L' INTEGRALE di CAMMINO di Feynman
(PATH INTEGRAL)

L'evoluzione di uno stato in M.Q. è dato, in accordo alla equaz. di Schrödinger, da

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle$$

dove H è l' HAMILTONIANA (e $\hbar = 1$)

Denotando con $|q\rangle$ l'autostato SIMULTANEO

$$Q_\alpha |q\rangle = q_\alpha |q\rangle \qquad \alpha = 1 \dots n$$

in termini delle coordinate $q = \{q_\alpha\}$ e degli operatori Q_α per un SISTEMA a più gradi di libertà, posso scrivere la FUNZIONE d'ONDA $\psi(q,t) = \langle q|\psi(t)\rangle$, in termini della quale l'evoluzione è formulata come

$$\psi(q',t') = \langle q'|\psi(t')\rangle = \langle q'|e^{-iH(t'-t)}|\psi(t)\rangle$$

$$= \int dq \, \langle q'|e^{-iH(t'-t)}|q\rangle\langle q|\psi(t)\rangle$$

$$\equiv \int dq \, G(q',t';q,t)\, \psi(q,t)$$

dove nella COMPLETEZZA devo intendere $dq = \prod_{\alpha=1}^{n} dq_\alpha$

Poiché $e^{-iH(t'-t)} = e^{-iH(t'-t'')} e^{-iH(t''-t)}$ vale per la funzione di Green G

$$G(q',t';q,t) = \langle q'| e^{-iH(t'-t'')} e^{-iH(t''-t)}|q\rangle$$

$$= \int dq'' \langle q'|e^{-iH(t'-t'')}|q''\rangle\langle q''|e^{-iH(t''-t)}|q\rangle$$

$$= \int dq'' \, G(q',t';q'',t'')\, G(q'',t'';q,t)$$

che è in un qualche senso il punto di partenza per arrivare al PATH INTEGRAL.

Notiamo poi che in termini della NOTAZIONE di HEISEMBERG

$$Q_\alpha(t) = e^{iHt} Q e^{-iHt} \qquad |q,t\rangle = e^{iHt}|q\rangle$$

$$Q_\alpha(t)|q,t\rangle = e^{iHt} Q e^{-iHt} e^{iHt}|q\rangle = q_\alpha |q,t\rangle$$

possiamo anche scrivere la Green function

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle$$

ed inserendo (al solito...) una COMPLETEZZA di autostati di H abbiamo

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \sum_n \langle q' | e^{-iH(t'-t)} | n \rangle \langle n | q \rangle$$

$$= \sum_n e^{-iE_n(t'-t)} \langle q' | n \rangle \langle n | q \rangle \qquad H|n\rangle = E_n |n\rangle$$

$$= \sum_n e^{-iE_n(t'-t)} \psi_n(q') \psi_n^*(q)$$

scritta in termini delle AUTOFUNZIONI di H $\quad \psi_n(q) = \langle q | n \rangle$

Ora decidiamo di procedere in <u>TEMPO IMMAGINARIO</u>

$$t \to -i\tau$$

$$t' \to -i\tau'$$

in termini del quale

$$\langle q', t' | q, t \rangle_{\substack{t \to -i\tau \\ t' \to -i\tau'}} = \langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle$$

$$= \sum_n e^{-E_n(\tau'-\tau)} \psi_n(q') \psi_n^*(q)$$

che è una espressione che osserviamo ammettere limite per $(\tau'-\tau) \to \infty$

Voglio ora valutare una espressione alternativa per $\langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle$.

