Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
1ο Σύνολο Ασκήσεων

Ονομ/νυμο: Μανάβης Βασίλειος-Ιωάννης
Α.Μ.: 1115201000136

1)

1. $f(n) = o(g(n))$, δηλαδή $\forall c>0, \exists\ n_0>0 : f(n)<c\cdot g(n)\ \forall\ n>n_0\ (1)$ Θέλω να δείξω ότι υπάρχει c' τέτοιο ώστε $f(n)\leq c'\cdot g(n)\ \forall\ n>n_0$. Έστω ότι c = c'. Τότε θα έχω $f(n)\leq c\cdot g(n)$ το οποίο ισχύει λόγω της (1). Άρα $f(n)=O(g(n))$. Ισχύει η πρόταση.
2. $f(n) = O(g(n))\ και\ f(n) = \Omega(h(n))$, άρα
$\exists\ c>0\ , n_1>0 : cg(n)\geq f(n)\ (1)\ και\ \exists\ c'>0,\ n_2>0 : c'h(n)\leq f(n)\ (2)$ Από (1),(2) έχω
$c'h(n)\leq f(n)\leq cg(n)\ (3)$
Θέλω να δείξω ότι $\exists c_1, c_2\ και\ n_0>0 : 0<c_1 h(n)\leq g(n)\leq c_2 h(n)\ (4)$. Από (3) έχω
$\frac{c'}{c}h(n)\leq g(n)$ Έστω ότι c'/c = c_2. Άρα, $c_2 h(n)\leq g(n)$. ΑΔΥΝΑΤΟ λόγω (4) Άρα δεν ισχύει η πρόταση.

3. a) $f_1(n)=O(g_1(n))\ και\ f_2(n)=O(g_2(n))$ Επομένως,
$\exists\ c_1, c_2>0\ n_1, n_2>0 : c_1 g_1(n)\geq f_1(n)\ (1)\ και\ c_2 g_2(n)\geq f_2(n)(2)$
Από (1) + (2) έχουμε
$$\left.\begin{cases} f_1(n)\leq c_1 g_1(n) \\ + \\ f_2(n)\leq c_2 g_2(n)\end{cases}\right\} \Rightarrow f_1(n)+f_2(n)\leq c_1 g_1(n)+c_2 g_2(n)$$
Η πολυπλοκότητα της έκφρασης $c_1 g_1(n)+c_2 g_2(n)$ είναι $O(max\{c_1 g_1(n)+c_2 g_2(n)\})$
Άρα
$$f_1(n)+f_2(n)\leq max\{c_1 g_1(n)+c_2 g_2(n)\}\Rightarrow f_1(n)+f_2(n)=O(max\{g_1(n), g_2(n)\})$$
b)
$$\left.\begin{cases} f_1(n)\leq c_1 g_1(n) \\ x \\ f_2(n)\leq c_2 g_2(n)\end{cases}\right\} \Rightarrow f_1(n)\cdot f_2(n)\leq c_1 g_1(n) c_2 g_2(n) \underbrace{\Rightarrow}_{Θέτω\ c_3=c_1\cdot c_2} f_1(n)\cdot f_2(n)\leq c_3 g_1(n) g_2(n)$$
Επομένως $f_1(n) f_2(n)=O(g_1(n)\cdot g_2(n))$

4. $4n^2+5n-9 = \Omega(10n^2) \Rightarrow \exists\ c, n_0>0 : 10cn^2\leq 4n^2+5n-9\ \forall n>n_0 \Rightarrow$
$4n^2+(10c-4)n^2\leq 4n^2+5n-9 \Rightarrow (10c-4)n^2\leq 5n-9$ Έστω c=1/10. Άρα υπάρχει c>0 τέτοιο ώστε $4n^2+5n-9 = \Omega(10n^2)\ \forall n\geq 2$
5. Αρκεί να δείξω ότι $\log(n!)=O(nlogn)\ (1)\ και\ \log(n!)=\Omega(nlogn)(2)$
Θα δείξω το (1)
Θέλω να βρω σταθερά c>0 και n0>0 τέτοια ώστε
$$\log(n!)\leq cnlog\,n \underbrace{\Rightarrow}_{c=1} \log(n)+\log(n-1)+....+0\leq \underbrace{\log(n)+\log(n)+....+\log(n)}_{n\ φορές}\Rightarrow$$
$\log(n!)=O(nlog\,n)\ με\ n\geq 2$ Τώρα θα αποδείξω ότι log(n!)=Ω(nlogn).

