# Εργασία 1η

*Αλγοριθμική Επιχειρησιακή Έρευνα*

2017-2018

**1.**

α) Το πρόβλημα μοντελοποιείται ως εξής:

| | **Συμβατικές** | **Πολυτελείς** | **Συνολικές Ώρες** |
|---|---|---|---|
| **Κοπή και Βαφή** | 7/10 | 1 | 630 |
| **Ραφή** | ½ | 5/6 | 600 |
| **Φινίρισμα** | 1 | 2/3 | 708 |
| **Έλεγχος και Συσκευασία** | 1/10 | ¼ | 135 |
| **Κέρδος ανά τσάντα** | 10 | 9 | |

Οι μεταβλητές του προβλήματος είναι οι $x_1$, $x_2$, όπου $x_1$ είναι το πλήθος των συμβατικών τσαντών και $x_2$ το πλήθος των πολυτελών τσαντών.

Οι περιορισμοί είναι οι εξής:

$\frac{7}{10} x_1 + x_2 \leq 630$

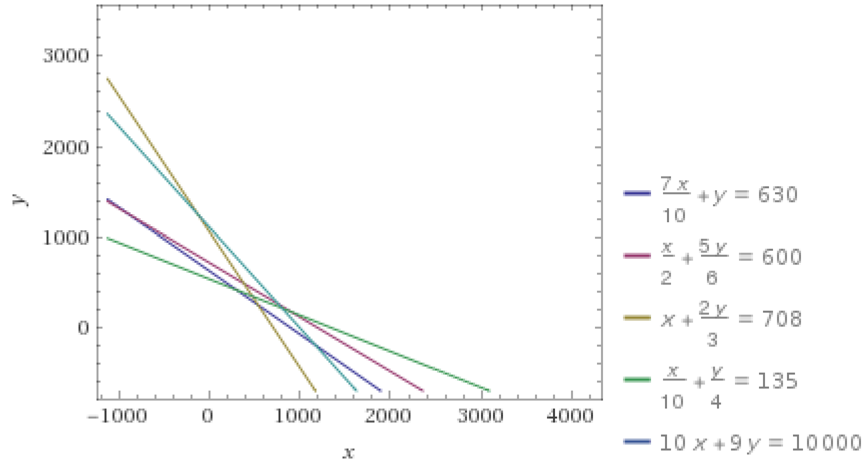
$\frac{1}{2} x_1 + \frac{5}{6} x_2 \leq 600$

$x_1 + \frac{2}{3} x_2 \leq 708$

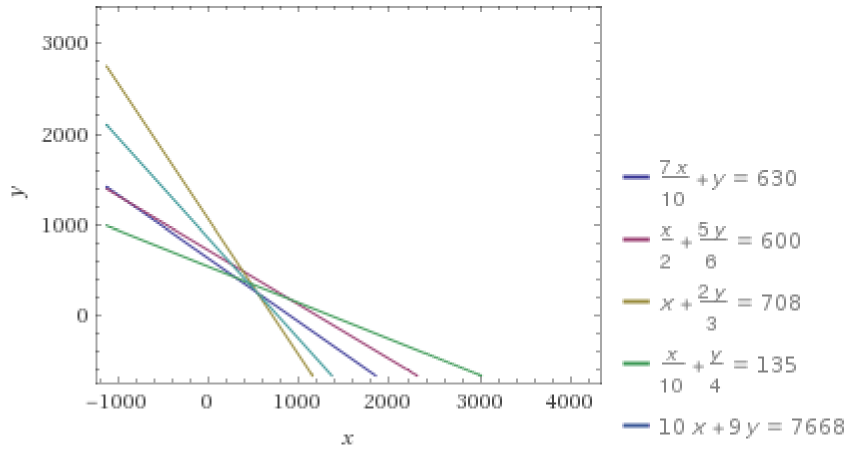
$\frac{1}{10} x_1 + \frac{1}{4} x_2 \leq 135$

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η εξής: $z = \max(10x_1 + 9x_2)$

β) Προκύπτει η εξής γραφική επίλυση του προβλήματος:




Με αυθαίρετο z = 10.000. Μετακινώ το z προς τα κάτω.