Per fare questo partisco l'intervallo $[\tau, \tau']$ in N sottointervalli di ampiezza $\varepsilon = (\tau'-\tau)/N$ (dove $\varepsilon \to 0$ per $N \to \infty$), inserendo cioè tempi INTERMEDI $\quad \tau < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N-1} < \tau'$

Posso ora riscrivere

$$\langle q'|e^{-H(\tau'-\tau)}|q\rangle = \langle q'|e^{-H(\tau'-\tau_{N-1})}e^{-H(\tau_{N-1}-\tau_{N-2})}\dots e^{-H(\tau_1-\tau)}|q\rangle$$
$$= \langle q'|\underbrace{e^{-H\varepsilon}e^{-H\varepsilon}\dots e^{-H\varepsilon}}_{n \text{ volte}}|q\rangle$$

e inserendo (al solito...) completezze ottenere

$$\langle q'|e^{-H(\tau'-\tau)}|q\rangle = \int \prod_{\ell=1}^{N-1} dq^{(\ell)} \langle q'|e^{-H\varepsilon}|q^{(N-1)}\rangle\langle q^{(N-1)}|e^{-H\varepsilon}|q^{(N-2)}\rangle\dots\langle q^{(1)}|e^{-H\varepsilon}|q\rangle$$

dove (ricordiamolo) $\forall \ell \quad dq^{(\ell)} = \prod_{\alpha=1}^{n} dq_\alpha^{(\ell)}$

Ora $H = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{n} P_\alpha^2 + V(Q)$ (metto a 1 le masse...) con P_α momento coniugato a Q_α

Poiché faremo $\varepsilon \to 0$, posso trascurare i COMMUTATORI nella formula di Baker Campbell Hausdorff (BCH) e scrivere

$$e^{-\varepsilon H} \approx e^{-\varepsilon\frac{1}{2}\sum_\alpha P_\alpha^2} e^{-\varepsilon V(Q)}$$

il che mi consente di scrivere

$$\langle q^{(\ell+1)}|e^{-\varepsilon H}|q^{(\ell)}\rangle \approx \langle q^{(\ell+1)}|e^{-\frac{\varepsilon}{2}\sum_\alpha P_\alpha^2}|q^{(\ell)}\rangle e^{-\varepsilon V(q^{(\ell)})}$$

dove giova ricordare che P_α, Q_α sono OPERATORI mentre $q^{(\ell)}$ NUMERI!

Per eliminare ogni espressione che contiene operatori, considero gli autostati di MOMENTO $\quad P_\alpha|p\rangle = p_\alpha|p\rangle \quad$ con $\quad \langle q|p\rangle = \prod_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ip_\alpha q_\alpha}$

ed inserendo COMPLETEZZE di momento (plurale perché posso farlo $\forall \ell$...)

$$\langle q^{(\ell+1)}|e^{-\varepsilon H}|q^{(\ell)}\rangle \approx e^{-\varepsilon V(q^{(\ell)})}\int\prod_{\beta=1}^{n}\frac{dp_\beta^{(\ell)}}{2\pi}\prod_{\alpha=1}^{n} e^{-\varepsilon\left(\frac{1}{2}p_\alpha^{(\ell)2} - ip_\alpha^{(\ell)}\left(\frac{q_\alpha^{(\ell+1)}-q_\alpha^{(\ell)}}{\varepsilon}\right)\right)}$$

da cui posso riscrivere

$$\langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle \approx \int \prod_{\beta=1}^{n} \prod_{\ell'=1}^{N-1} dq_\beta^{(\ell')} \prod_{\ell=0}^{N-1} \frac{dp_\beta^{(\ell)}}{2\pi} \, e^{\overbrace{i p_\beta^{(\ell)} (q_\beta^{(\ell+1)} - q_\beta^{(\ell)})}^{*}} \, e^{-\varepsilon H(q^{(\ell)}, p^{(\ell)})}$$

dove $q^{(0)} = q \quad q^{(N)} = q'$ (e quindi la $*$ è ben definita $\forall \ell$ $_0^{N-1}$)

$$H(q^{(\ell)}, p^{(\ell)}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{2} p_\alpha^{(\ell)\,2} + V(q^{(\ell)})$$

in cui noto che ci sono $(N-1)$ integrazioni su coordinate e N su momenti.

Quest'ultime integrazioni le so fare: sono INTEGRALI GAUSSIANI!