Το log(n!) μπορώ να το γράψω ως εξής, με k περίπου ίσο με n/2:
$$\log(n!)=log1+log2+.........+\log k+\log(k+1)+.........+\log n \geq \log(k+1)+.........+\log n$$
$$\geq \underbrace{\log(k+1)+.........+\log(k+1)}_{n-k\approx n/2\ όροι} \underbrace{\geq}_{k\approx n/2} \frac{n}{2}\log(\frac{n}{2}+1)\approx\frac{n}{2}(\log n-\log 2)\geq\frac{n}{2}(\log n-\frac{1}{2}\log n)$$

$=\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{2}\log n=\frac{n}{4}\log n$ Οπότε για c=1/4 και n>2 ισχύει ότι $\log(n!)=\Omega(n\log n)$

6. Έστω ότι $f(n)=n^3$ *και* $g(n)=n$ Άρα, $min\{g(n), f(n)\} = n$ Έστω ότι ισχύει η πρόταση. Άρα $n^3+n = \Theta(n) \Rightarrow ΑΤΟΠΟ$
7. Έστω ότι $n+2\sqrt{n} = \Omega(n\sqrt{n})$ άρα $\exists c, n_0>0 : cn\sqrt{n}\leq n+2\sqrt{n} \Rightarrow cn\leq\sqrt{n}+2 \underbrace{\Rightarrow}_{c=1\ \text{και}\ n_0=9}$ $9\leq\sqrt{9}+2 \Rightarrow 9\leq 3+2=5 \Rightarrow ΑΤΟΠΟ$
8. $f(n)=o(g(n)) \Rightarrow \forall c>0\ \exists n_0>0 : cg(n)>f(n) \Rightarrow 2^{cg(n)}>2^{f(n)} \Rightarrow 2^{cg(n)}>2^{f(n)}$ άρα ισχύει η πρόταση
9. Έστω $f(n)=n,\ g(n)=n/2,$ *τότε* $f(n)=O(g(n))$ *για* $c=4,\ n_0=1$ Έστω ότι ισχύει η πρόταση. Θα έχουμε $2^{f(n)}=O(2^{g(n)})\Rightarrow\exists c, n_0>0 : 2^{f(n)}\leq c2^{g(n)}\Rightarrow f(n)\leq\log c+g(n)\Rightarrow$ $n\leq\log c+n/2\Rightarrow 2n\leq 2\log c+n\Rightarrow n\leq 2\log c\Rightarrow ΑΤΟΠΟ$
10. Έστω ότι $\omega(g(n))\cap o(g(n))\neq\emptyset$ Έστω $f(n)\in\omega(g(n))(1)$ *ΚΑΙ* $f(n)\in o(g(n))(2)$

    Από (1) ισχύει $\forall c>0\ \exists n_0>0 : f(n)>c\,g(n)(\mathbf{3})$
    Από (2) ισχύει $\forall c>0\ \exists n'_0>0 : f(n)<c\,g(n)(\mathbf{4})$
    Από (3),(4) ισχύει $g(n)<f(n)<g(n)\ \forall n\geq max\{n_{0,} n'_0\} \Rightarrow ΑΤΟΠΟ$

2)

