Εργασία 3η — Αριθμητική Ανάλυση

Ζαχαρίδη Ιωάννα
sdi1400044.

3.2 $f(x) = \frac{60}{x+1}$

α) i) Έχουμε: $f(2,5) = \frac{60}{3.5} \simeq 17.14$, $x_0 = 1$, $h = 1$, $\theta = \frac{x-1}{1} = x-1$

i	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	1	30			
			-10		
1	2	20		5	
			-5		-3
2	3	15		2	
			-3		
3	4	12			

$f_0 = 30$

$\Delta f_0 = \frac{20-30}{2-1} = -10$

$\Delta f_1 = \frac{15-20}{3-2} = -5$

$\Delta f_2 = \frac{12-15}{4-3} = -3$ κ.ο.κ.

Το πολυώνυμο παρεμβολής με προς τα εμπρός διαφορές Newton είναι:

$$P_3(x) = f_0 + \binom{\theta}{1}\Delta f_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{\theta}{3}\Delta^3 f_0$$

$$= f_0 + \frac{\theta!\ \Delta f_0}{1!(\theta-1)!} + \frac{\theta!}{2!(\theta-2)!}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta!}{3!(\theta-3)!}\Delta^3 f_0$$

$$= f_0 + \theta \cdot \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{6}\Delta^3 f_0$$ κι αφού $\theta = x-1$

$$= 30 + (x-1)\cdot(-10) + \frac{(x-1)(x-2)}{2}\cdot 5 + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}(-3)$$

$$= \dots = -\frac{x^3}{2} + \frac{11}{2}x^2 - 23x + 48$$

$$P_3(2.5) = -\frac{(2,5)^3}{2} + \frac{11}{2}(2,5)^2 - 23\cdot(2,5) + 48 = 17.0625$$

ii) Αντίστοιχα εργαζόμενα, προκύπτει ο αντίστοιχος πίνακας:

i	x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	1	30				
			-10			
1	2	20		5		
			-5		-3	
2	3	15		2		2
			-3		-1	
3	4	12		1		
			-2			
4	5	10				

και το πολυώνυμο:

$$P_4(x) = f_0 + \binom{\theta}{1}\Delta f_0 + \binom{\theta}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{\theta}{3}\Delta^3 f_0 + \binom{\theta}{4}\Delta^4 f_0$$

$$= P_3(x) + \frac{\theta!}{4!(\theta-4)!}\Delta^4 f_0$$

$$\Rightarrow p_4(x) = p_3(x) + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}\,2 =$$

$$= -\frac{x^3}{2} + \frac{11}{2}x^2 - 23x + 48 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{35}{12}x^2 - \frac{25}{6}x + 2$$

$$= \frac{1}{12}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{101}{12}x^2 - \frac{163}{6}x + 50$$

$$p_4(2.5) = \frac{1}{12}(2,5)^4 - \frac{7}{6}(2,5)^3 + \frac{101}{12}(2,5)^2 - \frac{163}{6}(2,5) + 50 = 17.1093$$

β) i) Σχηματίζουμε τον πίνακα

i	x_i	$f(x)$	1ης τάξης	2ης τάξης
0	1	30	-7.5	1,5
2	3	15	-3	
3	4	12		

$$f[x_0,x_2] = \frac{15-30}{3-1} = -\frac{15}{2} = -7.5$$

$$f[x_2,x_3] = \frac{12-15}{4-3} = -3$$

$$f[x_0,x_2,x_3] = \frac{3-(-7.5)}{3-0} = \frac{4.5}{3} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Προκύπτει το πολυώνυμο:

$$p_2(x) = f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_2] + (x-x_0)(x-x_2)f[x_0,x_2,x_3] = 30 + (x-1)(-7,5) + (x-1)(x-3)(1,5)$$

άρα $p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{27}{2}x + 42$ και $p_2(2,5) = 17,625$

ii) Σχηματίζουμε τον πίνακα:

i	x_i	f_i	1ης τάξης	2ης τάξης	3ης τάξης
0	1	30	-7,5	1,5	-0,25
2	3	15	-3	0,5	
3	4	12	-2		
4	5	10			

Αντίστοιχα εργαζόμενοι βρίσκουμε ότι το πολυώνυμο $p_3(x)$ έχει τύπο

$$p_3(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{73}{4}x + 45.$$

Συνεπώς, η ζητούμενη προσέγγιση είναι $p_3(2,5) = 17,34375$.