Il risultato può essere scritto in modo rimarcabilmente semplice

$$\langle q' | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle \approx \int \prod_{\ell'=1}^{N-1} \prod_{\alpha=1}^{n} \frac{dq_\alpha^{(\ell')}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \, e^{-\sum_{\ell=0}^{N-1} \varepsilon L_E(q^{(\ell)}, \dot{q}^{(\ell)})}$$

dove emerge la LAGRANGIANA EUCLIDEA (discretizzata...)

$$L_E(q^{(\ell)}, \dot{q}^{(\ell)}) = \sum_\alpha \frac{1}{2} \dot{q}_\alpha^{(\ell)\,2} + V(q^{(\ell)})$$

(notare il SEGNO RELATIVO!)
potete convincervi del $- \to +$
in termini del TEMPO IMMAGINARIO!

avendo definito (solita derivata discretizzata...)

$$\dot{q}_\alpha^{(\ell)} \equiv \frac{q_\alpha^{(\ell+1)} - q_\alpha^{(\ell)}}{\varepsilon}$$

Non dimenticate infatti che gli APICI (ℓ) sono legati ad una DISCRETIZZAZIONE del TEMPO!

$$\tau < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_\ell < \dots < \tau_{N-1} < \tau'$$

ed ogni τ_ℓ è associato un $q^{(\ell)}$ $\qquad q_\alpha^{(\ell)} = q_\alpha(\tau_\ell)$

Dalla consueta relazione Lagrangiana/Azione vedo emergere la

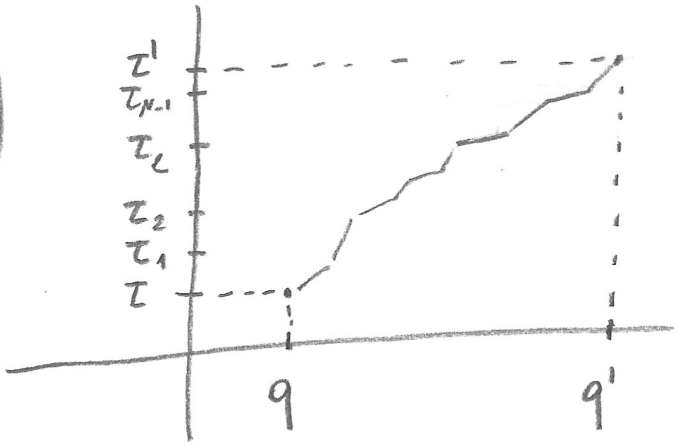
AZIONE EUCLIDEA

$$S_E[q] = \sum_{l=0}^{N-1} \varepsilon \Big[\overbrace{\sum_\alpha \tfrac{1}{2}(\dot q_\alpha(\tau_l))^2 + V(q(\tau_l))}^{L_E(q^{(l)}, \dot q^{(l)})} \Big]$$

che è (come atteso) associata ad una TRAIETTORIA (path...)

$q(\tau)$ che connette i punti dello SPAZIO TEMPO (q,τ) e (q',τ')

(NB questo è il τ generico, non il τ condizione iniziale...)

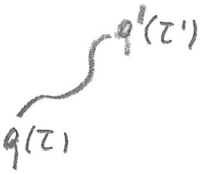


tale traiettoria è ovviamente a sua volta discretizzata.

Alla fine possiamo formalmente scrivere

$$\langle q',\tau' | q,\tau \rangle = \int_q^{q'} Dq \; e^{-S_E[q]}$$

dove integriamo su TUTTI i CAMMINI



estremi fissati nello spazio (ai tempi τ e τ')

il PESO $e^{-S_E[q]}$ associato a (ogni) cammino.

Ci aspettiamo il peso "concentrato" attorno a $\delta S_E[q] = 0$

traiettoria classica, stazionaria

ma ad ogni singolo PATH è associato un peso non-nullo.

Se tornassimo al tempo REALE, una procedura simile ci darebbe

$$\langle q' | e^{-iH(t'-t)} | q \rangle = \int_q^{q'} Dq \, e^{iS[q]}$$

i pesi sono ora FASI COMPLESSE

<u>NB</u> Perché la qualifica EUCLIDEO collegata al tempo IMMAGINARIO?