Παρατηρώ ότι το κέρδος μεγιστοποιείται για $x_1$ = 540, $x_2$ = 252, με τιμή $z_{max}$ = 7.380.

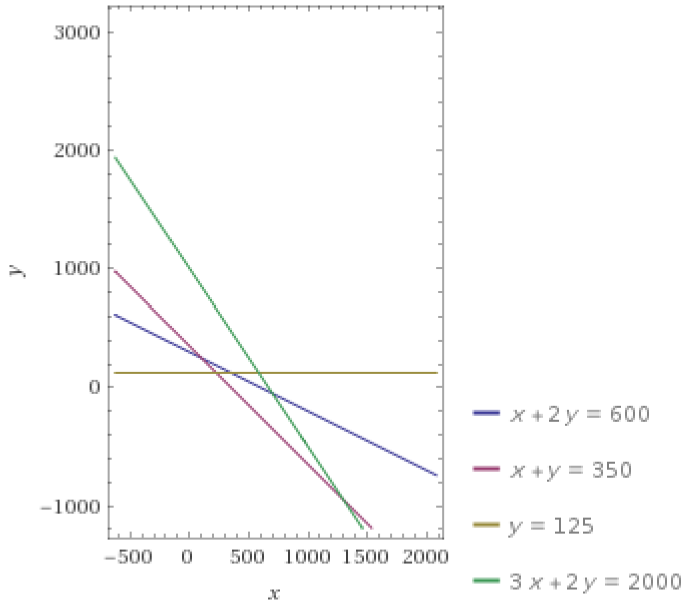
## 2.

α)

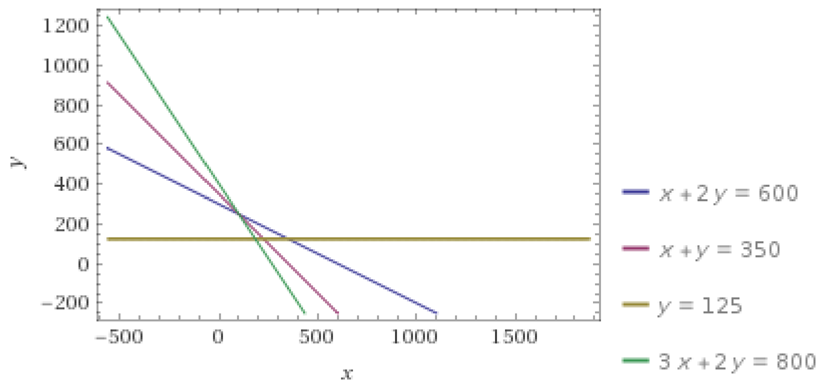
| | **A** | **B** | **Συνολικά** |
|---|---|---|---|
| **Επεξεργασία** | 2 | 1 | 600 |
| **Κόστος** | 2 | 3 | |

Οι μεταβλητές είναι οι $x_1$, $x_2$ όπου $x_1$ τα λίτρα του A και $x_2$ τα λίτρα του B.
Οι περιορισμοί είναι οι εξής:
$2x_1 + x_2 \leq 600$
$x_1 + x_2 \geq 350$
$x_1 \geq 125$
Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η εξής: $z = \min(2x_1 + 3x_2)$

β) Η γραφική αναπαράσταση του προβλήματος είναι η εξής:

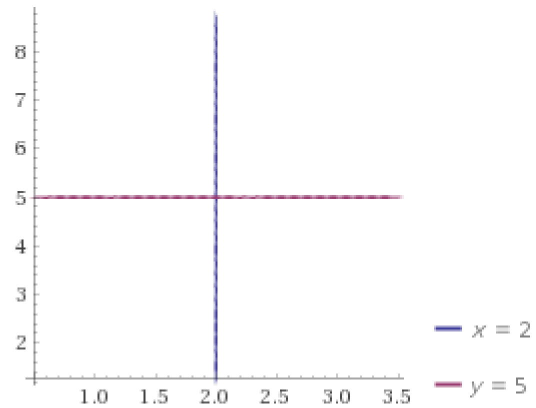



Με αυθαίρετη τιμή z = 2.000. Μετατοπίζω προς τα κάτω την z.




