# Kapitel 1 Sandsynlighedsteori

## 1.1 Sandsynlighed

Sandsynligheden, når man kaster en terning, kan beskrives med følgende formel:

$$S = \{H, T\} \tag{1.1}$$

Dette kaldes udfaldsrummet, og der den værdi, der beskriver sandsynligheden, for $\frac{1}{n}$. Det er en endelig mængde, og kan omskrives til

$$S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \tag{1.2}$$

Når man vil finde udfaldet af $k$ elementer, i en liste med længden $n$, hvor man trækker tilfældige elementer, kan mange bruge binomialfordelinger. Når man regner binominialkoeficienter, findes der flere forskellige måder at udregne disse på.

| x | Uden gentagelser | Med gentagelser |
|---|---|---|
| Uden orden | $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ | $\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ |
| Med orden | $\frac{n!}{(n-r)!}$ | $r^n$ |

Her er $n$ mængden, og $k$ er antallet af elementer, som vi vil finde.

### 1.1.1 Kortspil

I et normalt deck af kort, findes der 52 kort, uden jokeren. Her kan man regne på, hvad sandsynligheden for at trække et bestemt kort er, ved at udregne permutationer, med ingen gentagelser. I følgende eksempel trækkes 4 kort.

$$\binom{52}{4} = C(52, 4) = \frac{52!}{4!(52-4)!} = 270,725 \tag{1.3}$$

Dette vil altså sige at der er en 277,725 mulige udfald, af de fire kort. For at finde sandsynligheden for at trække 4 Esser, kan man simpelt skrive $\frac{4}{52}$.

### 1.1.2 Lotto!

I et spil lotto udtrækkes der $r$ numre af $n$ tal. Hvis vi vil finde sandsynligheden for at det første tal er rigtigt, men resten er forkerte, kan vi bruge følgende formel:

$$\frac{\binom{r}{1} \cdot \binom{n-r}{r-1}}{\binom{n}{r}} \tag{1.4}$$

I et tilfælde hvor vi har med en mængde på 48 at gøre, og der hver gang trækkes 6 tal, kan vi skrive formlen som følgende:

$$\frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{42}{5}}{\binom{48}{6}} = \frac{212667}{511313} = 0.41592 \tag{1.5}$$

#### Monty Hall problemet

I et gameshow bedes en deltager om at vælge en af tre døre. Bag en af disse døre er der en præmie. Når deltageren har valgt en dør, åbner værten en dør, hvor præmien ikke er bag ved. Monty Hall problemet siger at hvis deltageren skifter dør, efter at værten har valgt, vil resultere i $\frac{2}{3}$ chance for at vinde præmien. Dette kan bevises matematiks ved følgende udtryk

$$P(A) = \frac{1}{3} \tag{1.6}$$

$$P(C|B\ tom) = P(A^c) = \frac{2}{3} \tag{1.7}$$

### 1.1.3 Terningekast

Hvis man kaster en terning, hvor siderne 2 og 4 er vægtede og dermed giver en 3 gange så høj chance som at kaste med de andre sider, kan formlen opskrives som følgende:

$$\begin{aligned}
P(2) + P(4) &= 3(P(1) + P(3) + P(5) + P(6)) \\
P(2) &= P(4) \\
2P(2) &= 12P(1) \\
P(2) &= 6P(1) \\
P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) &= 1 \\
16P(1) &= 1 \\
P(6) = P(5) = P(3) = P(1) &= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

## 1.2 Bayes Sætning

Hvis vi antager at vi ved hvad antallet af events er, kan vi med Bayes sætning, bestemme sandsynligheden, for et af samme events. Dette kan sidestilles med emails.

Vi ved hvor mange emails der er spam. Med dette kan vi bestemme sandsynligheden for at næste email er spam.

**Sætning 1 (Bayes Sætning)** *Antag at $E$ og $F$ er events fra vores sample $S$, således at $p(E) \neq 0$ og $p(F) \neq 0$. Så kan vi sige*

$$p(E|F) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E|F)p(F) + p(E|\overline{F})p(\overline{F})} \tag{1.8}$$

*Dette kan også omskrives til*

$$p(E|F) = \frac{E \cap F}{p(F)} \tag{1.9}$$

*Beviset for denne sætning skal skrives som følgende*

Bayes Baseform opskrives som

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E)} \tag{1.10}$$

I et tilfælde hvor vores $p(E) = \frac{1}{3}$, $p(F) = \frac{1}{2}$ og $p(E|F) = \frac{2}{5}$. Her vil vi finde $p(F|E)$.

$$\frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} = 0.6 \tag{1.11}$$

### 1.2.1 Betinget sandsynlighed

# Kapitel 2 Vektorer

Dette kapitel vil beskrive todimensionale vektorer som 2-vektorer, og tredimensionelle vektorer som 3-vektorer. Der vil blive brugt bracket notation for vektorer. Det er her fordelagtigt at introducere Det Euklidiske Rum.