Se considero la METRICA dello SPAZIO TEMPO, nel prodotto scalare (e quindi nelle distanze...) $x_\mu x^\mu$ cambia SEGNO RELATIVO... le <u>NORME</u> sono <u>EUCLIDEE</u> (e non più MINKOWSKIANE...)

Che succede ora se faccio coincidere $q = q'$ ed integro su tutti i valori possibili di q? Ottengo qualcosa che ha la struttura di una

<u>FUNZIONE di PARTIZIONE</u>

$$Z = \int dq \, \langle q | e^{-HT} | q \rangle = Tr\left(e^{-HT}\right) = \int Dq \, e^{-S_E[q]}$$

dove chiamo $\tau' - \tau \Rightarrow T$ mentre nel PATH INTEGRAL stiamo INTEGRANDO su TUTTI i CAMMINI CHIUSI.

Una simile Z DEFINISCE una MECCANICA STATISTICA, con VALORI di ASPETTAZIONE

$$\langle A \rangle = \frac{Tr\left(A e^{-HT}\right)}{Tr\left(e^{-HT}\right)}$$

(<u>NB</u> $T \sim \beta$)

Ma chi è il NUMERATORE $\mathrm{Tr}(A e^{-HT})$? Facciamo un esempio:

$$A = Q_{\alpha_1}(\tau_*)\, Q_{\alpha_2}(0) \qquad \text{dove (come prima) } Q(\tau) = e^{H\tau} Q e^{-H\tau} \quad (!)$$

e τ_* è un dato TEMPO EUCLIDEO che prendo $\tau_* > 0$ [CI TORNEREMO SU...]

Ora $\mathrm{Tr}(A e^{-HT}) = \mathrm{Tr}(e^{-H\tau'} A e^{+H\tau})$ con $\tau' - \tau = T$ (come prima)

Ma allora al numeratore devo valutare $\mathrm{Tr}(e^{-H\tau'} A e^{H\tau}) = \int dq \langle q | e^{-H\tau'} Q_{\alpha_1}(\tau_*) Q_{\alpha_2}(0) e^{H\tau} | q \rangle$

E' facile mostrare che, inserendo ancora completezze, so calcolare

$$\langle q' | e^{-H\tau'} Q_{\alpha_1}(\tau_*)\, Q_{\alpha_2}(0)\, e^{H\tau} | q \rangle$$

τ_* e 0 si "piazzeranno" entro l'intervallo $[\tau', \tau]$ che discretizzo come prima (e posso sempre pensare di "passare per" τ_* e 0)

Cambia pochissimo nei conti (CONVINCETEVENE!) e otteniamo
(!)

$$\langle q' | e^{-H\tau'} Q_{\alpha_1}(\tau_*)\, Q_{\alpha_2}(0) e^{H\tau} | q \rangle = \int_q^{q'} Dq\, q_{\alpha_1}(\tau_*)\, q_{\alpha_2}(0)\, e^{-S_E[q]}$$

Ma allora $\quad \mathrm{Tr}(Q_{\alpha_1}(\tau_*) Q_{\alpha_2}(0) e^{-HT}) = \underbrace{\int Dq}_{\text{Somma su tutti i PATH chiusi}}\, q_{\alpha_1}(\tau_*)\, q_{\alpha_2}(0)\, e^{-S_E[q]}$

(NB Nelle formule del PATH INTEG. $q_{\alpha_2}(0)$ e $q_{\alpha_1}(\tau_*)$ sono NUMERI! L'ordine non conta!)

e alla fine

$$\langle Q_{\alpha_1}(0) Q_{\alpha_2}(\tau_*) \rangle = \frac{\mathrm{Tr}(Q_{\alpha_1}(\tau_*) Q_{\alpha_2}(0) e^{-HT})}{\mathrm{Tr}(e^{-HT})} = \frac{\int Dq\, q_{\alpha_1}(\tau_*)\, q_{\alpha_2}(0)\, e^{-S_E[q]}}{\int Dq\, e^{-S_E[q]}}$$

dove anche all'ultimo membro ho una struttura da Mecc. Statistica...