Παρατηρώ ότι το κόστος ελαχιστοποιείται για $x_1 = 250$, $x_2 = 100$, με $2x_1 + 3x_2 = 800$.

**3.**




Πρέπει x, y ≥ 0, x ≥ 2, y ≤ 5. Εφ’όσον το x δεν έχει άνω φράγμα, οι λύσεις είναι άπειρες, και γραφικά αναπαριστώνται από όλα τα σημεία που αποτελούν το ορθογώνιο με y ≤ 5 και x ≥ 2.

# 4.

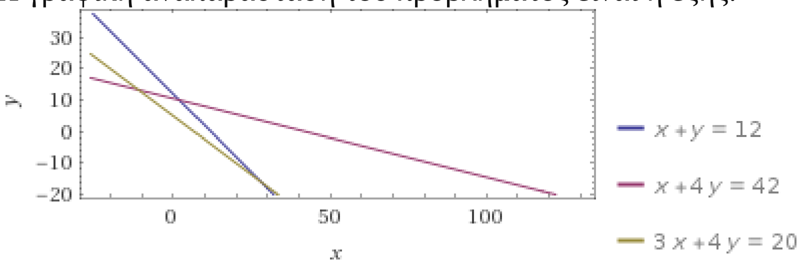
α)

| | 1ο σετ | 2ο σετ | Συνολικά |
|---|---|---|---|
| Βαμβακερές | 2 | 2 | 24 |
| Μάλλινες | 2 | 8 | 84 |
| Κέρδος | 6 € | 8 € | |

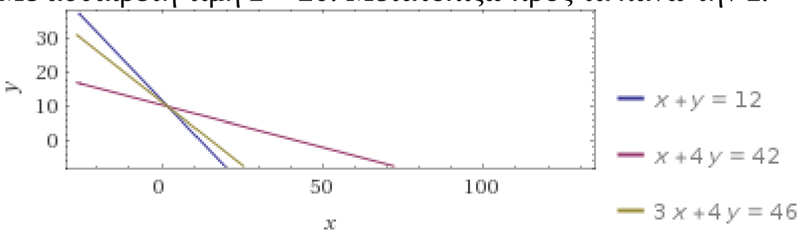
Οι μεταβλητές είναι οι $x_1$, $x_2$ με $x_1$ τα σετ του 1ου είδους και $x_2$ τα σετ 2ου είδους.
Οι περιορισμοί είναι οι εξής:
$2x_1 + 2x_2 \leq 24 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 12$
$2x_1 + 8x_2 \leq 84 \Rightarrow x_1 + 4x_2 \leq 42$
Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η εξής: $z = \max(6x_1 + 8x_2) \Rightarrow \max(3x_1 + 4x_2)$

β)

Η γραφική αναπαράσταση του προβλήματος είναι η εξής:




Με αυθαίρετη τιμή z = 20. Μετατοπίζω προς τα πάνω την z.




Παρατηρώ ότι το κέρδος μεγιστοποιείται για $x_1 = 2$, $x_2 = 10$, με $2x_1 + 3x_2 = 46$.

γ)

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}x_2+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}x_3+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x_4=\begin{bmatrix}12\\42\end{bmatrix}$$

Βασικές μεταβλητές οι $x_3$, $x_4$ και μη βασικές οι $x_1$, $x_2$.