**Definition 1 (Det Euklidiske Rum)** *Det Euklidiske Rum, nogle gange kaldet det Kartesianske rum, eller* **n***-rummet, er rummet, der indeholder alle n-tupler, af reelle tal* ($\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$)*.* $\mathbb{R}^n$ *er derfor et vektorrum, og betegnes også som n-vektorer. Derved har man at* $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$*,* $\mathbb{R}^2$ *er Den Euklidiske Plan.*

Det fremkommer af Det Euklidiske Rum, at en 4-vektor, kan skrives som $\mathbb{R}^4$. Dette er da Definition 1 siger, at n-vektorer, skal være $\mathbb{R}^n$.

**Definition 2 (Vektorer)** *En vektor er i geometrien et objekt, der er defineret ved at have en længde og en retning.*

## 2.1 Geometrien i sæt af vektorer

Dette afsnit har til formål at beskrive det geometriske aspekt af vektorer. Det vil dække spænding af vektorer.

### 2.1.1 Spændinger af vektorer over $\mathbb{R}$

$$\mathrm{Span}\{v\} = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \tag{2.1}$$

Ovenstående er et sæt, der kun indeholder lineære kombinationer, af en ikke-nul-vektor $v$. Hvis et tomt sæt af 2-vektorer skal beskrives, findes en vektor i sættet, en nul-vektor. Denne vektor er beskrevet som $[0, 0]$, i vektor notation.

Samtidig beskriver det ovenstående sæt også, at der for en 2-vektor, findes uendelig mange punkter i eksempelvis $\{\alpha[2,3] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, hvor vektoren kan

I en spænding af $\{[1,0],[0,1]\}$, er de to vektorer standard for $\mathbb{R}^2$, hvorved hver 2-vektor er i spændingen. Dette betyder at sættet indeholder alle punkter i Den Euklidiske Plan.

**Definition 3 (Generering af vektorer)** *Lad $V$ være et sæt af vektorer. Hvis $v_1, \ldots, v_n$ er vektorer, således at $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$*

# Kapitel 3 Definitioner og Beviser

## 3.1 Definitioner

**Definition 4 (S. 440, 1)** *Antag at $S$ er et sæt med $n$ elementer. Den uniforme fordeling, tildeler sandsynligheden $\frac{1}{n}$ for hvert element i $S$*

**Definition 5 (S. 440, 2)** *Sandsynligheden for en hændelse $E$ er summen af sandsynligheder, af udfaldet af $E$. Dette er*

$$p(E) = \sum_{s \in E} p(s) \tag{3.1}$$

*Bemærk at når $E$ er et uendeligt sæt, så er $\sum_{s \in E} P(s)$ en konvergent uendelig serie.*

**Definition 6 (SLIAL02, S. 9)** *Hvis vi har givet et sandsynlighedsfelt med udfaldsrum $S$ så siges $X$ at være en stokastisk variabel (random variable) hvis $X$ er en funktion med definitionsmængde $S$ og med værdier i $R$. Eksempel: Terningkast. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $p(i) = \frac{1}{6}$*

*Lad $X(i) = i$, for alle $i \in S$. Eksempel: $n$ uafhængige Bernoulli forsøg.*
*Lad $X(s)$ = antal succeser, hvor $s$ er en række af $n$ Bernoulli forsøg.*
*Middelværdien af denne kan udregnes ved følgende formel*

$$E(X) = \sum_{s \in S} p(s)X(s) \tag{3.2}$$

**Definition 7 (S. 442, 3)** *Lad e og F være hændelser med $p(F) > 0$. Den konditionale sandsynlighed af E, givet ved F, noteret med $p(E|F)$, er defineret som*

$$p(E|F) = \frac{p(E \cup F)}{p(F)} \tag{3.3}$$

**Definition 8 (S. 443, 4)** *Hændelserne E og F er uafhængige, hvis og kun hvis $p(E \cap F) = p(E)p(F)$*

**Definition 9 (S. 444, 5)** *Hændelserne $E_1, E_2, \ldots$ er parvis uafhængige, hvis og kun hvis $p(E_i \cap E_j) = p(E_i)p(E_j)$ for alle par af heltal i og j, hvor $1 \leq i \leq j \leq n$. Disse hændelser er gensidig uafhængige, hvis*

$$p(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_m}) = p(E_{i_1})p(E_{i_2}) \cdots p(E_{i_m}) \tag{3.4}$$

*når $i_j, j =, 1, 2, \ldots, m$ er heltal, hvor $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$ og $m \geq 2$.*

## 3.2 Beviser og sætninger

**Sætning 2 (S. 441, 1)** *Hvis $E_1, E_2, \ldots$ er en sekvens af parvis disjunkte hændelser i et sample rum S, så kan vi sige:*

$$p\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i p(E_i) \tag{3.5}$$

*Bemærk at denne sætning anvendes når sekvensen $E_1, E_2, \ldots$ består af en finit mængde af tal, eller en tællelig uendelig mængde af tal, der er parvis disjunkte hændelser*