3	4	1
	Λ2	4	1	2	4	2
	Λ3	1	0	5	3	2

Αντικειμενικός σκοπός της μεταλλευτικής εταιρείας είναι η ελαστικοποίηση του συνολικού κόστους μεταφοράς. Ζητείται ο ακριβής τρόπος, με τον οποίο πρέπει να διανεμηθεί στους καταναλωτές η συνολική ποσότητα χαλκιού που εξορύσσεται από τα λατομεία, έτσι ώστε να επιτευχθεί ο παραπάνω στόχος. Το πρόβλημα να λυθεί με τις μεθόδους:

(α) Reduced Costs.

(β) Vogel.

4. Τρία κέντρα διανομής αυτοκινήτων αποστέλλουν αυτοκίνητα σε πέντε εμπόρους. Το κόστος μεταφοράς στηρίζεται στην απόσταση σε μίλια ανάμεσα στις πηγές και στους προορισμούς και είναι ανεξάρτητο από το εάν τα φορτηγά πραγματοποιούν τις μεταφορές με πλήρες φορτίο ή όχι. Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει την απόσταση σε μίλια ανάμεσα στα κέντρα διανομής και στους εμπόρους, μαζί με τις μηνιαίες διαθέσιμες ποσότητες και τη μηνιαία ζήτηση σε αριθμό αυτοκινήτων. Ένα φορτηγό με πλήρες φορτίο περιέχει 18 αυτοκίνητα. Το κόστος μεταφοράς ανά μίλι ανά φορτηγό είναι 25 δολάρια.

	Έμπορος 1	Έμπορος 2	Έμπορος 3	Έμπορος 4	Έμπορος 5	Προμήθεια
Κέντρο 1	100	150	200	140	35	400
Κέντρο 2	50	70	60	65	80	200
Κέντρο 3	40	90	100	150	130	150
Ζήτηση	100	200	150	160	140	

(α) Να διατυπώσετε το σχετικό μοντέλο μεταφοράς.

(β) Να προσδιορίσετε το βέλτιστο πρόγραμμα μεταφοράς.

5. Τα εργοστάσια Χ, Ψ και Ζ μίας επιχείρησης έχουν μηνιαία δυναμικότητα 22, 15 και 8 τόνους κάποιου χημικού προϊόντος αντίστοιχα. Η παραγωγή αυτή καλύπτει τις ανάγκες τεσσάρων καταναλωτικών κέντρων, οι οποίες είναι 7, 12, 17 και 9 τόνοι κάθε μήνα. Το κόστος μεταφοράς ενός τόνου (εκφρασμένου σε ευρώ) από τα εργοστάσια στα κέντρα κατανάλωσης σημειώνεται στον παρακάτω πίνακα:

	Κέντρο I	Κέντρο II	Κέντρο III	Κέντρο IV
Εργοστάσιο X	5	2	4	3
Εργοστάσιο Ψ	4	8	1	6
Εργοστάσιο Z	4	6	7	5

Ο αρμόδιος υπάλληλος έχει διαμορφώσει βασισμένο στην πείρα του το παρακάτω πρόγραμμα :

$X \rightarrow \text{II} : 7$  τόνοι

$X \rightarrow \text{III} : 6$  τόνοι

$X \rightarrow \text{I}^* : 9$  τόνοι

$\Psi \rightarrow \text{II} : 5$  τόνοι

$\Psi \rightarrow \text{III} : 10$  τόνοι

$Z \rightarrow \text{I} : 7$  τόνοι

$Z \rightarrow \text{III} : 1$  τόνος

Να εξετασθεί αν το πρόγραμμα μεταφοράς που διαμόρφωσε ο αρμόδιος είναι το καλύτερο δυνατό. Αν δεν είναι, τότε να προσδιορισθεί η άριστη λύση του προβλήματος.