Επανάληψη 1η
$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \quad \Rightarrow x_3 = 12 - x_1 - x_2$
$x_1 + 4x_2 + x_4 = 42 \quad \Rightarrow x_4 = 42 - x_1 - 4x_2$
Βασική εφικτή λύση 1 η $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,0,12,42)$
Για $x_2 = 0 \Rightarrow \quad x_3 \geq 0 \Rightarrow \quad 12 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 12$
$\Rightarrow \quad x_4 \geq 0 \Rightarrow \quad 42 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 42.$
Η τομή τους είναι το $\mathbf{x_1 \leq 12}$.

Για $x_1 = 12$, $x_3 = 0$ άρα αλλάζει η βάση: B = {$x_2$, $x_3$}, EB = {$x_1$, $x_4$}
Στον τύπο του $x_3$ λύνω ως προς το $x_1$:
$x_3 = 12 – x_1 – x_2 \Rightarrow x_1 = 12 – x_2 – x_3$.
Αντικαθιστώ:
$x_4 = 30 – 3x_2 – x_3$
$z = 36 + x_2 – 3x_3$

Μηδενίζοντας τις μεταβλητές της βάσης παίρνω την επόμενη εφικτή λύση:
$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 10.5, 1.5, 0)$
Παρατηρώ ότι για το z, όσο αυξάνω το $x_3$, αυτό μειώνεται. Οπότε αυξάνω το $x_2$.
Για $x_3 = 0$ $\Rightarrow x_1 \geq 0 \Rightarrow 12 – x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 12$
$\Rightarrow x_4 \geq 0 \Rightarrow 30 – 3x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 10$
Η τομή τους είναι το $\mathbf{x_2 \leq 10}$.
Για $x_2 = 12$, $x_4 = 0$, οπότε αλλάζει η βάση: B = {$x_1$, $x_2$}, EB = {$x_3$, $x_4$}
Στον τύπο του $x_4$ λύνω ως προς $x_2$:
$x_4 = 30 – 3x_2 – x_3 \Rightarrow \quad x_2 = 10 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4$
Αντικαθιστώ:

$$x_1 = 2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4$$

$$z = 46 - \frac{10}{3}x_3 - \frac{1}{4}x_4$$

Παρατηρώ ότι αυξάνοντας το $x_3$ ή το $x_4$, το z μειώνεται.
Οπότε η βέλτιστη εφικτή λύση είναι η $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 10, 0, 0)$, με $z = 46$ όπως και παραπάνω.

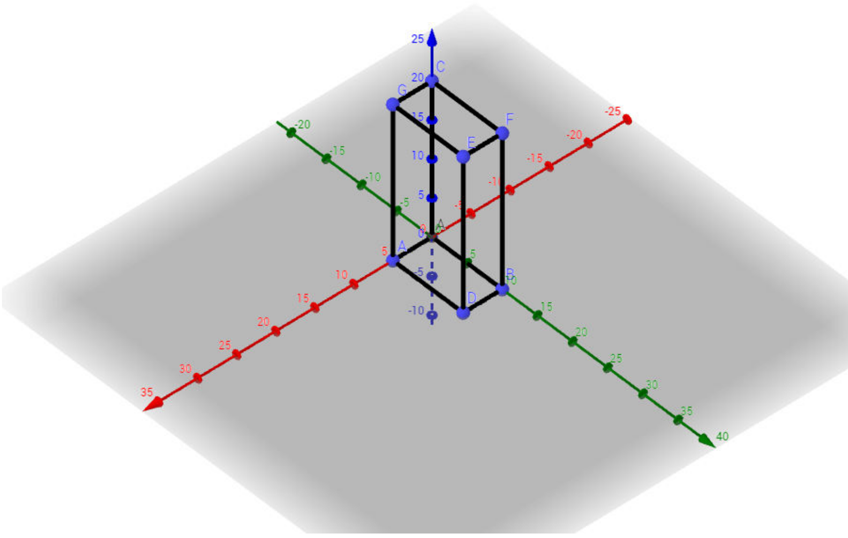
## 5.