γ) i) Το απόλυτο σφάλμα κάθε περίπτωσης είναι:

Για το α) i) $|f(2,5) - p_3(2,5)| = 0.0775$

ii) $|f(2,5) - p_4(2,5)| = 0.0307$

β) i) $|f(2,5) - p_2(2,5)| = 0.4850$

ii) $|f(2,5) - P_3(2,5)| = 0.20375$.

γ) ii) Το άνω φράγμα το απόλυτο σφάλματος κάθε περίπτωσης είναι:

• $|R_4(2,5)| = \left| \frac{(2,5-1)(2,5-2)(2,5-3)(2,5-4)}{(3+1)!} \cdot f^{(4)}(\xi) \right|, \ \xi \in [1,5]$.

Είναι $f(x) = \frac{60}{x+1}$, $f'(x) = -\frac{60}{(x+1)^2}$, $f''(x) = \frac{120}{(x+1)^3}$, $f^{(3)}(x) = -\frac{360}{(x+1)^4}$

και $f^{(4)}(x) = \frac{1440}{(x+1)^5}$, $f^{(5)}(x) = -\frac{7200}{(x+1)^6}$.

Έστω $\xi = 2$. άρα $f^{(4)}(2) = \frac{1440}{(2+1)^5} \simeq 5.926$

Συνεπώς $|R_4(2,5)| = \left| \frac{1,5 \cdot 0,5 \cdot (-0,5) \cdot (-1,5)}{4!} \cdot 5,926 \right| \simeq 0,13889 < 0,1389$

• $|R_5(2,5)| = \left| \frac{(2,5-1)(2,5-2)(2,5-3)(2,5-4)(2,5-5)}{(4+1)!} \cdot f^{(5)}(\xi) \right|$ και αν $\xi = 2$ πάλι,

$|R_5(2,5)| \simeq 0,1157402 < 0,1157$

• $|\Psi_2(2,5)| = \left| \frac{(2,5-1)(2,5-3)(2,5-4)}{(2+1)!} \cdot f^{(3)}(\xi) \right| = 0,83325 < 0,8333$.

• $|\Psi_3(2,5)| = \left| \frac{(2,5-1)(2,5-3)(2,5-4)(2,5-5)}{(3+1)!} \cdot f^{(4)}(\xi) \right| = 0,69445 < 0,6945$

δ)

Άνω Φράγμα	0.1389	0.1157	0.8333	0.6945
Απόλυτο Σφάλμα	0.0775	0.0307	0.4850	0.20375

Γενικά το άνω φράγμα της εκάστοτε περίπτωσης είναι μεγαλύτερο του απόλυτου σφάλματος, όπως αναμένεται. Να σημειωθεί ότι εν δυνάμει, η αλλαγή στην επιλογή του ξ μπορεί να αλλάξει το φράγμα, είτε αυξάνοντας είτε μειώνοντάς το.

3.3| Σχηματίζουμε τον πίνακα: $(h=1)$

α)

i	x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
0	1	30			
			-10		
1	2	20		5	
			-5		-3
2	3	15		2	
			-3		
3	4	12			

Για 4 σημεία, $n=3$

$$f'(x) \simeq p_3'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\theta-1)\Delta^2 f_0 + \frac{1}{6}(3\theta^2-6\theta+2)\Delta^3 f_0\right]$$

i) Για το $f'(2)$, $\theta = \frac{x-x_0}{h} = \frac{2-1}{1} = 1$ άρα $f'(2) = (-10) + \frac{1}{2}(2-1)5 + \frac{1}{6}(3-6+2)(-3) = -7$

ii) Για το $f'(2,5)$, $\theta = \frac{2,5-1}{1} = 1,5$ άρα $f'(2,5) = (-10) + \frac{1}{2}(2\cdot 1,5-1)\cdot 5 - \frac{3}{6}(3\cdot(1,5)^2 - 6\cdot(1,5)+2)$
άρα $f'(2,5) = -4,875$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\cdot\left[\Delta^2 f_0 + (\theta-1)\Delta^3 f_0\right]$$

iii) Για το $f''(2)$, $\theta=1$, $f''(2) = \frac{1}{1^2}\left(5 + 0\cdot(-3)\right) = 5$

iv) Για το $f''(2,5)$, $\theta = 1,5$, $f''(2,5) = \frac{1}{1^2}\left(5 + (1,5-1)\cdot(-3)\right) = 5 - \frac{3}{2} = 3,5$

β) Το αριθμητικό σφάλμα σε κάθε περίπτωση υπολογίζεται παρακάτω.
Είναι, $f^{(2)}(x) = \frac{120}{(x+1)^3}$ αφού $f'(x) = -\frac{60}{(x+1)^2}$