(!) ctr oltre...

Ma ora ci accorgiamo delle conseguenze del TEMPO IMMAGINARIO!

$$\langle A \rangle = \frac{\mathrm{Tr}(A e^{-HT})}{\mathrm{Tr}(e^{-HT})} \xrightarrow[T\to\infty]{} \langle 0 | A | 0 \rangle$$

PROIEZIONE sullo STATO di VUOTO

Infatti, considera l'espressione in termini del PATH INTEGRAL.

Al DENOMINATORE

$$\langle q, \tau' | q, \tau \rangle = \langle q | e^{-H(\tau'-\tau)} | q \rangle$$

$$= \sum_n e^{-E_n(\tau'-\tau)} \psi_n(q) \psi_n^*(q)$$

e dunque $\langle q, \tau' | q, \tau \rangle \xrightarrow[\tau'-\tau\to\infty]{} e^{-E_0(\tau'-\tau)} \psi_0(q) \psi_0^*(q)$

mentre al NUMERATORE (faccio lo stesso operatore... lo stesso esempio di prima...)

$$\langle q, \tau' | Q_{\alpha_1}(\tau_*) Q_{\alpha_2}(0) | q, \tau \rangle$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n,n'} \langle q | e^{-H\tau'} | n \rangle \langle n | Q_{\alpha_1}(\tau_*) Q_{\alpha_2}(0) | n' \rangle \langle n' | e^{H\tau} | q \rangle$$

$$\parallel$$

$$\sum_{n,n'} e^{-E_n \tau'} e^{E_{n'} \tau} \psi_n(q) \psi_{n'}^*(q) \langle n | Q_{\alpha_1}(\tau_*) Q_{\alpha_2}(0) | n' \rangle$$

$$\xrightarrow[\substack{\tau'\to\infty \\ \tau\to-\infty}]{} e^{-E_0(\tau'-\tau)} \psi_0(q) \psi_0^*(q) \langle 0 | Q_{\alpha_1}(\tau_*) Q_{\alpha_2}(0) | 0 \rangle$$

così che ancora $\tau'-\tau \to \infty$

Dunque

$$(\star)\qquad \frac{\langle q,\tau'|\,Q_{\alpha_1}(\tau_*)\,Q_{\alpha_2}(0)\,|q,\tau\rangle}{\langle q,\tau'|q,\tau\rangle} \xrightarrow[\substack{\tau'\to\infty \\ \tau\to-\infty \\ (\text{i.e. } \tau'-\tau\to\infty)}]{} \langle 0|Q_{\alpha_1}(\tau_*)\,Q_{\alpha_2}(0)|0\rangle$$

NB Noi eravamo partiti studiando (TRACCE)

$$\frac{\int dq\,\langle q|e^{-H\tau'}\,Q_{\alpha_1}(\tau_*)\,Q_{\alpha_2}(0)\,e^{H\tau}|q\rangle}{\int dq\,\langle q|e^{-H(\tau'-\tau)}|q\rangle} \qquad (+)$$

MA il risultato $(\star)$ NON ha DIPENDENZA da $|q\rangle$ ...

... da cui segue che anche $(+) \xrightarrow[\substack{\tau'\to\infty \\ \tau\to-\infty \\ (\tau'-\tau\to\infty)}]{} \langle 0|Q_{\alpha_1}(\tau_*)Q_{\alpha_2}(0)|0\rangle$

Torniamo ora a quello che (2 pagine indietro) avevamo marcato (in 2 diversi passaggi) (!) ... dicendo che ci saremmo ritornati su...

INNANZI TUTTO Abbiamo preso come esempio $A = Q_{\alpha_1}(\tau_*)\,Q_{\alpha_2}(0)$

con $\tau_* > 0$

I "teorici del 2° anno" avranno probabilmente riconosciuto in questa espressione il PRODOTTO T-ORDINATO

$$T\left(A(\tau_1)\,A(\tau_2)\right) = A(\tau_1)\,A(\tau_2)$$

per $\tau_1 > \tau_2$

Perché VOGLIAMO l'ORDINAMENTO $\tau_* > 0$?

