Qualche nota sull' OSCILLATORE ANARMONICO

1. Una prima osservazione: dobbiamo scegliere la forma della HAMILTONIANA

(a) PRIMA SCELTA NATURALE

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X^2 + \lambda X^4$$

$$\equiv H_0 + \lambda V_4$$

dove la interpretazione in termini del linguaggio della TEORIA delle PERTURBAZIONI è evidente: alla HAMILTONIANA IMPERTURBATA dell' OSCILLATORE ARMONICO (H_0) sommiamo la PERTURBAZIONE (ANARMONICA) λV_4.

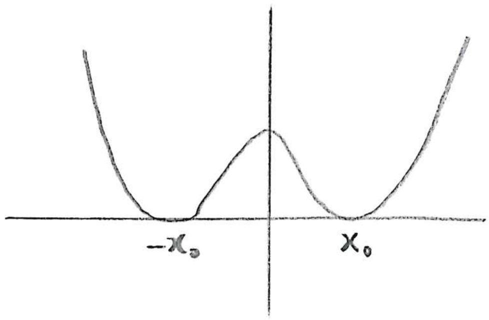
Questa è ovviamente la notazione in cui i risultati che otteniamo (NON PERTURBATIVI) possono essere confrontati con quelli della TEORIA delle PERTURBAZIONI. Quelli, per intenderci, che abbiamo visto si possono ottenere ad ALTI ORDINI PERTURBATIVI con il calcolo simbolico (Mathematica).

NB Noi abbiamo visto le correzioni ad E_0, ma il conto può essere generalizzato a E_n (gli interessati possono chiedermi...)

(b) Una seconda scelta è quella di scrivere

$$H = \frac{p^2}{2m} + \lambda (X^2 - x_0^2)^2$$

Questa scrittura è molto interessante: il potenziale è quello di una "doppia buca". cfr il profilo di $V(x) = \lambda(x^2 - x_0^2)^2$



(disegno bruttino ma chiaro...)

Le due soluzioni classiche a minima energia non vedono la particella ferma in un singolo minimo del potenziale (che nell'oscillatore armonico $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$ è in $x=0$), ma in una delle due soluzioni $V(\pm x_0) = 0$.

Cosa c'entra questo potenziale con la interpretazione di una perturbazione sommata a quello dell'oscillatore armonico?

Nota che se esplicito $V = \lambda(x^2 - x_0^2) = -2\lambda x_0^2 x^2 + \lambda x^4 + \lambda x_0^4$

ottengo
- un potenziale quartico λx^4 come prima...
- un termine costante (e quindi che non cambia sostanzialmente le cose...) λx_0^4
- un potenziale quadratico $-2\lambda x_0^2 x^2$ che NON posso interpretare come $\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = V_0(x)$ per via del SEGNO $-$!

Il punto è che se voglio riconoscere un oscillatore armonico e una perturbazione ad esso sommata devo riscrivere in termini di <u>fluttuazioni attorno ad uno dei due vuoti in $\pm x_0$</u>, ad esempio

$$x = x_0 + \xi \longrightarrow \quad x - x_0 = \xi$$

$$x^2 - x_0^2 = (\xi + x_0)^2 - x_0^2$$

$$= \xi^2 + 2\xi x_0$$

e dunque $\lambda (x^2 - x_0^2)^2 = \lambda (\xi^2 + 2\xi x_0)^2$

$$= 4\lambda x_0^2 \xi^2 + 4\lambda x_0 \xi^3 + \lambda \xi^4$$

dove ora posso leggere $4\lambda x_0^2 \xi^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \xi^2$ owero la ω^2 dell'oscillatore imperturbato è $\omega^2 = \dfrac{8\lambda x_0^2}{m}$ (che è una legittima ω^2)

<u>NB</u> Il potenziale di perturbazione non è ora puramente quartico, come atteso guardando al profilo del potenziale e confrontandolo con quello del caso (a)...

- La scelta (b) è molto interessante e deve essere la vostra prima scelta, anche se i più volenterosi potranno sondare anche (a) e confrontare i risultati con quelli della Teoria delle Perturbazioni.

2. A proposito del calcolo dell' ENERGY GAP

Abbiamo visto che la proiezione sullo stato di vuoto ci restituisce...

(misura in Mecc. Stat.) $\qquad$ (VEV quantistico)

$$\langle x_i x_0 \rangle \cdots \xrightarrow[T\to\infty]{} \langle 0|Q(\tau)Q(0)|0\rangle$$

Esplicitamente
$$\begin{aligned}\langle 0|Q(\tau)Q(0)|0\rangle &= \langle 0|e^{H\tau}Q\,e^{-H\tau}Q|0\rangle \\ &= e^{E_0\tau}\langle 0|Q\,e^{-H\tau}Q|0\rangle \\ &= \sum_n e^{E_0\tau}\langle 0|Q e^{-H\tau}|n\rangle\langle n|Q|0\rangle \\ &= \sum_n e^{-(E_n-E_0)\tau}|\langle 0|Q|n\rangle|^2\end{aligned}$$

solita completezza...

Per l'oscillatore armonico SOLO $n=1$ CONTRIBUISCE, ma il caso dell' OSCILLATORE ANARMONICO ci dà comunque una

REGOLA di SELEZIONE $\qquad \boxed{n = 2K+1}$ (regola di PARITA')

Infatti
$$\left[\begin{array}{l}|0\rangle \text{ é PARI} \\ |n\rangle \text{ ha la PARITA' di } n \begin{cases} n=2K \\ n=2K+1\end{cases} \\ Q \text{ é DISPARI}\end{array}\right.$$

ma allora ho un RISULTATO $|\langle 0|Q|n\rangle|^2 \neq 0$ solo per $n=2K+1$ (PARI DISPARI DISPARI é complessivamente PARI)

$$\langle 0| \quad Q \quad \underset{2K+1}{\underset{\parallel}{|n\rangle}}$$