

# Άσκηση 1<sup>η</sup>

## Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα

2017-2018

Θέμα: Μοντελοποίηση Προβλήματος Ελάχιστου Πλήθους Πλευρών

για Κάλυψη Κάθε Κόμβου Γράφου ως Γραμμικό Πρόβλημα

### A) Γενική Περίπτωση

Έστω γράφος  $G(V,E)$  με  $V$  το σύνολο των κόμβων και  $E$  το σύνολο των πλευρών αυτού. Κάθε κόμβος θα συνδέεται τουλάχιστον με μία ακμή.

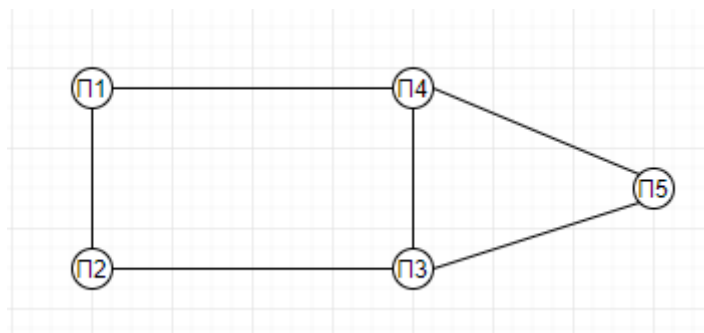
Επιθυμούμε στην τελική λύση να περιέχονται όλες οι ακμές που καλύπτουν ελάχιστα τον γράφο.

Η μοντελοποίηση θα είναι η εξής:

- *Μεταβλητές:*  $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$  οι ακμές του γράφου
- *Περιορισμοί:*  $E' \subseteq E \mid \forall \varepsilon_i \in E' \text{ τέτοιες ώστε να μην υπάρχει ακμή}$
- *Αντικειμενική Συνάρτηση:*  $\min z = \min(|E'|)$

*Σημείωση:* Στους περιορισμούς θεωρούμε το λογικό OR με το σύμβολο «+», όχι την μαθηματική πράξη της πρόσθεσης.

### B) Ειδική Περίπτωση



Επιθυμούμε να μοντελοποιήσουμε το παραπάνω διάγραμμα όπως στη γενική περίπτωση.

Θεωρώ την ακμή Π1-Π2 ως  $\epsilon_1$ , την Π1-Π4 ως  $\epsilon_2$ , την Π2-Π3 ως  $\epsilon_3$ , την Π4-Π5 ως  $\epsilon_4$ , την Π3-Π4 ως  $\epsilon_5$  και την Π3-Π5 ως  $\epsilon_6$ .

Συνεπώς, έχουμε:

- *Μεταβλητές:*  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  με τιμή 1 αν οι αντίστοιχες ακμές ανήκουν στη λύση  $E'$  και 0 αλλιώς, οπότε  $x_i \in \{0,1\}$
- *Περιορισμοί:*

	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$	$\epsilon_6$	Μέγιστο
<b>Π1</b>	1	1	0	0	0	0	1
<b>Π2</b>	1	0	1	0	0	0	1
<b>Π3</b>	0	0	1	0	1	1	1
<b>Π4</b>	0	1	0	1	1	0	1
<b>Π5</b>	0	0	0	1	0	1	1

- *Αντικειμενική Συνάρτηση:*  $\min z = \min(|E'|)$

Προκύπτει ο πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θεωρώ το διάνυσμα  $X$  των μεταβλητών μου ως:  $x =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$

Και θέλουμε τελικά  $Ax \geq \mathbf{1}$

Όπου  $\mathbf{1}$  το διάνυσμα  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$