Για το (i)

$$f'(2) = \frac{120}{3^3} \simeq 6,67 \quad \text{άρα} \quad \varepsilon'(2) = 7 - 6,67 = 0,33$$

Για το (ii), $f'(2,5) \simeq -4,8979$ άρα $\varepsilon'(2,5) = -0,0229$

Για το (iii), $f''(2) \simeq 4,45$ άρα $\varepsilon''(2) = 0,6$

Για το (iv), $f''(2,5) \simeq 2,79883$ άρα $\varepsilon''(2,5) = 2,79883 - 3,5 = -0,70117$

3.4| $I = \int_0^2 \frac{1}{x+3}dx$, $n=4$, $f(x) = \frac{1}{x+3}$, $a=0$, $b=2$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{2}$

Ξέρω ότι $x_i = a + i\cdot h = \frac{i}{2}$, $i = 0(1)4$ άρα έχουμε:

i	x_i	f_i
0	0	1/3
1	1/2	2/7
2	1	1/4
3	3/2	2/9
4	2	1/5

α) i) Σύνθετος κανόνας Τραπεζίου

$$I(f) \simeq \frac{h}{2}\left[f_0 + 2\sum_{i=1}^{3} f_i + f_4\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + 2\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{4}+\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{5}\right)$$

$$\simeq 0,5123 = T_4(f)$$

ii) Σύνθετος κανόνας Simpson

$$I(f) = S_4(f) = \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{3} + 2\sum_{i=1}^{\frac{4}{2}-1}(f_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{4}{2}}(f_{2i-1}) + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\left(\frac{2}{7}+\frac{2}{9}\right)+\frac{1}{5}\right)$$

$$\simeq 0,57751$$

iii) Σύνθετος κανόνας μέσου.

Γνωρίζουμε ότι $\int_a^b f(x)dx = 2h\sum_{j=0}^{n/2} f_{x_{2j}}$, $n=4$, $h=\frac{b-a}{n+2} = \frac{2-0}{4+2} = \frac{1}{3}$, $a=0$, $b=2$

και $x_i = a + (i+1)\cdot h = \frac{1}{3}(i+1)$, $i=-1,0,1,2,3,4,5$. και $f(x) = \frac{1}{x+3}$

Συνεπώς έχουμε

i	-1	0	1	2	3	4	5
x_i	0	$1/3$	$2/3$	1	$4/3$	$5/3$	2
$f(x_i)$	$1/3$	$3/10$	$3/11$	$1/4$	$3/13$	$3/14$	$1/5$

Άρα:

$$\int_0^2 \frac{1}{x+3}dx = 2\cdot\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{2} f(x_{2j}) = \frac{2}{3}\left(f(0)+f(2)+f(4)\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{4}+\frac{3}{14}\right)$$

$$= \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} \simeq 0,56952 = M$$

iv) Το αριθμητικό σφάλμα για την μέθοδο του Τραπεζίου είναι
$E_1 = I - T_4(f)$, όπου

$$I = \int_0^2 \frac{1}{x+3}dx = \log(5/3) \simeq 0,51083.$$

Άρα $E_1 = 0,51083 - 0,5123 = -0,00147$

Το αριθμητικό σφάλμα για την μέθοδο Simpson είναι
$E_2 = I - S_4(f) = 0,51083 - 0,57751 = -0,06668$.

Το αριθμητικό σφάλμα για την μέθοδο μέσου είναι
$E_3 = I - M = 0,51083 - 0,56952 = -0,05869$.

β) Ζητάμε $\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$

Για τον σύνθετο κανόνα τραπεζίου, έχουμε:

$E_n^T(f) = -\frac{b-a}{12}\cdot h^2 \cdot f''(\xi)$, $\xi \in [a,b]=[0,2]$. Η $f''(x)=\frac{2}{(x+3)^3}$ και $h=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}$

Οριακά, για το μέγιστο σφάλμα έχουμε $E^T_{n_{max}}(f) = -\frac{2-0}{12}\cdot\frac{2^2}{n^2}\cdot \max\{f''(x): x\in[0,2]\}$

Μελετώντας την $f''(x)$ παρατηρούμε ότι είναι φθίνουσα στο $[0,2]$

άρα $f''(0)=\frac{2}{3^3}=\frac{2}{27}=\max\{f''(x)\ x\in[0,2]\}$

Άρα $E^T_{n,max}(f) = -\frac{1}{6\cdot 3}\cdot\frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{2}{27} = -\frac{4}{81n^2} \le \varepsilon$ άρα έχουμε:

$$\left|-\frac{4}{81n^2}\right| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-5} \Rightarrow \frac{1}{n^2}\le \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}\cdot\frac{81}{4} \Rightarrow n^2 \ge \frac{8\cdot10^5}{81}$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{100000}}{\sqrt{81}} \simeq \frac{2\sqrt{5}\cdot 316.2278}{9}\simeq 121,572$$ άρα $n=122$ τουλάχιστον