6. Στο μη εξισορροπημένο μοντέλο μεταφοράς του παρακάτω πίνακα, εάν μία μονάδα δεν αποσταλεί από μία πηγή (προς οποιονδήποτε από τους περιορισμούς), προκύπτει ένα κόστος αποθήκευσης ίσο με 5,4 και 3 δολάρια ανά μονάδα για τις πηγές 1,2 και 3 αντίστοιχα. Χρησιμοποιείστε την μέθοδο Vogel για την λύση του προβλήματος.

	Προορισμός 1	Προορισμός 2	Προορισμός 3	
Πηγή 1	\$1	\$2	\$1	20
Πηγή 2	\$3	\$4	\$5	40
Πηγή 3	\$2	\$3	\$3	30
	30	20	20	

7. Έστω το πρόβλημα :

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 10x_5 + x_6 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 3x_6 \leq 12 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

Να επιλύσετε το παραπάνω πρόβλημα Knapsack με την χρήση του Branch and Bound με μεθόδους διάσχισης τις Best First, Depth First και Breadth First (η στρατηγική διαχώρισης θα είναι με τη σειρά των μεταβλητών) δείχνοντας παράλληλα και την ανάλυση του δέντρου αναζήτησης.

8. Να επιλυθεί το παρακάτω στιγμιότυπο με τη μέθοδο Branch and Bound και με τις στρατηγικές διάσχισης The Best First, The Depth First και The Breadth First (η στρατηγική Διαχώρισης θα είναι της επιλογής σας αλλά ίδια στις 3 περιπτώσεις). Συγκρίνετε τις 3 στρατηγικές διάσχισης στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο.

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & z = 10x_1 + 8x_2 + 13x_3 + 10x_4 + 10x_5 + 5x_6 \\ \text{subject to} \quad & 7x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 8x_4 + 9x_5 + 5x_6 \leq 39 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \end{aligned}$$

9. Θεωρήστε το πρόβλημα μεταφοράς με  $m$  αφετηρίες και  $n$  προορισμούς. Η διαθέσιμη ποσότητα αγαθών στην αφετηρία  $i$  είναι  $d_i, \forall i$ . Η αιτούμενη ποσότητα στο προορισμό  $j$  είναι  $b_j, \forall j$ . Τα μοναδιαία κόστη μεταφοράς δίδονται από τον πίνακα  $c = (c_{i,j}), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ .

Έστω το στιγμιότυπο με  $m = 3$  και  $n = 5$ ,  $d_1 = 11, d_2 = 12, d_3 = 7$  και  $b_1 = 6, b_2 = 6, b_3 = 3, b_4 = 2, b_5 = 13$ . Ο πίνακας  $c$  έχει ως εξής :

1	1	2	6	3
4	3	4	8	8
5	6	7	12	10

- (α) Βρείτε μια βέλτιστη λύση  $S^*(x)$  του στιγμιοτύπου.
- (β) Βρείτε μια εφικτή λύση  $S^{BD}(x)$  του στιγμιοτύπου με τη μέθοδο της ΒΔ γωνίας.
- (γ) Βρείτε μια εφικτή λύση  $S^{VG}(x)$  του στιγμιοτύπου με τον αλγόριθμο Vogel.
- (δ) Βρείτε το σχετικό λάθος  $\epsilon_r$  των 2 αλγορίθμων.
10. Θεωρήστε ένα νέο στιγμιότυπο του προβλήματος μεταφοράς με  $m = 3$ ,  $n = 5$ , διαθέσιμες και αιτούμενες ποσότητες αγαθών όπως στο 1 και πίνακα  $c$  να έχει ως εξής (όπου  $\alpha \geq 0$  είναι μια σταθερά):

$1+\alpha$	$1+\alpha$	$2+\alpha$	$6+\alpha$	$3+\alpha$
4	3	4	8	8
5	6	7	12	10

- (α) Η βέλτιστη λύση που βρήκατε στο 1 είναι μια εφικτή λύση για αυτό το στιγμιότυπο ;
- (β) Είναι μια καλή λύση ; Δικαιολογήστε το συμπέρασμά σας.
- (γ) Μπορούμε να γενικεύσουμε το συμπέρασμα ; (προσπαθήστε να δώσετε μια πλήρη και αυστηρή απόδειξη)