Λύση της Άσκησης που προτάθηκε την Τετάρτη 26 Νοεμβρίου 2014

Ζαπαλίδη Ιωάννα
sdi1400044

Έστω πίνακας A 3×3, με $rank(A)=2$. Τότε $D(A)=0$;

Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ όπου

$A_1 = (\alpha \;\; \beta \;\; \gamma)$ η 1η γραμμή
$A_2 = (\delta \;\; \varepsilon \;\; \zeta)$ η 2η γραμμή
και $A_3 = (\eta \;\; \theta \;\; \iota)$ η 3η γραμμή.

Αφού $rank(A)=2<3$ οι γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά εξαρτημένες, δηλαδή ισχύει ότι:

$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = (0\;0\;0)$ όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$, A_i οι γραμμές, και κάποιο $\lambda_i \neq 0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\lambda_1 \neq 0$

Τότε $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = (0\;0\;0)$
$\Leftrightarrow \lambda_1 A_1 = -\lambda_2 A_2 - \lambda_3 A_3$

$\Leftrightarrow A_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot A_2 - \dfrac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot A_3$

Έστω $\xi_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ και $\xi_3 = -\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}$

Τότε $A_1 = \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3$.

Έχουμε:

$$D(A) = D\begin{pmatrix} \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \xi_2 \cdot D\begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + \xi_3 \cdot D\begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

από τις ιδιότητες της D, καθώς οι πίνακες:

$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$ έχουν δύο γραμμές ίδιες ο καθένας, άρα

η ορίζουσα καθενός είναι μηδέν.