1. $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n\cdot(n-1)(n-2)!}{2\cdot(n-2)!} = \frac{n^2-n}{2}$ Θα βρω c_1, c_2> 0 ώστε
   $c_1 n^2\leq \frac{n^2-n}{2} \leq c_2 n^2 \Rightarrow 2c_1 n^2\leq n^2-n \leq 2c_2 n^2 \Rightarrow 2c_1 n^2\leq n^2-n \leq 2c_2 n^2 \Rightarrow$
   $2c_1 n\leq n-1 \leq 2c_2 n$ Για c_1=1/4 & c_2=1/2 ισχύει $\forall\ n\geq 2$, άρα $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$
2. $2.n\log n=\Theta(n\log n)$ (Ανακλαστικότητα)
3. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \approx logn = \Theta(logn)$ (Ανακλαστικότητα)
4. $8n^2=\Theta(n^2)$
5. $\log\sqrt{\log n} = \frac{1}{2}\log(\log n) = \Theta(\log(\log n))$
6. $n!=\Theta(n!)$ (Ανακλαστικότητα)
7. $\log(\log n) = \Theta(\log(\log n))$
8. $n^{\log n} = \Theta(n^{\log n})$ (Ανακλαστικότητα)
9. $\log(n!) = \Theta(n\,logn)$ από 1.5
10. $4^{\log n} = 2^{2^{\log n}} = (2^{\log n})^2 = n^2 = \Theta(n^2)$ (Ανακλαστικότητα)
11. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \Theta(2^n)$
12. $2^{\log^2 n} = 2^{\log n\cdot\log n} = (2^{\log n})^{\log n} = n^{\log n} = \Theta(n^{\log n})$ (Ανακλαστικότητα)
13. $10^{100}=\Theta(1)$
14. $2^n = \Theta(2^n)$ (Ανακλαστικότητα)
15. $\log n = \Theta(\log n)$ (Ανακλαστικότητα)
16. $(\sqrt{2})^{\log n} = 2^{\frac{1}{2}\log n} = (2^{\log n})^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} = \Theta(\sqrt{n})$
17. $(n-1)! = \Theta((n-1)!)$ (Ανακλαστικότητα)
18. $\log n^n = n\,logn = \Theta(n\,logn)$ (Ανακλαστικότητα)
19. $5^{800} = \Theta(1)$

20. $5\sqrt{n} = \Theta(\sqrt{n})$

Άρα έχουμε τις εξής κλάσεις και τους εξής **εκπροσώπους** (οι εκπρόσωποι διακρίνονται από την έντονη γραμματοσειρά και είναι ήδη ταξινομημένοι κατά αύξουσα σειρά):

$\Theta(1) = \{\mathbf{5^{800}},\ 10^{100}\}$

$\Theta(\log(\log n)) = \{\boldsymbol{\log(\log n)},\ \log\sqrt{\log n}\}$

$\Theta(logn) = \left\{\boldsymbol{logn},\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}$

$\Theta(nlogn) = \{\boldsymbol{nlogn},\ logn^{n},\ \log n!\}$

$\Theta(\sqrt{n}) = \{\mathbf{5}\boldsymbol{\sqrt{n}},\ \sqrt{2}^{\log n}\}$

$\Theta(n^2) = \left\{\mathbf{8n^2},\ \binom{n}{2},\ 4^{logn}\right\}$

$\Theta(2^n) = \left\{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right\}$

$\Theta(n-1!) = \{\boldsymbol{(n-1)!}\}$

$\Theta(n!) = \{\boldsymbol{n!}\}$

$\Theta(n^{\log n}) = \{\boldsymbol{n^{\log n}},\ 2^{\log^2 n}\}$

3)

A.A.	**A**	**B**	**O**	**o**	**Ω**	**ω**	**Θ**
1	$\log^k n$	n^{ε}	NAI	NAI	OXI	OXI	OXI
2	n^k	c^n	NAI	NAI	OXI	OXI	OXI
3	2^n	$2^{n/2}$	OXI	OXI	NAI	NAI	OXI
4	$n^{\log c}$	$c^{\log n}$	NAI	OXI	NAI	OXI	NAI
5	$n!$	n^n	NAI	NAI	OXI	OXI	OXI