Το πρόβλημα μοντελοποιείται ως εξής:

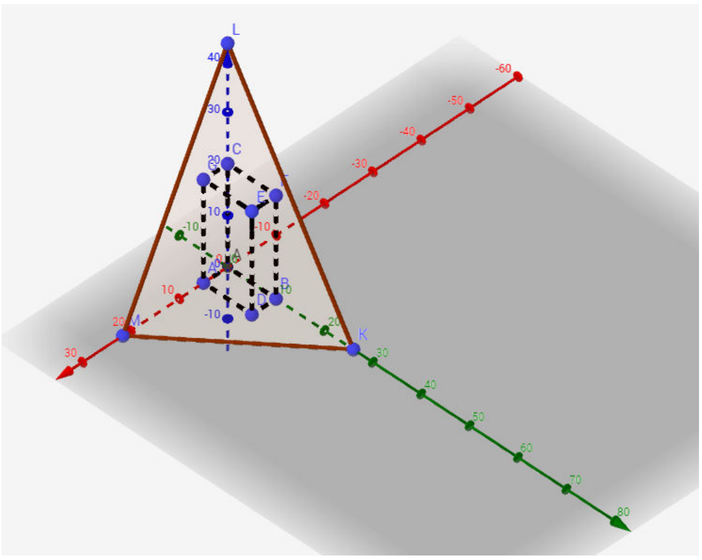
| | Ραδιοφωνικός Σταθμός 1 | Ραδιοφωνικός Σταθμός 2 | Ραδιοφωνικός Σταθμός 3 |
|---|---|---|---|
| Απόδοση (/10) | 9 | 7 | 4 |
| Τιμή (€) | 3000 | 2500 | 1500 |
| Max περάσματα | 5 | 10 | 20 |

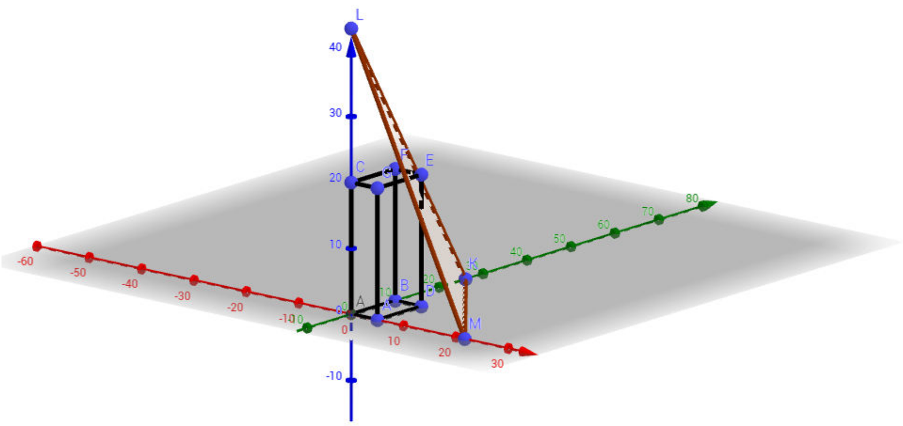
Μεταβλητές: $x_1$, $x_2$, $x_3$ περάσματα από τους ραδιοφωνικούς σταθμούς 1, 2, 3 αντίστοιχα.
Περιορισμοί: $3000x_1 + 2500x_2 + 1500x_3 \leq 65000 \Rightarrow 3x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}5x_3 \leq 65$
$x_1 \leq 5$
$x_2 \leq 10$
$x_3 \leq 20$
Αντικειμενική Συνάρτηση: $z = \max(9x_1 + 7x_2 + 4x_3)$

β) Βάσει των τριών περιορισμών, ο (3D) χώρος στον οποίον κινούμαστε για να βρούμε λύση είναι ο εξής:



Με την αντικειμενική συνάρτηση:





(ξανά το ίδιο σχήμα από άλλη οπτική γωνία – φαίνεται η τομή του επιπέδου που ορίζουν τα σημεία τομής της $3x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}5x_3 = 65$ με τον χώρο όπου εργαζόμαστε)

Παρατηρούμε ότι η $z = \max(9x_1 + 7x_2 + 4x_3)$, για $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 20$, παίρνει την τιμή $z_{max(1)} = 195$. Βέβαια δεν γίνεται $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 20$, γιατί τότε θα είχαμε $15+25+30 = 70 \leq 65$ άτοπο. Οπότε, ένα άνω φράγμα της δυνατής απόδοσης είναι το ανωτέρω, αλλά δεν αποτελεί και τη βέλτιστη λύση (άνω φράγμα και εφικτή λύση).