Για τον σύνθετο κανόνα του Simpson, έχουμε

$E^S_{n,max}(f) = -\frac{h^4(b-a)}{180}\cdot f^{(4)}(\xi)$ με $f^{(4)}(\xi)=\max\{f^{(4)}(x)\ x\in[a,b]\}$

$b=2, a=0, h=\frac{2}{n}$ και $f^{(4)}(x)=\frac{24}{(x+3)^5}$ φθίνουσα άρα $f^{(4)}(\xi)=f^{(4)}(0)=\frac{24}{243}$.

Συνεπώς $E^S_{n,max}(f) = -\left(\frac{2}{n}\right)^4\frac{(2-0)}{180}\cdot\frac{24}{243} = \frac{192}{10.935\,n^4} = -\frac{64}{3645n^4}\le\varepsilon$

άρα $\left|-\frac{64}{3645}\ \frac{1}{n^4}\right| \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-5} \Rightarrow n^4 \ge \frac{2\cdot10^5\cdot 64}{3645} = 3511,6598$

άρα $n \ge 7,698$ δηλαδή τουλάχιστον $n=8$.

Για το σύνθετο κανόνα του μέσου, έχουμε

$E_n^M(f) = \frac{b-a}{6}\cdot h^2 f''(\xi)$, $\xi\in[a,b]$, $a=0, b=2$, $h=\frac{2}{n}$, $f''(\xi)=\max\{f''(x), x\in[0,2]\} = f''(0)=\frac{2}{27}$

Άρα $E^M_{n,max}(f) = \frac{2}{\cancel{6}\,3}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{27} = \frac{8}{81(n+2)^2}\le\varepsilon$

Όπως και πριν, προκύπτει με πράξεις ότι $n\ge 138,5456$ άρα $n=139$ τουλάχιστον.

3.5| $I(f)=\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{1}{2}f(x_0)+c_1 f(x_1)$ άρα της μορφής

$$I(f)=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \simeq \omega_0 f_0+\omega_1 f_1 \text{ με } x_0=0,\ x_1=1 \Rightarrow h=1,\ \omega_0=\frac{1}{2},\ \omega_1=c_1.$$

Ο τύπος πρέπει να'ναι ακριβής για $f(x)=1$ και $f(x)=x$.

- $\boxed{f(x)=1}$

$$\left.\begin{aligned} A&=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 1dx=1=h \\ B&=\frac{1}{2}f_0+c_1 f_1=\frac{1}{2}1+c_1 1 \end{aligned}\right\} \longrightarrow A=B \Rightarrow c_1=\frac{1}{2}.$$

- $\boxed{f(x)=x}$

$$A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}1=B$$ αληθές κι ισχύει.

Συνεπώς προκύπτει $I(f)=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\frac{h}{2}(f_0+f_1)$ που είναι ο κανόνας του τραπεζίου, ακριβής για πολυώνυμα το πολύ πρώτου βαθμού δηλ. τύπου $p(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Έστω $f(x)=k\cdot x$. Τότε είναι

$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2} \Rightarrow k\left[\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2} \Rightarrow k=1$. Άρα οι ζητούμενες τιμές των

c_1, x_0, x_1 για μέγιστη ακρίβεια είναι $c_1=\frac{1}{2}$, $x_0=0$, $x_1=1$. $(f(x)=x)$.

β) Γενικά ισχύει:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx=\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))+A\cdot f^{(2)}(\xi),\quad \xi\in(x_0,x_1).$$ Για το A:

$$\int_{x_0}^{x_1} x^2dx=\frac{h}{2}(x_0^2+x_1^2)+2A \Rightarrow \dots \Rightarrow A=-\frac{1}{12}=-\frac{h^3}{12}$$ αφού $h=1$.

(τιμή σφάλματος) $=A\cdot f^{(2)}(\xi)=-\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}$ (1) όμως $f(x)=x$, $f'(x)=1$, $f''(x)=0$ $\forall\,\xi\in(x_0,x_1)\subseteq\mathbb{R}$

Συνεπώς το σφάλμα είναι ίσο με μηδέν.

γ) Αφού το σφάλμα είναι ίσο με 0, ο βαθμός ακρίβειας είναι 1. (Για πολυώνυμα βαθμού ≤ 1. Αν βαθμός ≥ 2, τότε ο βαθμός ακρίβειας δίνεται από τον τύπο (1)).