Commentare questo ci fa dire qualcosa di più su quello per cui si era detto (CONVINCETEVENE) qualche pagina addietro...
(!)

Avevamo da valutare $\langle q| e^{-H\tau'} Q_{\alpha_1}(\tau_*) Q_{\alpha_2}(0) e^{H\tau} |q\rangle$

con $\tau_* > 0$

Dalla definizione di $Q(\tau) = e^{H\tau} Q e^{-H\tau}$ riscriviamo

$$\langle q| e^{-H(\tau'-\tau_*)} Q_{\alpha_1} e^{-H\tau_*} Q_{\alpha_2} e^{H\tau} |q\rangle$$

Ora entro $[\tau', \tau]$ le posizioni relative sono

$$\tau' \quad \ldots \quad \tau_* \quad \ldots \quad 0 \quad \ldots \quad \tau$$

(e cioè prendo $\tau < 0$... quel che conta è $\tau' - \tau > 0$, che sarà anzi $\tau' - \tau = T \gg 1$...)

Ora partizionerò come prima l'intervallo, facendo in modo che τ_* e 0 siano parte dei "tempi intermedi" (ricordate? quelli che avevamo segnato $\tau < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_\ell < \ldots < \tau_{N-1} < \tau'$
o $\tau' > \tau_{N-1} > \ldots > \tau_\ell > \ldots > \tau_2 > \tau_1 > \tau$)

Diciamo che sarà

$$\tau' > \tau_{N-1} > \ldots > \tau_{\ell_1+1} > \tau_{\ell_1} = \tau_* > \tau_{\ell_1-1} > \ldots > \tau_{\ell_2+1} > \tau_{\ell_2} = 0 > \tau_{\ell_2-1} > \ldots > \tau_1 > \tau$$

Ora inseriamo subito le completezze (sono solo 2...)

$$\langle q| e^{-H(\tau'-\tau_*)} Q_{\alpha_1} e^{-H\tau_*} Q_{\alpha_2} e^{H\tau} |q\rangle$$

$$\parallel$$

$$\int dq^{(\ell_1)} dq^{(\ell_2)} \langle q| e^{-H(\tau'-\tau_*)} Q_{\alpha_1} |q^{(\ell_1)}\rangle\langle q^{(\ell_1)}| e^{-H\tau^*} Q_{\alpha_2} |q^{(\ell_2)}\rangle\langle q^{(\ell_2)}| e^{H\tau} |q\rangle$$

$$\parallel$$

$$\int dq^{(\ell_1)} dq^{(\ell_2)} \langle q| e^{-H(\tau'-\tau_*)} |q^{(\ell_1)}\rangle q_{\alpha_1}^{(\ell_1)} \langle q^{(\ell_1)}| e^{-H\tau^*} |q^{(\ell_2)}\rangle q_{\alpha_2}^{(\ell_2)} \langle q^{(\ell_2)}| e^{H\tau} |q\rangle$$

ovvero

$$\int dq^{(\ell_1)} dq^{(\ell_2)} \underbrace{\langle q,\tau' | q^{(\ell_1)}, \tau_{\ell_1}=\tau_* \rangle}_{(1)} q_{\alpha_1}^{(\ell_1)} \underbrace{\langle q^{(\ell_1)}, \tau_{\ell_1}=\tau_* | q^{(\ell_2)}, \tau_{\ell_2}=0 \rangle}_{(2)} q_{\alpha_2}^{(\ell_2)} \underbrace{\langle q^{(\ell_2)}, \tau_{\ell_2}=0 | q,\tau \rangle}_{(3)}$$

Ora per ciascuna delle espressioni (1), (2) e (3) sappiamo come procedere... Inseriamo completezze ... etc...