## 6.

α)

| | **E1** | **E2** |
|---|---|---|
| **Vitamins (V)** | 1 | 5 |
| **Calories (C)** | 1 | 2 |
| **Proteins (P)** | 3 | 2 |
| **Χρόνος (σε λεπτά)** | 20 | 25 |

Έστω $x_i$ ο αριθμός των εδεσμάτων $E_i$ του μενού, $x_1, x_2 \geq 0$

Οι περιορισμοί είναι οι εξής:

$x_1 + 5x_2 \geq 5$

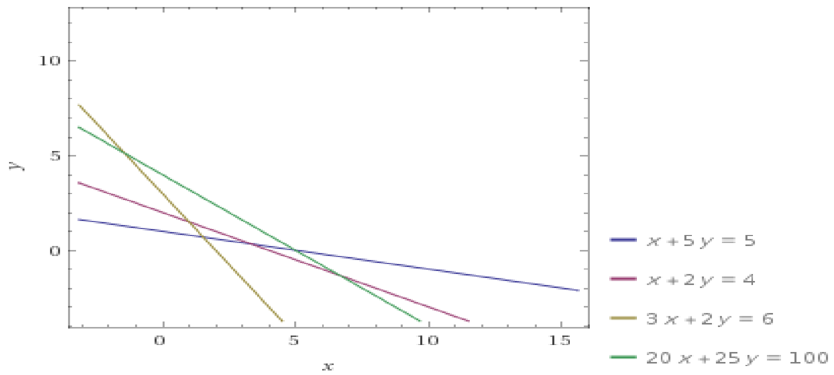
$x_1 + 2x_2 \geq 4$

$3x_1 + 2x_2 \geq 6$

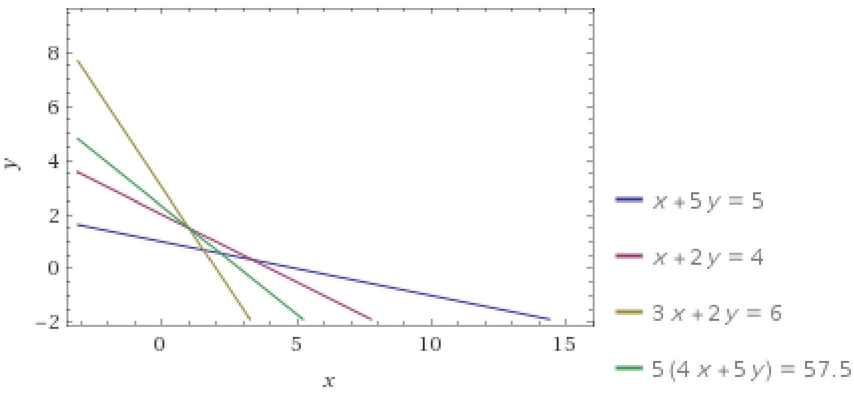
Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η εξής: $z = \min(20x_1 + 25x_2)$

β)

Η γραφική αναπαράσταση του προβλήματος είναι η εξής:




Με z = 100 αυθαίρετα. Μετατοπίζω το z προς τα κάτω.



Παρατηρώ ότι το κόστος ελαχιστοποιείται για $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, με $20x_1 + 25x_2 = 57.5$, αν μπορούν να φτιαχτούν μισά εδέσματα (ειδάλλως, στρογγυλοποιούμε).