1. Παίρνοντας το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{\log^k n}{n^{\varepsilon}}=0$ καθώς το n^{ε} τείνει πιο γρήγορα στο άπειρο. Άρα για πολύ μεγάλα n, $\log^k n = o(n^{\varepsilon}) = O(n^{\varepsilon})$
2. Παίρνω το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{c^n}$ και εφαρμόζω τον κανόνα **de L'Hospital**. Μετά από k εφαρμογές του κανόνα έχω $\lim_{n\to\infty}\frac{k!n^0}{\ln^k c\cdot c^n} = \frac{k!}{\ln^k c}\cdot\frac{1}{c^n} = \frac{a}{c^n} = 0 \Rightarrow n^k = o(c^n) = O(c^n)$
3. Παίρνω το όριο $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{2^n}}$ και εφαρμόζω τον κανόνα **de L'Hospital**. Μετά από πολλές $k \in \mathbb{N}$ παραγωγίσεις έχω $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\ln^k 2}{\frac{\ln^k 2\cdot 2^{n/2}}{2^k}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2^k}{\sqrt{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+k}}{\sqrt{2^n}} = \infty$ γιατί ο αριθμητής απειρίζεται πολύ πιο γρήγορα από τον παρανομαστή. Άρα $2^n = \omega(2^{n/2}) = \Omega(2^{n/2})$
4. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\log c}}{c^{\log n}} = 1$ άρα $n^{\log c} = \Theta(c^{\log n})$. Ο υπολογισμός έγινε με τη βοήθεια του πακέτου WolframAlpha.
5. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$ άρα $n! = o(n^n)$ άρα και κατ' επέκταση $n! = O(n^n)$

4)

1.

$$T(n)=\sum_{i=1}^{4n}\sum_{j=1}^{n^2}\sum_{k=1}^{\lceil n/2\rceil}O(1)=O(1)\sum_{i=1}^{4n}\sum_{j=1}^{n^2}\sum_{k=1}^{\lceil n/2\rceil}1=O(1)\sum_{i=1}^{4n}\sum_{j=1}^{n^2}\left(\lceil n/2\rceil+1\right)=O(1)\sum_{i=1}^{4n}n^2\left(\lceil n/2\rceil+1\right)=$$

$$O(1)\,4n\cdot n^2\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)=O(1)\left(2n^4+4n^3\right)=O\left(n^4\right)$$

2.

$$T(n)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n\cdot i}\sum_{k=1}^{j}O(1)=O(1)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n\cdot i}j=O(1)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n\cdot i(n\cdot i+1)}{2}=\frac{O(1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left((n\cdot i)^2+n\cdot i\right)$$

$$=\frac{n\cdot O(1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(n i^2+i\right)=\frac{n\cdot O(1)}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}ni^2+\sum_{i=1}^{n-1}i\right)=\frac{n\cdot O(1)}{2}\left(n\sum_{i=1}^{n-1}i^2+\sum_{i=1}^{n-1}i\right)$$

$$=O(1)\frac{n}{2}\left(n\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right)+\frac{n^2-n}{2}\right)=O(1)\frac{n}{2}\left(\frac{2n^4-3n^3+n^2}{6}+\frac{3n^2-3n}{6}\right)$$

$$=O(1)\frac{n}{2}\left(\frac{2n^4-3n^3+2n^2-3n}{6}\right)=O(1)\cdot\left(\frac{2n^5-3n^4+4n^3-3n^2}{12}\right)=O\left(n^5\right)$$

5)

Η πιθανότητα να βρούμε το στοιχείο στις n – 2 πρώτες θέσεις είναι $\frac{1}{4(n-2)}$ ενώ για τη προτελευταία είναι 1/4 και για τη τελευταία είναι 1/2. Οπότε έχουμε

$$T(n)=\sum_{i=1}^{n}ip_i=\sum_{i=1}^{n-2}ip_i+(n-1)\,p_{n-1}+n\,p_n=p_i\sum_{i=1}^{n-2}i+(n-1)\,p_{n-1}+n\,p_n$$

$$=\frac{1}{4(n-2)}\,\frac{(n-2)(n-2+1)}{2}+\frac{1}{4}(n-1)+\frac{1}{2}n=\frac{n-1}{8}+\frac{1}{4}(n-1)+\frac{1}{2}n$$

$$=\frac{n}{8}+\frac{2n}{8}+\frac{4n}{8}-\frac{1}{8}-\frac{2}{8}=\frac{7n}{8}-\frac{3}{8}=O(n)$$