ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ **20/10/2016**

1η ΑΣΚΗΣΗ

1.1 Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + c = 0$. Αν $b^2 - 4ac > 0$, τότε οι ρίζες της μπορούν να υπολογιστούν με την χρήση των δυο παρακάτω ισοδυνάμων αλλά διαφορετικών τύπων

$$\textbf{(I)} \quad \xi_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\alpha} \qquad \textbf{(II)} \quad \xi_{+} = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}, \qquad \xi_{-} = \frac{c}{a\xi_{+}}.$$

Εφαρμογή: Δίνονται $a = 1$, $b = 111.11$, $c = 1.2121$.
(Ακριβείς τιμές : ξ_+ = -0.01091008036948, ξ_- = -111.09908991963051). Να υπολογίσετε με αριθμητική κινητής υποδιαστολής με 5 σημαντικά ψηφία και στρογγύλευση τις ρίζες της εξίσωσης εφαρμόζοντας τους τύπους **(I)** και **(II)**. Για κάθε τύπο να βρεθεί

α) Το απόλυτο σφάλμα των υπολογιζόμενων τιμών $\overline{\xi_+}$ και $\overline{\xi_-}$ των ριζών.

β) Το απόλυτο σχετικό σφάλμα των υπολογιζόμενων $\overline{\xi_+}$ και $\overline{\xi_-}$ των ριζών.

γ) Τι συμπεράσματα εξάγετε σχετικά με την ακρίβεια των αποτελεσμάτων στα α) και β);

δ) Συγκρίνατε ως προς την ακρίβεια τους δύο τύπους **(I)** και **(II)** και δικαιολογήστε τα αποτελέσματά σας με βάση τη θεωρία για το διαδιδόμενο σφάλμα.

1.2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3$.

α) Να αποδειχθεί ότι η f έχει μια μοναδική ρίζα ξ στο $[2,\ 3]$.

β) Να εφαρμόσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Εσφαλμένης Θέσης για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_2 της ρίζας ξ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Να μετασχηματίσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ σε μια αντίστοιχη μορφή σταθερού σημείου, η οποία να έχει καθολική σύγκλιση. Στη συνέχεια να εκτελέσετε για $x_0 = 2$ δύο επαναλήψεις της μεθόδου σταθερού σημείου.

Για τους υπολογισμούς σας στα β) και γ) χρησιμοποιήστε ακρίβεια με έξι δεκαδικά ψηφία.

δ) Να βρεθεί το θεωρητικό κάτω φράγμα του αριθμού n των επαναλήψεων που απαιτούνται για τη προσέγγιση του σταθερού σημείου ξ στο ερώτημα γ) με $[a,b] = [2,3]$, $x_0 = 2$ και επιθυμητή ακρίβεια $\varepsilon = \frac{1}{2}10^{-6}$, έτσι ώστε

$$\frac{L^n}{1-L}\,|\,x_1 - x_0\,| \le \varepsilon .$$

1.3 **α)** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)^3(x-2)$, αν υποθέσουμε ότι η μέθοδος **N-R** συγκλίνει στη ρίζα ξ=-1 της εξίσωσης $f(x) = 0$ τότε να βρεθεί η τάξη σύγκλισής της. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

β) Στη συνέχεια να επιλέξετε και να εφαρμόσετε μια βελτιωμένη μορφή της μεθόδου **N-R** για τον υπολογισμό της προσεγγιστικής τιμής x_3 (τρεις επαναλήψεις) της ρίζας $\xi = -1$ της εξίσωσης $f(x) = 0$ για $x_0 = 0$.

γ) Ποιά είναι η τάξη σύγκλισης της νέας μορφής της μεθόδου; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Προαιρετικό

1.4 Δίνεται η επαναληπτική μέθοδος **σταθερού σημείου**

$$x_{n+1} = x_n + \lambda(\frac{1}{2}x_n^2 - 1), \quad n = 0,1,2,\ldots \qquad (1)$$

για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$, όπου $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$. Για τη ρίζα $\xi = \sqrt{2}$ της εξίσωσης :

α) Να βρεθεί διάστημα τιμών της παραμέτρου λ ώστε η ε.μ. σταθερού σημείου (1) να συγκλίνει.

β) Να βρεθεί τιμή του λ έτσι ώστε η σύγκλιση της ε.μ.σταθερού σημείου (1) να είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

γ) Να εξετασθεί και να δικαιολογηθεί πλήρως, με βάση την θεωρία, αν αληθεύει ή όχι η παρακάτω πρόταση:

Η επαναληπτική μέθοδος **Newton-Raphson (N-R)** για τον υπολογισμό προσεγγιστικής τιμής της ρίζας $\xi = \sqrt{2}$ είναι πιο αποτελεσματική μέθοδος από την ε.μ. σταθερού σημείου (1) για την τιμή του λ που βρέθηκε στο β)}.

1.5 Υλοποίηση αλγορίθμου-Εφαρμογές.

Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις

α) $f_1(x) = (x+1)^3(x-2)$ **β)** $f_2(x) = e^x - x^2 - 2$

1.5.1 Να υλοποιήσετε σε γλώσσα προγραμματισμού C (ή/και σε MatLab) την ακόλουθη επαναληπτική μέθοδο: **Συνδυασμός Διχοτόμησης και Newton-Raphson(NR)** για τον υπολογισμό **π**ροσεγγιστικής τιμής x_n μιας πραγματικής ρίζας ξ. Λάβετε ως αρχικά διαστήματα $[a,b]$ τέτοια ώστε να περιέχεται σε αυτά μόνο μία ρίζα ξ. Η μέθοδος NR να χρησιμοποιηθεί σε συνδυασμό με τη μέθοδο της Διχοτόμησης ως ακολούθως: για τη μέθοδο Διχοτόμησης να χρησιμοποιηθεί $\varepsilon_\Delta = \frac{1}{2}10^{-2}$, ενώ για τη μέθοδο NR $\varepsilon_{NR} = \frac{1}{2}10^{-6}$. Ως αρχική τιμή x_0 της NR να λαμβάνεται το μέσο του τελευταίου διαστήματος της Διχοτόμησης.

1.5.2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αποτελεσμάτων:

Πίνακας 1.

	Συνδυασμός Διχοτόμησης και NR			
	$[a,b]$	x_0	x_n	n
f_1				
f_2				

1.5.3 Να μελετήσετε πειραματικά την ταχύτητα σύγκλισης της ανωτέρω επαναληπτικής μεθόδου. Η μελέτη αυτή να γίνει με τον υπολογισμό των ποσοτήτων

$$\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p}, \text{ αν η ρίζα είναι γνωστή, διαφορετικά της } \frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_n - x_{n-1}|^p}, \quad p=1,\ p=2.$$

Να συμπληρώσετε για κάθε περίπτωση του Πίνακα 1 ένα πίνακα αποτελεσμάτων της ακόλουθης μορφής:

Πίνακας 2.

Μελέτη Σύγκλισης: Περίπτωση f_1 (ή f_2)		
n	Απόλυτο Σφάλμα $\|\varepsilon_n\|$	$\frac{\|\varepsilon_{n+1}\|}{\|\varepsilon_n\|^p}$ (ή $\frac{\|x_{n+1}-x_n\|}{\|x_n - x_{n-1}\|^p}$)
0	.	.
1	.	.
2	.	.
3	.	.
4	.	.
⋮	⋮	⋮

1.5.4 Να δικαιολογηθεί, με βάση τη θεωρία, η συμπεριφορά της σύγκλισης σε κάθε περίπτωση. Να σχολιαστεί τόσο η σύγκλιση όσο και η τάξη σύγκλισης.

Οδηγίες για την παράδοση της 1ης Άσκησης

Προσοχή : *Η άσκηση είναι* ***ατομική*** *(δηλαδή ο κάθε φοιτητής θα πρέπει να εργαστεί μόνος του).*

Καταληκτική ημερομηνία παράδοσης :

Η **1η Άσκηση** θα υποβληθεί ηλεκτρονικά στην **e-class** του μαθήματος μέχρι και τη **Τρίτη 8/11/2016** και **ώρα 22:30.**

Για το **Υποχρεωτικό** τμήμα της 1ης Άσκησης (δηλ. τα ερωτήματα 1.1 μέχρι και 1.3) θα πρέπει πρέπει να επισυνάψετε ΜΟΝΟ ένα Φάκελο (συμπιεσμένο) με όνομα **ASK1_xxxxxxx**.zip, όπου xxxxxxx τα τελευταία ψηφία του Α.Μ. σας. Μέσα στον φάκελο αυτό να περιέχεται ένα μόνο **αρχείο κειμένου**(.doc σε word ή σε pdf**),** το οποίο θα περιέχει τις απαντήσεις σας..

Υπόδειξη

Για το **Προαιρετικό** τμήμα της 1ης Άσκησης (δηλ. τα ερωτήματα 1.4 και 1.5) θα πρέπει επιπλέον να συμπεριλάβετε στον Φάκελο **ASK1_xxxxxxx**.zip τα εξής:

1. το αρχείο με όνομα **ask1_1.4_xxxxxxx** που θα περιέχει τις απαντήσεις σας στο ερώτημα 1.4.
2. το αρχείο με όνομα **ask1_1.5_NR_xxxxxxx** που θα περιέχει μόνο τον πηγαίο(source) κώδικα (σε C ή C++) για την μέθοδο "Συνδυασμός Διχοτόμησης και NR " και
3. ένα αρχείο κειμένου με όνομα **ask1_1.5_apotel_xxxxxxx** που θα περιέχει τους πίνακες αποτελεσμάτων, τα σχόλια και τα συμπεράσματά σας.

ΠΡΟΣΟΧΗ

- 1. Η Άσκηση είναι **ατομική** και σε περίπτωση αντιγραφής δεν βαθμολογείται.
- 2. Η Άσκηση θα πρέπει να λυθεί με βάση τη θεωρία που έχετε διδαχθεί.
- 3. Μετά την λήξη της καταληκτικής ημερομηνίας παράδοσης η άσκηση δεν θα γίνεται δεκτή.
- 4. Θα πρέπει να επισκέπτεστε συχνά την ιστοσελίδα (στο e-class) του μαθήματος και να ενημερώνεστε με το σχετικό υλικό(Ασκήσεις, Ανακοινώσεις, Βαθμολογίες κ.α.).