Rispetto a tutta la procedura i 2 NUMERI $q_{\alpha_1}^{(\ell_1)}$ e $q_{\alpha_2}^{(\ell_2)}$ fanno "da spettatori" e tutto funziona come quando componevamo

$$G(q',\tau'; q,\tau) = \int dq'' \, G(q',\tau'; q'',\tau'') \, G(q'',\tau''; q,\tau)$$

Alla fine arriviamo all' integrale sui cammini

$$\langle q'| e^{-H\tau'} Q_{\alpha_1}(\tau_*) Q_{\alpha_2}(0) e^{H\tau} |q\rangle = \int_q^{q'} Dq \; q_{\alpha_1}(\tau_*) q_{\alpha_2}(0) e^{-S_E[q]}$$

come anticipato

Ritorniamo ora alla <u>PROIEZIONE sul VUOTO</u>

(come vi sarete accorti, la parentesi ha esteso quanto presentato a lezione)

Notare che la dimostrazione è semplice anche in termini della espressione

$$\langle A\rangle = \frac{Tr(A e^{-HT})}{Tr(e^{-HT})} = \frac{\sum_m \langle m|A e^{-HT}|m\rangle}{\sum_m \langle m|e^{-HT}|m\rangle} = \frac{\sum_m \langle m|A|m\rangle e^{-E_n T}}{\sum_m e^{-E_n T}} \xrightarrow[T\to\infty]{} \langle 0|A|0\rangle$$

Fermiamoci un attimo ... <u>COSA ABBIAMO IMPARATO?</u>

- Sia data una TEORIA $\rightleftarrows$ ovvero una $H(Q,P)$

- Se voglio calcolare un <u>valore di attesa sul vuoto</u> $\langle 0|A|0\rangle$...

- ... posso ottenerlo dalla PROIEZIONE

$$\langle A\rangle \xrightarrow[T\to\infty]{} \langle 0|A|0\rangle \quad \ldots$$

- ... dove $\langle A\rangle$ è un CALCOLO di MECCANICA STATISTICA

$$\langle A\rangle = \frac{\int Dq\, A(q)\, e^{-S[q]}}{\int Dq\, e^{-S[q]}} = \frac{1}{Z}\int Dq\, A(q)\, e^{-S[q]} \quad \ldots$$

- ... e la MECCANICA STATISTICA è quella definita da

$$e^{-S[q]} \sim e^{-\beta\mathcal{H}}$$

dove

$$\underset{(\sim e^{-\beta\mathcal{H}})}{S[q]} = \sum_{l=0}^{N-1} \varepsilon\, \underbrace{L_E(q^{(l)}, \dot q^{(l)})}_{\text{ben DEFINITA, NOTA che sia } H(Q,P)}$$

ATTENZIONE!

In $e^{-S[q]} \sim e^{-\beta \mathcal{H}}$ i GRADI di LIBERTA'
da cui dipende $S[q]$ (che posso "interpretare" come
una $\mathcal{H}$...) sono le $\{q^{(\ell)}\}$ dove originariamente l'apice
ℓ era associato a un TEMPO (per quanto immaginario...)
Questo ci dice che la TEORIA del problema di MECC. STAT.
è DIVERSA da quella originaria! Sostanzialmente abbiamo
"guadagnato una DIMENSIONE"! In altri termini, ℓ non è più un TEMPO!

NOTA per i TEORICI: si può procedere così anche in TEORIA
dei CAMPI. Funzioni di Green di una teoria dei CAMPI
d+1 dimensionale (dove 1 dim è il TEMPO) vengono calcolate
come OSSERVABILI (anche quelle FUNZIONI di CORRELAZIONE)
in una MECCANICA STATISTICA di un problema "ad una dimensione
spaziale in più" (in MECC. STAT. "il tempo non fa parte del problema")

ATTENZIONE!

La nostra SOLUZIONE è APPROSSIMATA! Ricordate?... BCH... La formula
del PATH INTEGRAL diventa ESATTA per $\varepsilon \to 0$! Quindi...

dovrò fare i conti per

$\varepsilon \to 0$ (limite CONTINUO nel tempo: i cammini "non sono più" ...)

$T \to \infty$ (proiezione sul VUOTO)