**7.**

$z = \max(20x_1 + 15x_2 + 18x_3)$

$5x_1 + 10x_2 + 4x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 80$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 12 | 5 | 1 | 0 | 1 | = 120 |
| 7 | 21 | 3 | 0 | 1 | 0 | = 84 |

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 15 & 12 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 21 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix}$$

$c = [20, 15, 18, 0, 0, 0]$

$$X_B = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix}$$

$N = \{1,2,3\}$

$C_B = [0, 0, 0]$

$z = C_B X_B = 0$

**Επανάληψη 1η**

Βήμα 1

$y = C_B B^{-1} = 0$

Βήμα 2

$ya_j = 0$, $j = 1,2,3$. Επιλέγω αυθαίρετα $j = 1$.

Βήμα 3

$$d = \begin{bmatrix} d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = B^{-1}a_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Βήμα 4

$\frac{x_4}{d_4}$ = 16, $\frac{x_5}{d_5}$ = 8, $\frac{x_6}{d_6}$ = 12, το $x_5$ δίνει το ελάχιστο κλάσμα οπότε i* = 5.

Βήμα 5

$X_B = X_B - \frac{x_5}{d_5} d = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ 84 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 28 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

N = {2,3,5}
B = {1,4,6}

$X_B = \begin{bmatrix} 40 \\ 8 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{bmatrix}$ $C_B$ = [20,0,0]

z = $C_B X_B$ = 160

**Επανάληψη 2η**

Βήμα 1

$y = C_B B^{-1} = (0, \frac{4}{3}, 0)$

Βήμα 2

j = 2 ⇒ $ya_2 = 16 > 15 = c_2$
j = 3 ⇒ $ya_3 \cong 6.6 < 18 = c_3$
Επιλέγω το j = 3.

Βήμα 3

$d = \begin{bmatrix} d1 \\ d4 \\ d6 \end{bmatrix} = B^{-1}a_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

Βήμα 4

$\frac{x_1}{d_1}=24, \frac{x_4}{d_4}\cong 17, \frac{x_6}{d_6}\cong 16.8$ , άρα i* = 6.

Βήμα 5

$$X_B = \begin{bmatrix} 8 \\ 40 \\ 28 \end{bmatrix} - \frac{84}{5}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{15} \\ \frac{12}{15} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 15 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

N = {2,5,6}
B = {1,3,4}

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{36}{15} \\ \frac{84}{15} \\ \frac{12}{15} \end{bmatrix}$$

$C_B$ = [20, 18, 0]
$z = C_B X_B = 48 + \frac{1512}{5} = 350{,}4$

**Επανάληψη 3η**

Βήμα 1

$y = C_B B^{-1} = (0, -\frac{33}{5}, 17)$

Βήμα 2

j = 2, $ya_2 = 277{,}8 > 15 = c_2$
j = 5, $ya_5 = -6{,}6 < 0 = c_5$
Επιλέγω j = 5.

Βήμα 3

d = $\begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$ = $B^{-1}a_5$ = $\begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{-7}{10} \\ \frac{13}{10} \end{bmatrix}$

<u>Βήμα 4</u>

$\frac{x_1}{d_1}=8, \frac{x_3}{d_3}=-24, \frac{x_4}{d_4}=\frac{8}{13}$

Επιλέγουμε i* = 4.

<u>Βήμα 5</u>

$X_B$ = $\begin{bmatrix} \frac{36}{10} \\ \frac{84}{15} \\ \frac{12}{15} \end{bmatrix}$ - $\frac{8}{13}\begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{-7}{10} \\ \frac{13}{10} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} \frac{144}{65} \\ \frac{224}{13} \\ 0 \end{bmatrix}$

B = $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 15 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

N = {2,4,6}

B = {1,3,5}

$X_B$ = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} \frac{144}{65} \\ \frac{224}{13} \\ \frac{8}{13} \end{bmatrix}$

$C_B$ = [20, 18, 0]

z = $C_BX_B$ = 350,4

Τελικά καταλήγουμε ότι $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 20)$, z = 360.

Το πολύεδρο των λύσεων:

A (8,0,0), B (2.4, 0, 17), C (0, 0, 20)